Универзитет у Београду

Електротехнички факултет

Вероватноћа и статистика

- 13Е082ВИС -

Извештај за домаћи задатак

Задатак 2:Парадокс бацања коцки

Студент: Драгана Нинковић

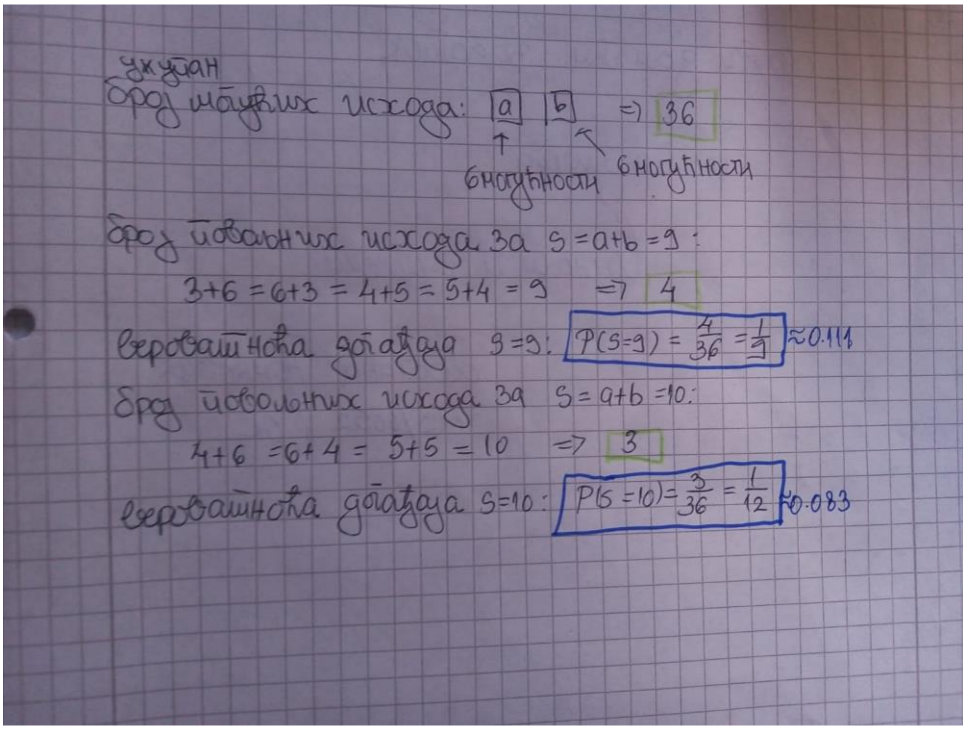
Број индекса: 2019/0052

Смер: ОС

1.Увод у парадокс бацања коцки

До почетка 17. Века многе математичаре је мучила загонетка везана за вероватноћу појављивања збира 9 и 10 при бацању две и три хомогне коцке. Наиме, када бацамо две коцке и гледамо збир бројева које смо на њима добили очекивано је да ће се збирови 9 и 10 појављивати једнако често с обзиром да наизглед постоје по две могућности за добијање ових збирова 4+5=6+3=9 и 5+5=4+6=10. Слично за бацање 3 коцке наизглед постоји по 6 могућности да се добију и збир 9 и збир 10. Ипак, експериментално се утврђује да се збир 9 много чешће појављује од збира 10 при бацању 2 коцке док се при бацању 3 коцке добија сасвим супротно. Почетком 17. Века Галилео Галилеј решава овај парадокс увидевши да није добро дефинисан скуп једнаковероватних елементарних догађаја јер је вероватније да се добије збир два броја која су различита јер се он може добити на два начина (први+други и други+први) док се збир два иста броја може добити само на један, па је самим тим дупло мање вероватан. Аналогно важи и за бацање три коцке што ћемо детаљније видети у наставку

2.Теоријска анализа проблема



укупан
број могућих исхода: $\boxed{a}\ \boxed{б} \Rightarrow 36$

6 могућности 6 могућности

број повољних исхода за $S = a+b = 9$:

$3+6 = 6+3 = 4+5 = 5+4 = 9 \Rightarrow 4$

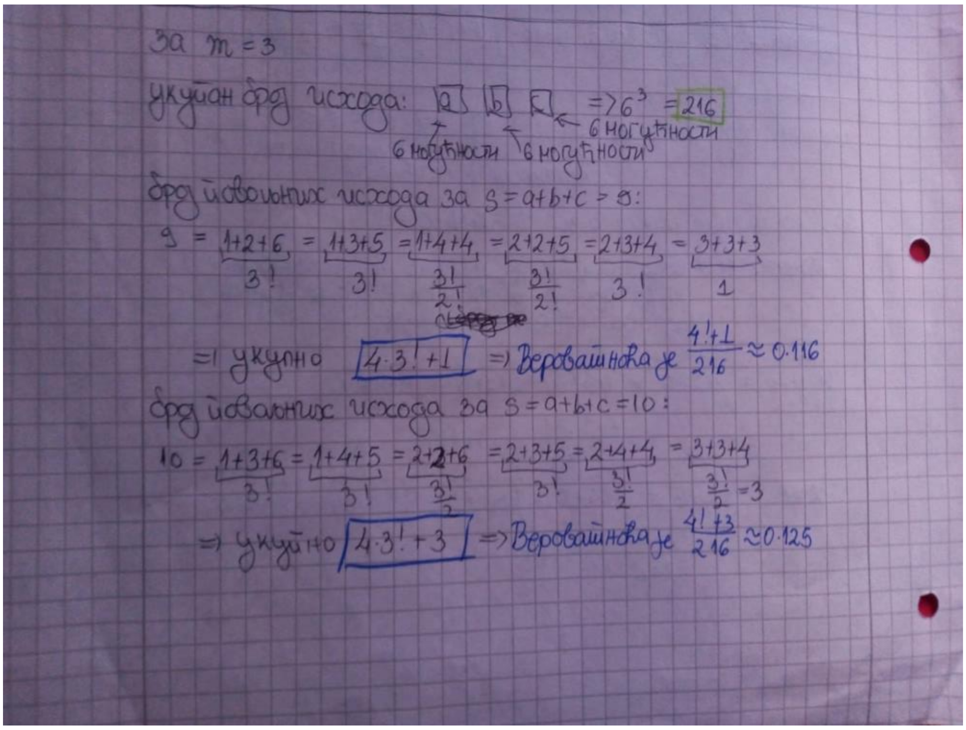
вероватноћа догађаја $S=9$: $\boxed{P(S=9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}} \approx 0.111$

број повољних исхода за $S = a+b = 10$:

$4+6 = 6+4 = 5+5 = 10 \Rightarrow 3$

вероватноћа догађаја $S=10$: $\boxed{P(S=10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}} \approx 0.083$

Слика 1: Теоријска анализа за m=2



за $m = 3$

укупан број исхода: $\boxed{a}\ \boxed{б}\ \boxed{c} \Rightarrow 6^3 = 216$

6 могућности 6 могућности 6 могућности

број повољних исхода за $S = a+b+c = 9$:

$9 = \underbrace{1+2+6}_{3!} = \underbrace{1+3+5}_{3!} = \underbrace{1+4+4}_{\frac{3!}{2!}} = \underbrace{2+2+5}_{\frac{3!}{2!}} = \underbrace{2+3+4}_{3!} = \underbrace{3+3+3}_{1}$

$\Rightarrow$ укупно $\boxed{4\cdot 3! + 1} \Rightarrow$ Вероватноћа је $\frac{4!+1}{216} \approx 0.116$

број повољних исхода за $S = a+b+c = 10$:

$10 = \underbrace{1+3+6}_{3!} = \underbrace{1+4+5}_{3!} = \underbrace{2+2+6}_{\frac{3!}{2}} = \underbrace{2+3+5}_{3!} = \underbrace{2+4+4}_{\frac{3!}{2}} = \underbrace{3+3+4}_{\frac{3!}{2}=3}$

$\Rightarrow$ укупно $\boxed{4\cdot 3! + 3} \Rightarrow$ Вероватноћа је $\frac{4!+3}{216} \approx 0.125$

Слика 2: Теоријска анализа за m=3

3.Експериментална анализа у програмском језику Пајтон

3.1 Симулација коцкица

Симулација n бацања m хомогених коцки се врши тако што генеришемо случајан вектор димензија n * m на интервалу (0,1). Затим, заменимо вредности вектора са бројевима из скупа {1, 2, 3, 4, 5, 6} тако што интервал (0,1) поделимо на 6 дисјунктних подинтервала једнаке дужине чија је унија тај интервал чиме обезбеђујемо да вероватноћа сваког од 6 догађаја буде једнако вероватна. Овим добијамо симулацију n бацања m хомогених коцки при чему се догађај i-тог бацања j -те коцке налази као dogadjaji[i,j].

```python
import numpy as np

def generisi_n_dogadjaja(n,m):

    dogadjaji=np.random.rand(n,m)
    print(dogadjaji)

    dogadjaji[np.where(np.logical_and(dogadjaji>1/6, dogadjaji<=2/6)) ]=2
    dogadjaji[np.where(np.logical_and(dogadjaji>2/6, dogadjaji<=3/6)) ]=3
    dogadjaji[np.where(np.logical_and(dogadjaji>3/6, dogadjaji<=4/6)) ]=4
    dogadjaji[np.where(np.logical_and(dogadjaji>4/6, dogadjaji<=5/6)) ]=5
    dogadjaji[np.where(np.logical_and(dogadjaji>5/6, dogadjaji<=6/6)) ]=6
    dogadjaji[dogadjaji<=1/6]=1;

    return dogadjaji;

def frekvencije(dogadjaji,n):
```

Слика 3:Код за бацање коцки

3.2 Налажење фреквенција

Фреквенције тражених догађаја добијамо тако што сумирамо број бацања у којима је сума бројева коцкица била 9 односно 10 и поделимо их са укупним бројем бацања за све појединачне n-ове. Очекујемо да ће са повећањем n наше фреквенције све више тежити теоријски израчунатим вероватноћама догађаја.

```
def frekvencije(dogadjaji,n,m):
    broj9=0;
    broj10=0;
    sum=0;
    for i in range(0,n):
        sum=0
        for j in range(0,m):
            sum +=dogadjaji[i][j];

        if(sum==9):
            broj9+=1;
        if(sum==10):
            broj10+=1;

    return(broj9/(n+0.0),broj10/(n+0.0));
```

Слика 4: Код за рачунање фреквенција

3.3 Резултати

Напомена: С обзиром на велики број бацања само за n=20 су приказана бацања коцкица док су за остала бацања приказане само тражене фреквенције

3.3.1 M=2

```
C:\Users\test4\Desktop\VIS>vis.py
Za n = 20
Bacanje 0 je:
( 5.0, 4.0 )
Bacanje 1 je:
( 3.0, 1.0 )
Bacanje 2 je:
( 2.0, 5.0 )
Bacanje 3 je:
( 5.0, 6.0 )
Bacanje 4 je:
( 4.0, 6.0 )
Bacanje 5 je:
( 3.0, 6.0 )
Bacanje 6 je:
( 2.0, 4.0 )
Bacanje 7 je:
( 2.0, 3.0 )
Bacanje 8 je:
( 4.0, 5.0 )
Bacanje 9 je:
( 6.0, 6.0 )
Bacanje 10 je:
( 5.0, 1.0 )
Bacanje 11 je:
( 6.0, 6.0 )
```

```
Bacanje 10 je:
( 5.0, 1.0 )
Bacanje 11 je:
( 6.0, 6.0 )
Bacanje 12 je:
( 1.0, 5.0 )
Bacanje 13 je:
( 1.0, 4.0 )
Bacanje 14 je:
( 3.0, 3.0 )
Bacanje 15 je:
( 2.0, 6.0 )
Bacanje 16 je:
( 2.0, 4.0 )
Bacanje 17 je:
( 6.0, 4.0 )
Bacanje 18 je:
( 4.0, 2.0 )
Bacanje 19 je:
( 6.0, 5.0 )
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.15
Frekvencija 10 je :0.1
#################################
```

Слика 5: Испис кода за n=20 m=2

Приметимо да смо збир 9 добили у бацањима 0,5 и 8, док смо збир 10 добили у бацањима 4 и 17 што одговара добијеним фреквенцијама, као и да је фреквенција 9 већа од фреквенције 10 али су обе доста различите од теоријски добијених вероватноћа.

```
######################################################
Za n = 36
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.1111111111111111
Frekvencija 10 je :0.08333333333333333
######################################################
Za n = 50
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.1
Frekvencija 10 je :0.08
######################################################
Za n = 72
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.09722222222222222
Frekvencija 10 je :0.05555555555555555
######################################################
Za n = 100
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.09
Frekvencija 10 je :0.13
######################################################
```

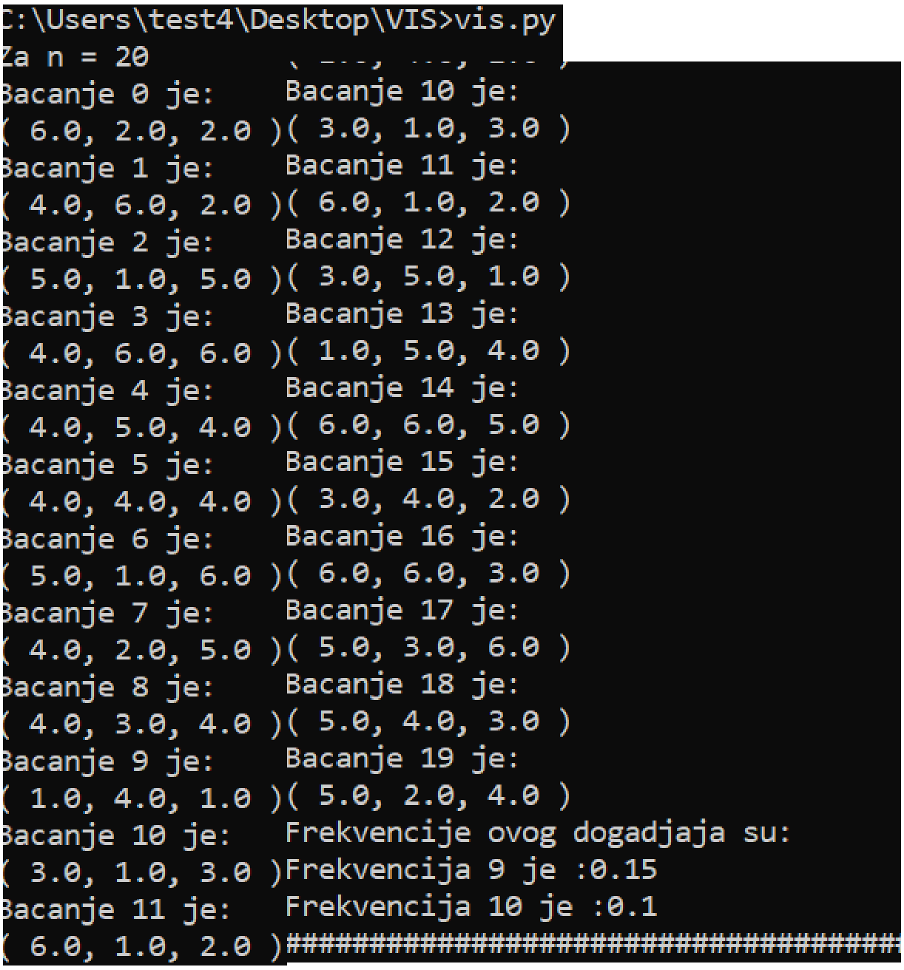
Слика 6: Испис кода за веће n, m=2

```
######################################################
Za n = 500
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.088
Frekvencija 10 je :0.086
######################################################
Za n = 1000
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.109
Frekvencija 10 je :0.073
######################################################
Za n = 10000
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.1091
Frekvencija 10 je :0.0831
######################################################
Za n = 100000
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.11191
Frekvencija 10 je :0.08461
######################################################
```

Слика 7: Испис кода за веће n, м=2

Као што можемо видети на сликама 6 и 7 што је већи број бацања то су фреквенције које добијамо сличније теоријски израчунатим вероватноћама толико да се у последњем експерименту вероватноћа суме 9 поклапа на 2(скоро 3) цифре за суму 10 чак на све три цифре.

3.3.1 М=3



```
C:\Users\test4\Desktop\VIS>vis.py
Za n = 20
Bacanje 0 je:
( 6.0, 2.0, 2.0 )
Bacanje 1 je:
( 4.0, 6.0, 2.0 )
Bacanje 2 je:
( 5.0, 1.0, 5.0 )
Bacanje 3 je:
( 4.0, 6.0, 6.0 )
Bacanje 4 je:
( 4.0, 5.0, 4.0 )
Bacanje 5 je:
( 4.0, 4.0, 4.0 )
Bacanje 6 je:
( 5.0, 1.0, 6.0 )
Bacanje 7 je:
( 4.0, 2.0, 5.0 )
Bacanje 8 je:
( 4.0, 3.0, 4.0 )
Bacanje 9 je:
( 1.0, 4.0, 1.0 )
Bacanje 10 je:
( 3.0, 1.0, 3.0 )
Bacanje 11 je:
( 6.0, 1.0, 2.0 )
```

```
Bacanje 10 je:
( 3.0, 1.0, 3.0 )
Bacanje 11 je:
( 6.0, 1.0, 2.0 )
Bacanje 12 je:
( 3.0, 5.0, 1.0 )
Bacanje 13 je:
( 1.0, 5.0, 4.0 )
Bacanje 14 je:
( 6.0, 6.0, 5.0 )
Bacanje 15 je:
( 3.0, 4.0, 2.0 )
Bacanje 16 je:
( 6.0, 6.0, 3.0 )
Bacanje 17 je:
( 5.0, 3.0, 6.0 )
Bacanje 18 je:
( 5.0, 4.0, 3.0 )
Bacanje 19 je:
( 5.0, 2.0, 4.0 )
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.15
Frekvencija 10 je :0.1
#######################################
```

Слика 8: Испис кода за n=20, м=3

```
######################################################
Za n = 36
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.08333333333333333
Frekvencija 10 je :0.1388888888888889
######################################################
Za n = 50
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.04
Frekvencija 10 je :0.08
######################################################
Za n = 72
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.09722222222222222
Frekvencija 10 je :0.1111111111111111
######################################################
Za n = 100
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.11
Frekvencija 10 je :0.12
######################################################
```

Слика 9: Испис кода за веће n, м=3

```
######################################################
Za n = 500
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.086
Frekvencija 10 je :0.124
######################################################
Za n = 1000
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.114
Frekvencija 10 je :0.145
######################################################
Za n = 10000
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.1111
Frekvencija 10 je :0.1316
######################################################
Za n = 100000
Frekvencije ovog dogadjaja su:
Frekvencija 9 je :0.11606
Frekvencija 10 je :0.1248
######################################################
```

Слика 7: Испис кода за веће n, м=3

Приметимо да смо овог пута за n=20 добили не само велико одступање од теоријски срачунате вероватноће већ и мању фреквенцију суме 10 од суме 9 што је супротно од очекиваног, али да се са повећањем n добијамо све тачнији резултат и да за n=100000 добијамо да се фреквенција и вероватноће поклапају на три цифре.