Correction des Exercices

Exercice n°1 : Constante de Rydberg

a) Montrer que pour l'atome d'hydrogène, le nombre d'onde correspondant à une transition d'un niveau n_i à un niveau n_j peut s'écrire : $\overline{v} = R_H(1/{n_i}^2 - 1/{n_j}^2)$

L'énergie d'un niveau stationnaire pour l'atome d'hydrogène (Z=1) est donnée par la formule de Bohr :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

où $E_0 = 13,6$ eV est l'énergie d'ionisation de l'hydrogène.

Lors d'une transition d'un niveau n_i à un niveau n_j, l'énergie échangée (absorbée ou émise) est :

$$\Delta E = E_j - E_i = -\frac{E_0}{n_j^2} - \left(-\frac{E_0}{n_i^2}\right) = E_0\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

Cette énergie est également liée à la fréquence v et à la longueur d'onde λ du rayonnement par la relation de Planck-Einstein :

$$\Delta E = hv = h\frac{c}{\lambda}$$

En égalisant les deux expressions de ΔE :

$$h\frac{c}{\lambda} = E_0\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

En divisant par hc :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

Le nombre d'onde $\overline{v}$ est défini comme $\overline{v} = \frac{1}{\lambda}$. La constante de Rydberg pour l'hydrogène R_H est définie comme $R_H = \frac{E_0}{hc}$. En substituant ces définitions, nous obtenons :

$$\overline{v} = R_H\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

Ceci démontre la formule demandée.

b) En utilisant la formule de Bohr déterminer l'expression de la constante de Rydberg pour l'hydrogène et montrer que sa dimension est l'inverse d'une longueur.

D'après la question précédente, l'expression de la constante de Rydberg pour l'hydrogène est :

$$R_H = \frac{E_0}{hc}$$

où :
- E_0 est l'énergie d'ionisation de l'hydrogène (dimension d'une énergie, [Joule]).
- h est la constante de Planck (dimension [Joule $\times$ seconde]).
- c est la vitesse de la lumière (dimension [mètre/seconde]).

Analysons la dimension de R_H :

$$[R_H] = \frac{[\text{Joule}]}{[\text{Joule} \times \text{seconde}] \times [\text{mètre/seconde}]} = \frac{[\text{Joule}]}{[\text{Joule} \times \text{seconde} \times \text{mètre} \times \text{seconde}^{-1}]} = \frac{[\text{Joule}]}{[\text{Joule} \times \text{mètre}]}$$

$$[R_H] = \frac{1}{[\text{mètre}]}$$

La dimension de la constante de Rydberg est bien l'inverse d'une longueur, ce qui est cohérent avec le fait qu'elle multiplie l'inverse d'un carré de nombre quantique pour donner un nombre d'onde (inverse d'une longueur).

Exercice n°2 : Formule de Rydberg et hydrogène

On utilisera les valeurs suivantes : $R_H = 1,097 \times 10^7$ m^{-1}, $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J.s, $c = 3 \times 10^8$ m/s, 1 eV $= 1,602 \times 10^{-19}$ J.

a) Calculer, à l'aide de la formule de Rydberg, la longueur d'onde du rayonnement que doit absorber l'électron de l'atome d'hydrogène pour passer du niveau fondamental au niveau $n = 2$ et du niveau fondamental au niveau $n = 3$.

Le niveau fondamental correspond à $n_i = 1$.

- **Transition du niveau fondamental ($n_i = 1$) au niveau $n_f = 2$:**

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) = 1,097 \times 10^7 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1,097 \times 10^7 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 1,097 \times 10^7 \times \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 8,2275 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{8,2275 \times 10^6} \approx 1,215 \times 10^{-7} \text{ m} = 121,5 \text{ nm}$$

- **Transition du niveau fondamental ($n_i = 1$) au niveau $n_f = 3$:**

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) = 1,097 \times 10^7 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1,097 \times 10^7 \left(1 - \frac{1}{9} \right) = 1,097 \times 10^7 \times \frac{8}{9}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 9,7511 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{9,7511 \times 10^6} \approx 1,025 \times 10^{-7} \text{ m} = 102,5 \text{ nm}$$

b) À quelle série ces transitions appartiennent-elles ?

Les transitions qui aboutissent au niveau fondamental ($n_f = 1$) appartiennent à la **série de Lyman**. Ces deux transitions (de $n = 1$ vers $n = 2$ et de $n = 1$ vers $n = 3$) sont des absorptions vers des niveaux excités, et puisque le niveau final est $n = 1$ (pour l'émission inverse), elles sont associées à la série de Lyman.

c) Calculer les valeurs d'énergie correspondantes en J et en eV.

L'énergie d'un niveau pour l'hydrogène est $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ eV.

— **Transition du niveau fondamental ($n_i = 1$) au niveau $n_f = 2$:**

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(-\frac{13,6}{2^2}\right) - \left(-\frac{13,6}{1^2}\right) = -3,40 \text{ eV} - (-13,6 \text{ eV})$$

$$\Delta E = 10,20 \text{ eV}$$

En Joules :

$$\Delta E = 10,20 \text{ eV} \times (1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 1,634 \times 10^{-18} \text{ J}$$

— **Transition du niveau fondamental ($n_i = 1$) au niveau $n_f = 3$:**

$$\Delta E = E_3 - E_1 = \left(-\frac{13,6}{3^2}\right) - \left(-\frac{13,6}{1^2}\right) = -1,511 \text{ eV} - (-13,6 \text{ eV})$$

$$\Delta E = 12,089 \text{ eV}$$

En Joules :

$$\Delta E = 12,089 \text{ eV} \times (1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = 1,936 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Exercice n°3 : Spectre d'absorption de l'Hydrogène - Transitions

Un atome d'hydrogène est dans son état fondamental ($n = 1$, $E_1 = -13,6$ eV). Nous allons calculer l'énergie des photons incidents et la comparer aux différences d'énergie entre les niveaux de l'hydrogène. Les niveaux d'énergie de l'hydrogène sont : $E_1 = -13,6$ eV $E_2 = -13,6/2^2 = -3,40$ eV ($\Delta E_{1\to 2} = 10,20$ eV) $E_3 = -13,6/3^2 = -1,51$ eV ($\Delta E_{1\to 3} = 12,09$ eV) $E_4 = -13,6/4^2 = -0,85$ eV ($\Delta E_{1\to 4} = 12,75$ eV) $E_5 = -13,6/5^2 = -0,54$ eV ($\Delta E_{1\to 5} = 13,06$ eV) $E_\infty = 0$ eV ($\Delta E_{1\to\infty} = 13,6$ eV, énergie d'ionisation)

1) Une radiation de longueur d'onde $\lambda = 121,2\ nm$

Calcul de l'énergie du photon :

$$E_{photon} = h\frac{c}{\lambda} = (6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s}) \times \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{121,2 \times 10^{-9} \text{ m}}$$

$$E_{photon} = 1,640 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Conversion en eV :

$$E_{photon} = \frac{1,640 \times 10^{-18} \text{ J}}{1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 10,237 \text{ eV}$$

Cette énergie est très proche de $\Delta E_{1\to2} = 10,20$ eV. **Comportement :** L'atome d'hydrogène **absorbe** cette radiation et l'électron passe du niveau fondamental ($n = 1$) au niveau excité $n = 2$.

2) Un photon d'énergie $1,83 \times 10^{-18} J$

Conversion en eV :

$$E_{photon} = \frac{1,83 \times 10^{-18} \text{ J}}{1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 11,423 \text{ eV}$$

En comparant cette énergie aux différences d'énergie possibles depuis le niveau fondamental : $\Delta E_{1\to2} = 10,20$ eV $\Delta E_{1\to3} = 12,09$ eV L'énergie du photon (11,423 eV) ne correspond à aucune transition permise depuis le niveau fondamental. **Comportement :** L'atome d'hydrogène **n'absorbe pas** ce photon et reste dans son état fondamental.

3) Une radiation de fréquence $3,085 \times 10^{15} Hz$

Calcul de l'énergie du photon :

$$E_{photon} = h \times v = (6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s}) \times (3,085 \times 10^{15} \text{ Hz})$$

$$E_{photon} = 2,044 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Conversion en eV :

$$E_{photon} = \frac{2,044 \times 10^{-18} \text{ J}}{1,602 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 12,759 \text{ eV}$$

En comparant cette énergie aux différences d'énergie possibles depuis le niveau fondamental : $\Delta E_{1\to2} = 10,20$ eV $\Delta E_{1\to3} = 12,09$ eV $\Delta E_{1\to4} = E_4 - E_1 = -0,85 - (-13,6) = 12,75$ eV L'énergie du photon (12,759 eV) correspond très bien à la transition du niveau $n = 1$ au niveau $n = 4$. **Comportement :** L'atome d'hydrogène **absorbe** cette radiation et l'électron passe du niveau fondamental ($n = 1$) au niveau excité $n = 4$.