Taller ecuaciones de diferencia

David Alexander Rativa Gutierrez

Mayo 28 2023

1. Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?

$$U_1 = V_o$$
$$U_n = \frac{1}{3}U_{n-1}, n > 1$$
$$U_2 = \frac{1}{3}U_1$$
$$U_3 = \frac{1}{3}U_2$$
$$U_n = K^{n-1}U_1, K = \frac{1}{3}$$

Para $U_n = (\frac{1}{1000000}V_0)$

$$\frac{V_0}{1000000} = \frac{1}{3}^{n-1}V_0$$
$$log(\frac{1}{1000000}) = (n-1)log(\frac{1}{3})$$
$$n = \frac{log1 - log10^6}{log1 - log3} + 1$$
$$n = 13.57$$

Después de 14 acciones habría menos de $V_0(10^{-6})$

2. Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuelvala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomara que la población alcance 750 millones?

$$U = Poblacion, n : Año, r : Tasa$$
$$1000(r) = 25, U_n = U_{n-1}(1+r)$$
$$r = \frac{1}{40} \; U_n = (1.025)^{n-1}, k = (1+r)$$

Para $n = 15, U_1 = 200(1000000)$

$$U_{13} = 1.025^{14} * 200 * 1000000$$
$$= 282.59x10^6 \text{ personas}$$

Para $U_1 = 200x10^6, U_n = 750x10^6$

$$150x10^6 = (1.025)^{n-1}200x10^6$$
$$log(\frac{750}{200}) = (n-1)log(1.025)$$
$$n = \frac{log750 - log200}{log1.025} + 1$$
$$n = 54.53$$

Después de 55 años habrán más de 750000000 de personas.

3. Resuelva:
- $u_n = 4u_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$
- $u_n = 3u_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$

$$U_n = 4U_{n-1} - 1, n \neq 2, k = 4, c = -1$$

De tal manera que $U_n = kU_{n-1} + C$. Entonces

$$U_n = k(kU_{n-2} + C) = k[k(kUn - 3 + C) + C] + C...$$
$$k^{n-1}U_1 + k^{n-2}C + ... + kC + C$$
$$k^{n-1}U_1 + C[k^{n-2} + k^{n-3} + ...1]$$

Para

$$\sum_{i=2}^{n} k^{n-i} = \frac{(k^{n-1} - 1)}{k - 1}, n \neq 2, k \neq 1$$

Caso base $n = 2$

$$\sum^{2} k^{n-i} = k^{2-2} = k^0 = 1$$

$$\frac{k^{2-1} - 1}{k - 1} = \frac{k - 1}{k - 1} = 1$$

Donde $1 = 1$, por lo que P_2 se cumple.
Caso inductivo
Sea $n \in \mathbb{Z}$ cualquiera, tal que $n \geq 2$ y P_n se cumple. Para cualquier $k \neq 1$

$$Pn + 1 = k^{n-1} + k^{n-2} + k^{n-3} + ... + 1$$
$$k^{n-1} + P_n, \text{ donde } P_n = \tfrac{k^{n-1}-1}{k-1}$$
$$k^{n-1} + (k^{n-1} - 1)/(k - 1)$$
$$\tfrac{k^{(n+1)-1} - k^{n-1} + k^{n-1} - 1}{k-1}$$
$$\tfrac{k^{(n+1)-1} - 1}{k-1}$$

De tal manera que P_{n+1} se cumple dado P_n
De tal modo que

$$U_n = k^n + U_1 + C\tfrac{k^{(n+1)-1}}{k-1}, \text{ reemplazando}$$
$$U_n = 4^{n-1}U_1 - \tfrac{1}{3}(4^{n-1} - 1)$$
$$U_n = 3U_{n-1} + 2, n \geq 2, k = 3$$
$$U_n = 3^{n-1}U_1 + 2(3^{n-1} - 1)$$

4. Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:
- $u_n + 4un - 1 + 3 = 0$, para $n \geq 1$
- $u_n + 2un - 1 - 13 = 0$, para $n \geq 1$

$$U_n = -4U_{n-1} - 3, n \geq 1$$

Siguiendo la demostración realizada en el punto anterior.

$$U_n = -4^{n-1}U_1 + \tfrac{3}{5}(-4^{n-1} - 1)$$
$$U_n = -2U_{n-1} + 13, n \geq 1$$

De manera similar

$$U_n = -2^{n-1}U_1 - \frac{13}{3}(-2^{n-1} - 1)$$

5. Encuentre las soluciones particulares para:
   - $u_n = 3u_{n-1} + 5$, para $n \geq 1 u_0 = 1$
   - $u_n = -2u_{n-1} + 6$, para $n \geq 2 u_1 = 3$

$$U_n = 3U_{n-1} + 5, n \geq 1$$

$U_0 = 1$ Esto implica que existe un término adicional para llegar al n-ésimo término con respecto a la fómula anteriormente obtenida.

$$U_n = 3^{n-1+1}U_0 + \frac{5}{2}(3^{n-1+1} - 1)$$
$$\frac{1}{2}[7(3^n) - 5]$$

6. Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157,...

$$U_1 = 7, U_2 = 17, U_3 = 37, U_4 = 77$$
$$U_2 - U_1 = 10, U_3 - U_2 = 20, U_4 - U_3 = 40$$
$$U_1 = 7$$
$$U_2 = U_1 + 2^0$$
$$U_3 = U_2 + 2^2(10)$$
$$U_4 = U_3 + 2^2(10)$$
$$U_n = U_{n-1} + 10(2^{n-2})$$
$$U_n = U_{n-1} + 5(2^{n-1}, n \geq 2)$$

Para hallar la solución general se hace lo siguiente

$$U_n = U_{n-1} + 5(2^{n-1})$$
$$(U_{n-2} + 5^{n-2} + 52^{n-1})$$
$$[(U_{n-3} + 51) + 52^{n-1}] + 52^{n-1}$$
$$U_1 + 5[2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1}]$$
$$U_n = U_1 + 5(2^n - 2)$$
$$7 + (5)(2)(2^{n-1} - 1)$$
$$U_n = 7 - 10[1 - 2^{n-1}], n \geq 2$$

7. Encuentre el pago mensual por un préstamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interés del 21% por año.

$U_0 = 400$ millones, $t = 3$ años, $i = 0,21$, x = Pago anual.

Para culminar el pago en 3 años, se tiene que $U_3 = 0$
Donde, $U_n = U_{n-1}(1 + i) - x$ (Interés compuesto)
Resolviendo para $k = 1.21$ y $C = -x$

$$U_n = (1.21)^n(400) - x\frac{(1.2)^n - 1}{0.21} \text{ con } n = 3$$
$$U_3 = 0 = (1.21)^3(400) - x\frac{(1.21^3 - 1)}{0.21}$$
$$x = \frac{(1.21)^3(400)}{(1.21^3 - 1}0.21$$
$$x = 192.87x10^6$$

Pagando 192.87 millones anuales se logra saldar la deuda en el año 3.

8. Una plantación de café incrementa su producción un 1% por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las ordenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes- ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años? La tasa de producción crece mes a mes

$$r_1 = 200(0.01), r_2 = [200(0.01)]0.01, r_3 = [200(0.01)(0.01)](0.01)$$
$$r_n = 200(0.1)n = 202n$$

Donde

$$202n - 1600 = 0, n = 7.92$$

Desde el mes 8, la producción supera las ordenes de 1600T esperadas. Por tanto, toda producción previa a este punto es 0 dado que el producto es menor que el máximo de lo que se puede vender. De tal manera que el café acumulado se puede calcular de la forma

$$U_n = (202n - 1600) + U_{n-1}, n \geq 8, u_7 = 0$$
$$U_n = U_{n-2} + [202n - 1 - 1600] + [202n - 1600]$$
$$U_7 - (n - 7)1600 + 202[3 + 9 + ... + n]$$

$$\sum_{i=8}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{7} i$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) - 23$$
$$U_n = U_7 - (n - 7)1000 + 202[\frac{1}{2}n(n+1) - 28]$$
$$U_n = 101(n^2 + n) - (n - 7)1600 - 5656$$

Para $n = 12$

$$U_{12} = 202[6(13) - 25] - 5(1600)$$
$$U_{12} = 10100 - 8000$$
$$U_{12} = 2100T$$

Para $n = 24$

$$U_{24} = 202[12(25) - 28] - 17(1600)$$
$$U_{24} = 27744T$$

9. La productividad en una plantación de 2000 arboles se incrementa 5% cada año por la implementación de mejores técnicas de agricultura. El granjero también planta además 100 arboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.

$$U_0 = 2000, U_n = U_{n-1}(1.05) + 100$$
$$U_n = (1.05)^n 2000 + \frac{100}{0.05}(1.05^n - 1)$$
$$U_n = 2000[(1.05)^n + 1.05^n - 1]$$
$$U_n = 2000[2(1.05)^n - 1]$$

Para $n = 10$

$$U_{10} = 2000[2(1.05)^n - 1]$$
$$U_{10} = 2000[2.258]$$
$$U_{10} = 4515$$

De modo que, para la productividad [P]

$$P = \frac{(U_{10} - U_0)}{U_0} * 120$$
$$P = 125.75\%$$

Hubo una mejora del 125.75% en la plantación.

10. Resuelva $U_n = 3U_{n1} + n$, para $U_1 = 5$

$$U_n = 3U_{n-1} + n, U_1 = 5, U_2 = 17$$
$$U_n = 3U_{n-1} = n \text{ Ecuación no homogénea de la forma } U_n = a + bn$$

Aplicando la solución homogénea

$$U_n - 3U_n = 0$$
$$m = \tfrac{3 \pm 3}{2} \text{ con } m_1 = 0, m_2 = 3$$
$$U_n = A3^n$$

Aplicando la solución particular

$$(a + bn) - 3[a + b(n-1)] = n$$
$$a - 3a + bn - 3bn + 3b = n$$
$$3b - 2(a + bn) = n$$
$$(3b - 2a) + (-2bn) = n$$
$$-2b = 1, b = \tfrac{1}{2}$$
$$3b - 2a = 0, 2a = \tfrac{-3}{2}, a = \tfrac{-3}{4}$$

De tal manera que

$$U_n = A(3^n)\tfrac{-3}{4} - \tfrac{-1}{2}$$
$$U_1 = 5 = A(3) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}$$
$$A = \tfrac{1}{3} * \tfrac{25}{4}$$
$$A = \tfrac{25}{12}$$
$$U_n = \tfrac{25}{12}(3^n) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}n$$

11. Encuentre la solución general para $U_n = U_n - 1 + 2^n$ y $U_n = 2un - 1 + n$

$$U_n = U_{n-1} + 2^n$$
$$U_n - U_{n-1} = 2^n$$

Ecuación no homogénea de la forma k^n donde $U_n = ak^n$

$$U_m - U_{m-1} = 0$$
$$m^2 - m = 0$$
$$m(m-1) = 0$$
$$m_1 = 0, m_2 = 1$$
$$U_n = A(1)^n = A$$
$$a2^n - a2^{n-1} = 2^n$$
$$a2^n[1 - 2^{-1}] = 2^n$$
$$a = 2$$
$$U_n = 2^{n+1} + A$$
$$U_n = 2U_{n-1} + n, \text{ no homogénea de la forma } n \text{ donde } U_n = a + bn$$
$$U_m - 2m - 1 = 0$$
$$m(m-2) = 0$$
$$m_1 = 0, m_2 = 2$$
$$U_n = A(2^n)$$
$$(a + bn) - 2(a + b(n-1) = n$$
$$a - 2a + bn - 2bn + 2b = n$$
$$(2b - a) + (-bn) = n$$
$$b = -1, 2b - a = 0, a = -2$$
$$U_m = A(2^n) - 2 - n$$

12. Si $u_n = ku_{n-1} + 5 \quad u_1 = 4$ y $u_2 = 17$ encuentre los valores de k y u_6. Dado que $U_1 = 4$ y $U_2 = 17$, se puede calcular k para U_2

$$U_2 = kU_1 + 5$$
$$U_2 = k(4) + 5$$
$$(17) = k(4) + 5$$
$$k = \frac{17-5}{4} = 3$$

Ahora, se calcula U_6 por medio de la propiedad vista en clase

$$U_6 = kU_5 + 5$$
$$U_6 = k^5 U_1 + \frac{5(k^5-1)}{k-1}$$
$$U_6 = 3^5(4) + \frac{5(3^5-1)}{3-1}$$
$$U_6 = 243(4) + \frac{5(242)}{2}$$
$$U_6 = 1577$$

Para comprobar esta propiedad se utiliza $U_1 = 4, U_2 = 17, k = 3$

$$U_n = kU_{n-1} + 5$$
$$U_3 = 3(17) + 5$$
$$U_3 = 56$$
$$U_4 = kU_3 + 5$$
$$U_4 = 3(56) + 5$$
$$U_4 = 173$$
$$U_5 = kU_4 + 5$$
$$U_5 = 3(173) + 5$$
$$U_5 = 524$$
$$U_6 = kU_5 + 5$$
$$U_6 = k3(524) + 5$$
$$U_6 = 1577$$

13. Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $U_n = \frac{U_{n1}}{U_{n2}}$, para $n \geq 2$, sujeto a la condición inicial $U_1 = \frac{1}{6}$.

$$U_n = \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \; U_2 = \frac{U_1}{U_0}$$

Dado que $U_1 = \frac{1}{6}$, se debe hallar U_0 para hallar U_2.
Si $n \geq 2$ es posible retroceder en la relación de recurrencia

$$U_1 = \frac{U_0}{U_n - 1}$$

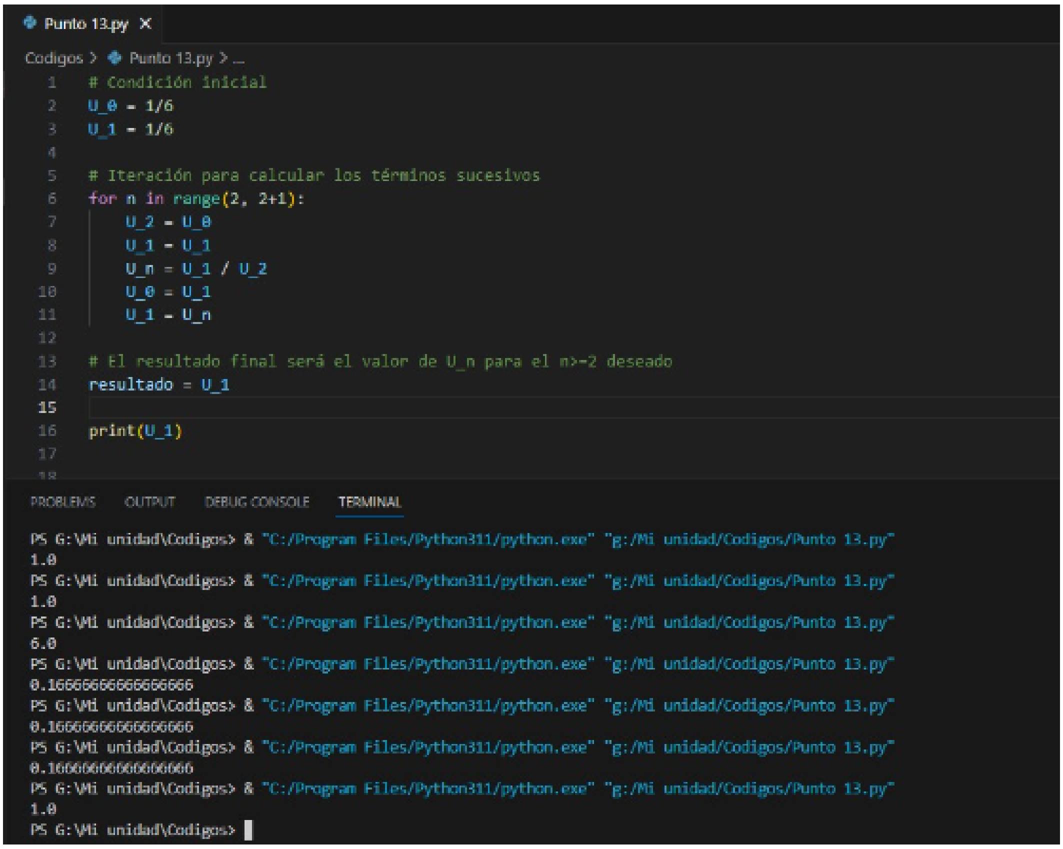
Despejamos U_0

$$U_0 = U_1(Un - 1)$$
$$U_0 = \frac{1}{6}(Un - 1)$$

Con los valores obtenidos es posible entonces hallar U_2

$$U_2 = \frac{U_1}{U_0}$$
$$U_2 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}(U_{n-1})$$
$$U_2 = \frac{1}{U_{n-1}}$$

De esta forma es posible calcular los valores para U_3 usando U_2 y U_1 y así sucesivamente. Comprobando por código en Python se obtiene lo siguiente:



```
Punto 13.py ×
Codigos > Punto 13.py > ...
# Condición inicial
U_0 = 1/6
U_1 = 1/6

# Iteración para calcular los términos sucesivos
for n in range(2, 2+1):
    U_2 = U_0
    U_1 = U_1
    U_n = U_1 / U_2
    U_0 = U_1
    U_1 = U_n

# El resultado final será el valor de U_n para el n>=2 deseado
resultado = U_1

print(U_1)
```

```
PROBLEMS   OUTPUT   DEBUG CONSOLE   TERMINAL

PS G:\Mi unidad\Codigos> & "C:/Program Files/Python311/python.exe" "g:/Mi unidad/Codigos/Punto 13.py"
1.0
PS G:\Mi unidad\Codigos> & "C:/Program Files/Python311/python.exe" "g:/Mi unidad/Codigos/Punto 13.py"
1.0
PS G:\Mi unidad\Codigos> & "C:/Program Files/Python311/python.exe" "g:/Mi unidad/Codigos/Punto 13.py"
6.0
PS G:\Mi unidad\Codigos> & "C:/Program Files/Python311/python.exe" "g:/Mi unidad/Codigos/Punto 13.py"
0.16666666666666666
PS G:\Mi unidad\Codigos> & "C:/Program Files/Python311/python.exe" "g:/Mi unidad/Codigos/Punto 13.py"
0.16666666666666666
PS G:\Mi unidad\Codigos> & "C:/Program Files/Python311/python.exe" "g:/Mi unidad/Codigos/Punto 13.py"
0.16666666666666666
PS G:\Mi unidad\Codigos> & "C:/Program Files/Python311/python.exe" "g:/Mi unidad/Codigos/Punto 13.py"
1.0
PS G:\Mi unidad\Codigos>
```

$$19^{19}(\mathrm{mod} 5)$$

14. Investigue el límite de $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ si $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$

$$U_n = U_{n-1} + 2Un - 2$$
$$U_n - Un - 1 - 2Un - 2 = 0$$
$$k = n-2, k+1 = n-1, k+2 = n$$
$$U_{k+2} - U_{k+1} - 2U_k = 0$$

Solución homogénea λ^k

$$\lambda^{k+2}\lambda^{k+1} - 2\lambda^k = 0$$
$$\lambda^k(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$
$$\lambda = 2, \lambda = -1$$
$$\frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{C_1(-1)^n + C_2(2)^n}{C_1(-1)^{n+1} + C_2(2)^{n+1}}$$
$$\frac{C_1(2)^n + C_2(-1)^n}{2C_2(2)^n + C_1(-1)^n} * \frac{(-1)^n}{(-1)^n}$$
$$\frac{C_2(-2)^n + C_1}{2C_2(-2)^n - C_1}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_2(-2)^n + C_1}{2C_2(-2)^n - C_1}$$

n puede ser par o impar.
$n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$

$n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}^+$
Si n tiende a ∞, entonces k tiende a ∞
Para n par

$$\lim_{k\to\infty} \frac{C_2(-2)^{2k}+C_1}{2C_2(-2)^{2k}-C_1} = \lim_{k\to\infty} \frac{C_2(4)^k+C_1}{2C_2(4)^k-C_1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}$$

Para n impar

$$\lim_{k\to\infty} \frac{C_2(-2)^{2k+1}+C_1}{2C_2(-2)^{2k+1}-C_1} = \lim_{k\to\infty} \frac{-2C_2(4)^k+C_1}{-4C_2(4)^k-C_1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}$$

Dado que se cumple para ambos casos, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

15. Encuentre el n-esimo termino de la siguiente secuencia: $-3, 21, 3, 129, 147, ...$

$$U_1 = -3, U_2 = 21, U_3 = 3, U_4 = 129, U_5 = 147$$

Cada U_n se puede expresar de la forma:

$$\begin{gathered} U_2 = 21 = (-1)^2(-3)^2 + 12 = (-1)^2(-3)^2 + (-1) * 2^2(-3) \\ U_3 = 3 = (-1)^3(-3)^3 + (-24) = (-1)^3(-3)^3 + (-1)^2 * 2^3(-3) \\ U_4 = 129 = (-1)^4(-3)^4 + (48) = (-1)^4(-3)^4 + (-1)^3 * 2^4(-3) \\ U_5 = 147 = (-1)^5(-3)^5 + (-96) = (-1)^5(-3)^5 + (-1)^4 * 2^5(-3) \end{gathered}$$

Por lo tanto, la ecuación que describe U_n para estos casos sería:

$$U_n = (-1)^n U_1^n + (-1)^{n-1} 2^n U_1$$

16. Resuelva $u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$, para $n \geq 3$ dado $u_1 = 10$ y $u_2 = 28$. Evalue u_6.

$$\begin{gathered} U_n - 6U_{n-1} + 8U_{n-2} = 0, n \geq 3, U_1 = 10, U_2 = 28 \\ m = 6 \pm \sqrt{4}/2, m_1 = 4, m_2 = 2 \\ U_n = A(4)^n + B(2)^n \\ U_n = 10 \\ 10 = A * 4 + B * 2 \\ B = 5 - 2A \\ B = 5 - 2 \\ B = 3 \\ U_2 = 28 \\ 28 - 20 = 8A \\ A = 1 \\ U_n = 4^n + 3(2^n) \end{gathered}$$

Para U_6

$$\begin{gathered} U_6) = 4^6 + 3(2v) \\ 4096 + 192 \\ 4288 \end{gathered}$$

17. Encuentre la solución particular para $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$, para $n \geq 1$, cuando $u_1 = -1, u_2 = -2$.

$$U_n + 2U_{n+1} + U_{n+2} = 0, n \geq 1, U_1 = -1, U_2 = -2$$
$$k = n + 2$$
$$k - 1 = n + 1$$
$$k - 2 = n$$
$$U_k + 2U_{k-1} + U_{k-2} = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$
$$m = -2 \pm \sqrt{4 - 4}/2$$
$$m = -2 \pm 0/2$$
$$m_1 = -1, m_2 = -1 \ U_k = A(-1)^k + Bk(-1)^k$$
$$U_{n+2} = A(-1)^{n+2} + B(n + 2)(-1)^{n+2}$$
$$U_n = A(-1)^n + Bn(-1)^n \ U_1 = -1$$
$$-2 = -A - B$$
$$B = 1 - A$$
$$B = 1 - 4$$
$$B = -3$$
$$U_2 = -2$$
$$-2 = A + 2B$$
$$A + 2 - 2A$$
$$-4 = -A$$
$$A = 4$$
$$U_n = 4(-1^n) - 3n(-1^n)$$

18. Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = f(n)$, cuando $f(n) = 2, f(n) = n, f(n) = 5^n$ y $f(n) = 1 + n^2$

$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = f(n)$$

Por la homogeneidad $[f(n) = 0]$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$
$$(m - 2)(m - 3) = 0$$
$$m_1 = 2, m_2 = 3$$
$$U_n = A2^n + B3^n = U_{ho}$$

-$f(n) = 2, U_n = a + bn$

$$(a + bn) - 5[a + b_{n-1}] + 6[a + b_(n - 2)] = 2$$
$$a - 5a + 6a + bn - 5bn + 6bn + 5b - 12b = 2$$
$$2a + 2bn - 7b = 2$$
$$2(a + bn) - 7b, a + bn = 1, a = 1$$
$$-7b = 0, b = 0$$
$$U_n = U_{ho} + 1$$

-$f(n) = n, U_n = a + bn$

$$2bn + 2a - 7b = n$$
$$2a - 7b = 0, 4a - 7 = 0, a = \frac{7}{4}$$
$$2b = 1, b = \frac{1}{2}$$
$$U_n = U_{ho} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}n$$

-$f(n) = 5^n, U_n = a5^n$

$$(a5^n) - 5(a5^{n-1}) + 6(a5^{n-2}) = 5^n$$
$$5^n(a)[1 - 1 + \frac{6}{25}] = 5^n$$
$$a * \frac{6}{25} = 1$$
$$a = \frac{25}{6}$$
$$U_n = U_{ho} + \frac{25}{6} * 5^n$$

-$f(n) = 1 + n^2, U_n = a + bn + cn^2$

$$(a + bn + cn^2) * 5[a + b(n-2) + c(n-1)^2] + 6[a + b(n-2) + c(n-2)^2] = (1 + n^2)$$
$$(2a + 2bn - b) + cn^2 = 5c(n-1)^2 + 6c(n-2)^2 = (1 + n^2)$$
$$2(n^2 + 19c) + cn^2 - c5n^2 + 10cn - 5c + 6cn^2 - 24cn + 24c = (1 + n^2)$$
$$2(n^2 + 19c) + 2cn^2 - 14cn + 14c = (1 + n^2)$$
$$2(n^2 + 19c) + (2a + 2bn - 7b - 14cn) = (1 + n^2)$$
$$2c[n^2 + 1] + 17c + (2a + 2bn - 7b - 14cn) = [n^2 + 1]$$
$$2c[n^2 + 1] + n[2b - 14c] + (17c + 2a - 7b) = [n^2 + 1]$$
$$2c = 1, c = \frac{1}{2}$$
$$2b - 14c = 0, 2b = 7, b = \frac{7}{2}$$
$$17c + 2a - 7b = 0, 17 + 4a - 7 * 7 = 0, 4a = 32, a = 8$$
$$U_n = U_{ho} + 8 + \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

19. Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la función generatríz $u_n - 3u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$, dado $u_0 = 0$, y $u_1 = 20$, $n \geq 2$

$$U_n - 3U_{n-1} + 4U_{n-2} = 0$$
$$U_n = \lambda^k$$
$$\lambda^k - 3\lambda^{k-1} + 4\lambda^{k-2} = 0$$
$$\lambda^k[1 - \frac{3}{\lambda} + \frac{4}{\lambda^2}] = 0$$
$$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$$

Usando los autovalores del polinomio característico:

$$\lambda - 3\lambda + 4 = 0 \text{ donde } \lambda = \gamma + i\beta$$
$$\lambda = 3 \pm i\sqrt{i}/2$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{2} * 3 + i\sqrt{7}$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2} * 3 - i\sqrt{7}$$
$$\infty = \frac{3}{2}, \beta ? \frac{1}{2}\sqrt{1}$$
$$R = \lambda = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2} = \frac{16}{4} = 4$$
$$R_0 = cos\alpha = \frac{\infty}{\lambda} = \frac{3}{4}$$
$$R_1 = sen\alpha = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{1}{4}\sqrt{7}$$
$$tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} * \frac{4}{3}$$
$$tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$
$$\alpha = tan^-1\frac{\sqrt{7}}{3}$$
$$\alpha = 0.72rad$$

Con $\lambda = \infty + i\beta = \lambda * e^{i\alpha}\ \lambda[cos\alpha + isen\alpha]$
Para ecuaciones de segundo orden:

$$e^{\alpha * x}[4cos() + bsen()]$$
$$U_n = x^n[Acos(\alpha n) + Bsen(\alpha n)]$$
$$2^n[Acos(0.72n) + Bsen(0.72)]$$

Donde $U_0 = 0, U_1 = 20$

$$0 = Acos(a) + Bsen(b)$$
$$A = 0$$
$$20 = 2Bsen(0.72) + 0$$
$$10 = b * \frac{1}{4}\sqrt{7}, sen\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{7}$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{7} * 40}$$
$$U_n = 2^n[\frac{1}{\sqrt{7}}40sen(\alpha n)], \alpha = tan^-1(\frac{\sqrt{7}}{3}, n \geq 2)$$

20. Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci.

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$
$$U_n - U_{n-1} - U_{n-2} = 0$$
$$U_0 = 0, U_1 = 1$$
$$g(x) = 1 + x + U_2x^2 + U_3x^3 + ...$$
$$1 + x + (U_0 + U_1)x^2 + (U_2 + U_1)x^3 + ...$$
$$g(x) = 1 + x + x^2[U_1 + U_2x + U_3x^2 + ...] + x^2[U_0 + U_1x + U_2x^2 + ...]$$
$$1 + x + x^2[\frac{g(x) - U_0}{x}] + x^2g(x)$$
$$1 + x - U_0x + g(x) + g(x)x^2$$
$$g(x)[1 - x - x^2] = 1 + (x - x)$$
$$g(x) = \frac{1}{(1 - x - x^2}$$

Para hallar la solución, se puede aplicar el método por autovalores donde $U_n = \lambda^n$

$$U_n - U_{n-1} - U_{n-2} = 0$$
$$\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = 0$$
$$\lambda^2 * \lambda^n[1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}] = 0 * \lambda^2$$
$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$
$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1 + 4}/2$$
$$\lambda = 1 \pm \sqrt{5}/2$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$
$$U_n = A[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{7})]^n + B[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})]^n$$
$$U_0 = 0$$
$$0 = A + B$$
$$B = -A$$
$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$U_1 = 1$$
$$1 = \frac{A}{2}(1 + \sqrt{5}) - \frac{A}{2}(1 - \sqrt{5})$$
$$1 = \frac{A}{2}[2\sqrt{5}]$$
$$1 = \sqrt{5}A$$
$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1 - \sqrt{5}}{2})^n]$$

21. Utilice el método de la función generatriz para resolver $u_n - 2u_{n-1} = 3^n$, para $n \geq 1$ dado $u_0 = 1$ $U_n - 2U_{n-1} = 3^n, n \geq 1, U_0 = 1$
Aplicando el método por autovalores:
Homogénea, $U_n = \lambda^n$

$$\lambda^n - 2\lambda^{n-1} = 0$$
$$\lambda^n[1 - \frac{2}{\lambda}] = 0$$
$$\lambda - 2 = 0$$
$$\lambda = 2$$
$$U_n = A2^n$$

Particularmente, $U_n = B3^n$

$$B3^n - 2B3^{n-1} = 3^n$$
$$B3^n[1 - \frac{2}{3}] = 3^n$$
$$B = \frac{1}{\frac{1}{3}}$$
$$B = 3$$
$$U_n = 3 * 3^n$$
$$U_n = 3^{n+1}$$

Por el método general:

$$U_n = A2^n + 3^{n+1}$$

Donde $U_0 = 1$

$$1 = A + 3$$
$$A = -2$$
$$U_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$