Ejercicios Matemáticas Discretas II

David Alexander Rátiva Gutierrez

Febrero 17 2023

1. Comprobar si la siguiente tabla corresponde a un monoide:

Monoide	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

- ¿No vacío? No es vacío. Está conformado por el conjunto $\mathbf{G} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$
- ¿Es cerrado? Es cerrado. El producto cartesiano de cada elemento de **G**.
- ¿Es asociativa? No es asociativa dado que algunos casos no se cumple que:

$$(b * c) * d = b * (c * d)$$

$$d * d = b * c$$

$$d \neq b$$

Por lo tanto, la anterior tabla no corresponde a un monoide.

2. Probar o refutar si el producto de matrices cuadradas es asociativa.

Siendo $A, B, C \in \mathbb{R}^{2x2}$, donde $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Por tanto, se debe comprobar si la siguiente igualdad se cumple para cualquier elemento del conjunto:

$$(A.B).C = A.(B.C) \tag{2}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) \tag{3}$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} b_{11} \cdot c_{11} + b_{12} \cdot c_{21} & b_{11} \cdot c_{12} + b_{12} \cdot c_{22} \\ b_{21} \cdot c_{11} + b_{22} \cdot c_{21} & b_{21} \cdot c_{12} + b_{22} \cdot c_{22} \end{bmatrix} \right) \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}\cdot c_{11}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot c_{11}+a_{11}\cdot b_{12}\cdot c_{21}+a_{12}\cdot b_{22}\cdot c_{21} \\ a_{21}\cdot b_{11}\cdot c_{11}+a_{22}\cdot b_{21}\cdot c_{11}+a_{21}\cdot b_{12}\cdot c_{21}+a_{22}\cdot b_{22}\cdot c_{21} \end{matrix} \tag{6}$$

$$\begin{matrix} a_{11}\cdot b_{11}\cdot c_{12}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot c_{12}+a_{11}\cdot b_{12}\cdot c_{22}+a_{12}\cdot b_{22}\cdot c_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}\cdot c_{12}+a_{22}\cdot b_{21}\cdot c_{12}+a_{21}\cdot b_{12}\cdot c_{22}+a_{22}\cdot b_{22}\cdot c_{22} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$=$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}\cdot c_{11}+a_{11}\cdot b_{12}\cdot c_{21}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot c_{11}+a_{12}\cdot b_{22}\cdot c_{21} \\ a_{21}\cdot b_{11}\cdot c_{11}+a_{21}\cdot b_{12}\cdot c_{21}+a_{22}\cdot b_{21}\cdot c_{11}+a_{22}\cdot b_{22}\cdot c_{21} \end{matrix} \tag{8}$$

$$\begin{matrix} a_{11}\cdot b_{11}\cdot c_{12}+a_{11}\cdot b_{12}\cdot c_{22}+a_{12}\cdot b_{21}\cdot c_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\cdot c_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}\cdot c_{12}+a_{21}\cdot b_{12}\cdot c_{22}+a_{22}\cdot b_{21}\cdot c_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\cdot c_{22} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Por lo anterior se demuestra que la igualdad se cumple y que por lo tanto el producto de matrices cuadradas es asociativa.

3. Probar o refutar si el producto de números complejos es asociativa.

   Definiendo el producto de números complejos de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}(a+bi)\cdot(c+di)\\ ac+(bc+ad)i+bdi^2\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\big(\text{ Dado que } i=\sqrt{-1},\ \text{ entonces } i^2=(\sqrt{-1})^2=-1\big)\\ ac+(bc+ad)i-bd\\ (ac-bd)+(bc+ad)i\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}ac+(bc+ad)i-bd\\ (ac-bd)+(bc+ad)i\end{gathered} \tag{12}$$

donde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$; se debe comprobar si la siguiente igualdad se cumple para cualquier elemento del conjunto:

$$(a+bi)\cdot[(c+di)\cdot(e+fi)]=[(a+bi)\cdot(c+di)]\cdot(e+fi)$$

donde también $e,f\in\mathbb{R}$

De tal manera que, operando:

$$(a+bi)\cdot[(c+di)\cdot(e+fi)]=[(a+bi)\cdot(c+di)]\cdot(e+fi) \tag{13}$$

$$(a+bi)\cdot[(ce-df)+(de+cf)i]=[(ac-bd)+(bc+ad)i]\cdot(e+fi) \tag{14}$$

$$a(ce-df)+a(de+cf)i+b(ce-df)i+b(de+cf)i^2= \tag{15}$$

$$e(ac-bd)+e(bc+ad)i+f(ac-bd)i+f(bc+ad)i^2 \tag{16}$$

$$a(ce-df)+a(de+cf)i+b(ce-df)i-b(de+cf)=e(ac-bd)+e(bc+ad)i+f(ac-bd)i-f(bc+ad) \tag{17}$$

$$a(ce-df)+[a(de+cf)+b(ce-df)]i-b(de+cf)=e(ac-bd)+[e(bc+ad)+f(ac-bd)]i-f(bc+ad) \tag{18}$$

$$ace-adf+[ade+acf+bce-bdf]i-bde-bcf=eac-ebd+[ebc+ead+fac-fbd]i-fbc-fad \tag{19}$$

Finalmente:

$$ace - adf + [ade + acf + bce - bdf]i - bde - bcf = ace - adf + [ade + acf + bce - bdf]i - bde - bcf \quad (20)$$

De tal manera que la igualdad se cumple, comprobando así la asociatividad del producto de números complejos.