# Demostraciones

David Alexander Rativa Gutierrez
27 de febrero de 2023

## I. Demostración Kernel($\theta$) e Img($\theta$) tienen las propiedades de un grupo

En este apartado se desea probar que Kernel($\theta$) e Img($\theta$) tienen las propiedades de un grupo. Para ello es necesario conocer que un subgrupo es cerrado bajo la operación del grupo. Es decir, si se toman dos elementos aleatorios del subgrupo y se realiza la operación correspondiente del grupo entre sí, el resultado también debe pertenecer al subgrupo. Esto es conocido como clausura. Además, un subgrupo debe incluir al elemento identidad. Y por último se debe tener en cuenta que para cada elemento en el subgrupo, hay otro elemento en el subgrupo que al juntarlos mediante la operación del grupo, da como resultado el elemento identidad del grupo.

### I-A. *Demostración para Kernel*

Si $k_1, k_2 \in Kernel(\theta)$ se dice que$\theta(k_1) = \theta(k_2) = e$. Por tanto, $\theta(k_1 k_2) = \theta(k_1)\theta(k_2) = e$. Así pues, $k_1 * k_2 \in Kernel(\theta)$ .

$e \in$ Kernel($\theta$), dado que $\theta(e) = \widetilde{e}$, donde $e$ es el elemento identidad del grupo de partida y $\widetilde{e}$ es el elemento identidad del grupo de llegada.

Si $k_1 \in Kernel(\theta)$, entonces $\theta(k_1) = e$. Por tanto, $\theta(k_1^{-1}) = (\theta(k_1))^{-1} = (e)^{-1} = e$ . Entonces, $k_1^{-1} \in Kernel(\theta)$.

### I-B. *Demostración para Img*

Si $I_1$ y $I_2$ pertenecen al grupo de partida, entonces se tiene que $\theta(I_1) = \widetilde{I_1}$ y $\theta(I_2) = \widetilde{I_2}$ . Por tanto, $\theta(I_1 I_2) = \theta(I_1)\theta(I_2) = \widetilde{I_1}\widetilde{I_2}$ . Por tanto, $\widetilde{I_1} * \widetilde{I_2} \in Img(\theta)$.

Para cada elemento identidad del grupo de llegada $e \in Img(\theta)$, se tiene que $\theta(e) = \widetilde{e}$ , donde $e$ es el elemento identidad del grupo de partida y $\widetilde{e}$ es el elemento identidad del grupo de llegada.

Si $I \in Img(\theta)$ entonces existe un elemento $a$ en el grupo que satisfaga que $\theta(a) = I$. Dado que el inverso de $a$ es $a^{-1}$ entonces este se encuentra en el grupo. Por tanto $\theta(a^{-1}) = ((\theta(a)))^{-1} = I^{-1}$ y se tiene $I^{-1} \in Img(\theta)$

## II. Demostración: Sea $G$ un grupo y $x \in G$. Sea $S$ un subgrupo de $G$ que contiene a $x$ y sea $T$ cualquier otro subgrupo que también contiene a $x$. Se desea demostrar que $S$ es un subgrupo de $T$. O que $s \subseteq T$

Teniendo en cuenta la demostración anterior: Demostración: $S$ posee la identidad del grupo $e$. Dado que $S$ es un subgrupo de $G$, entonces se dice que $e \in S$. Y dado que $x \in T$ y $T$ son subgrupos de $G$, por ende $ex = x$ y $xe = x$ pertenecen a $T$. Entonces, $e$ se encuentra en $S$ y en $T$, lo que quiere decir que $S \in T$. $\forall$ $s_1$ y $s_2 \in S$ , su producto $s_1 * s_2$ cumple que $\in$S.$Noobstante, dadoque$S$esunsubgrupode$G$, entonces$s$_1 * s_2 \in G$. Por otra parte, dado que $T$ es otro subgrupo de $G$ que contiene a $x$, entonces $s_1 * s_2 x \in T$. Ahora bien, $s_1 * s_2 \in S$ y en $T$, nos demuestra que $S$ es cerrado. $\forall s \in S$ , debe existir un elemento inverso $s^{-1} \in S$ que satisfaga que $s^{-1} * s = e$. Dado que $x$ $\in$T$yT$esunsubgrupode$G$, entonces$s$^{-1} x \in T$. Sin embargo, $s^{-1} * s = e$, donde $e$ es el elemento identidad de $G$. Se tiene que el inverso $s^{-1} \in S$.