Ejercicios Algoritmo de Euclides

David Alexander Rativa Gutierrez

Marzo 01 2023

1 Demostraciones 1 de Marzo

1.1 Demostrar que si $x \in G$ y G es finito, entonces $|x|$ divide a $|G|$

Primero, se define a $X = \{x^n | n \in Z\}$
Dependiendo del grupo cíclico Z_n con el que se vaya a realizar la demostración, se tiene entonces que $|X| = n$ donde n divide a $|< x >|$.
Además, se tiene que de la partición (generador)$< x >$ se puede obtener X, y dado que la suma de los divisores de la partición $< x >$,pertenecen a las particiones que forman todo el conjunto, entonces sea n, $n \leq |G|$ por el teorema de grupos de LaGrange se tiene que n divide a $|G|$

1.2 Demostrar que $|G| = p$, p siendo primo, entonces G es cíclico

Dado G, que cumple la condición de que $|G| = p$.
Sea el elemento $g \in G$, $g \neq e$ sabiendo que el generado $< g >$ es subgrupo de G entonces se tiene que $|G|$ tiene únicamente dos divisores: 1 y $|G|$ por lo tanto se llega a que $G =< g >$

1.3 ¿Qué problema estaba resolviendo LaGrange cuando creó el teorema?

LaGrange estaba intentando desarrollar la teoría de las ecuaciones algebráicas. Dado que en la época (Siglo XVIII) muchos matemáticos intentaban encontrar soluciones a ecuaciones polinómicas de n grado, LaGrange se puso a estudiar la manera de encontrar solución a estas ecuaciones, teniendo en cuenta las propiedades de los grupos de permutaciones de las raíces de las ecuaciones algebráicas, y justo en ese momento fue cuando dio origen a su famosa teoría de grupos.

1.4 Demostrar el teorema de Lagrange

Dado que los cosets tienen una cardinalidad igual a $|H|$.
Se supone que

$$g_1h_1 = g_2h_2, \text{ donde } g_1, g_2 \in G$$
$$h_1, h_2 \in H.$$
$$\text{Para demostrar la inyectividad, si } g_1h_1 = g_2h_2$$
$$\text{entonces se tiene que } g_1H = g_2H.$$

Demostrando que $g_1H \subseteq g_2H$ y $g_2H \subseteq g_1H$. En palabras más simples, todo elemento del coset g_1H también debe pertenecer al coset g_2H y viceversa.

1. $g_1H \subseteq g_2H$: $x = g_1h$, $h \in H$ dado que $g_1h_1 = g_2h_2$ se tiene que

   $$g_1 = g_2h_2h_1^{-1} = g_2H$$

   Entonces $g_1 \in g_2H$ y por lo tanto $g_1 = g_2\widetilde{h}$, $\widetilde{h} \in H$. y para x se tiene que $x = g_2\widetilde{h}h$ y por lo tanto g_1. $x = g_2H$ Por otra parte, si $x \in g_2H$ y dado que x era un elemento perteneciente a $g1H$ entonces $g_1H \subseteq g_2H$.

2. $g_2H \subseteq g_1H$: $y = g_2H$, $h \in H$ y dado que $g_1h_1 = g_2h_2$ se tiene que

   $$g_2 = g_1h_1h_2^{-1} = g_2H$$

   Por tanto, se puede afirmar que $g_2 \in g_1H$ ya que $g_2 = g_1\widetilde{h}$, $\widetilde{h} \in H$. Y para y se tiene que $y = g_1\widetilde{h}h$ donde se tiene que para g_2. $y = g_1H$ De tal manera que $y \in g_1H$ y dado que y era un elemento de g_2H entonces $g_2H \subseteq g_1H$.

$\forall\ gh \in gH$ se tiene para todo $h \in H$.

Como es una biyección entonces $|H| = |gH|$ también es sabido que los cosets son particiones que están divididas y que al unir los elementos entre dichos elementos se obtiene G, o que de la suma de los cardinales de los mismos se obtiene el cardinal de G. Así pues $|G|$ divide a $|H|$