Opgave 1

Vi har en funktion, der er periodisk med perioden $T = 2$:

$$f(t) = \begin{cases} -t & 0 \leq t < 1 \\ t & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

a) Tegn funktionen $f(t)$.

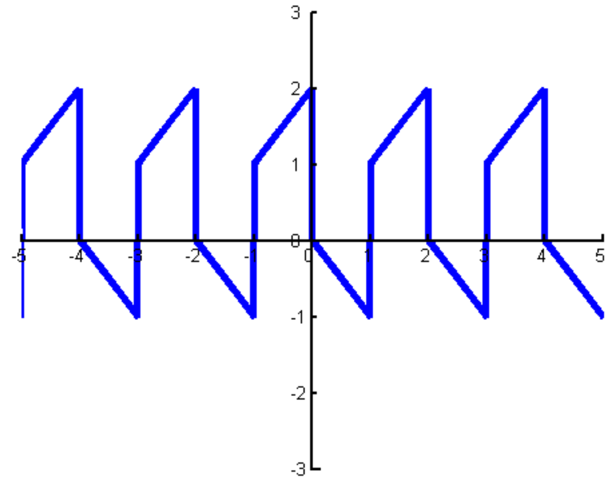

Figure 1: 1. periodisk funktion.

b) Grundfrekvensen i rad/sec er:

$$\begin{aligned} \omega =& \frac{2\pi}{T} \\ =& \pi \end{aligned}$$

c) Formlen for Fourierrækken for $f(t)$, hvor a_0, a_n og b_n er ukendte:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t))$$

d) Funktionen er hverken lige eller ulige.

e) Eftersom funktionen hverken er lige eller ulige, samt funktionen har et DC offset vil a_0, a_n og b_n antage værdier, der er forskellige fra 0.

f) Integralet for a_0 opskrives og beregnes

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^2 f(t)dt \\ &= \int_0^1 -tdt + \int_2^1 tdt \\ &= -[\frac{1}{2}t^2]_0^1 + [\frac{1}{2}t^2]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

DC-offsettet er derfor $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$. Dette passer med det forventede.

g) Vi opskriver integralet for a_n og beregner:

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{2}\int_0^1 -t\cos\pi t dt + \frac{2}{2}\int_2^1 t\cos\pi t dt \\ =& -\int_0^1 t\cos\pi t dt + \int_2^1 t\cos\pi t dt \\ =& -\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi t + \frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_0^1 + \left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi t + \frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_1^2 \\ =& -\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{1}{n\pi}\sin n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi 0 + \frac{0}{n\pi}\sin n\pi 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi 2 + \frac{2}{n\pi}\sin n\pi 2 - \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{1}{n\pi}\sin n\pi \\ =& -\frac{1}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}(-1)^n \\ =& \frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n) \end{aligned}$$

h) Vi opskriver integralet for b_n og beregner:

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{2}{2}\int_0^1 -t\sin n\pi t dt + \frac{2}{2}\int_2^1 t\sin n\pi t dt \\ =& -\int_0^1 t\sin n\pi t dt + \int_2^1 t\sin n\pi t dt \\ =& -\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi t - \frac{t}{n\pi}\cos n\pi t\right]_0^1 + \left[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi t - \frac{t}{n\pi}\cos n\pi t\right]_1^2 \\ =& -\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi + \frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi 0 - \frac{0}{n\pi}\cos n\pi 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi - \frac{2}{n\pi}\cos n\pi 2 - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi + \frac{1}{n\pi}\cos n\pi \\ =& \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

i) Fourierrækken kan opskrives som:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos\pi nt + \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)\sin\pi nt$$

j) Fourierrækken for $n = 1, 2, 3, 4$:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos\pi t - \frac{4}{\pi}\sin\pi t + \frac{4}{3^2\pi^2}\cos 3\pi t - \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi t$$

k) Tegn løsningen fra j) i matlab:

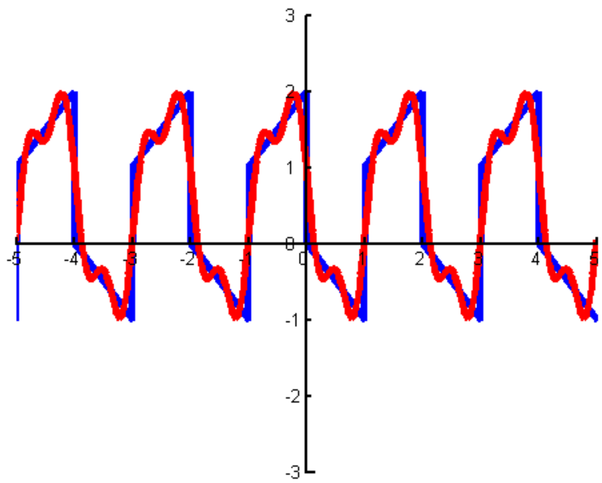

Figure 2: Fourierrække.

l) Tegn amplitudespectret for $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Amplituderne i amplitudespectret er givet ved:

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\pi}\right)^2}$$
$$A_2 = 0$$
$$A_3 = \sqrt{\left(\frac{4}{3^2\pi^2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3\pi}\right)^2}$$
$$A_4 = 0$$
$$A_5 = \sqrt{\left(\frac{4}{5^2\pi^2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5\pi}\right)^2}$$

Opgave 2

Vi har en funktion, der er periodisk med perioden $T = \pi$:

$$f(t) = \cos t \qquad 0 \le t < \pi$$

Opgave 2 fortsat på næste side. . .

a) Tegn funktionen $f(t)$.

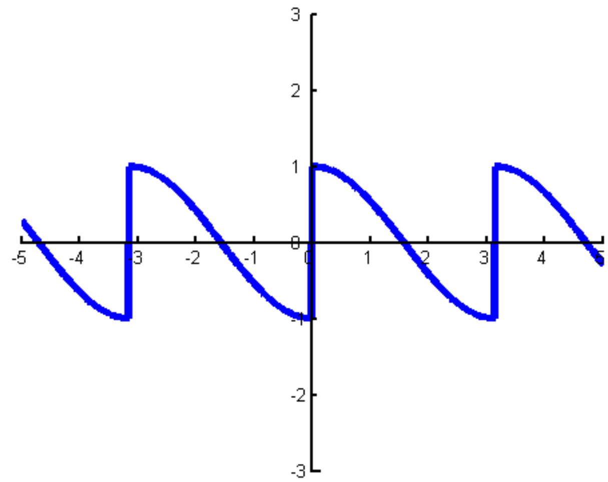

Figure 3: 2. periodisk funktion.

b) Grundfrekvensen i rad/sec er:

$$\begin{aligned}\omega =& \frac{2\pi}{T} \\ =& \frac{2\pi}{\pi} \\ =& 2\end{aligned}$$

c) Formlen for Fourierrækken for $f(t)$, hvor a_0, a_n og b_n er ukendte:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n2t) + b_n \sin(n2t))$$

d) Funktionen er ulige, eftersom

$$f(-t) = -f(t)$$

e) Eftersom funktionen ulige, vil $a_0 = 0$, $a_n = 0$. b_n vil antage værdier, der er forskellige fra 0.

f) Da funktionen er ulige har vi $a_0 = 0$. DC-offsettet er derfor $\frac{a_0}{2} = 0$. Dette passer med det forventede.

g) Da funktionen er ulige har vi $a_0 = 0$.

h) Vi opskriver integralet for b_n og beregner:

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t \sin n2t dt \\
=& \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos((n2-1)t)}{2(n2-1)} - \frac{\cos((n2+1)t)}{2(n2+1)}\right]_0^{\pi} \\
=& \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos((n2-1)\pi)}{2(n2-1)} - \frac{\cos((n2+1)\pi)}{2(n2+1)} + \frac{\cos 0}{2(n2-1)} + \frac{\cos 0}{2(n2+1)}\right) \\
=& \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2(n2-1)} + \frac{1}{2(n2+1)} + \frac{1}{2(n2-1)} + \frac{1}{2(n2+1)}\right) \\
=& \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{(n2-1)} + \frac{1}{(n2+1)}\right) \\
=& \frac{8n}{4\pi n^2 - \pi}
\end{aligned}$$

i) Fourierrækken kan opskrives som:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{4\pi n^2 - \pi} \sin 2nt$$

j) Fourierrækken for $n = 1, 2, 3, 4$:

$$f(t) = \frac{8}{3\pi}\sin 2t + \frac{16}{15\pi}\sin 4t + \frac{24}{35\pi}\sin 6t + \frac{32}{63\pi}\sin 8t$$

k) Tegn løsningen fra j) i matlab:

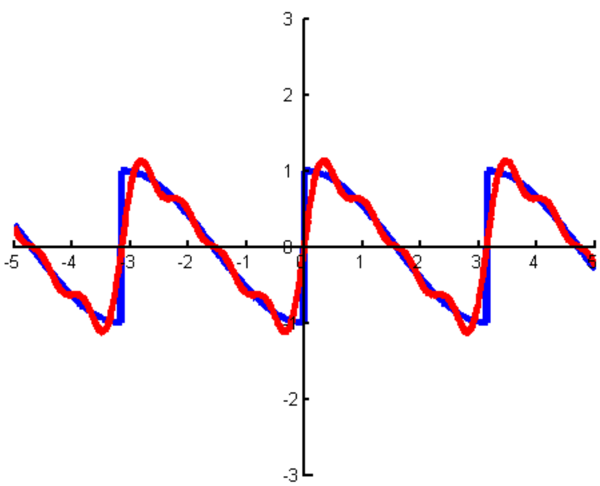

Figure 4: Fourierrække.

l) Tegn amplitudespectret for $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Amplituderne i amplitudespectret er givet ved:

$$\begin{aligned} A_1 =& b_1 = \frac{8}{3\pi} = 0,8488 \\ A_2 =& b_2 = \frac{16}{15\pi} = 0,3395 \\ A_3 =& b_3 = \frac{24}{35\pi} = 0,2183 \\ A_4 =& b_4 = \frac{36}{63\pi} = 0,1617 \\ A_5 =& b_5 = \frac{40}{99\pi} = 0,1286 \end{aligned}$$

Opgave 3

Vi har en funktion, der er periodisk med perioden $T = 3$:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -1 \leq t < 1 \\ -2 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

a) Tegn funktionen $f(t)$.

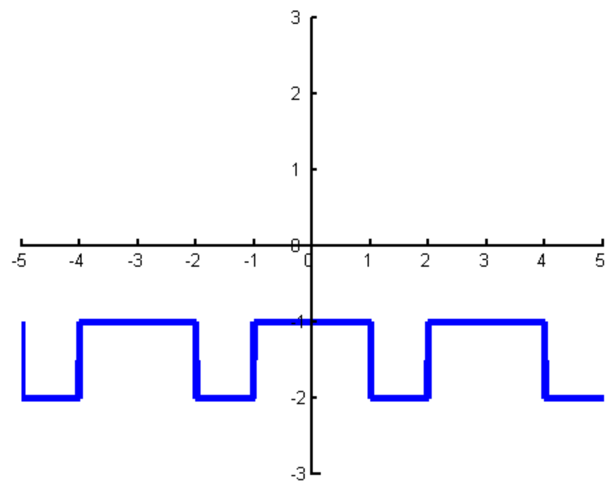

Figure 5: 3. periodisk funktion.

b) Grundfrekvensen i rad/sec er:

$$\begin{aligned} \omega =& \frac{2\pi}{T} \\ =& \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Opgave 3 fortsat på næste side...

c) Formlen for Fourierrækken for $f(t)$, hvor a_0, a_n og b_n er ukendte:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\frac{2\pi}{3}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{3}t))$$

d) Funktionen er lige, eftesom

$$f(t) = f(-t)$$

e) Eftersom funktionen er lige vil $b_n = 0$.

f) Integralet for a_0 opskrives og beregnes

$$\begin{aligned}
a_0 =& \frac{2}{3}\int_{-1}^{2} f(t)dt \\
=& \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} -1dt + \int_{1}^{2} -2dt \\
=& \frac{2}{3}(-[t]_{-1}^{1} - 2[t]_{1}^{2}) \\
=& \frac{2}{3}(-(1 - -1) - 2(2-1)) \\
=& \frac{-8}{3}
\end{aligned}$$

DC-offsettet er derfor $\frac{a_0}{2} = \frac{-8}{6}$. Dette passer med det forventede.

g) Vi opskriver integralet for a_n og beregner:

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{3}\int_{-1}^{2} f(t)\cos\frac{2\pi}{3}ntdt \\
=& \frac{2}{3}\left(-\int_{-1}^{1} \cos\frac{2\pi}{3}ntdt - 2\int_{1}^{2} \cos\frac{2\pi}{3}ntdt\right) \\
=& \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2\pi n}\left[\sin\frac{2\pi}{3}nt\right]_{-1}^{1} - 2\frac{3}{2\pi n}\left[\sin\frac{2\pi}{3}nt\right]\right) \\
=& -\frac{1}{\pi n}\left(\left[\sin\frac{2\pi}{3}nt\right]_{-1}^{1} + 2\left[\sin\frac{2\pi}{3}nt\right]_{1}^{2}\right) \\
=& -\frac{1}{\pi n}\left(\sin\frac{2\pi}{3}n - \sin(-\frac{2\pi}{3}n) + 2\sin\frac{4\pi}{3}n - 2\sin\frac{2\pi}{3}n\right) \\
=& -\frac{2}{\pi n}\sin\frac{4\pi}{3}n
\end{aligned}$$

h) Da funktionen er lige har vi $b_0 = 0$.

i) Fourierrækken kan opskrives som:

$$f(t) = \frac{-8}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{4\pi}{3}n)\cos\frac{2\pi}{3}nt$$

j) Fourierrækken for $n = 1, 2, 3, 4$:

$$f(t) = \frac{-8}{3} - \frac{2}{\pi}\sin(\frac{4\pi}{3})\cos\frac{2\pi}{3}t - \frac{2}{\pi}\sin(\frac{8\pi}{3})\cos\frac{4\pi}{3}t - \frac{2}{\pi}\sin(4\pi)\cos 2\pi t - \frac{2}{\pi}\sin(\frac{16\pi}{3})\cos\frac{8\pi}{3}t$$

k) Tegn løsningen fra j) i matlab:

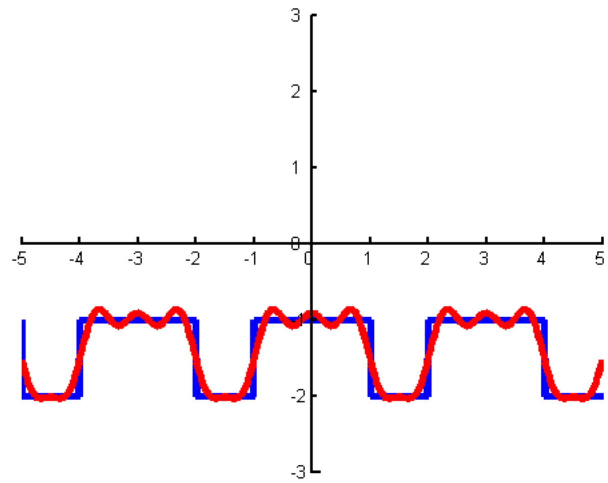

Figure 6: Fourierrække.

l) Tegn amplitudespectret for $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Amplituderne i amplitudespectret er givet ved:

$$\begin{aligned}
A_1 = &|a_1| = & 0,5513 \\
A_2 = &|a_2| = & -0,2757 \\
A_3 = &|a_3| = & 0 \\
A_4 = &|a_4| = & 0,1378 \\
A_5 = &|a_5| = & -0,1103
\end{aligned}$$

Opgave 4

Vi har en funktion, der er periodisk med perioden $T = 2$:

$$f(t) = |t| \qquad -1 \leq t < 1$$

a) Tegn funktionen $f(t)$.

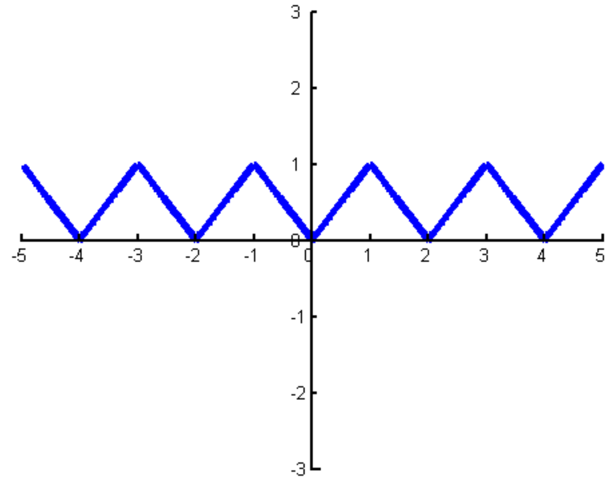

Figure 7: 3. periodisk funktion.

b) Grundfrekvensen i rad/sec er:

$$\begin{aligned}\omega =&\frac{2\pi}{T}\\ =&\frac{2\pi}{2}\\ =&\pi\end{aligned}$$

c) Formlen for Fourierrækken for $f(t)$, hvor a_0, a_n og b_n er ukendte:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t))$$

d) Funktionen er lige, eftesom

$$f(t) = f(-t)$$

e) Eftersom funktionen er lige vil $b_n = 0$.

f) Integralet for a_0 opskrives og beregnes

$$\begin{aligned}a_0 =&\frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt\\ =&\int_{-1}^{0} -tdt + \int_{0}^{1} tdt\\ =&-\frac{1}{2}[t^2]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}[t^2]_0^1\\ =&\frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}1^2\\ =&1\end{aligned}$$

DC-offsettet er derfor $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$. Dette passer med det forventede.

g) Vi opskriver integralet for a_n og beregner:

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\cos\frac{2\pi}{3}ntdt \\
=& \int_{-1}^{0} -t\cos\pi ntdt + \int_{0}^{1} t\cos\pi ntdt \\
=& -\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi t + \frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi t + \frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{0}^{1} \\
=& -\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi 0 - \frac{0}{n\pi}\sin n\pi 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos -n\pi + \frac{-1}{n\pi}\sin -n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\sin n\pi 2 - \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi 0 - \frac{0}{n\pi}\sin n\pi 0 \\
=& -\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2\pi^2} \\
=& \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

h) Da funktionen er lige har vi $b_0 = 0$.

i) Fourierrækken kan opskrives som:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos\pi nt$$

j) Fourierrækken for $n = 1, 2, 3, 4$:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos\pi nt - \frac{1}{\pi^2}\cos\pi nt$$

k) Tegn løsningen fra j) i matlab:

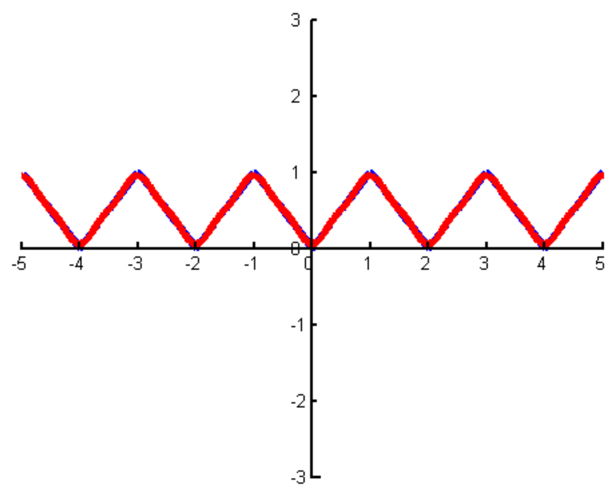

Figure 8: Fourierrække.

l) Tegn amplitudespectret for $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Amplituderne i amplitudespectret er givet ved:

$$\begin{aligned}
A_1 = |a_1| &= -0,4053 \\
A_2 = |a_2| &= 0 \\
A_3 = |a_3| &= -0,045 \\
A_4 = |a_4| &= 0 \\
A_5 = |a_5| &= -0,0162
\end{aligned}$$