LEKTION 7

Transientsvar og Dynamik

I denne note vil vi gennemgå funktioner i Laplacedomænet.

7.1 Overføringsfunktioner og Transientsvar

- Overføringsfunktionen er i Laplacedomænet.
  - Bruges til beskrivelse af ligevægttilstanden (steady-state).
- Transientsvaret er i tidsdomænet.
  - Bruges til beskrivelse af transient eller overgangsområdet.

! Den inverse Laplacetransformation af en overføringsfunktionen er kaldt **Pulssvaret** eller **the impulse response**.

7.1.1 Pol -nulpunktsdiagram og Overføringsfunktioner

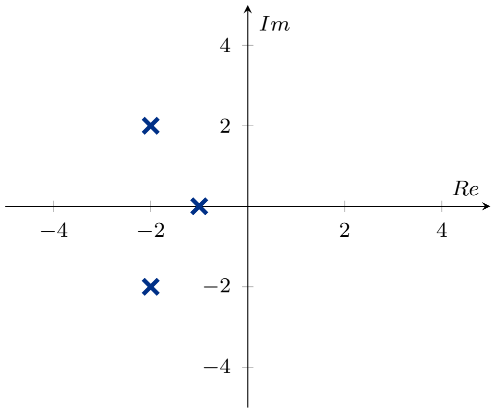
Vi plotter poler og nulpunkter i det komplekse plan, med imaginærdelen opad y-aksen, og realdelen henad x-aksen.

- Poler angives som $\times$.
- Dobbelt poler angives som $\otimes$.
- Nulpunkter angives som $\bigcirc$.

! Pol-nulpunktsdiagrammet er altid symmetrisk omkring x-aksen.

■ **Eksempel 7.1 — Overføringsfunktioner.** Find overføringsfunktionen udfra pol-nulpunktsdiagram, når DC-forstærkningen er 1.
Vi får:

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{K}{(s+1)(s+2-2j)(s+2+2j)} \\
&= \frac{K}{s^3+5s^2+12s+8}
\end{aligned}
$$



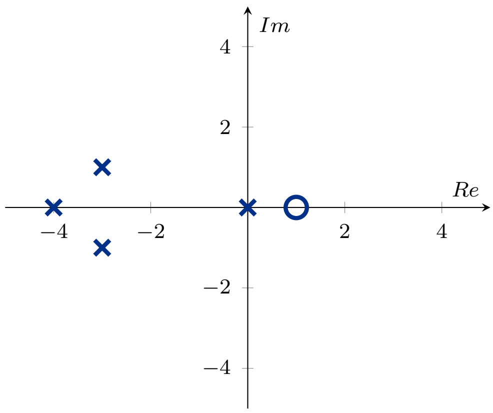
Vi kan finde K ved at DC-forstærkning er 1

$$\begin{aligned}\left.\frac{K}{s^3+5s^2+12s+8}\right|_{\omega=0} &= 1\\ \frac{K}{8} &= 1\\ K &= 8\end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{8}{s^3+5s^2+12s+8}$$

■

■ **Eksempel 7.2 — Overføringsfunktioner II.** Find overføringsfunktionen udfra pol-nulpunktsdiagram, når slutværdien er 1.



Vi får:

$$\begin{aligned}H(s) &= K\frac{s-1}{s(s+4)(s+3-j)(s+3+j)}\\ &= K\frac{s-1}{s^4+10s^3+34s^2+40s}\end{aligned}$$

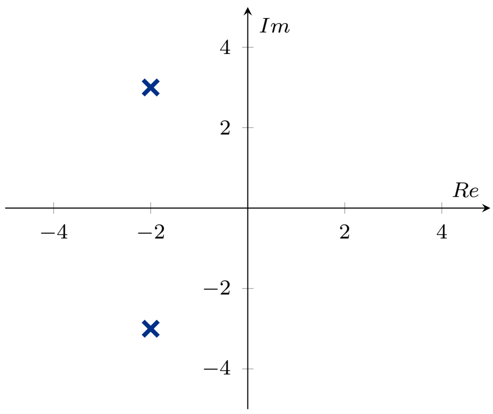
Vi kan finde K ved slutværdiesætningen

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} sK\frac{s-1}{s^4+10s^3+34s^2+40s} =& 1\\ K\frac{-1}{40} =& 1\\ K =& -40\end{aligned}$$

$$H(s) = -40\frac{s-1}{s^4+10s^3+34s^2+40s}$$

■

■ **Eksempel 7.3** Opskriv overføringsfunktionen, der har følgende pol-nulpunktsdiagram, når DC forstærkningen er 1



Vi får:

$$\begin{aligned}H(s) =& K\frac{1}{(s+2-3j)(s+2+3j)}\\ =& K\frac{1}{s^2+4s+13}\end{aligned}$$

Vi kan finde K ved at DC-forstærkning er 1

$$\begin{aligned}K\frac{1}{s^2+4s+13}\bigg|_{\omega=0} =& 1\\ \frac{K}{13} =& 1\\ K =& 13\end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{13}{s^2+4s+13}$$

■

7.2 Transientsvar

- Hvad der sker for systemet før det når ligevægtstilstanden.
- Transientsvarets egenskaber er direkte koplet til polernes placering.

7.2.1 Stabilitet

Udfra polerne i en funktion kan vi sige noget om systemets stabilitet. Systemet er ustabilt når:

- Poler i højre halvplan af pol-nulpunktsdiagrammet.
- Dobbelte poler på imaginær aksen.

! Om en funktion er stabil eller ustabil kan ses med dæmpningsreglen.

7.2.2 Poler og Polpar

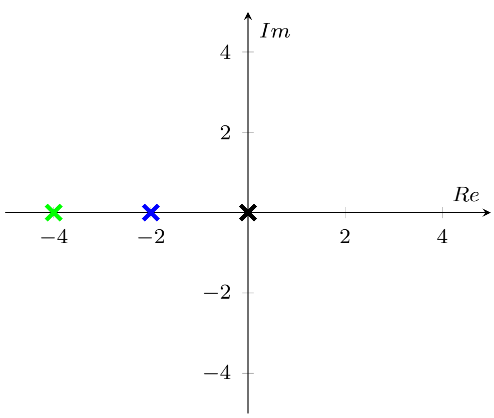
Vi opdeler vores poler i to grupper:

- Poler, der har en imaginærdel, der er lig 0
- Poler, der har en imaginærdel, der er forskellig fra 0, hænger sammen som et pol-par $\{p_1, p_1^*\}$.

7.2.3 Reelle Poler

For hver pol p_1, der har en imaginærdel lig 0 , har vi:

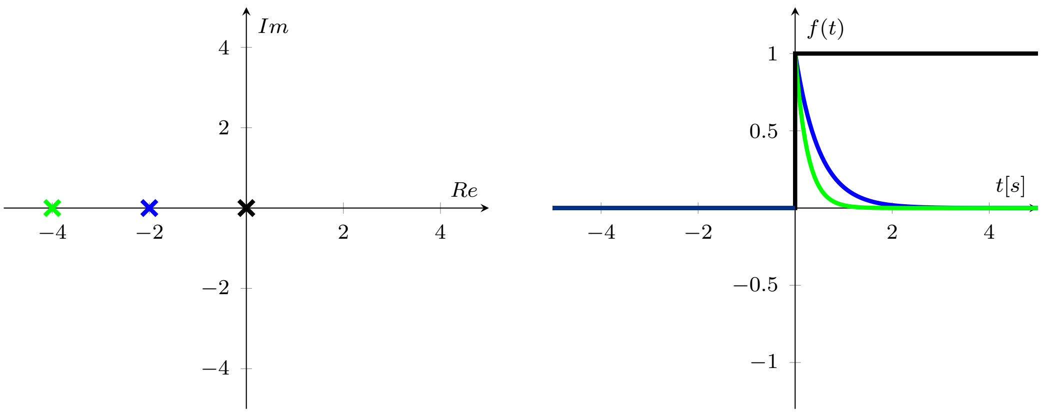
$$\frac{K}{s - p_1}$$



Reelle Poler i Tidsdomænet

Vi har en forskydning i Laplace-domænet. Derved har vi en dæmpning i tidsdomænet $p < 0$, vi har

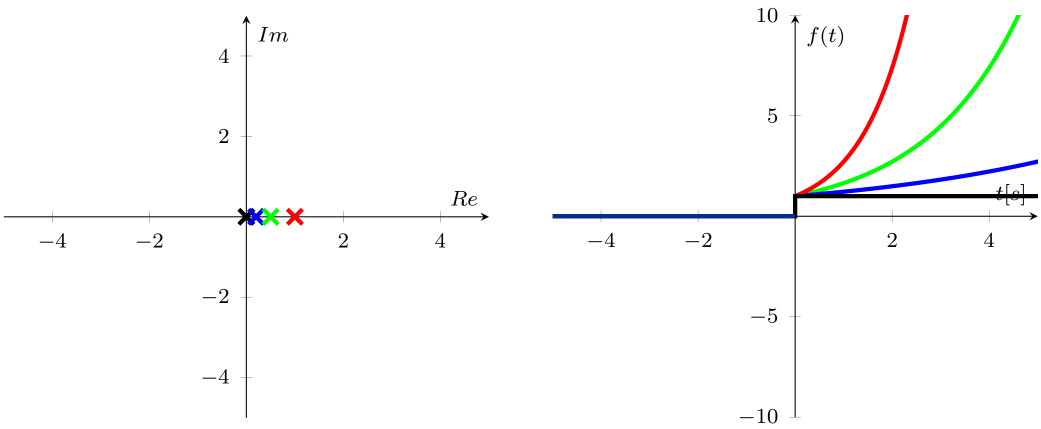
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p}\right\} = e^{pt}u(t)$$



7.2.4 Ustabilitet

Hvis vi har en forstærkning istedet for en dæmpning $p > 0$, vi har

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p}\right\} = e^{pt}u(t)$$



7.2.5 Complekse Poler

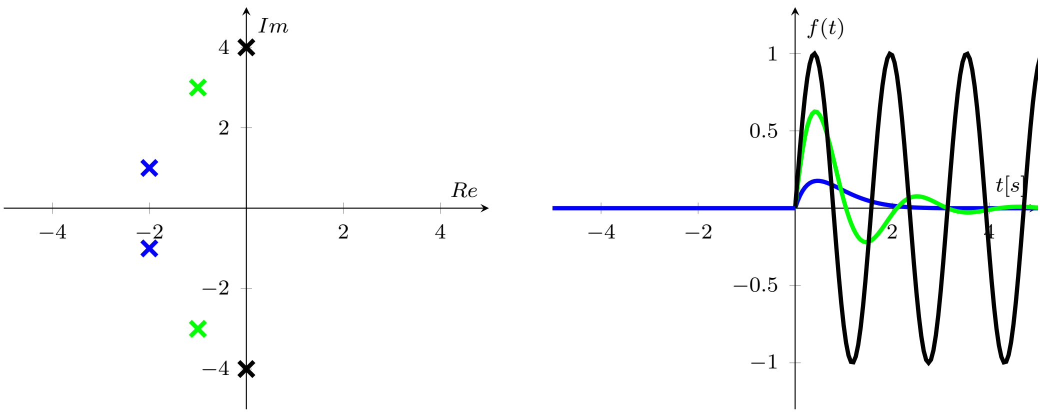
For hvert kompleks konjugeret polpar $\{p_1, p_1^*\}$:

$$\frac{K(s)}{(s - Re[p_1])^2 + Im[p_1]^2}$$

Transientsvar for Complekse Poler

Hvert kompleks konjugeret polpar $\{p_1, p_1^*\}$ bidrager med:

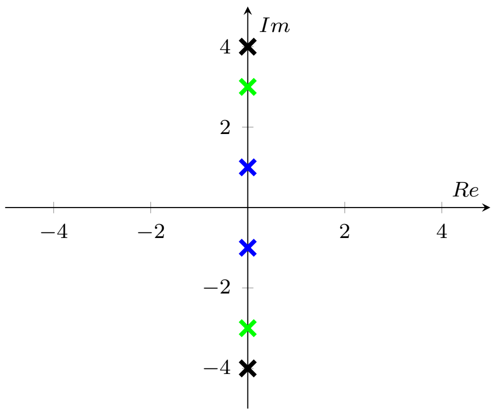
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K(s)}{(s-Re[p_1])^2+Im[p_1]^2}\right\} = Ke^{Re[p_1]t}\sin(Im[p_1]t+\phi)$$



Udæmpet

For en pol, der har en realdel lig 0

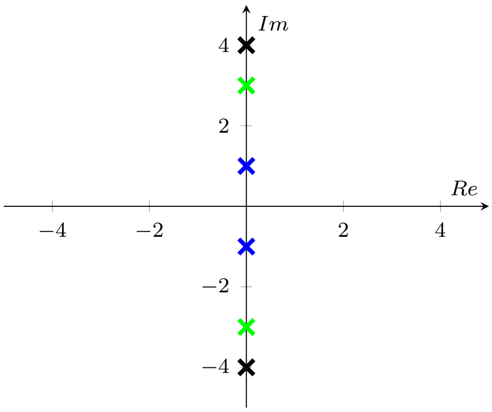
$$\frac{K(s)}{s^2+Im[p_1]^2}$$

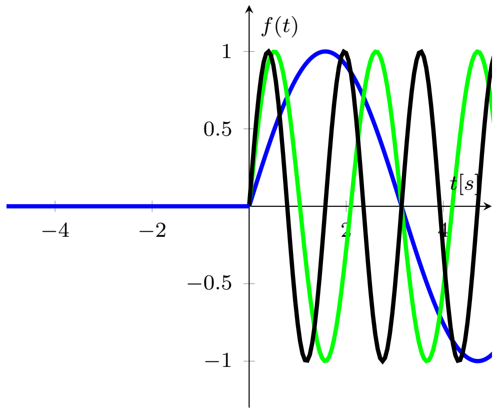


Transientsvar ved Udæmpet

I tidsdomænet har vi:

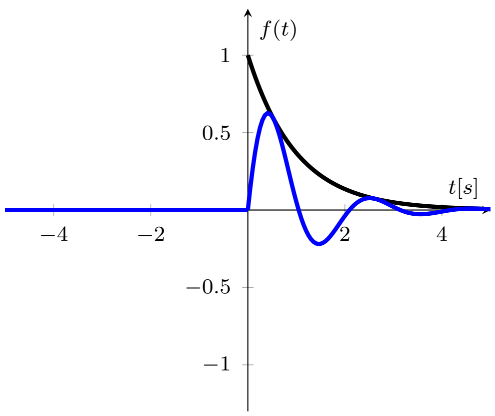
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K(s)}{s^2+Im[p_1]^2}\right\} = K_2\sin(Im[p_1]t+\phi).$$

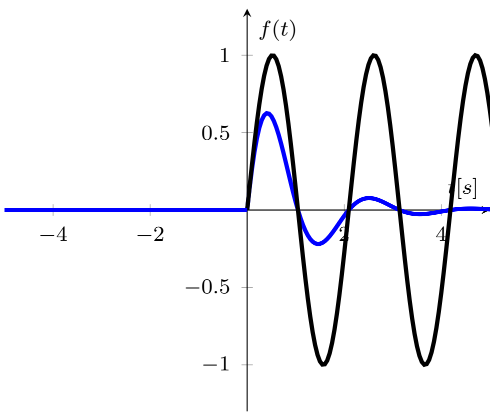




■ **Eksempel 7.4 — Underdæmpet og Stabilt.** Systemet er stabilt når alle poler har negative realdele

$$H(s) = \frac{3}{(s+1)+3^2}$$





■

■ **Eksempel 7.5 — Ustabilt.** En funktion er ustabil når der er poler, som har en positiv realdel.

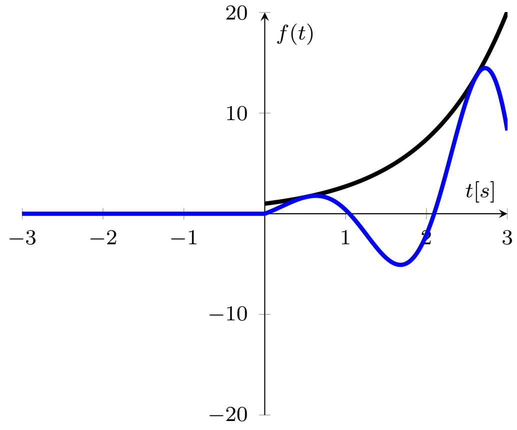
$$H(s) = \frac{3}{(s-1)+3^2}$$

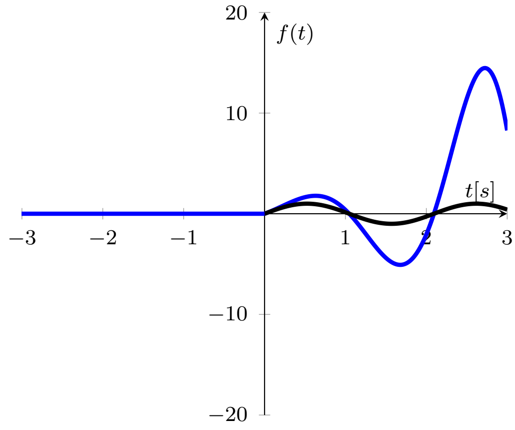
■

Kommentarer

For et komplekst konjugeret polpar p_1, p_1^*:

- Vi har en forskydning med $Re[p_1]$, og en svingning med $Im[|p_1|]$ $[rad/sec]$.
- Jo større $Re[p_1]$ er, jo mere vil bidraget være dæmpet. **Det polpar der har den største realdel, vil derfor være det dominerende**.
- Vi kalder den dominerende pol's imaginærdel for funktionens **egenfrekvens**.



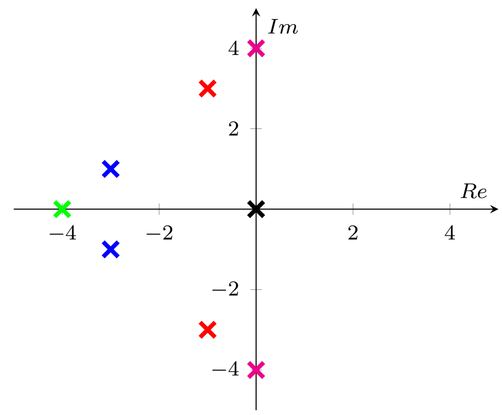


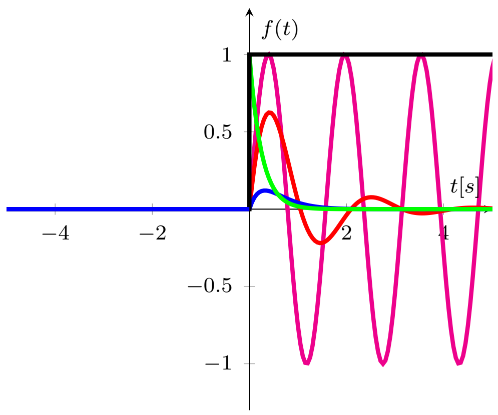
Dæmpning

For stabile funktioner har polerne en effekt på dæmpningnen

- Underdæmpet: Den imaginære del af polerne er ikke 0.
- Overdæmpet: Den imaginære del af polerne er 0.
- Kritisk Dæmpet: Den imaginære del af polerne er 0, og der er en dobbelt pol.

7.2.6 Opsummering





■ **Eksempel 7.6 — Stabilitet.** (Modern Control Systems, opg. 7.6 side 469)

- En rumstation er i kredsløb om jorden.
- Kontrolleren til at styre orienteringen kan være representeret af et system, angivet som

$$G_c(s) = \frac{125}{s^2 + 20s + 125}$$

Figure 7.8: Rumstationen MIR (ref. http://spaceflight.nasa.gov).

Systemsvaret til en ændring på 1: $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ er således:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s}G_c(s) =& \frac{125}{s((s+10)^2+25)} \\
=& \frac{1}{s} - \frac{s+10}{(s+10)+5^2} - \frac{10}{(s+10)+5^2}
\end{aligned}
$$

I Tidsdomænet kan vi finde transientsvaret:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s+10}{(s+10)+5^2} - \frac{10}{(s+10)+5^2}\right\} \\
&= u(t)(1 - e^{-10t}(\cos(5t) + 2\sin(5t)))
\end{aligned}
$$