Derivación 5.

Hacemos primeramente expansión en serie de Taylor para los puntos $f(x_j \pm 1), f(x_j \pm 2)$ dandonos como resultado lo siguiente.

$f(x_j) = f(x_j)$

$f(x_j + h)$
$= f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2!}f''(x_j) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}f''''(x_j) + O(h^5)$

$f(x_j - h)$
$= f(x_j) - hf'(x_j) + \frac{h^2}{2!}f''(x_j) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}f''''(x_j) + O(h^5)$

$f(x_j + 2h)$
$= f(x_j) + 2hf'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x_j) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x_j) + \frac{(2h)^4}{4!}f''''(x_j)$
$+ O(h^5)$

$f(x_j - 2h)$
$= f(x_j) - 2hf'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x_j) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x_j) + \frac{(2h)^4}{4!}f''''(x_j)$
$+ O(h^5)$

Podemos escribir la derivada de 4to orden como una combinación lineal de las expansiones hechas anteriormente.

$h^4 f''''(x_j)$
$\approx Af(x_j + 2h) + Bf(x_j + h) + Cf(x_j) + Df(x_j - h) + Ef(x_j - 2h)$

$h^4 f''''(x_j)$
$\approx A(f(x_j) + 2hf'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x_j) + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x_j) + \frac{(2h)^4}{4!}f''''(x_j)$
$+ O(h^5))$