Tarea Integración

Punto 3

Partiendo del polinomio cuadrático, de grado 2,

$$P_2(x) = f(a)\cdot l_0(x) + f(x_m)\cdot l_1(x) + f(b)\cdot l_2(x)$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_m)(x-b)}{(a-x_m)(a-b)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}$$

Los polinomios cumplen $l_0(a) = 1$, $l_1(x_m) = 1$ y $l_2(b) = 1$ mientras que son 0 en los otros puntos. Esto significa que $p_2(x)$ interpola bien los valores de $f(a)$, $f(x_m)$ y $f(b)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_2(x)\,dx$$

Dado que $p_2(x)$ es una combinación lineal de los polinomios base de lagrange, podemos integrar cada uno por separado:

$$\int_a^b p_2(x)\,dx = f(a)\int_a^b l_0(x)\,dx + f(x_m)\int_a^b l_1(x)\,dx + f(b)\int_a^b l_2(x)\,dx$$

$$\int_a^b l_0(x)\,dx = \frac{1}{(a-x_m)(a-b)}\int_a^b (x-x_m)(x-b)\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(a-x_m)(a-b)}\int_a^b \left(x^2-(x_m+b)x+x_m b\right)dx}_{I}$$

$$I = \left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right)-(x_m+b)\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)+x_m b(b-a)$$

- $I = \frac{h}{6}$

$$\int_a^b l_1(x)\,dx = \frac{1}{(x_m-a)(x_m-b)}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$$(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab$$

$$I = \left[\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right]-(a+b)\left[\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right]+ab(b-a)$$

- $\int_a^b l_1(x)\,dx = \frac{2h}{3}$

$$\int_a^b l_2(x)\,dx = \frac{1}{(b-a)(b-x_m)}\int_a^b (x-a)(x-x_m)\,dx$$

$$(x-a)(x-x_m) = x^2-(a+x_m)x+ax_m$$

$$I = \left[\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right]-(a+x_m)\left[\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right]+ax_m(b-a)$$

- $\int_a^b l_2(x)\,dx = \frac{h}{6}$

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right)$$

Punto 21

a) $$\operatorname{sgn}(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x)$$

Si la integral del producto de 2 polinomios de Legendre de diferente grado se realiza sobre el intervalo $[-1, 1]$ se obtiene 0.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

Y el cuadrado de un polinomio de Legendre:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

Para encontrar los coeficientes c_n:

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x) P_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{m=0}^{N} c_m P_m(x)\right) P_n(x)\,dx$$

Debido a la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, todos los términos del lado derecho en los que $m \neq n$ se cancelan.

$$\int_{-1}^{1} sgn(x) P_m(x)\, dx = C_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{1} sgn(x) P_n(x)\, dx = C_n \cdot \frac{2}{2n+1}$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} sgn(x) P_n(x)\, dx$$