Parcial 2

Punto 25

a) $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$

Para $n=2$

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2 e^{-x})$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 e^{-x}) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2 e^{-x}) = 2e^{-x} - 4x e^{-x} + x^2 e^{-x}$$

multiplicando por $\dfrac{e^x}{2}$;

$$L_2 = \frac{1}{2}(2-4x+x^2)$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2-4x+2)$$

b) Encontrar raíces polinomio grado 2

Hay que solucionar la cuadrática

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Las raíces son $x_0 = 2 - \sqrt{2}$ y $x_1 = 2 + \sqrt{2}$

c) $$\int_0^\infty f(x)\, e^{-x} dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i)$$

$$w_i = \frac{x_i}{(n+1)^2 [L_{n+1}(x_i)]^2}$$

Para w_2 necesitamos $L_3(x)$:

$$L_3(x) = \frac{e^x}{3!} \frac{d^3}{dx^3}(x^3 e^{-x})$$

Ahora calculamos las derivadas:

$$\frac{d}{dx}(x^3 e^{-x}) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^3 e^{-x}) = 6x e^{-x} - 6x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(x^3 e^{-x}) = 6 e^{-x} - 18 x e^{-x} + 9x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(6 - 18x + 9x^2 - x^3)$$

$$L_3(x_0) = L_3(2-\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\left(-(2-\sqrt{2})^3 + 9(2-\sqrt{2})^2 - 18(2-\sqrt{2}) + 6\right)$$

$$L_3(x_1) = L_3(2+\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\left(-(2+\sqrt{2})^3 + 9(2+\sqrt{2})^2 - 18(2+\sqrt{2}) + 6\right)$$

$$w_i = \frac{x_i}{9[L_3(x_i)]^2}$$ porque estamos trabajando con $n = 2$

$$\omega_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{9[-0{,}276]^2} = 0{,}85$$

$$\omega_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{9[1{,}60]^2} = 0{,}14$$

d) $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^3 dx$$

Sabemos que $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(4) = 3! = 6$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^3 dx = 6$$

Ahora vamos a verificar la regla de la Cuadratura : $\sum_{i=0}^{1} \omega_i f(x_i)$

y ya calculamos :

$\omega_0 = 0{,}853 \quad \omega_1 = 0{,}146$

$$f(x_0) = (2-\sqrt{2})^3$$

$$f(x_1) = (2+\sqrt{2})^3$$

$$\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

$$0{,}853(2-\sqrt{2})^3 + 0{,}146(2+\sqrt{2})^3$$

$$= 5{,}98 \approx 6 \checkmark$$

Punto 26

a) Tenemos el intervalo $[0,2]$ y hay que dividirlo en n subintervalos;

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad a=0 \quad y \quad b=2$$

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

b) $x_i = a + i\Delta x = 0 + i\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$,

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- $x_0 = \frac{2\cdot 0}{n} = 0$
- $x_2 = \frac{2\cdot 2}{n} = \frac{4}{n}$
- $x_1 = \frac{2\cdot 1}{n} = \frac{2}{n}$
- $x_3 = \frac{2\cdot 3}{n} = \frac{6}{n}$
- $x_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n}$

c) $f(x_i) = x_i^3$

$$x_i = \frac{2i}{n}$$

$$f(x_i) = \frac{8i^3}{n^3}$$

- $f(x_3) = \left(\frac{2\cdot 3}{n}\right)^3 = \frac{216}{n^3}$
- $f(x_0) = \left(\frac{2\cdot 0}{n}\right)^3 = 0$
- $f(x_1) = \left(\frac{2\cdot 1}{n}\right)^3 = \frac{8}{n^3}$
- $f(x_2) = \left(\frac{2\cdot 2}{n}\right)^3 = \frac{64}{n^3}$

d) $I \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x = 4\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$$

$$f(x_i) = \frac{8i^3}{n^3} \qquad \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{8i^3}{n^3} \cdot \frac{2}{n} = \frac{16}{n^4} \sum_{i=0}^{n-1} i^3$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{(n(n-1))^2}{4}$$

$$I \approx \frac{16}{4} \cdot \frac{(n(n-1))^2}{n^4} = 4 \cdot \left(\frac{n(n-1)}{n}\right)^2$$

$$I \approx 4\left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2}\right)$$

$$I \approx 4\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

g) La suma de Riemann no es la mejor estrategia para aproximar las integrales porque es imprecisa cuando hay pocos subintervalos, porque no considera la variación dentro de los subintervalos y que debido a que se necesitan muchos subintervalos para que sea precisa, el costo computacional es bastante alto.