Statistica 3

Ana Maria Draghici

2101044

Sintesi dei Risultati Numerici Usando metodo di Monte Carlo

1 Introduzione

Nel caso del gioco simulato in questo studio, il metodo di Monte Carlo è impiegato per calcolare la probabilità di vittoria di diverse colonne di un gioco basato sul lancio di dadi. La simulazione consiste nel ripetere numerose volte il processo di gioco, registrando i risultati di ogni partita e utilizzando i dati ottenuti per stimare le probabilità di eventi specifici, come la vittoria di una colonna rispetto a un'altra e la durata media del gioco.

La simulazione è eseguita utilizzando un approccio di simulazione stocastica, dove ad ogni passo vengono lanciati due dadi e viene determinato il movimento delle pedine sulle colonne, fino a quando una pedina non raggiunge la riga di vittoria (riga 19).

Osservazione sulla colonna 1:
La colonna 1, per la struttura del gioco, non può mai vincere. Infatti, la somma di due dadi a sei facce varia da 2 a 12, per cui la pedina della colonna 1 non viene mai mossa. La sua probabilità di vittoria è dunque nulla.

2 Pseudocodice

```
1. Inizializza il numero di simulazioni NUM_SIMULAZIONI
2. Definisci la riga di vittoria RIGA_VITTORIA e il numero di colonne COLONNE_TOTALI
3. Inizializza un contatore per le vittorie della colonna 7 contro la 8
4. Inizializza un array per le vittorie di ogni colonna
5. Inizializza un array per registrare la durata di ogni partita

6. Per ogni simulazione (da 1 a NUM_SIMULAZIONI):
    a. Inizializza le posizioni di tutte le colonne (0 per tutte)
    b. Imposta il numero di turni a 0

    c. Ripeti fino a quando tutte le colonne non raggiungono la riga di vittoria:
```

```
        i.   Aumenta il numero di turni
        ii.  Lancia due dadi (entrambi numeri tra 1 e 6)
        iii. Calcola la somma dei dadi
        iv.  Incrementa la posizione della colonna corrispondente alla somma
             (somma tra 2 e 12)

    d. Aggiungi il numero di turni alla lista delle durate delle partite

    e. Verifica se la colonna 7 ha vinto contro la colonna 8:
        i. Se la colonna 7 ha raggiunto la riga di vittoria prima della colonna 8,
           aumenta il contatore delle vittorie

    f. Identifica la prima colonna che ha raggiunto la riga di vittoria
       e incrementa il contatore della sua vittoria

7. Calcola la probabilità che la colonna 7 vinca contro la 8
8. Calcola la probabilità di vittoria per ogni colonna
9. Calcola la probabilità che la durata della partita sia maggiore di 100 turni e 200 turni
10. Calcola la durata media delle partite

11. Stampa i risultati ottenuti:
    - Probabilità di vittoria della colonna 7 contro la colonna 8
    - Probabilità di vittoria per ogni colonna
    - Probabilità che la durata della partita sia maggiore di 100 e 200 turni
    - Durata media della partita
```

3 Risultati Numerici

(a) **Probabilità che la pedina della colonna 7 arrivi prima di quella della colonna 8:**

$$\hat{P}(T_7 < T_8) = \frac{n.vittoriedellacolonna7}{M}$$

La colonna 7 ha probabilità di movimento maggiore (6/36 vs 5/36), quindi è favorita.

(b) **Probabilità che la pedina della colonna k sia la prima a vincere:**

$$\hat{P}(T_k = \min\{T_1, \ldots, T_{12}\}) = \frac{n.vittoriedellacolonnak}{M}$$

Si ottiene una distribuzione coerente con le probabilità di somma dei dadi. *Le pedine centrali (in particolare la colonna 7) vincono più spesso, perché hanno probabilità di essere mosse più frequentemente.*

(c) **Distribuzione della durata del gioco (in turni):**

$$\hat{P}(T = N) = \frac{n.simulazioniconclusealturnoN}{M}$$

La distribuzione ha un picco intorno a 101 mosse. I giochi troppo brevi o troppo lunghi sono rari.

(d) **Probabilità che il gioco duri più di 100 mosse:**

$$\hat{P}(N > 100) = \frac{n.simulazioniconN > 100}{M}$$

Durate maggiori di 100 sono frequenti.

(e) **Probabilità che il gioco duri più di 200 mosse:**

$$\hat{P}(N > 200) = \frac{n.simulazioniconN > 200}{M}$$

Durate molto lunghe sono eventi rari, per esempio nella simulazione con i parametri usati non si raggiunge mai le 200 mosse.

Osservazione. La durata massima del gioco è limitata anche nei casi più estremi. Supponiamo che la partita sia particolarmente lunga e che tutte le colonne dalla 2 alla 12 abbiano raggiunto esattamente la riga prossima di vittoria, ovvero 18 avanzamenti ciascuna. In tal caso, sono stati necessari $11 \times 18 = 198$ turni complessivi. Poiché in ogni turno avanza al massimo una sola pedina, per far giungere una qualsiasi colonna alla vittoria (cioè per far sì che una colonna superi la riga di vittoria), basta un ulteriore turno. Pertanto, anche nelle condizioni più lente possibili, la durata massima del gioco non può superare i 199 turni.

(f) **Durata media del gioco:**

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} N_i$$

In media, il gioco termina dopo circa 101 turni. Il valore riflette l'equilibrio tra la frequenza dei movimenti e la probabilità che una pedina arrivi alla fine.

4 Conclusioni

Sebbene il metodo consenta di ottenere risultati approssimativi, è importante sottolineare che la precisione delle stime dipende dal numero di simulazioni eseguite. Nel nostro caso, sono state effettuate $M = 10^7$ simulazioni/$M = 10^5$ simulazioni, che hanno richiesto un tempo considerevole per essere completate, soprattutto a causa del grande numero di iterazioni necessarie per ottenere stime affidabili.

È importante ricordare che il metodo di Monte Carlo, essendo basato su simulazioni casuali, fornisce un'approssimazione della soluzione e non una risposta esatta. Aumentando il numero di simulazioni, la stima diventa più precisa, ma a costo di un tempo di esecuzione più lungo.

Analisi dei grafici

- **Grafico 1: Frequenza di selezione delle colonne**

  Questo grafico mostra quante volte ciascuna colonna viene selezionata durante le simulazioni del gioco. Si osserva che alcune colonne, come ad esempio la colonna 2, vengono scelte molto raramente. Questo è coerente con la distribuzione delle somme dei dadi: certe somme (come 2 o 12) sono statisticamente meno probabili, mentre altre (come 6, 7 e 8) compaiono più frequentemente. Di conseguenza, le colonne meno selezionate tendono a ricevere meno incrementi e quindi hanno una probabilità di vittoria molto bassa, il che è un comportamento atteso.

- **Grafico 2: Probabilità di vittoria per colonna**

  In questo grafico viene rappresentata la probabilità che ciascuna colonna risulti vincente al termine di una simulazione. Come previsto, le colonne più frequentemente selezionate (ovvero quelle centrali) presentano una probabilità di vittoria significativamente maggiore rispetto alle colonne meno attivate. Il confronto tra questo grafico e il precedente mette in evidenza una chiara correlazione tra la frequenza di selezione e la probabilità di vittoria.

- **Grafico 3: Probabilità della durata della partita**

  Il terzo grafico mostra la distribuzione della durata delle partite, misurata in numero di mosse. Si tratta quindi della probabilità che una partita termini dopo esattamente N mosse. Partite molto brevi o molto lunghe risultano rare, mentre esiste un intervallo centrale di durate più probabili, che rappresenta il comportamento medio osservato nel corso delle simulazioni.