§ 1. Координаты точки на прямой и на плоскости. Расстояние между двумя точками

1°. Расстояние d между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ на оси:

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}. \tag{1}$$

2°. Величина AB (алгебраическая) *направленного отрезка на оси*:

$$AB = x_2 - x_1. \tag{2}$$

3°. Расстояние d между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

4°. Проекции на оси координат *направленного отрезка*, или *вектора* $\overrightarrow{AB}$ на плоскости с началом $A(x_1; y_1)$ и концом $B(x_2; y_2)$:

$$\text{пр}_x \overrightarrow{AB} = X = x_2 - x_1, \quad \text{пр}_y \overrightarrow{AB} = Y = y_2 - y_1. \tag{4}$$

§ 2. Деление отрезка в данном отношении. Площадь треугольника и многоугольника

1°. Деление отрезка в данном отношении. Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{1}$$

В частности, при делении пополам, т. е. в отношении $\lambda = 1 : 1 = 1$,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{2}$$

2°. Площадь многоугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, ..., $F(x_n; y_n)$ равна

$$S = \pm\frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]. \tag{3}$$

Выражение вида $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ равно $x_1y_2 - x_2y_1$ и называется *определителем второго порядка*[1]).

§ 4. Уравнение прямой: 1) с угловым коэффициентом, 2) общее, 3) в отрезках на осях

1°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Параметр k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox ($k = \operatorname{tg}\alpha$) и называется *угловым коэффициентом*, или иногда *наклоном* прямой. Параметр b — величина отрезка на оси Oy, или *начальная ордината*.

2°. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \tag{2}$$

Особые случаи:

а) при $C = 0$ $y = -\dfrac{A}{B}x$ — прямая проходит через начало координат;

б) при $B = 0$ $x = -\dfrac{C}{A} = a$ — прямая параллельна оси Oy;

в) при $A = 0$ $y = -\dfrac{C}{B} = b$ — прямая параллельна оси Ox;

г) при $B = C = 0$ $Ax = 0$, $x = 0$ — ось Oy;
д) при $A = C = 0$ $By = 0$, $y = 0$ — ось Ox.

3°. Уравнение прямой в отрезках на осях

§ 5. Угол между прямыми. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Точка пересечения двух прямых

1°. Угол φ, отсчитанный против часовой стрелки от прямой $y = k_1x + b_1$ до прямой $y = k_2x + b_2$, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{1}$$

Для прямых, заданных уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

формула (1) примет вид

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Условие *параллельности*: $k_1 = k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Условие *перпендикулярности*: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

2°. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку $A(x_1; y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2}$$

3°. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

4°. Чтобы найти точку пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, нужно решить совместно их уравнения. Получим:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

§ 6. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Уравнения биссектрис. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых

1°. Нормальное уравнение прямой

$$x \cos\beta + y \sin\beta - p = 0, \tag{1}$$

где p — длина перпендикуляра (нормали), опущенного из начала координат на прямую, а β — угол наклона этого перпендикуляра к оси Ox. Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальному виду, нужно все члены его умножить на *нормирующий* множитель $M = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, взятый со знаком, противоположным знаку свободного члена C.

2°. Расстояние d от точки $(x_0; y_0)$ до прямой *найдем, если в левую часть нормального уравнения прямой на место текущих координат подставим координаты* $(x_0; y_0)$ *и полученное число возьмем по абсолютной величине*:

$$d = |x_0 \cos\beta + y_0 \sin\beta - p|, \tag{2}$$

или

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2'}$$

3°. Уравнения биссектрис углов между прямыми $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \tag{3}$$

4°. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых:

$$\alpha(Ax + By + C) + \beta(A_1x + B_1y + C_1) = 0. \tag{4}$$

Можно положить $\alpha = 1$, исключив этим из пучка (4) вторую из данных прямых.

§ 1. Сложение векторов. Умножение вектора на скаляр

1°. Определения. *Вектором* называется *направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ (рис. 13), в котором точка A рассматривается как *начало*, а точка B — как *конец*. Вектор обозначается или указанием его начала и конца $\overrightarrow{AB}$ со стрелкой наверху, или одной какой-нибудь буквой, выделенной полужирным шрифтом, например $\mathbf{a}$. *Модуль* (длина) вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, или $|\mathbf{a}|$, или AB, или a. Векторы, параллельные одной прямой, называются *коллинеарными*. Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными*. Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 13) называются *равными*, если они: 1) имеют *равные модули*; 2) *коллинеарны*; 3) направлены *в одну сторону*.

2°. Умножение вектора на скаляр. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на число* (скаляр) m называется новый вектор, имеющий длину $a|m|$ и направленный одинаково с $\mathbf{a}$ (при $m > 0$) или противоположно $\mathbf{a}$ (при $m < 0$).

3°. Сложение векторов. *Суммой векторов* $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ называется вектор $\mathbf{R} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 14), замыкающий ломаную $OABC$, построенную

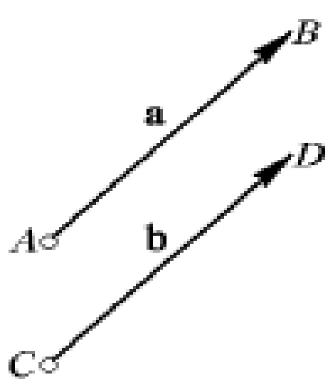

Рис. 13

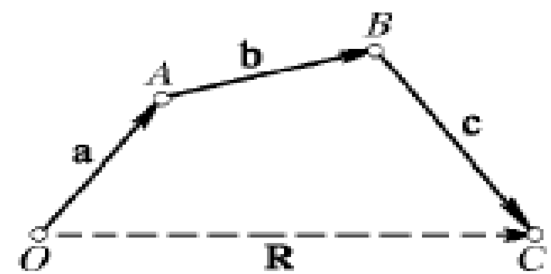

Рис. 14

из данных векторов. В частности, в параллелограмме, построенном на данных векторах $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, одна вектор-диагональ $\overrightarrow{OC}$ есть сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, а другая $\overrightarrow{BA}$ есть разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ данных векторов.

4°. Проекция вектора на ось. Пусть вектор $\mathbf{a}$ составляет угол φ с осью Ox. Тогда *проекция вектора на эту ось* определяется формулой

$$\text{пр}_x\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi = a\cos(\widehat{\mathbf{a}, Ox}).$$

Проекция суммы векторов на ось *равна сумме проекций* составляющих векторов на ту же ось:

$$\text{пр}_x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{пр}_x\mathbf{a} + \text{пр}_x\mathbf{b}.$$

§ 2. Прямоугольные координаты точки и вектора в пространстве

1°. Определение. Пусть даны три взаимно перпендикулярные координатные оси с общим началом O и дана точка M (рис. 17). *Проекции ее радиус-вектора* $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ на оси координат $OM_1 = x$, $OM_2 = y$ и $OM_3 = z$ называются *прямоугольными координатами* точки M или вектора $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$.

2°. Радиус-вектор точки в пространстве. *Модуль* или длина *радиус-вектора* $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1}$$

Единичные векторы координатных осей **i**, **j** и **k** называются *ортами*.

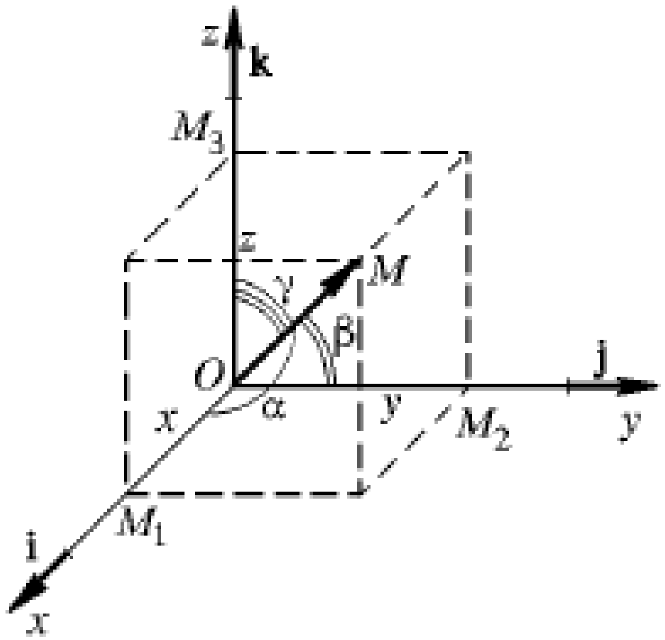

Рис. 17

Радиус-вектор выражается через орты:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{2}$$

3°. Вектор, заданный координатами начала и конца. Пусть даны точки $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Проекции вектора $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ на оси координат будут:

$$\begin{aligned} \text{пр}_x\overrightarrow{AB} &= X = x_2 - x_1, \\ \text{пр}_y\overrightarrow{AB} &= Y = y_2 - y_1, \\ \text{пр}_z\overrightarrow{AB} &= Z = z_2 - z_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Можно написать формулы, аналогичные формулам (1), (2):

$$u = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{4}$$

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}. \tag{5}$$

Если α, β и γ — углы вектора $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ с осями координат, то

$$\cos\alpha = \frac{X}{u}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{u}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{u}, \tag{6}$$

причем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{7}$$

т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна* 1.

Из формул (4)–(6) следует, что вектор $\mathbf{u}$ вполне определяется тремя числами: X, Y и Z — его проекциями или его *координатами*. Поэтому иногда пишут или говорят: дан вектор $\mathbf{u}\{X; Y; Z\}$.

§ 3. Скалярное произведение двух векторов

1°. Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется *произведение их модулей, умноженное на косинус угла между ними.*

Скалярное произведение вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ обозначается $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Итак,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi. \tag{1}$$

Из рис. 18 видно, что $b\cos\varphi = \text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. Поэтому

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi = a\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = b\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \tag{2}$$

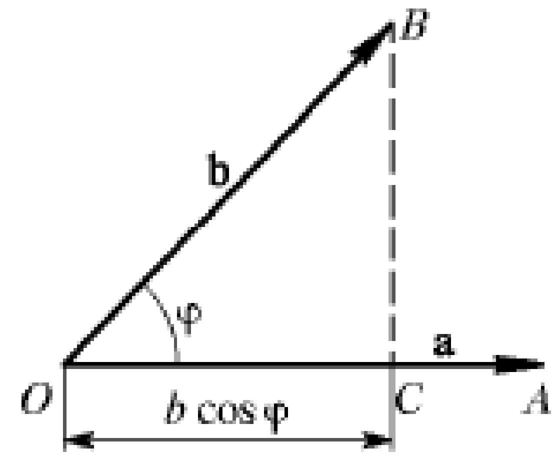

Рис. 18

2°. Свойства скалярного произведения:

I. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ — *переместительный* закон.

II. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ — *распределительный* закон.

III. Если $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$, то $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \pm ab$. В частности, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = aa\cos 0^\circ = a^2$; остюда

$$a = \sqrt{\mathbf{a}^2}. \tag{3}$$

IV. Если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos 90^\circ = 0$.
V. Скалярное произведение ортов:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

VI. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы координатами $\mathbf{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\mathbf{b}\{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{4}$$

3°. Угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{5}$$

Условие *параллельности*: $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$ или $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = m$.

Условие *перпендикулярности*: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ или $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

§ 4. Векторное произведение двух векторов

1°. Определение. *Векторным произведением* вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называется такой *третий вектор* $\mathbf{c}$ (рис. 19), который:

1) имеет *модуль*, численно *равный площади параллелограмма*, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

2) *перпендикулярен* к плоскости параллелограмма;

3) *направлен в такую сторону*, с которой кратчайшее *вращение от* $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ рассматривается совершающимся *против часовой стрелки*. Такое расположение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется *правой связкой*.

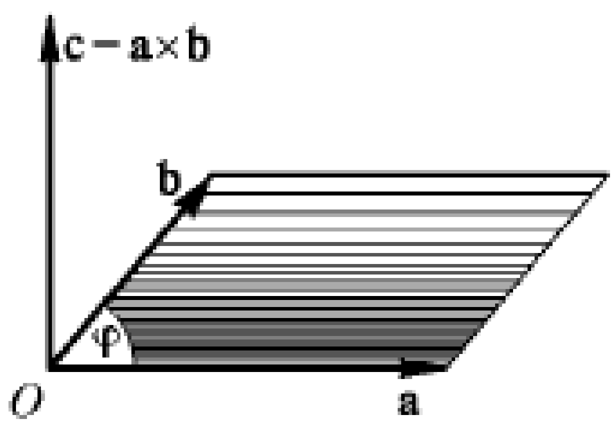

Рис. 19

Векторное произведение обозначается $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Итак,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

если:

1) $c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \varphi$,

2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$,

3) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ составляют *правую* связку.

2°. Свойства векторного произведения:

I. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

II. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ — *распределительный закон*.

III. Если $\mathbf{a} \| \mathbf{b}$, то $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$; в частности, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

3°. Векторные произведения ортов:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \tag{1}$$

Вообще произведение любых двух смежных векторов в последовательности

$$\overrightarrow{\mathbf{i}\underset{-}{\mathbf{j}}}\,\underleftarrow{\mathbf{k}\overset{+}{\mathbf{i}}\mathbf{j}}$$

дает следующий вектор со знаком $+$, а в обратной последовательности — со знаком $-$.

§ 5. Смешанное произведение трех векторов

1°. Определение. *Смешанным произведением* векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется выражение вида $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ заданы своими координатами, то

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

2°. Свойства смешанного произведения.

I. От перестановки двух любых сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b} = -(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}. \qquad (2)$$

II. Если два из трех данных векторов равны или параллельны, то их смешанное произведение равно 0.

III. Знаки операций «точка» и «крест» можно поменять местами, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$; поэтому смешанное произведение принято записывать в виде $\mathbf{abc}$, т. е. без знаков действий и без скобок.

3°. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

$V = \pm\mathbf{abc}$ (+ при правой связке, − при левой связке).

Объем пирамиды, построенной на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

$$V_{\text{пир}} = \pm\frac{1}{6}\mathbf{abc}.$$

4°. Условие компланарности. Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ *компланарны*, то $\mathbf{abc} = 0$, и обратно. При этом между $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ существует *линейная зависимость* вида $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$.