ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Потоки в сетях

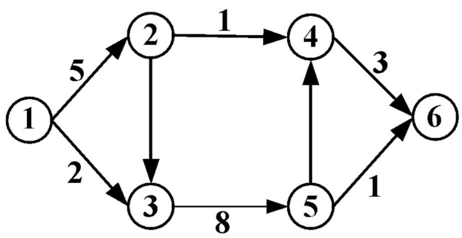
Рассмотрим задачу максимизации потока некоторого продукта по сети. Подобного рода задачи возникают при организации перекачки нефти или газа по трубопроводам, железнодорожного или автомобильного движения, передачи информации по сетям и т.д. Приведём необходимые определения, формализующие соответствующие предметные области.

Сетью называется ориентированный граф без циклов с помеченными вершинами и дугами. Числа, которыми помечаются дуги сети, называются **пропускными способностями** дуг.

- Примеры вершин сети: перекрёстки дорог, телефонные узлы, железнодорожные узлы, аэропорты, склады и т.д.
- Примеры дуг сети: дороги, трубы, телефонные и железнодорожные линии и т.д.

Сеть, у которой существует ровно один **исток**[1] и один **сток**[2], называется **транспортной сетью**.

Пример транспортной сети:



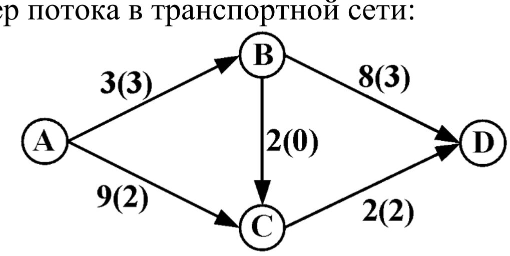
Вершина 1 является истоком,
а вершина 6 — стоком.

Потоком в транспортной сети называется неотрицательная функция, определённая на множестве дуг сети, удовлетворяющая двум условиям:

1) величина потока по каждой дуге не превосходит её пропускной способности;
2) сумма потоков, входящих в каждую вершину сети, за исключением истока и стока, равна сумме потоков, выходящих из вершины.

Величина потока есть сумма потоков, выходящих из истока, или сумма потоков, входящих в сток сети.

Пример потока в транспортной сети:



Без скобок указаны пропускные способности дуг,
в скобках — потоки на дугах,
A — исток, D — сток сети,
величина потока = 3 + 2 = 5.

Для любой транспортной сети величина потока имеет максимальное значение, которое определяется теоремой Форда – Фалкерсона, которая утверждает, что величина максимального потока в сети равна величине минимального разреза, где

разрезом транспортной сети называется такое множество дуг, удаление которых отделяет исток от стока.

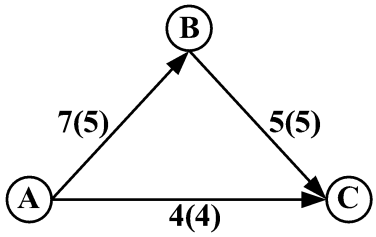
---

[1] Истоком орграфа называется вершина, в которую не входит ни одна дуга.

[2] Стоком орграфа называется вершина, из которой не выходит ни одна дуга.

минимальным разрезом транспортной сети называется разрез с минимальной пропускной способностью.

Пример. Транспортная сеть

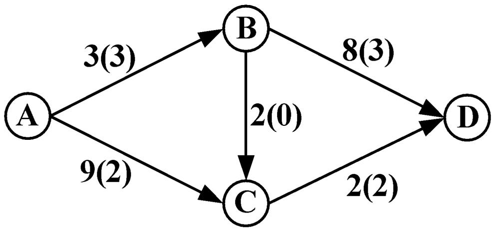


имеет два разреза $\{(A,B),(A,C)\}$ и $\{(A,C),(B,C)\}$. Пропускная способность первого разреза равна 11 (7+4), а второго – 9 (4+5), поэтому максимальный поток в этой транспортной сети равен 9 = min(11, 9). Этот максимальный поток указан в круглых скобках.

4.1. Алгоритм построения максимального потока в транспортной сети

Цепью, соединяющей исток A_0 **со стоком** A_n, (или просто **цепью**) в транспортной сети называется последовательность дуг A_0A_1, …, $A_{n-1}A_n$, в которой вершина A_i является началом i-ой дуги, а вершина A_{i+1} – её концом (или, наоборот, A_i является концом i-ой дуги, а вершина A_{i+1} – её началом).

Например, в следующей сети с заданным в скобках потоком



цепями являются последовательности AB, BC, CD и AC, CB, BD, причём в первой цепи направление дуги BC совпадает с направлением потока, а во второй цепи направление дуги CB противоположно направлению потока.

Определение. Дуга цепи называется **допустимой дугой**, если:

1) направление дуги совпадает с направлением потока и поток по этой дуге меньше её пропускной способности;
2) направление дуги противоположно направлению потока и поток по этой дуге больше нуля.

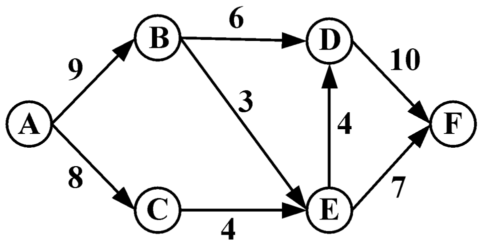
Цепь, соединяющая исток сети со стоком, называется **увеличивающей**, если все её дуги являются допустимыми.

Алгоритм построения максимального потока в сети

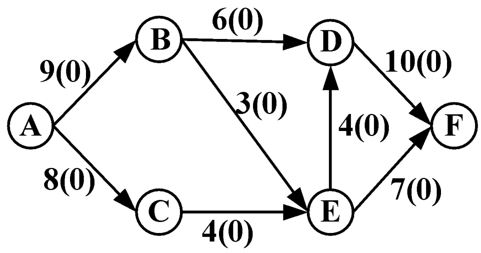
1. Если поток в сети не задан,
   то считать поток нулевым.
2. Пока в сети есть увеличивающие цепи повторять:
   - взять любую увеличивающую цепь,
   - вычислить наименьшую разность δ между пропускными способностями дуг этой цепи и потоками по этим дугам,
   - потоки по дугам, направление которых совпадает с направлением потока, увеличить на δ,
   - потоки по дугам, направление которых противоположно направлению потока, уменьшить на δ,
3. Если в сети нет увеличивающих цепей,
   то максимальный поток построен.

Пример 1 (Поток в сети не задан). Построить максимальный поток для заданной транспортной цепи.

Данная сеть:



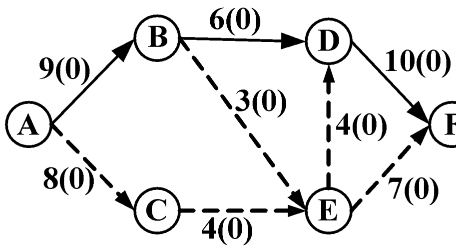
Сеть с нулевым потоком:



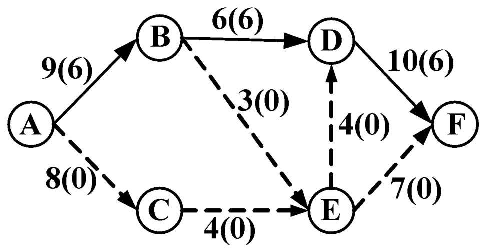
Решение.

1. Поток в сети не задан, считаем его нулевым.
2. Пока в сети есть увеличивающие цепи, повторяем:

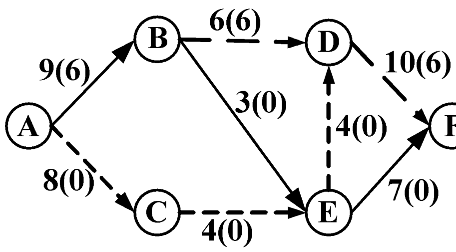
<u>Увеличивающая цепь: AB, BD, DF</u>; направление дуг совпадает с направлением потока, $\delta = \min(9 - 0, 6 - 0, 10 - 0) = 6$.



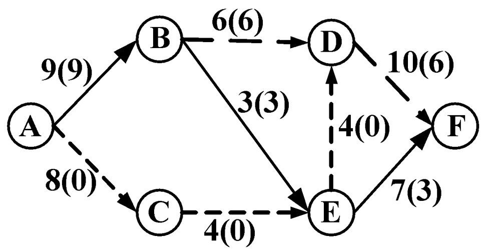
<u>Новые потоки по дугам цепи</u>: AB: 0+6=6, BD: 0+6 = 6, DF: 0+6=6:



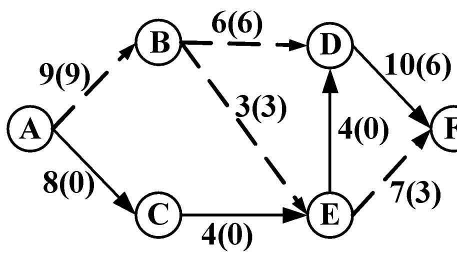
<u>Увеличивающая цепь: AB, BE, EF</u>; направление дуг совпадает с направлением потока, $\delta = \min(9 - 6, 3 - 0, 7 - 0) = 3$.



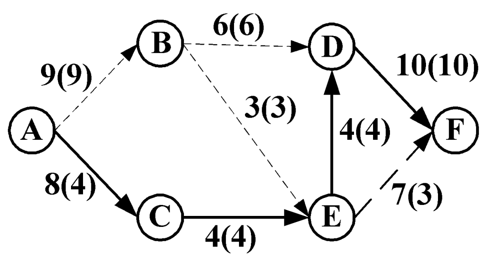
<u>Новые потоки по дугам цепи</u>: AB: 6 + 3 = 9, BE: 0 + 3 = 3, EF: 0 + 3 = 3:



<u>Увеличивающая цепь: AC, CE, ED, DF</u>; направление дуг совпадает с направлением потока, $\delta = \min(8 - 0, 4 - 0, 4 - 0, 10 - 6) = 4$.



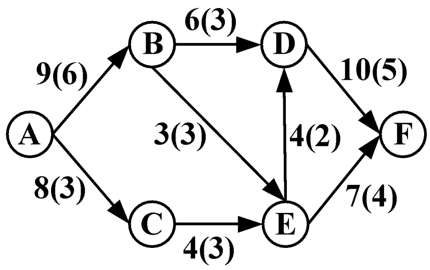
<u>Новые потоки по дугам цепи</u>: AC: 0 + 4 = 4, CE: 0 + 4 = 4, ED: 0 + 4 = 4, DF: 6 +4 = 10:



Увеличивающих цепей в сети нет, поэтому максимальный поток построен и он равен 13 = 9 + 4 = 10 + 3.

Пример 2 (Поток в сети задан). Построить максимальный поток для заданной транспортной цепи.

Сеть с заданным потоком:

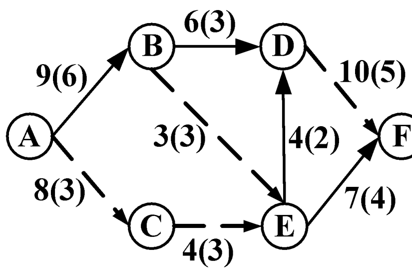


Решение.

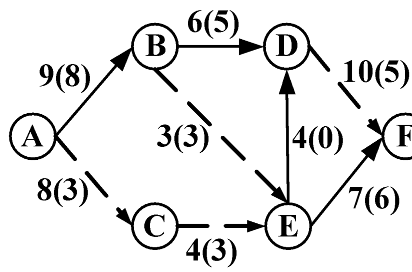
1. Поток в сети задан.

2. Пока в сети есть увеличивающие цепи, повторяем:

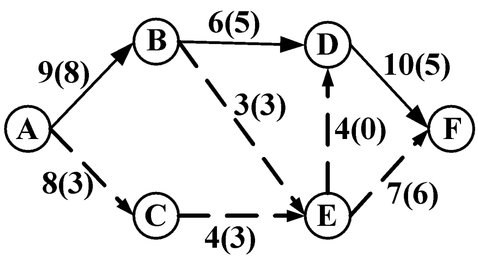
Увеличивающая цепь: AB, BD, DE, EF;
направление дуги DE противоположно потоку, направление остальных дуг совпадает с направлением потока,
δ = min(9 – 6, 6 – 3, 4 – 2, 7 – 4) = 2.



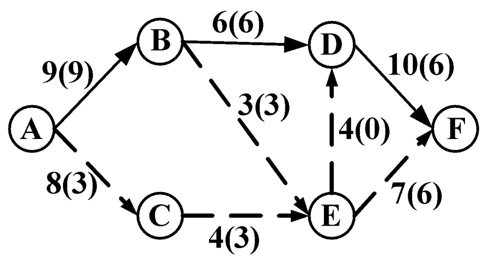
Новые потоки по дугам цепи:
AB: 6 + 2 = 8, BD: 3 + 2 = 5,
DE: 2 – 2 = 0, EF: 4 + 2 = 6:



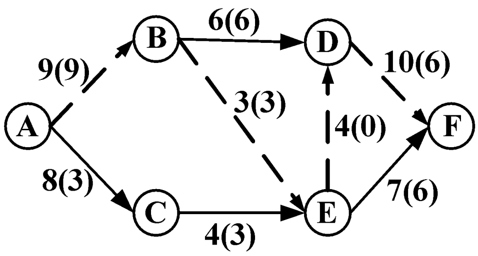
Увеличивающая цепь: AB, BD, DF;
направление дуг совпадает с направлением потока,
δ = min(9 – 8, 6 – 5, 10 – 5) = 1.



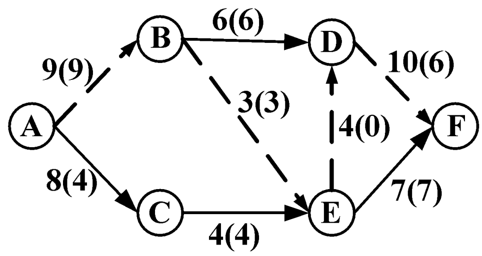
Новые потоки по дугам цепи:
AB: 8 + 1 = 9, BD: 5 + 1 = 6,
DF: 5 + 1 = 6:



Увеличивающая цепь: AC, CE, EF;
направление дуг совпадает с направлением потока,
δ = min(8 – 3, 4 – 3, 7 – 6) = 1.



Новые потоки по дугам цепи:
AC: 3+ 1 = 4, CE 3+ 1 = 4,
EF: 6 + 1 = 7:



Увеличивающих цепей в сети нет, поэтому максимальный поток построен и он равен 13 = 9 + 4 = 10 + 3.

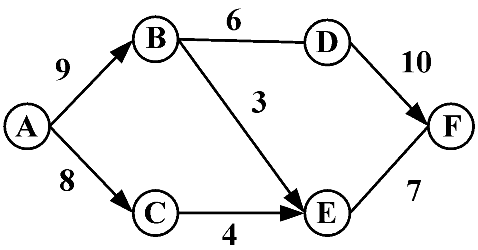
Примечание. Обратите внимание на то, что сети в примерах 1 и 2 и максимальные потоки по ним совпадают, а потоки по некоторым дугам различаются, например, в примере 1 поток по дуге DF равен 10, а в примере 2 по этой же дуге равен 6.

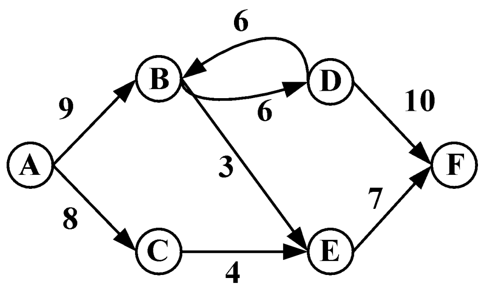
4.2. Построение максимального потока в сетях с неориентированными дугами

Для построения максимального в сетях с неориентированными дугами поступают следующим образом:

- каждую неориентированную дугу (ребро) сети, не выходящую из источника и не входящую в сток, заменяют парой противоположно направленных дуг с той же пропускной способностью, что и заменяемое ребро;
- каждую неориентированную дугу с началом в источнике заменяют на ориентированную, выходящую из источника;
- каждую неориентированную дугу с концом в стоке заменяют на ориентированную, входящую в сток;
- применяют алгоритм построения максимального потока в сетях, изложенный в разделе 4.1.

Пример сети с неориентированными дугами (BD и EF) и соответствующей ей сети с ориентированными дугами:



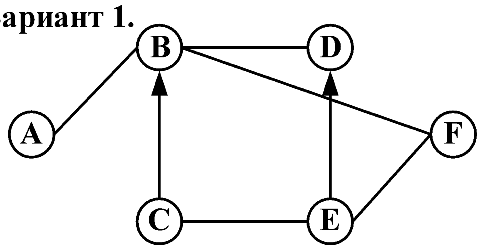


Индивидуальные задания

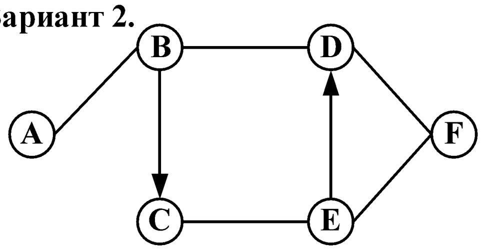
Задание.

1. Самостоятельно задать пропускные способности дуг и построить максимальный поток в транспортной сети.
2. Найти минимальный разрез сети и проверить справедливость теоремы Форда – Фалкерсона.

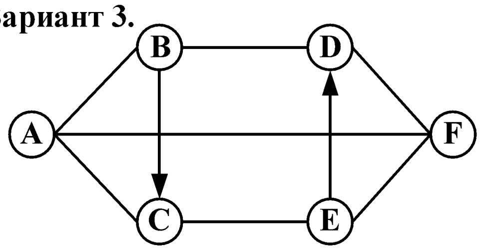
Вариант 1.



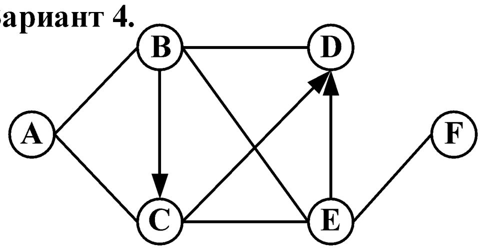
Вариант 2.



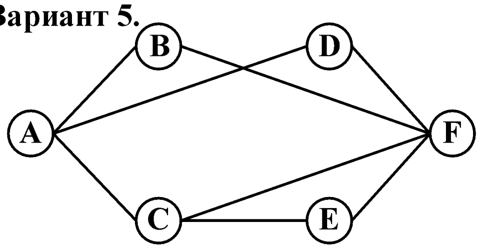
Вариант 3.



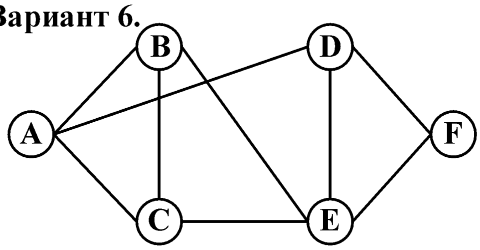
Вариант 4.



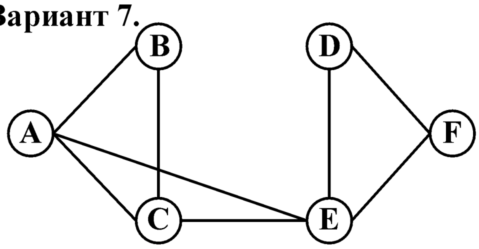
Вариант 5.



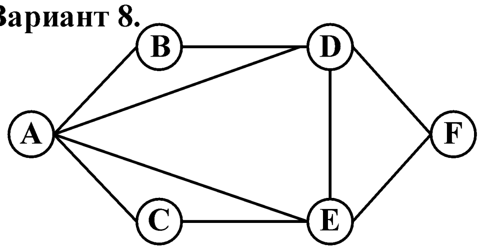
Вариант 6.



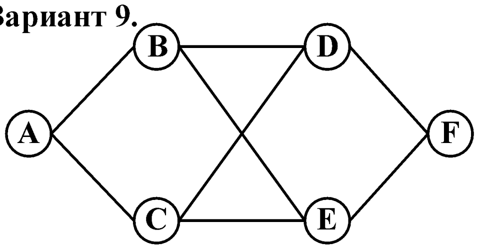
Вариант 7.



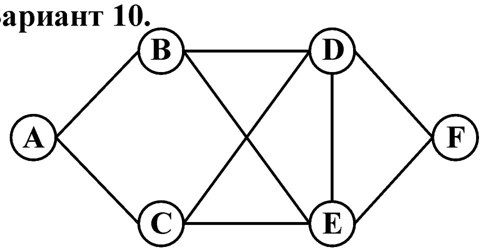
Вариант 8.



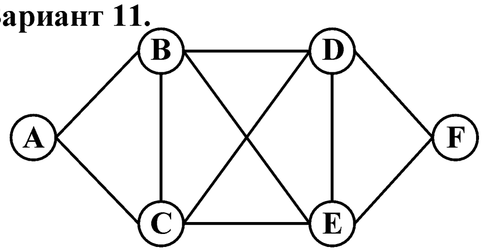
Вариант 9.



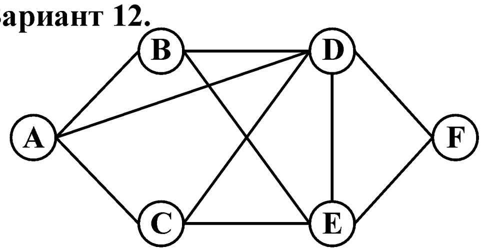
Вариант 10.



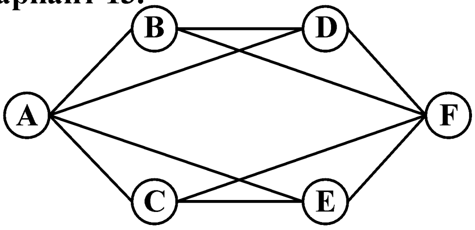
Вариант 11.



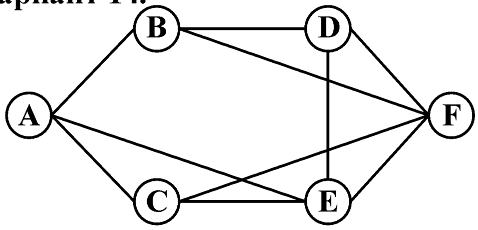
Вариант 12.



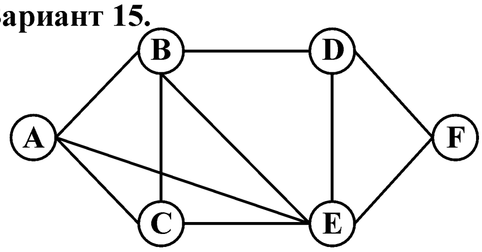
Вариант 13.



Вариант 14.



Вариант 15.



Вариант 16.