Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Кафедра информатики и прикладной математики

Вычислительная математика

Лабораторная работа №2

Вычилсение интегралов методом прямоугольников

Выполнил: **Шкаруба Н.Е.**

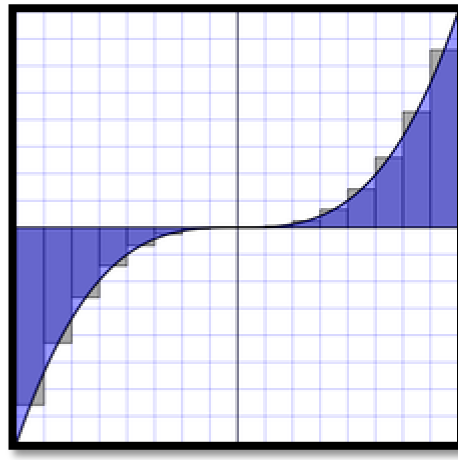
Проверил: **Петрова М.**

группа: **P3218**

год: **2015**

Метод прямоуглльников

1. Описание метода



Метод прямоугольников — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на многочлен нулевой степени, то есть константу, на каждом элементарном отрезке. Если рассмотреть график подынтегральной функции, то метод будет заключаться в приближённом вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольников, ширина которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота — значением подынтегральной функции в этих узлах

Если отрезок [a, b] разбиваем на N элементарных отрезков, то получаем следующие *составные квадратурные формулы:*

Для левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Для правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Для средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i-x_{i-1}).$$

Формулу с вычислением значения в средней между двумя узлами точке можно применять лишь тогда, когда подынтегральная функция задана аналитически, либо каким-нибудь иным способом, допускающим вычисление значения в произвольной точке. На чем больше отрезков разбивать подынтегральную сумму, тем большей будет точность.

Погрешность вычисляется по **правилу Рунге**:
Интеграл вычисляется по выбранной формуле (прямоугольников, трапеций, парабол Симпсона) при числе шагов, равном n, а затем при числе шагов, равном 2n.
Погрешность вычисления значения интеграла при числе шагов, равном 2n, определяется по формуле Рунге: $\Delta_{2n} = \frac{1}{3}|I_{2n} - I_n||$

2. Листинг программы

```
double ComputeIntegral(double(*y)(double x), double lowBound, double topBound, double atomRang) {
    if (lowBound == topBound)
        return 0;
    if (lowBound > topBound)
        swap(lowBound, topBound);

    double sum = 0;
    for (double x = lowBound; x <= topBound; x += atomRang)
        sum += y(x) * atomRang;

    return sum;
}
```

3. Примеры работы программы

```
void runComputeIntegralTests() {
    // triangle: 1\2*h*w
    double atomRang = 0.100;
    double lowBound = -3;
    double topBound = 3;
    double testResult = 0;

    // common
    // Input: I = 9
    testResult = ComputeIntegral([](double x) { return -abs(x) + 3; }, lowBound, topBound, atomRang);
    assert(testResult >= 9 - atomRang && testResult <= 9 + atomRang);

    // reversed
    // Input: I = 9
    testResult = ComputeIntegral([](double x) { return -abs(x) + 3; }, topBound, lowBound, atomRang);
    assert(testResult >= 9 - atomRang && testResult <= 9 + atomRang);

    // lowBound == upBound
    // Input: I = 0
    testResult = ComputeIntegral([](double x) { return -abs(x) + 3; }, lowBound, lowBound, atomRang);
    assert(testResult == 0);

    // y(x) = -y(x)
    // Input: I = 0
    testResult = ComputeIntegral([](double x) { return x; }, topBound, lowBound, atomRang);
    assert(testResult >= 0 - atomRang && testResult <= 0 + atomRang);
}
```

4. Вывод

Я применил наконец-таки математику на практике, познакомившись с вычислениями интегралов методом прямоугольников. Это просто.