Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Кафедра информатики и прикладной математики

Вычислительная математика

Лабораторная работа №1

Метод Гаусса-Зейделя

Выполнил: **Шкаруба Н.Е.**

Проверил: **Петрова М.**

группа: **P3218**

год: **2015**

Метод Гаусса-Зейделя

1. Описание метода

Метод используется для решения систем линейных уравнений, которая в матричном виде записывается как: aX = b, где a – матрица коэффициентов, б = матрица результатов

Предположим, что диагональные элементы матриц A исходной системы не равны 0 ($a_{ii} \neq 0$, i = 1, 2, …, n). Разрешим первое уравнение системы относительно x_1, второе относительно x_2 и т.д. Получим следующую эквивалентную систему, записанную в скалярном виде (1)

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left(f_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m)\right)\\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(f_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m)\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m &= \frac{1}{a_{mm}}\left(f_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m,m-1}x_{m-1})\right)
\end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(f_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \ldots + a_{1m}x_m^{(k)})\right)\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(f_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \ldots + a_{2m}x_m^{(k)})\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{mm}}\left(f_m - (a_{m1}x_1^{(k)} + a_{m2}x_2^{(k)} + \ldots + a_{m,m-1}x_{m-1}^{(k)})\right)
\end{aligned} \quad (2)$$

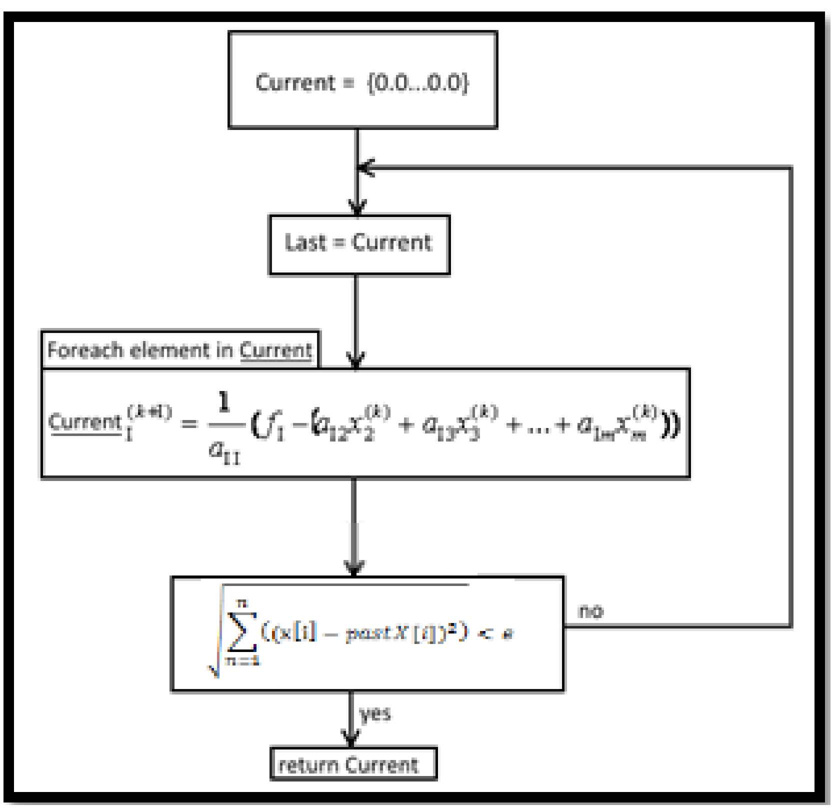
Теперь, задав нулевое приближение ($X_i^{(0)} = 0$) , по рекуррентным соотношениям можем выполнять итерационный процесс, до необходимой точности, а именно в виде (2)

Условие сходимости в математическом виде:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

и хотя бы для одного i неравенство строгое. Другими словами, модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов (свободные члены не рассматриваются).

2. Блок схема



3. Исходный код

```
bool dDominance(float** arr, size_t size) {
	for (size_t i = 0; i < size; i++) {
		double sum = 0;
		for(size_t j = 0; j < size; j++)
			if (j != i)
				sum += abs(arr[i][j]);

		if (abs(arr[i][i]) > sum)
			return true;
	}
	return false;
}

bool converge(float* first, float* second, size_t size, float precision) {
	float norm = 0;

	for (int i = 0; i < size; i++)
		norm += (first[i] - second[i]) * (first[i] - second[i]);

	return (sqrt(norm) < precision);
}

float* GaussSeidel(float** a, float* b, size_t size, float precision) {
	// aX = b

	float* X = new float[size];
	float* pastX = new float[size];

	do {
		for (size_t i = 0; i < size; i++)
		pastX[i] = X[i];

		for (int i = 0; i < size; i++) {
			double var = 0;
			for (int j = 0; j < i; j++)
				var += a[i][j] * X[j];
			for (int j = i + 1; j < size; j++)
				var += a[i][j] * pastX[j];

			X[i] = (b[i] - var) / a[i][i];
		}
	} while (!converge(X, pastX, size, precision));

	return X;
}
```

Суть:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11} \cdot x_1^{(k)} + \alpha_{12} \cdot x_2^{(k)} + \alpha_{13} \cdot x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21} \cdot \boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{22} \cdot x_2^{(k)} + \alpha_{23} \cdot x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n} \cdot x_n^{(k)} + \beta_2, \\ x_3^{(k+1)} = \alpha_{31} \cdot \boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{32} \cdot \boxed{x_2^{(k+1)}} + \alpha_{33} \cdot x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{3n} \cdot x_n^{(k)} + \beta_3, \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1} \cdot \boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{n2} \cdot \boxed{x_2^{(k+1)}} + \alpha_{n3} \cdot \boxed{x_3^{(k+1)}} + \ldots + \alpha_{n\,n-1} \cdot \boxed{x_{n-1}^{(k+1)}} + \alpha_{nn} \cdot x_n^{(k)} + \beta_n. \end{cases}$$

4. **Пример работы программы**:
   a = {{8, 4, 2}, {3, 5, 1}, {3, -2, 10}};
   b = {10, 5, 4}
   precision = 0.001
   result **X** = {1.037694557436856, 0.34617439021949198, 0.15800937201227178}

5. **Вывод**: