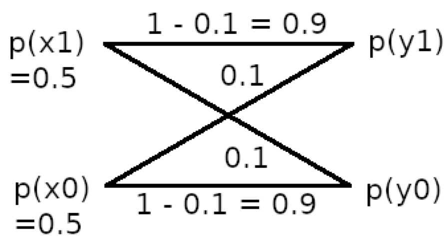
Informations und Kommunkationstherorie - Aufgabensammlung Lösungen

3. Übertragungskanal

3.1. Diskrete Kanalmodelle

Aufgabe 1

a)



$$\begin{aligned} p(y_0) &= 0.5 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.5 \\ p(y_1) &= 0.5 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.5 \end{aligned}$$

$$H(Y) = \log_2 2 = 1 \frac{bit}{KZ}$$

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_i p(x_i) \cdot (\sum_j p(y_j|x_i) \cdot log_2 \frac{1}{p(y_j|x_i)}) \frac{bit}{KZ} \\ &= 2 \cdot 0.5 \cdot (0.9 \cdot \log_2 \frac{1}{0.9} + 0.1 \log_2 \frac{1}{0.1}) \\ &= 0.47 \frac{bit}{KZ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_T &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= 0.53 \frac{bit}{KZ} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
p(y_0) &= 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.1 = 0.26 \\
p(y_1) &= 0.8 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.74
\end{aligned}
$$

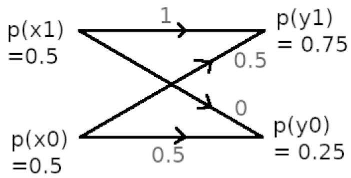
$$
\begin{aligned}
H(Y) &= \sum_{j=1}^{M} p(y_j) \cdot log_2 \frac{1}{p(y_j)} \\
&= 0.26 \cdot \log_2 \frac{1}{0.26} + 0.74 \cdot \log_2 \frac{1}{0.74} \\
&= 0.83
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= \sum_i p(x_i) \cdot (\sum_j p(y_j|x_i) \cdot log_2 \frac{1}{p(y_j|x_i)}) \\
&= 0.2 \cdot (0.9 \cdot \log_2 \frac{1}{0.9} + 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1}) + 0.8 \cdot (0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.9 \cdot \log_2 \frac{1}{0.9}) \\
&= 0.47
\end{aligned}
$$

$$
H_T = 0.36 \frac{bit}{KZ}
$$

Aufgabe 2

a)



$$
\begin{aligned}
p(y_0) &= 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 \\
p(y_1) &= 1 - p(y_0) = 0.75
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= 0.75 \cdot \log_2 \frac{1}{0.75} + 0.25 \cdot \log_2 \frac{1}{0.25} \\
&= 0.81
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= 0.5 \cdot (0.5 \cdot \log_2 \frac{1}{0.5} + 0.5 \cdot \log_2 \frac{1}{0.5}) + 0.5 \cdot (1 \cdot \log_2 \frac{1}{1}) \\
&= 0.5
\end{aligned}
$$

$$
H_T = 0.81 - 0.5 = 0.31 \frac{bit}{KZ}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
p(y_0) &= 0.5 \cdot \frac{4}{5} = 0.4 \\
p(y_1) &= 1 - p(y_0) = 0.6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= 0.4 \cdot \log_2 \frac{1}{0.4} + 0.6 \cdot \log_2 \frac{1}{0.6} \\
&= 0.97
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= \frac{4}{5} \cdot (2 \cdot 0.5 \cdot \log_2 \frac{1}{0.5}) + \frac{1}{5} \cdot (1 \cdot \log_2 1) \\
&= 0.8
\end{aligned}
$$

$$
H_T = 0.97 - 0.8 = 0.17 \frac{bit}{KZ}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
p(y_0) &= 0.5 \cdot \frac{9}{10} = 0.45 \\
p(y_1) &= 1 - p(y_0) = 0.55
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= 0.45 \cdot \log_2 \frac{1}{0.45} + 0.55 \cdot \log_2 \frac{1}{0.55} \\
&= 0.99
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= \frac{9}{10} \cdot (2 \cdot 0.5 \cdot \log_2 \frac{1}{0.5}) + \frac{1}{10} \cdot (1 \cdot \log_2 1) \\
&= 0.9
\end{aligned}
$$

$$
H_T = 0.99 - 0.9 = 0.09 \frac{bit}{KZ}
$$

Aufgabe 3

a)

- Da $H(Y)$ maximal sein soll ist $p(y_0) = 0.5 = p(y_1)$
- Zur Berechnung von $p(x_0)$ und $p(x_1)$ wird ein LGS aufgestellt und gelöst

LGS

$$
\begin{array}{l}
p(y_0) = 0.8 \cdot p(x_0) \\
p(y_1) = 0.2 \cdot p(x_0) + 1 \cdot p(x_1) \\
\hline
p(x_0) = \frac{p(y_0)}{0.8} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625 \\
p(x_1) = 1 - p(x_0) = 0.375
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= 0.625 \cdot (0.8 \cdot \log_2 \frac{1}{0.8} + 0.2 \cdot \log_2 \frac{1}{0.2}) + 0.375 \cdot (1 \cdot \log_2 1) \\
&= 0.45
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= 2 \cdot 0.5 \cdot \log_2 2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
H_T = 1 - 0.45 = 0.55 \frac{bit}{KZ}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
p(y_0) &= 0.5 \cdot 0.8 = 0.4 \\
p(y_1) &= 0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 1 = 0.6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= 0.4 \cdot \log_2 \frac{1}{0.4} + 0.6 \cdot \log_2 \frac{1}{0.6} \\
&= 0.97
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= 0.5 \cdot (0.8 \cdot \log_2 \frac{1}{0.8} + 0.2 \cdot \log_2 \frac{1}{0.2}) + 0.5 \cdot (1 \cdot \log_2 1) \\
&= 0.36
\end{aligned}
$$

$$H_T = 0.97 - 0.36 = 0.61 \frac{bit}{KZ}$$

Aufgabe 4

a)

$$
\begin{aligned}
p(y_0) &= 0.5 \cdot (1 - \epsilon - \delta) + 0.5 \cdot \epsilon = 0.5 \cdot (1 - \delta) \\
p(y_1) &= 0.5 \cdot (1 - \epsilon - \delta) + 0.5 \cdot \epsilon = 0.5 \cdot (1 - \delta) \\
p(y_{AZ}) &= 0.5 \cdot \delta \cdot 2 = \delta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= 2 \cdot 0.5 \cdot (1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{0.5 \cdot (1 - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta} \\
&= (1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{0.5 \cdot (1 - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta} && |ausklammern \\
&= (1 - \delta) \cdot \log_2 2 + (1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta} && |k\ddot{u}rzen \\
&= (1 - \delta) + (1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= 2 \cdot 0.5 \cdot ((1 - \epsilon - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \epsilon - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta} + \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon}) \\
&= (1 - \epsilon - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \epsilon - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta} + \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_T &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= ((1 - \delta) + (1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta}) - ((1 - \epsilon - \delta) \cdot ld \frac{1}{(1 - \epsilon - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta} + \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon}) && |k\ddot{u}rzen : \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta} \\
&= (1 - \delta) + (1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \delta)} - \epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} - (1 - \epsilon - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \epsilon - \delta)}
\end{aligned}
$$

b)

nur $H(Y|X)$ muss neu berechnet werden -> $H(Y), p(y_0), p(y_1), p(y_{AZ})$ bleiben gleich

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= 2 \cdot 0.5 \cdot (1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta} \\
&= (1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_T &= (1 - \delta) + (1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta} - ((1 - \delta) \cdot \log_2 \frac{1}{(1 - \delta)} + \delta \cdot \log_2 \frac{1}{\delta}) && |k\ddot{u}rzen \\
&= (1 - \delta)
\end{aligned}
$$

Man kann die Gleichung aus a) ableiten in dem $\epsilon = 0$ gesetzt wird.

Aufgabe 5

Berchnung mittels $p(y_j|x_i)$:

$$\begin{aligned}
p(y_0) &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \\
p(y_1) &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \\
p(y_2) &= 0
\end{aligned}$$

$$H(Y) = \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 + \frac{2}{3} \cdot \log_2 \frac{3}{2} \qquad = 0.918$$

$$H(Y|X) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 \cdot \log_2 1) = 0$$

$$H_T = 0.918$$

Berechnung mittels $p(x_i|y_j)$:

$$\begin{aligned}
p(x_i, y_j) &= p(x_i) \cdot p(y_j|x_i) \\
p(x_i, y_j) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$$

$$p(x_i|y_j) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

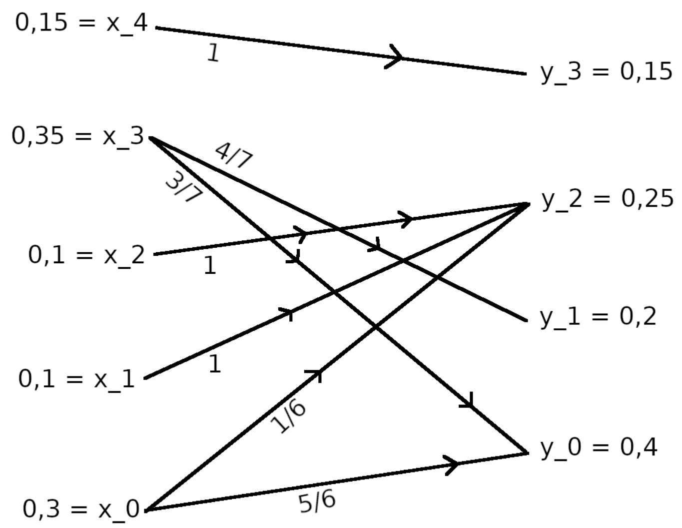
$$\begin{aligned}
p(x_0) &= 0.5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\
p(x_1) &= 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\
p(x_2) &= 0.5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$H(X) = \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 \cdot 3 = 1.58$$

$$\begin{aligned}
H(X|Y) &= \sum_j p(y_j) \cdot \sum_i p(x_i|y_j) \cdot log_2 \frac{1}{p(x_i|y_j)} \\
&= \frac{2}{3} \cdot (0.5 \cdot \log_2 2 + 0.5 \cdot \log_2 2) \\
&= \frac{2}{3} \\
H_T &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= 1.58 - \frac{2}{3} \\
&= 0.92
\end{aligned}$$

Alle Eregnisse wurden gerundet! Bei genauerer Berechnung kann sich eine Differenz zum aktuellen Ergebiss ab der 2ten Stelle ergeben.

Aufgabe 6



$$p(x_0) = 0.3, p(x_1) = 0.1, p(x_2) = 0.1, p(x_3) = 0.35, p(x_4) = 0.15$$

$$p(y_0) = 0.4, p(y_1) = 0.2, p(y_2) = 0.25, p(y_3) = 0.15$$

Die Berechnung von $p(x_0), p(x_1), \ldots$ wird über die Addition der jeweiligen Zeile berechnet.

Für die Wahrscheinlichkeiten $p(y_0), p(y_1), \ldots$ wird die jeweilige Spalte addiert.

$$\begin{aligned} H(X) &= 0.3 \cdot \log_2 \frac{1}{0.3} + 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} \cdot 2 + 0.35 \cdot \log_2 \frac{1}{0.35} + 0.15 \cdot \log_2 \frac{1}{0.15} \\ &= 2.13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= 0.4 \cdot \log_2 \frac{1}{0.4} + 0.2 \cdot \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.25 \cdot \log_2 \frac{1}{0.25} + 0.15 \cdot \log_2 \frac{1}{0.15} \\ &= 1.90 \end{aligned}$$

Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten mittels der Formeln:

$p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)}$ und $p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i,y_j)}{p(y_j)}$

$$p(y_j|x_i) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad p(x_i|y_j) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
H(X|Y) &= 0.4 \cdot (\frac{5}{8} \cdot \log_2 \frac{8}{5} + \frac{3}{8} \cdot \log_2 \frac{8}{3}) + 0.2 \cdot (1 \cdot \log_2 1) + 0.25 \cdot (\frac{1}{5} \cdot \log_2 \frac{5}{1} + \frac{2}{5} \cdot \log_2 \frac{5}{2} + \frac{2}{5} \cdot \log_2 \frac{5}{2}) + 0.15 \cdot (1 \cdot \log_2 1) \\
&= 0.76
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= 0.3 \cdot (\frac{5}{6} \cdot \log_2 \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \cdot \log_2 \frac{6}{1}) + 0.1 \cdot (1 \cdot \log_2 1) \cdot 2 + 0.35 \cdot (\frac{3}{7} \cdot \log_2 \frac{7}{3} + \frac{4}{7} \cdot \log_2 \frac{7}{4}) + 0.15 \cdot (1 \cdot \log_2 1) \\
&= 0.54
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_T &= H(Y) - H(Y|X) = 1.90 - 0.54 \\
H_T &= H(X) - H(X|Y) = 2.13 - 0.76 \\
H_T &= 1.36 \frac{bit}{KZ}
\end{aligned}
$$

Achtung bei der genauen Berechnung der letzen Gleichung kommt es zu kleinen Abweichungen durch Rundungen!