Informations und Kommunikationstheorie - Aufgabensammlung Lösung

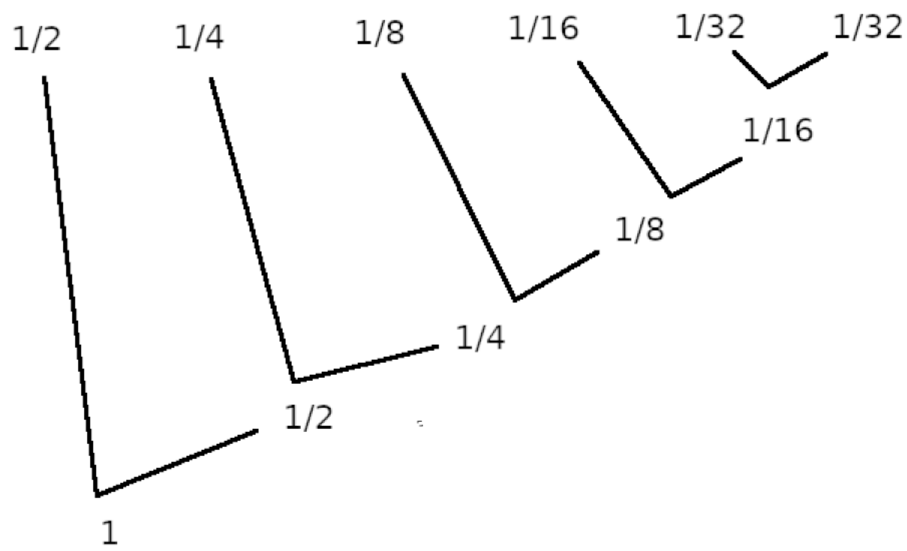
2. Quellenkodierung

1. Aufgabe

Shannon-Verfahren:

<table>
<tr><th>Wahrscheinlichkeit</th><th>1. Stufe</th><th>2.Stufe</th><th>3. Stufe</th><th>4. Stufe</th><th>5. Stufe</th><th>Code</th><th>Länge</th><th>Lm</th></tr>
<tr><td>½</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td><td>1</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>¼</td><td rowspan="5">1</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>10</td><td>2</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>1/8</td><td rowspan="4">1</td><td>0</td><td></td><td></td><td>110</td><td>3</td><td>0,375</td></tr>
<tr><td>1/16</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td></td><td>1110</td><td>4</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>1/32</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>11110</td><td>5</td><td>0,15625</td></tr>
<tr><td>1/32</td><td>1</td><td>11111</td><td>5</td><td>0,15625</td></tr>
</table>

Huffmann-Verfahren



Beide Verfahren ergeben die selben Codewörter, desshalb wird der Rechenweg nur einmal aufgeführt.

$$R_k = l_m \cdot H_k - H_m$$

$$\begin{aligned} l_m &= \sum_i p(x_i) \cdot l \\ &= 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.125 + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{32} \cdot 2 \\ &= 0.5 + 0.5 + 0.375 + 0.25 + \frac{5}{32} * 2 \\ &= 1.9375 \frac{Bit}{QZ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_m &= \sum p(x_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \log_2 \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdot \log_2 \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \cdot \log_2 \frac{1}{32} \cdot 2 \\ &= 1.9375 = 1.94 \frac{bit}{QZ} \end{aligned}$$

$$H_k = 1$$

$$R_k = 1.94 \cdot 1 - 1.94 = 0$$

2. Aufgabe

a)

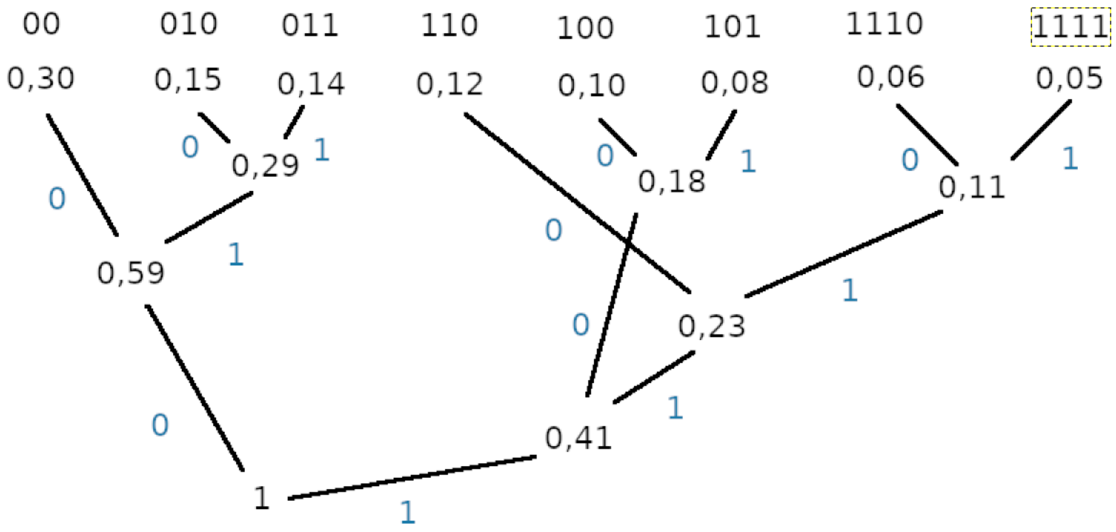
Wahrscheinlichkeit	1. Stufe	2.Stufe	3. Stufe	4. Stufe	Code	Länge
0,3	0	0			0	1
0,15		1			1	1
0,14	1	0	0		100	3
0,12			1		101	3
0,1		1	0	0	1100	4
0,08				1	1101	4
0,06			1	0	1110	4
0,05				1	1111	4

$$\begin{aligned} l_m &= \sum_i p(x_i) \cdot l \\ &= 0.3 \cdot 1 + 0.15 \cdot 1 + 0.14 \cdot 3 + 0.12 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.06 \cdot 4 + 0.08 \cdot 4 + 0.06 \cdot 4 + 0.05 \cdot 4 \\ &= 2,84 \frac{Bit}{QZ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_m &= \sum p(x_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \\ &= 0.3 \cdot \log_2 \frac{1}{0.3} + 0.15 \cdot \log_2 \frac{1}{0.15} + 0.14 \cdot \log_2 \frac{1}{0.14} + 0.12 \cdot \log_2 \frac{1}{0.12} + 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.06 \cdot \log_2 \frac{1}{0.06} + 0.08 \cdot \log_2 \frac{1}{0.08} + 0.06 \cdot \log_2 \frac{1}{0.06} + 0.05 \cdot \log_2 \frac{1}{0.05} \\ &= 2,78 \frac{bit}{QZ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k &= l_m - H_m = 2.84 - 2.78 \\ &= 0.06 \frac{Bit}{QZ} \end{aligned}$$

b)



$$
\begin{aligned}
l_m &= \sum_i p(x_i) \cdot l \\
&= 0.3 \cdot 2 + 0.15 \cdot 3 + 0.14 \cdot 3 + 0.12 \cdot 3 + 0.1 \cdot 3 + 0.08 \cdot 3 + 0.06 \cdot 4 + 0.06 \cdot 4 + 0.05 \cdot 4 \\
&= 2,81 \frac{Bit}{QZ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_m &= \sum p(x_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \\
&= 0.3 \cdot \log_2 \frac{1}{0.3} + 0.15 \cdot \log_2 \frac{1}{0.15} + 0.14 \cdot \log_2 \frac{1}{0.14} + 0.12 \cdot \log_2 \frac{1}{0.12} + 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.06 \cdot \log_2 \frac{1}{0.06} + 0.08 \cdot \log_2 \frac{1}{0.08} + 0.06 \cdot \log_2 \frac{1}{0.06} + 0.05 \cdot \log_2 \frac{1}{0.05} \\
&= 2,78 \frac{bit}{QZ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_k &= l_m - H_m = 2.81 - 2.78 \\
&= 0,03 \frac{Bit}{QZ}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

(1) nicht eindeutig dekodierbar, da a_4^* und a_7^* nicht präfixfrei sind. (a_4^* bildet den Anfang von a_7^*)

(2) Ist eindeutig, da Präfixfreiheit besteht und sich ein Baum aufspannen lässt.

Aufgabe 4

a)

$H_Q = 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.9 \cdot \log_2 \frac{1}{0.9} = 0.47 \frac{bit}{QZ}$

b)

$l_m = \lceil \log_2 N \rceil = 1$

$R_k = 1 - 0.47 = 0.53 \frac{bit}{QZ}$

c)

	Berechnung	Wahrscheinlichkeit				Länge	Code
p(BB)	0,9 * 0,9	0,81	0			1	0
p(AB)	0,9 * 0,1	0,09		0		2	10
p(BA)	0,9 * 0,1	0,09	1	1	0	3	110
p(AA)	0,1 * 0,1	0,01			1	3	111

$l_m^{[2]} = 0.81 \cdot 1 + 0,09 \cdot 2 + 0,09 \cdot 2 + 0,01 \cdot 3 = 1,29$

$=> l_m = \frac{l_m^{[2]}}{2} = 0,645$

$R_k = 0.645 - 0.47 \frac{bit}{QZ} = 0.175 \frac{bit}{QZ}$

d)

	Berechnung	Wahrscheinlichkeit						Länge	Code
p(BBB)	0,9 * 0,9 * 0,9	0,729	0					1	0
p(ABB)	0,1 * 0,9 * 0,9	0,081		0	0			3	100
p(BAB)	0,9 * 0,1 * 0,9	0,081			1			3	111
p(BBA)	0,9 * 0,9 * 0,1	0,081			0			3	110
p(AAB)	0,1 * 0,1 * 0,9	0,009	1	1		0	0	5	11100
p(ABA)	0,1 * 0,9 * 0,1	0,009			1		1	5	11101
p(BAA)	0,9 * 0,1 * 0,1	0,009				1	0	5	11110
p(AAA)	0,1 * 0,1 * 0,1	0,001					1	5	11111

$l_m^{[3]} = 0.729 \cdot 1 + 0.081 \cdot 3 \cdot 3 + 0.009 \cdot 5 \cdot 3 + 0.01 \cdot 5 = 1.598 \frac{KZ}{Block}$

$=> l_m = \frac{l_m^{[3]}}{3} = 0.533$

$R_k = 0.533 - 0.47 = 0.063 \frac{KZ}{QZ}$

e)

Bei einer Erweiterung der Blocklänge reduziert sich die Koderedundanz bis maximal $l_m = H_m$.

Aufgabe 5

a)

Shannon-Verfahren:

Wahrscheinlichkeiten			Länge	Code
0,7	0		1	0
0,2	1	0	2	10
0,1		1	2	11

$$
\begin{aligned}
H_m &= 0.7 \cdot \log_2 \frac{1}{0.7} + 0.2 \cdot \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} \\
&= 1.157
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_m &= 0.7 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.1 \cdot 2 \\
&= 1.3 \frac{KZ}{QZ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_k &= l_m - H_m = 1.3 - 1.157 \\
&= 0.143 \frac{bit}{QZ}
\end{aligned}
$$

b)

Shannon-Verfahren:

		Wahrscheinlichkeiten							Länge	Code
p(AA)	0,7 * 0,7	0,49	0						1	0
p(AB)	0,7 * 0,2	0,14		0	0				3	100
p(BA)	0,2 * 0,7	0,14			1				3	101
p(AC)	0,7 * 0,1	0,07			0	0			4	1100
p(CA)	0,1 * 0,7	0,07				1			4	1101
P(BB)	0,2 * 0,2	0,04	1			0			4	1110
p(BC)	0,2 * 0,1	0,02		1	1		0		5	11110
p(CB)	0,1 * 0,2	0,02				1	1	0	6	111110
p(CC)	0,1 * 0,1	0,01						1	6	111111

$$
H_m = 1.157
$$

$$
\begin{aligned}
l_m^{[2]} &= 0.49 \cdot 1 + 0.14 \cdot 3 \cdot 2 + 0.07 \cdot 4 \cdot 2 + 0.04 \cdot 4 + 0.02 \cdot 5 + 0.02 \cdot 6 + 0.01 \cdot 6 \\
&= 2.33
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_m &= \frac{l_m^{[2]}}{2} = \frac{2.33}{2} \\
&= 1.165 \frac{KZ}{QZ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_k &= l_m - H_m = 1.165 - 1.157 \\
&= 0.008 \frac{bit}{QZ}
\end{aligned}
$$

c)

- durch die paarweise Kodierung kann eine Minimierung der Redundanz erziehlt werden
- die max. Reduzierung ist auf H_m als untere Schranke begrenzt

Aufgabe 6

$$
\begin{aligned}
H_m &= 0.8 \cdot \log_2 \frac{1}{0.8} + 0.2 \cdot \log_2 \frac{1}{0.2} \\
&= 0.7219
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l &= \lceil \log_2 N \rceil \\
&= 1
\end{aligned}
$$

a)

$m = 2$

p(AA)	0,8 * 0,8	0,64	0					1	0
p(AB)	0,8 * 0,2	0,16		0				2	10
p(BA)	0,8 * 0,2	0,16	1	1	0			3	110
p(BB)	0,2 * 0,2	0,04			1			3	111

$l_m^{[2]} = 0.64 \cdot 1 + 0.16 \cdot 2 + 0.16 \cdot 3 + 0.04 \cdot 3 = 1.56$

$l_m = \frac{l_m^{[2]}}{2} = \frac{1.56}{2} = 0.78$

$m = 3$

	Berechnung	Wahrscheinlichkeit						Länge	Code
p(BBB)	0,8 * 0,8 * 0,8	0,512	0					1	0
p(ABB)	0,2 * 0,8 * 0,8	0,128		0	0			3	100
p(BAB)	0,2 * 0,8 * 0,8	0,128			1			3	111
p(BBA)	0,2 * 0,8 * 0,8	0,128			0			3	110
p(AAB)	0,2 * 0,2 * 0,8	0,032	1			0	0	5	11100
p(ABA)	0,2 * 0,2 * 0,8	0,032		1	1		1	5	11101
p(BAA)	0,2 * 0,2 * 0,8	0,032				1	0	5	11110
p(AAA)	0,2 * 0,2 * 0,2	0,008					1	5	11111

$l_m^{[3]} = 0.512 \cdot 1 + 0.128 \cdot 3 \cdot 3 + 0.032 \cdot 5 \cdot 3 + 0.008 \cdot 5 = 2.184$

$l_m = \frac{l_m^{[3]}}{2} = \frac{2.184}{3} = 0.728$

$=>$ für $m = 3$ ist die Voraussetzung, erfüllt mit einer Einsparung von 27.2%

b)

Die maximale Reduzierung ist durch H_m begrenzt, da R_k nicht negativ sein darf $R_k = l_m - H_m$

$=>$ Einsparung um max 27,8%