

Informations und Kommunikationstheorie - Aufgabensammlung Lösungen

3. Übertragungskanal

3.2. Kanalkapazität bei diskreter Quelle

Aufgabe 1

Es handelt sich um einen binären Kanal (also $Z = 2$), bei dem die Wahrscheinlichkeit, dass das Zeichen sich ändert ($0 \rightarrow 1$ oder $1 \rightarrow 0$) gleich p_s ist.

GESICHERTE ÜBERTRAGUNG

a)

$$p_s = 0.02, N = 64, f_Q = 100 \frac{QZ}{s}$$

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0.02 \cdot \log_2 \frac{1}{0.02} + 0.98 \cdot \log_2 \frac{1}{0.98}) \\ &= 0.141 \frac{\text{bit}}{KZ} \end{aligned}$$

$$H_T = H(Y) - H(Y|X) = 1 \frac{\text{bit}}{KZ} - 0.141 \frac{\text{bit}}{KZ} = 0.859 \frac{\text{bit}}{KZ}$$

$$l = \lceil \log_2 N \rceil = \lceil \log_2 64 \rceil = 6 \frac{KZ}{QZ}$$

$$H_K = \log_2 2 = 1 \frac{\text{bit}}{KZ}$$

$$\begin{aligned} v_s &= f_Q \cdot l \cdot \frac{H_K}{H_T} = 100 \frac{QZ}{s} \cdot 6 \frac{KZ}{QZ} \cdot \frac{1 \frac{\text{bit}}{KZ}}{0.859 \frac{\text{bit}}{KZ}} \\ &= 698 \frac{KZ}{s} \end{aligned}$$

b)

$$I_T = v_s \cdot H_T = 698 \frac{KZ}{s} \cdot 0.859 \frac{\text{bit}}{KZ} = 600 \frac{\text{bit}}{s}$$

c)

Kapazitätsauslastung : A

$$\begin{aligned} A &= \frac{I_T}{C} \cdot 100\% = \frac{v_s \cdot H_T}{2B \cdot H_T} \cdot 100\% = \frac{v_s}{2B} \cdot 100\% \\ A &= \frac{698.5}{2 \cdot 2 \cdot 10^3} \cdot 100\% = 17.5\% \end{aligned}$$

UNGESICHNERTE ÜBERTRAGUNG

a)

$$v_s = f_Q \cdot l = 100 \frac{KZ}{s} \cdot 6 \frac{KZ}{KZ} = 600 \frac{KZ}{s}$$

b)

$$I_T = v_s \cdot H_T = 600 \frac{KZ}{s} \cdot 0.859 \frac{bit}{KZ} = 515,4 \frac{bit}{s}$$

c)

$$A = \frac{v_s}{2B} \cdot 100\% = \frac{600}{2 \cdot 2 \cdot 10^3} \cdot 100\% = 15\%$$

Aufgabe 2

a)

$$f_Q = \frac{1}{t_u} = \frac{1}{10} = 0.1 \frac{Bild}{s}$$

$$I_{KQ} \leq C$$
$$f_Q \cdot l \cdot H_K \leq C$$

$$l \leq \frac{C}{f_Q \cdot H_K} \leq \frac{50 \cdot 10^3}{0.1 \cdot 1}$$

$$l \leq 500000 \frac{KZ}{Bild}$$

$$l \leq 5 \frac{KZ}{Bildpunkt} \Rightarrow 2^5 = 32 = N$$

b)

$$f_Q \leq \frac{C}{l \cdot H_K} \leq \frac{50 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^5 \cdot 1}$$
$$\leq 0.083$$

$$t_u = \frac{1}{f_Q} = \frac{1}{0.083} = 12 \frac{s}{Bild}$$

c)

Zur Berechnung der mittleren Codewortlänge siehe Abbildung.

KZ	Verteilung	Länge	Länge * Verteilung
1	0,5	1	0,5
2	0,25	2	0,5
3	0,125	3	0,375
4	0,0625	4	0,25
5	0,03125	5	0,15625
6	0,015625	6	0,09375
7	0,0078125	7	0,0546875
8	0,00390625	8	0,03125
9	0,001953125	9	0,017578125
10	0,0009765625	10	0,009765625
11	0,00048828125	11	0,00537109375
12	0,000244140625	12	0,0029296875
13	0,0001220703125	13	0,0015869140625
14	6,103515625E-05	14	0,0008544921875
15	3,0517578125E-05	15	0,000457763671875
16	1,52587890625E-05	16	0,000244140625
17	7,62939453125E-06	17	0,000129699707031
18	3,814697265625E-06	18	6,866455078125E-05
19	1,9073486328125E-06	19	3,62396240234375E-05
20	9,5367431640625E-07	20	1,9073486328125E-05
21	4,76837158203125E-07	21	1,00135803222656E-05
22	2,38418579101562E-07	22	5,24520874023438E-06
23	1,19209289550781E-07	23	2,74181365966797E-06
24	5,96046447753906E-08	24	1,43051147460938E-06
25	2,98023223876953E-08	25	7,45058059692383E-07
26	1,49011611938477E-08	26	3,87430191040039E-07
27	7,45058059692383E-09	27	2,01165676116943E-07
28	3,72529029846191E-09	28	1,04308128356934E-07
29	1,86264514923096E-09	29	5,40167093276978E-08
30	9,31322574615479E-10	30	2,79396772384644E-08
31	4,65661287307739E-10	31	1,44354999065399E-08
32	4,65661287307739E-10	31	1,44354999065399E-08
		l_m =	1,99999999906868

$$l_m = 2$$

$$f_Q \leq \frac{C}{l_m \cdot H_K} \leq \frac{50 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1} \leq 0.25$$

$$t_{\ddot{u}} = \frac{1}{f_Q} = \frac{1}{0.25} = 4 \frac{s}{Bild}$$

Aufgabe 3

gegeben : $p_s = 0.02$, $v_{\ddot{u}} = 2400 \frac{bit}{s}$, $H_Q = 8 \frac{bit}{QZ}$, QZ gleichverteilt, $H_K = 1$

gesucht : $f_{Q,ges}$ und $f_{Q,unges}$

UNGESICHERT:

$$I_K = v_{\dot{u}} = v_s \cdot H_K$$

$$\rightarrow I_K = v_s = 2400 \frac{\text{bit}}{s}$$

$$I_{KQ} = f_Q \cdot l \cdot H_K$$

$$\rightarrow \text{wegen } H_Q = l \cdot H_K \text{ und } I_Q = f_Q \cdot H_Q$$

$$\rightarrow I_{KQ} = f_Q \cdot H_Q$$

$$\rightarrow f_Q = \frac{I_{KQ}}{H_Q} = \frac{2400}{8}$$

$$f_{Q, \text{unges}} = 300 \frac{\text{QZ}}{s}$$

$$\Delta l_{\text{unges}} = 0$$

GESICHERT:

$$H_T = 0,86 \text{ (Berechnung wie in Aufgabe 1 mit } p_s = 0.02 \text{ und } p(x_0) = p(x_1) = 0,5)$$

$$l \geq \lceil \frac{H_Q}{H_K} \rceil \geq 8$$

$\rightarrow l = 8$ Annahme der Gleichheit, weil maximale Frequenz gesucht ist

$$v_s = f_Q \cdot l \cdot \frac{H_K}{H_T}$$

$$\rightarrow f_Q = \frac{v_s \cdot H_T}{l \cdot H_K} = \frac{2400 \cdot 0.86}{8}$$

$$f_{Q, \text{ges}} = 258 \frac{\text{QZ}}{s}$$

$$n = l + \left(\frac{H_k}{H_T} - 1 \right) \cdot l = 8 + \left(\frac{1}{0.86} - 1 \right) \cdot 8 = 9,3$$

$$\Delta l = n - l = 9,3 - 8 = 1,3 \frac{\text{KZ}}{\text{QZ}}$$