Informations und Kommunkationstherorie - Aufgabensammlung Lösungen

4. Kanalkodierung

4.1. Lineare Gruppenkodes, HAMMING-Kodes

Aufgabe 1

a) Prüfen ob die Axiome erfüllt sind

- Abgeschlossenheit:
  - $\forall a_i, a_j \in A : a_i \oplus a_j = a_k \in A$
  - nicht erfüllt da $a_1 \oplus a_2 \notin A$
- Assoziativität:
  - erfüllt
- inverses Element:
  - $\forall a_i \in A : a_i \oplus -a_i = 0$
  - erfüllt: alle Elemente sind zu sich selbst invers
- neutrales Element:
  - 000000 (Nullvektor)
  - $\exists e \in A \forall a_i \in A : a_i \oplus e = a_i$
  - nicht enthalten deshalb ist es kein Linearcode

b) $d_{min} = 1$

$$\begin{aligned} a_6 &= (000110) \\ \oplus a_9 &= (000111) \\ &= (000001) \rightarrow d_{min} = 1 \end{aligned}$$

Fehlererkennung: $f_e = d_{min} - 1 = 0$

$\rightarrow$ es sind auch Einfachfehler nicht mit Sicherheit erkennbar, z.B.

$$\begin{aligned} a_6 &= (000110) \\ \oplus e &= (000001) \\ &= (000111) &= a_9 \in A \end{aligned}$$

Aufgabe 2

systematischer Code: durch Streichung der redundanten Stellen, kann das Kanalcodewort ermittelt werden

$l = 3 \rightarrow L = 2^l = 8$

Die Länge l der Codewörter, ist definiert durch die 3 unabhängigen Codewörter a_1, a_2, a_3

a)

Berechnung aller Codewörter $a_1 - a_8$, diese bilden die Menge A

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (0011110) \\
a_2 &= (1011001) \\
a_3 &= (1110100) \\
a_4 &= (1000111) = a_1 \oplus a_2 \\
a_5 &= (1101010) = a_5 \oplus a_3 \\
a_6 &= (0101101) = a_2 \oplus a_3 \\
a_7 &= (0110011) = a_1 \oplus a_6 \\
a_8 &= (0000000) = a_1 \oplus a_1
\end{aligned}
$$

Binärfolgen prüfen ob sie in A enthalten sind:

- $b_1 \notin A$
- $b_2 \notin A$
- $b_3 \in A$

Codeparameter: d_min ist das minimale Gewicht in einem linear Code

$$(n, l, d_{min}) = (7, 3, 4)$$

b)

Generatormatrix: $G_{l \times n} = [I_l C]$

Kontrollmatrix: $H_{k \times n} = [C^T I_K]$

Orthogonalitätsbedingung: $G \cdot H^T = (H \cdot G^T)^T = 0$

Bildung der Generatormatrix:

- Jede Zeile der Generatormatrix entsteht aus einem Codewort der Menge A
- Dabei muss sich am Anfang eine Einheitsmatrix I_3 bilden
- Es wurden die Elemente: $a_4, a_6, a_1 \in A$ für die Erstellung von G verwendet
- mittels der Generatormatrix kann ein Codewort a_i^* zu einem Codewort a_i codiert werden $a_i = a_i^* \cdot G$

$$G_{3 \times 7} = [I_3 C] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bildung der Kontrollmatrix:

- Das C aus der Generatormatrix wird transponiert und bildet die ersten Spalten
- Zur Auffüllung wird eine Einheitsmatrix genutzt
- mittels der Kontrollmatrix kann ein empfangenes Codewort darauf geprüft werden ob ein Fehler aufgetreten ist
- ist s das Fehlersyndrom gleich dem Nullvektor liegt kein Fehler oder ein nicht erkennbarer Fehler vor

$$H_{4\times 7} = [C^T I_4] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Prüfung ob eine empfangene Binärfolge ein Codewort ist muss diese mit der Kontrollmatrix multipliziert werden

b_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

s entspricht Spalte n_2 in H $\rightarrow$ Korrektur: n_2 kippen: $b_{1,korr} = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0)$

Dekodierung: $b^*_{1,korr} = (0\ 0\ 1)$

b_2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} not = 0 \rightarrow b_2 \notin A, Fehler$$

keine Übereinstimmung mit einer Spalte in H:

$\rightarrow$ nicht korrigierbar

$\rightarrow$ nicht korrigierbarer Mehrfachfehler

Rekronstruktionsergebnis: Rekonstruktionsversagen

b_3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow b_3 \in A$$

$\rightarrow$ kein Fehler oder der Fehler ist nicht erkennbar

Dekodierung: $b_3^* = (0\ 1\ 1)$

Aufgabe 3

in der Vorlesung behandelt Beispiele mit $l = 2$

Aufgabe 4

a)

HAMMING-Code: $(d_{min} = 3 \rightarrow f_k = 1)$

$$\begin{aligned} k &\geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k=1} \binom{n}{i} \\ k &\geq \log_2 (\binom{n}{0} + \binom{n}{1}) \\ k &\geq \log_2 (1 + l + k) \\ k &\geq \log_2 (5 + k) \end{aligned}$$

$\rightarrow k = 3$

Der Code ist dicht gepackt, da $k = 3 = log_2(5+3)$

b)

- Bei einem HAMMING-Code entsteht die Kontrollmatrix H durch die Aneinanderreihung der Binärzahlen von 1 (001) bis 7 (111) von rechts nach links ($H_{3\times7}$)
- In diesem Beispiel ist die Matrix somit $l_4, l_3, l_2, k_3, l_1, k_2, k_1$
- die Kontrollstellen k befinden sie jeweils an Spalte der 2er Potenzen (1, 2, 4 , 8 ,16 ...)

$$H_{3\times7} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = l_4 \oplus l_3 \oplus l_2$$
$$k_2 = l_4 \oplus l_3 \oplus l_1$$
$$k_1 = l_4 \oplus l_2 \oplus l_1$$

c)

Kontrollgleichungen

$$s_3 = l_4 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus k_3 = n_7 \oplus n_6 \oplus n_5 \oplus n_4$$
$$s_2 = l_4 \oplus l_3 \oplus l_1 \oplus k_2 = n_7 \oplus n_6 \oplus n_3 \oplus n_2$$
$$s_1 = l_4 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus k_1 = n_7 \oplus n_5 \oplus n_3 \oplus n_1$$

$b_1:$

$$s_3 = n_7 \oplus n_6 \oplus n_5 \oplus n_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$s_2 = n_7 \oplus n_6 \oplus n_3 \oplus n_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$s_1 = n_7 \oplus n_5 \oplus n_3 \oplus n_1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$\rightarrow$ es liegt kein Fehler vor oder nicht erkennbar

Codewort: $b_1^* = (1011)$

$b_2 : (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)$

$$s_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$
$$s_2 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$
$$s_1 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$\rightarrow$ es liegt ein Fehler vor an der Stelle n_4 diese muss von einer 0 zu einer 1 gewechselt werden

$\rightarrow b_{2,korr} = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0)$

Codewort: $b_2^* = (0\ 0\ 1\ 1)$

$b_3 : (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$

$$s_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$
$$s_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$
$$s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$\rightarrow$ es liegt ein Fehler vor an der Stelle n_5, diese muss von einer 0 zu einer 1 gewechselt werden

$\rightarrow b_{3,korr} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$

Codewort: $b_2^* = (1\ 0\ 1\ 1)$

Aufgabe 5

a)

$l = 8, f_k = 1, d_{min} = 3, n = ?$

Zur Berechnung der Redundanzstellen muss für k verschiedene Werte ausprobiert werden

$$\begin{aligned}
k &\geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k=1} \binom{n}{i} \\
k &\geq \log_2(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}) \\
k &\geq \log_2(1+n) \\
k &\geq \log_2(1+l+k) \\
k &\geq \log_2(1+8+k)
\end{aligned}$$

$$k : 1 \rightarrow 1 \geq \log_2(9) \rightarrow 1 \ngeq 3.16$$
$$k : 2 \rightarrow 2 \geq \log_2(10) \rightarrow 2 \ngeq 3.32$$
$$k : 3 \rightarrow 3 \geq \log_2(11) \rightarrow 3 \ngeq 3.45$$
$$k : 4 \rightarrow 4 \geq \log_2(12) \rightarrow 4 \geq 3.58$$

$\rightarrow (n, l. d_{min}) = (12, 8, 3)$

b)

Wenn 2 Fehlerstellen erkannt werden müssen ist $f_k = 2$

$$
\begin{aligned}
&k \geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k=1} \binom{n}{i} \\
&k \geq \log_2(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}) \\
&k \geq \log_2(1 + n + 0.5 \cdot (n-1) \cdot n) \\
&k \geq \log_2(1 + (l+k) + 0.5 \cdot (l+k-1) \cdot (l+k)) \\
&k \geq \log_2(1 + (8+k) + 0.5 \cdot (7+k) \cdot (8+k))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&k : 1 \rightarrow 1 \geq \log_2(46) \rightarrow 1 \ngeq 5.52 \\
&k : 2 \rightarrow 2 \geq \log_2(56) \rightarrow 2 \ngeq 5.8 \\
&\quad \ldots \\
&k : 5 \rightarrow 5 \geq \log_2(92) \rightarrow 5 \ngeq 6.5 \\
&k : 6 \rightarrow 6 \geq \log_2(106) \rightarrow 6 \ngeq 6.72 \\
&k : 7 \rightarrow 7 \geq \log_2(121) \rightarrow 7 \geq 6.91
\end{aligned}
$$

Um 2 Fehlerstellen zu erkennen müssen 7 redundante Stellen hinzugefügt werden.

Aufgabe 6

- Um 32 Zeichen zu codieren werden $2^l = 32$ Stellen benötigt $\rightarrow l = 5$
- einfehlerkorrigierender Hamming Kode $\rightarrow d_{min} = 3$
- bestimmten der Redundanten Stellen:

$$
\begin{aligned}
&k \geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k=1} \binom{n}{i} \\
&k \geq \log_2(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}) \\
&k \geq \log_2(1 + l + k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&k : 1 \rightarrow 1 \geq \log_2(7) \rightarrow 1 \ngeq 2,8 \\
&k : 2 \rightarrow 2 \geq \log_2(8) \rightarrow 2 \ngeq 3 \\
&k : 3 \rightarrow 3 \geq \log_2(9) \rightarrow 3 \ngeq 3,1 \\
&k : 4 \rightarrow 4 \geq \log_2(10) \rightarrow 4 \geq 3,32
\end{aligned}
$$

- $k = 4$ redundante Stellen
- Ergebnis: (9,5,3) Hamming Code

Aufgabe 7

- Um 200 Zeichen zu kodieren müssen $2^l >= 200$ Stellen benötigt $\rightarrow l = 8$
- Somit sind maximal 256 Kanalcodewörter definiert
- einfehlerkorrigierender Hamming Code $\rightarrow d_{min} = 3$
- bestimmten der Redundanten Stellen:

$$k \geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k=1} \binom{n}{i}$$
$$k \geq \log_2(\binom{n}{0} + \binom{n}{1})$$
$$k \geq \log_2(1 + l + k)$$
$$k \geq \log_2(1 + 8 + k)$$

$k : 1 \to 1 \geq \log_2(10) \to 1 \ngeq 3,32$
$k : 4 \to 4 \geq \log_2(13) \to 4 \geq 3,7$

- $k = 4$ redundante Stellen
- Ergebnis: (12,8,3) Hamming Code