Informations und Kommunkationstherorie - Aufgabensammlung Lösungen

4. Kanalkodierung

4.2. Zyklische Kodes - primitive BCH-Kodes

Aufgabe 1

zyklischer Hamming-Kode:

- $g(x) = x^3 + x + 1$
- $M(x) = x^3 + x + 1$,primitv

a) Bestimmung der Kodeparameter

$$(n, l, d_{min}) = (7, 4, 3)$$

$$k_1 = \text{grad M(x)} = 3$$
$$n = 2^{k_1} - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

$$\begin{aligned} k &= \text{grad} g(x) = 3 \\ l &= n - k = 7 - 3 = 4 \end{aligned}$$

$d_{min} =$ Anzahl aufeinander folgender Nullstellen + 1 ist beim Hamming-Code immer 3

b) Fehlererkennung

$$f_e = d_{min} - 1 = 2$$
$$f_b \leq k = 3$$

c) Multiplikationsverfahren

$$a(x) = a^*(x) \cdot g(x)$$

$$\begin{aligned} a(x) &= (x^3 + x)(x^3 + x + 1) \\ &= x^6 + x^4 + x^3 + x^4 + x^2 + x \\ &= x^6 + x^3 + x^2 + x \\ a &= (1\,0\,0\,1\,1\,1\,0) \end{aligned}$$

Es kann auch über die binäre Form berechnet werden $(1010) \cdot (1011) = (1001110)$

d) Divisionsverfahren

$$a(x) = a^*(x) \cdot x^k + r(x)$$
$$r(x) = a^*(x) \cdot x^k \mod g(x)$$

Beispiel:

$$a^*(x) = (x^3 + x)$$
$$a^*(x) \cdot x^k = (x^3 + x) \cdot x^3 = x^6 + x^4$$

$$(x^6 + x^4) : (x^3 + x + 1) = x^3 + 1$$
$$r(x) = x + 1$$
$$a(x) = a^*(x) \cdot x^k + r(x) = x^6 + x^4 + x + 1$$

e)

das Quellencodewort kann direkt aus dem Kanalcodewort abgelesen werden

Aufgabe 2

zyklischer ABRAMSON-Kode mit: $g(x) = m_1(x)(x+1); M(x) = x^4 + x + 1$

Aufbau ABRAMSON-Kode

$$g(x) = m_0(x) \cdot m_1(x)$$
$$m_0(x) = (x + 1)$$
$$m_1(x) = M(x)$$

Kodeparameter:

$$(n, l, d_{min})$$

$$k_1 = \text{grad } M(x) = 4$$
$$n = 2^{k_1} - 1 = 15$$
$$k = \text{grad } g(x) = 5$$
$$l = 15 - 5 = 10$$

$$g(x) = m_0(x)m_1(x)$$
$$m_0(x) : \alpha^0$$
$$m_1(x) : \alpha^1, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, (\alpha^{16 \mod 2^{k_1}} = \alpha^1)$$
$$d_{min} : \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2 = 3 + 1 = 4$$

Fehlererkennungseigenschaften

$$f_e = d_{min} - 1 = 3$$
$$f_b \leq 5$$

Berechnung der Fehler von b_1 bis b_5 als Abfolge

1. g(x) berechnen
2. Binärfolge durch g(x) berechnen
3. wenn der Rest nicht 0 ist -> nicht im Alphabet

$$g(x) = (x + 1)(x^4 + x + 1) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$$

Berechnung

(Die Division kann über die binäre Schreibweise berechnet werden oder durch die Umwandlung in Potenzen)

b1:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & : & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Rest : 101100 $\rightarrow$ ist kein Kanalcodewort da der Rest ungleich 0 ist.

b2: 001011011101011 : 110101 $\rightarrow$ Rest: 1000 $\rightarrow$ ist nicht Teil des Alphabetes

b3:

(000011011001010) $\rightarrow x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^3 + x$

$\frac{x^{10}+x^9+x^7+x^6+x^3+x}{x^5+x^4+x^2+1} = x^5 + x$ Rest: 0 $\rightarrow$ ist Teil des Alphabetes

b4: 100000000011010 : 110101 $\rightarrow$ Rest 0 $\rightarrow$ ist Teil des Alphabetes

b5: 101010101001000 : 110101 $\rightarrow$ Rest 0 $\rightarrow$ ist Teil des Alphabetes

Aufgabe 3

Paritätscode:

- $\text{grad } g(x) = k = 1$
- $g(x) = x \text{ oder } g(x) = x + 1$

Beispiel für $l = 2$ prüfen:

$$A^* = \{00, 10, 01, 11\}$$

$$g(x) = x + 1; x + 1 = m_0(x)$$

Aufgabe 4

$$k_1 = 9 = \text{grad } M(x)$$

$$g(x) = kgV\{m_0, m_1(x), m_2(x)\} = m_0(x) \cdot m_1(x)$$

$$k = \text{grad } g(x) = \text{grad } m_0(x) + \text{grad } m_1(x) = 1 + 9 = 10$$

$n = 2^9 - 1 = 511$

$n = k + l \to l = n - k = 501$

$d_{min} = 4$