

# Informations und Kommunikationstheorie - Aufgabensammlung Lösungen

---

## 4. Kanalkodierung

---

### 4.1. Lineare Gruppenkodes, HAMMING-Kodes

#### Aufgabe 1

a) Prüfen ob die Axiome erfüllt sind

- Abgeschlossenheit:
  - $\forall a_i, a_j \in A : a_i \oplus a_j = a_k \in A$
  - nicht erfüllt da  $a_1 \oplus a_2 \notin A$
- Assoziativität:
  - erfüllt
- inverses Element:
  - $\forall a_i \in A : a_i \oplus -a_i = 0$
  - erfüllt: alle Elemente sind zu sich selbst invers
- neutrales Element:
  - 000000 (Nullvektor)
  - $\exists e \in A \forall a_i \in A : a_i \oplus e = a_i$
  - nicht enthalten deshalb ist es kein Linearcodewort

b)  $d_{min} = 1$

$$\begin{array}{rcl} a_6 & = & (000110) \\ \oplus a_9 & = & (000111) \\ \hline & = & (000001) \rightarrow d_{min} = 1 \end{array}$$

Fehlererkennung:  $f_e = d_{min} - 1 = 0$

→ es sind auch Einfachfehler nicht mit Sicherheit erkennbar, z.B.

$$\begin{array}{rcl} a_6 & = & (000110) \\ \oplus e & = & (000001) \\ & = & (000111) = a_9 \in A \end{array}$$

#### Aufgabe 2

systematischer Code: durch Streichung der redundanten Stellen, kann das Kanalcodewort ermittelt werden

$$l = 3 \rightarrow L = 2^l = 8$$

Die Länge  $l$  der Codewörter, ist definiert durch die 3 unabhängigen Codewörter  $a_1, a_2, a_3$

a)

Berechnung aller Codewörter  $a_1 - a_8$ , diese bilden die Menge A

$$\begin{aligned}a_1 &= (0011110) \\a_2 &= (1011001) \\a_3 &= (1110100) \\a_4 &= (1000111) = a_1 \oplus a_2 \\a_5 &= (1101010) = a_2 \oplus a_3 \\a_6 &= (0101101) = a_2 \oplus a_3 \\a_7 &= (0110011) = a_1 \oplus a_6 \\a_8 &= (0000000) = a_1 \oplus a_1\end{aligned}$$

Binärfolgen prüfen ob sie in A enthalten sind:

- $b_1 \notin A$
- $b_2 \notin A$
- $b_3 \in A$

Codeparameter:  $d_{\min}$  ist das minimale Gewicht in einem linear Code

$$(n, l, d_{\min}) = (7, 3, 4)$$

b)

Generatormatrix:  $G_{l \times n} = [I_l C]$

Kontrollmatrix:  $H_{k \times n} = [C^T I_K]$

Orthogonalitätsbedingung:  $G \cdot H^T = (H \cdot G^T)^T = 0$

Bildung der Generatormatrix:

- Jede Zeile der Generatormatrix entsteht aus einem Codewort der Menge A
- Dabei muss sich am Anfang eine Einheitsmatrix  $I_3$  bilden
- Es wurden die Elemente:  $a_4, a_6, a_1 \in A$  für die Erstellung von G verwendet
- mittels der Generatormatrix kann ein Codewort  $a_i^*$  zu einem Codewort  $a_i$  codiert werden  
 $a_i = a_i^* \cdot G$

$$G_{3 \times 7} = [I_3 C] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bildung der Kontrollmatrix:

- Das C aus der Generatormatrix wird transponiert und bildet die ersten Spalten
- Zur Auffüllung wird eine Einheitsmatrix genutzt
- mittels der Kontrollmatrix kann ein empfangenes Codewort darauf geprüft werden ob ein Fehler aufgetreten ist
- ist s das Fehlersyndrom gleich dem Nullvektor liegt kein Fehler oder ein nicht erkennbarer Fehler vor

$$H_{4 \times 7} = [C^T I_4] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Prüfung ob eine empfangene Binärfolge ein Codewort ist muss diese mit der Kontrollmatrix multipliziert werden

$b_1$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

s entspricht Spalte  $n_2$  in H  $\rightarrow$  Korrektur:  $n_2$  kippen:  $b_{1,korr} = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0)$

Dekodierung:  $b_{1,korr}^* = (0 \ 0 \ 1)$

$b_2$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ not } = 0 \rightarrow b_2 \notin A, \text{ Fehler}$$

keine Übereinstimmung mit einer Spalte in H:

$\rightarrow$  nicht korrigierbar

$\rightarrow$  nicht korrigierbarer Mehrfachfehler

Rekonstruktionsergebnis: Rekonstruktionsversagen

$b_3$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow b_3 \in A$$

$\rightarrow$  kein Fehler oder der Fehler ist nicht erkennbar

Dekodierung:  $b_3^* = (0 \ 1 \ 1)$

### Aufgabe 3

in der Vorlesung behandelt Beispiele mit  $l = 2$

### Aufgabe 4

a)

HAMMING-Code: ( $d_{min} = 3 \rightarrow f_k = 1$ )

$$\begin{aligned}k &\geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k-1} \binom{n}{i} \\k &\geq \log_2 \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right) \\k &\geq \log_2 (1 + l + k) \\k &\geq \log_2 (5 + k) \\&\rightarrow k = 3\end{aligned}$$

Der Code ist dicht gepackt, da  $k = 3 = \log_2(5 + 3)$

b)

- Bei einem HAMMING-Code entsteht die Kontrollmatrix H durch die Aneinanderreihung der Binärzahlen von 1 (001) bis 7 (111) von rechts nach links ( $H_{3 \times 7}$ )
- In diesem Beispiel ist die Matrix somit  $l_4, l_3, l_2, k_3, l_1, k_2, k_1$
- die Kontrollstellen  $k$  befinden sie jeweils an Spalte der 2er Potenzen (1, 2, 4, 8, 16 ...)

$$\begin{aligned}H_{3 \times 7} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\k_3 &= l_4 \oplus l_3 \oplus l_2 \\k_2 &= l_4 \oplus l_3 \oplus l_1 \\k_1 &= l_4 \oplus l_2 \oplus l_1\end{aligned}$$

c)

Kontrollgleichungen

$$\begin{aligned}s_3 &= l_4 \oplus l_3 \oplus l_2 \oplus k_3 = n_7 \oplus n_6 \oplus n_5 \oplus n_4 \\s_2 &= l_4 \oplus l_3 \oplus l_1 \oplus k_2 = n_7 \oplus n_6 \oplus n_3 \oplus n_2 \\s_1 &= l_4 \oplus l_2 \oplus l_1 \oplus k_1 = n_7 \oplus n_5 \oplus n_3 \oplus n_1\end{aligned}$$

$b_1 :$

$$\begin{aligned}s_3 &= n_7 \oplus n_6 \oplus n_5 \oplus n_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\s_2 &= n_7 \oplus n_6 \oplus n_3 \oplus n_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\s_1 &= n_7 \oplus n_5 \oplus n_3 \oplus n_1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0\end{aligned}$$

→ es liegt kein Fehler vor oder nicht erkennbar

Codewort:  $b_1^* = (1011)$

$b_2 : (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)$

$$s_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_2 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$s_1 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

→ es liegt ein Fehler vor an der Stelle  $n_4$  diese muss von einer 0 zu einer 1 gewechselt werden

→  $b_{2,korr} = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0)$

Codewort:  $b_2^* = (0\ 0\ 1\ 1)$

$b_3 : (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$

$$s_3 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$s_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

→ es liegt ein Fehler vor an der Stelle  $n_5$ , diese muss von einer 0 zu einer 1 gewechselt werden

→  $b_{3,korr} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$

Codewort:  $b_2^* = (1\ 0\ 1\ 1)$

## Aufgabe 5

a)

$l = 8, f_k = 1, d_{min} = 3, n = ?$

Zur Berechnung der Redundanzstellen muss für  $k$  verschiedene Werte ausprobiert werden

$$k \geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k-1} \binom{n}{i}$$

$$k \geq \log_2 \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right)$$

$$k \geq \log_2(1 + n)$$

$$k \geq \log_2(1 + l + k)$$

$$k \geq \log_2(1 + 8 + k)$$

$$k : 1 \rightarrow 1 \geq \log_2(9) \rightarrow 1 \not\geq 3.16$$

$$k : 2 \rightarrow 2 \geq \log_2(10) \rightarrow 2 \not\geq 3.32$$

$$k : 3 \rightarrow 3 \geq \log_2(11) \rightarrow 3 \not\geq 3.45$$

$$k : 4 \rightarrow 4 \geq \log_2(12) \rightarrow 4 \geq 3.58$$

→  $(n, l, d_{min}) = (12, 8, 3)$

b)

Wenn 2 Fehlerstellen erkannt werden müssen ist  $f_k = 2$

$$k \geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k=1} \binom{n}{i}$$

$$k \geq \log_2 \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right)$$

$$k \geq \log_2 (1 + n + 0.5 \cdot (n-1) \cdot n)$$

$$k \geq \log_2 (1 + (l+k) + 0.5 \cdot (l+k-1) \cdot (l+k))$$

$$k \geq \log_2 (1 + (8+k) + 0.5 \cdot (7+k) \cdot (8+k))$$

$$k : 1 \rightarrow 1 \geq \log_2(46) \rightarrow 1 \not\geq 5.52$$

$$k : 2 \rightarrow 2 \geq \log_2(56) \rightarrow 2 \not\geq 5.8$$

...

$$k : 5 \rightarrow 5 \geq \log_2(92) \rightarrow 5 \not\geq 6.5$$

$$k : 6 \rightarrow 6 \geq \log_2(106) \rightarrow 6 \not\geq 6.72$$

$$k : 7 \rightarrow 7 \geq \log_2(121) \rightarrow 7 \geq 6.91$$

Um 2 Fehlerstellen zu erkennen müssen 7 redundante Stellen hinzugefügt werden.

## Aufgabe 6

- Um 32 Zeichen zu codieren werden  $2^l = 32$  Stellen benötigt  $\rightarrow l = 5$
- einfehlerkorrigierender Hamming Kode  $\rightarrow d_{min} = 3$
- bestimmten der Redundanten Stellen:

$$k \geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k=1} \binom{n}{i}$$

$$k \geq \log_2 \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right)$$

$$k \geq \log_2 (1 + l + k)$$

$$k : 1 \rightarrow 1 \geq \log_2(7) \rightarrow 1 \not\geq 2,8$$

$$k : 2 \rightarrow 2 \geq \log_2(8) \rightarrow 2 \not\geq 3$$

$$k : 3 \rightarrow 3 \geq \log_2(9) \rightarrow 3 \not\geq 3,1$$

$$k : 4 \rightarrow 4 \geq \log_2(10) \rightarrow 4 \geq 3,32$$

- $k = 4$  redundante Stellen
- Ergebnis: (9,5,3) Hamming Code

## Aufgabe 7

- Um 200 Zeichen zu kodieren müssen  $2^l \geq 200$  Stellen benötigt  $\rightarrow l = 8$
- Somit sind maximal 256 Kanalcodewörter definiert
- einfehlerkorrigierender Hamming Code  $\rightarrow d_{min} = 3$
- bestimmten der Redundanten Stellen:

$$k \geq \log_2 \sum_{i=0}^{f_k=1} \binom{n}{i}$$

$$k \geq \log_2 \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right)$$

$$k \geq \log_2(1 + l + k)$$

$$k \geq \log_2(1 + 8 + k)$$

$$k : 1 \rightarrow 1 \geq \log_2(10) \rightarrow 1 \not\geq 3, 32$$

$$k : 4 \rightarrow 4 \geq \log_2(13) \rightarrow 4 \geq 3, 7$$

- $k = 4$  redundante Stellen
- Ergebnis: (12,8,3) Hamming Code