Informations und Kommunikationstheorie - Aufgabensammlung Lösung

1.1 Diskrete Informationsquellen mit unabhängigen Ereignissen

Aufgabe 1

a)

Berechnung des mittleren Informationsgehaltes (Entropie) einer diskreten Quelle

$$
\begin{aligned}
H_m &= \sum_i p(x_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \\
H_m &= 0.5 \cdot \log_2 \frac{1}{0.5} + 0.2 \cdot \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} \cdot 2 + 0.05 \cdot \log_2 \frac{1}{0.05} \cdot 2 \\
&= 2.06
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \lceil log_2 N \rceil \\
H_0 &= \log_2 6 = 2.58 \frac{bit}{QZ}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

a)

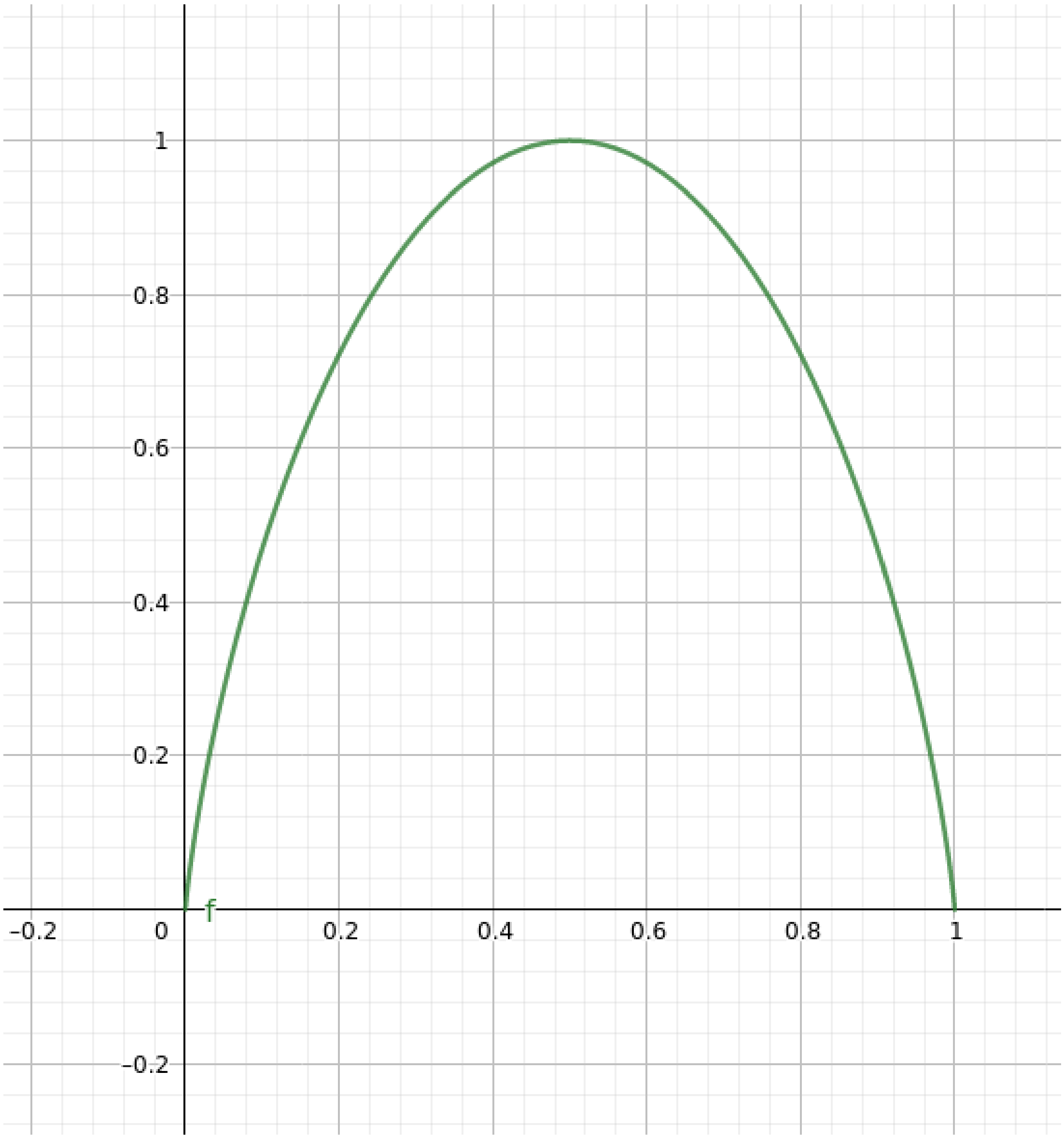
Bestimmung der Ergebnisse für p_i durch Berechnung der Formel für $i = 0, 1 \ldots 5$. Berechnung von H_m mittels der Formel in Aufgabe 1, dabei ist $p(x_i)$ jeweils die Ergebnisse einer Zeile.

Beispielrechnung für $i = 1 \Rightarrow 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} + 0.9 \cdot \log_2 \frac{1}{0.9} = 0.47$

$p_0(1) = 0$	$p_0(0) = 1$	$H_m = 0$
$p_1(1) = 0.1$	$p_1(0) = 0.9$	$H_m = 0.47$
$p_2(1) = 0.2$	$p_2(0) = 0.8$	$H_m = 0.72$
$p_3(1) = 0.3$	$p_3(0) = 0.7$	$H_m = 0.88$
$p_4(1) = 0.4$	$p_4(0) = 0.6$	$H_m = 0.97$
$p_5(1) = 0.5$	$p_5(0) = 0.5$	$H_m = 1$

b)

Durch die Spiegelung an der Stelle 0.5 können die Werte aus Aufgabe 2 verwendet und die Kurve annähernt genau zu zeichnen werden.



Aufgabe 3

Bevor der Informationsgehalt errechnet werden kann muss die Anzahl der Zeichen pro Seite berechnet werden:

$40 \cdot 65 = 2600 \frac{Zeichen}{Seite}$

Durch die Unabhängigkeit der Zeichen kann angenommen werden, dass die Zeichen mit einer gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten. Deshalb kann die Entropie Berechnung auf den log der 45 Zeichen heruntergebrochen werden.

$$H_0 = \log_2 45 \cdot 2600 Zeichen = 5.5 \cdot 2600 Zeichen = 14.3 * 10^3 \frac{bit}{Seite}$$

Aufgabe 4

a)

Da keine einzel Wahrscheinlichkeiten der einzelnene Messwerte vorliegt, wird von einer Gleichverteilung ausgegangen. Zu Beachten ist, dass der Bereich bei 0 atartet und somit 101 Schritte umwasst und nicht nur 100.

$$H_0 = \log_2 101 = 6.66 \frac{bit}{Messwert}$$

b)

Wie in der Teilaufgabe a) muss von einer Gleichverteilung ausgegangen werden. Nur die Schrittweise hat sich verkleinert. Die Berechnung bleibt gleich.

$$H_0 = \log_2 1001 = 9.97 \frac{bit}{Messwert}$$

Aufgabe 5

a)

Zur Berechnung der Entropie der Quelle wird die allgmeine Formel verwendet. Das Ergebnis muss zum Abschluss noch mit der Anzahl der Bildschirmeinheiten verrechnet werden.

$$\begin{aligned} H_m &= 0.5 \cdot \log_2 \frac{1}{0.5} + 0.25 \cdot \log_2 \frac{1}{0.25} + 0.125 \cdot \log_2 \frac{1}{0.125} + 0.0625 \cdot \log_2 \frac{1}{0.0625} \cdot 2 \\ &= 1.875 \frac{bit}{QZ} \\ &\Rightarrow 1.88 \cdot 10^3 \frac{bit}{Bild} \end{aligned}$$

b)

Wenn keine Information über die Helligkeitsstufen vorliegt, wird von einer Gleichverteilung ausgegangen. Somit muss nur der ld von N in diesem Fall 5 Helligkeitsstufen berechnet werden. Zum Schluss muss die Entropie noch mit der Anzahl der Bildschirmeinheiten verrechnet werden.

$$H_0 = \log_2 5 = 2.32 \frac{bit}{QZ}$$
$$\Rightarrow 2.32 \cdot 10^3 \frac{bit}{Bild}$$

Aufgabe 6

a)

$$\begin{aligned} H_m &= 0.47 \cdot \log_2 \frac{1}{0.47} + 0.25 \cdot \log_2 \frac{1}{0.25} + 0.13 \cdot \log_2 \frac{1}{0.13} + 0.07 \cdot \log_2 \frac{1}{0.07} + 0.04 \cdot \log_2 \frac{1}{0.04} + 0.02 \cdot \log_2 \frac{1}{0.02} \cdot 2 \\ &= 2.07 \frac{bit}{Amplitudenwert} \end{aligned}$$

b)

$$H_m = 2.07 \cdot \log_2 16 = 6.07 \frac{bit}{Amplitudenwert}$$

Aufgabe 7

$$H_m = \frac{1}{6} \cdot (\log_2 6 + \log_2 25) + \frac{1}{3} \cdot (\log_2 3 + \log_2 45) + \frac{1}{2} \cdot (\log_2 2 + \log_2 30) = 6.52 \frac{bit}{Zahl}$$

$$H_0 = \log_2 100 = 6.64 \frac{bit}{Zahl}$$

Aufgabe 8

$$H_m = 0.5 \cdot \log_2 \frac{1}{0.5} + 0.2 \cdot \log_2 \frac{1}{0.2} + 0.1 \cdot \log_2 \frac{1}{0.1} \cdot 2 + 0.05 \cdot \log_2 \frac{1}{0.05} \cdot 2 = 2.06 \frac{bit}{QZ}$$

Streuung:

$$\sigma^2 = 0.5 \cdot (\log_2 2 - 2.06)^2 + 0.2 \cdot (\log_2 \frac{1}{0.2} - 2.06)^2 + 0.1 \cdot (\log_2 \frac{1}{0.1} - 2.06)^2 + 0.1 \cdot (\log_2 \frac{1}{0.1} - 2.06)^2 + 0.05 \cdot (\log_2 \frac{1}{0.05} - 2.06)^2 \cdot 2 = 1.406$$

Standartabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1.19$$

1.2 Diskrete Informationsquellen mit abhängigen Ereinissen

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned} \bar{p_1} &= 0.6 \cdot \bar{p_1} + 0.15 \cdot \bar{p_2} + 0.4 \cdot \bar{p_3} \\ \bar{p_2} &= 0.38 \cdot \bar{p_1} + 0.8 \cdot \bar{p_2} + 0.6 \cdot \bar{p_3} \\ 1 &= \bar{p_1} + \bar{p_2} + \bar{p_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.15 \cdot \bar{p_2} + 0.4 \cdot \bar{p_3} - 0.4 \cdot \bar{p_1} \\ 0 &= 0.38 \cdot \bar{p_1} + 0.6 \cdot \bar{p_3} - 0.2 \cdot \bar{p_2} \\ 1 &= \bar{p_1} + \bar{p_2} + \bar{p_3} \end{aligned}$$

Berechnung der stationäre Wahrscheinlichkeiten über das Gleichungssystem (online, Taschenrechner oder Gauß Verfahren).

$\bar{p_1} = 0.29 \;\; \bar{p_2} = 0.67 \;\; \bar{p_3} = 0.04$

b)

$$\begin{aligned} H_M = {} & \bar{p_1} \cdot (0.6 \cdot \log_2 \frac{1}{0.6} + 0.38 \cdot \log_2 \frac{1}{0.38} + 0.02 \cdot \log_2 \frac{1}{0.02}) + \\ & \bar{p_2} \cdot (0.15 \cdot \log_2 \frac{1}{0.15} + 0.8 \cdot \log_2 \frac{1}{0.8} + 0.05 \cdot \log_2 \frac{1}{0.05}) + \\ & \bar{p_3} \cdot (0.4 \cdot \log_2 \frac{1}{0.4} + 0.6 \cdot \log_2 \frac{1}{0.6}) \\ & = 0.97 \frac{bit}{Zeichen} \end{aligned}$$

c)

$$H_m = 0.29 \cdot \log_2 \frac{1}{0.29} + 0.67 \cdot \log_2 \frac{1}{0.67} + 0.04 \cdot \log_2 \frac{1}{0.04} = 1.09 \frac{bit}{Zeichen}$$

d)

$$H_0 = \log_2 3 = 1.58 \frac{bit}{Zeichen}$$