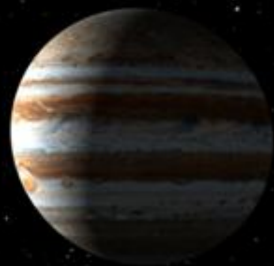


Mechanika Nieba

Zagadnienie dwóch ciał

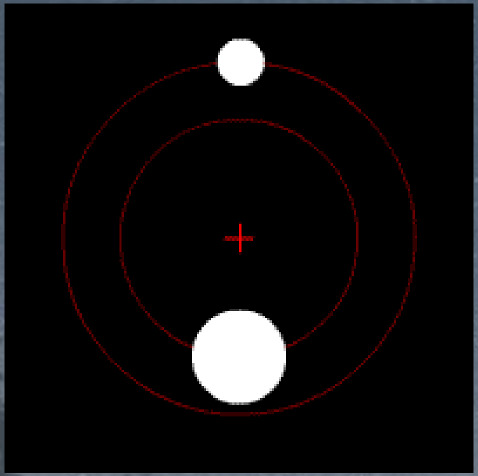
Daria Pączkowska

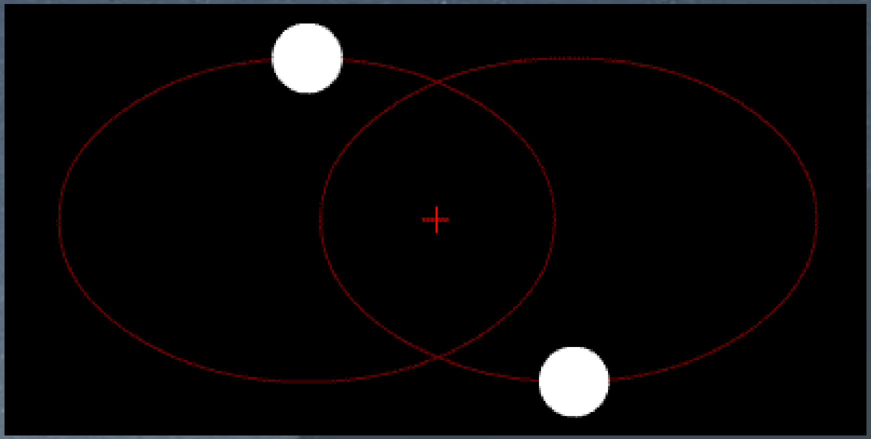
Plan prezentacji

1. O czym mówi zagadnienie dwóch ciał?
2. Opis matematyczny ruchu dwóch ciał
3. Środek masy układu dwóch ciał
4. Równanie ruchu względnego
5. Równanie orbitalne
6. Zagadnienie dwóch ciał na przykładzie obiektów w Układzie Słonecznym
7. Zadania

Zagadnienie dwóch ciał

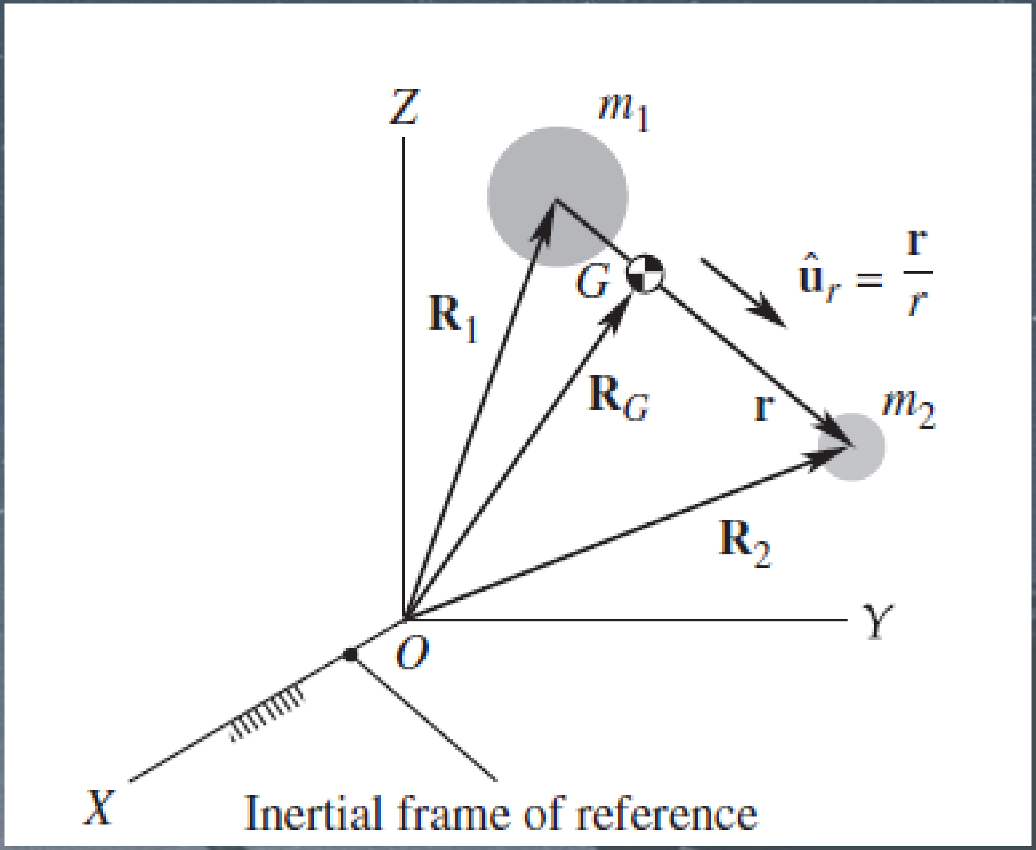
Problem wyznaczenia ruchu dwóch odosobnionych punktów materialnych pod działaniem przyciągania Newtonowskiego.





Zagadnienie dwóch ciał

Rozważmy dwie punktowe masy oddziałujące na siebie siłą grawitacji:



Położenie mas w inercjalnym układzie współrzędnych XYZ opisane jest za pomocą wektorów R1 i R2. Odległość między nimi wynosi r.

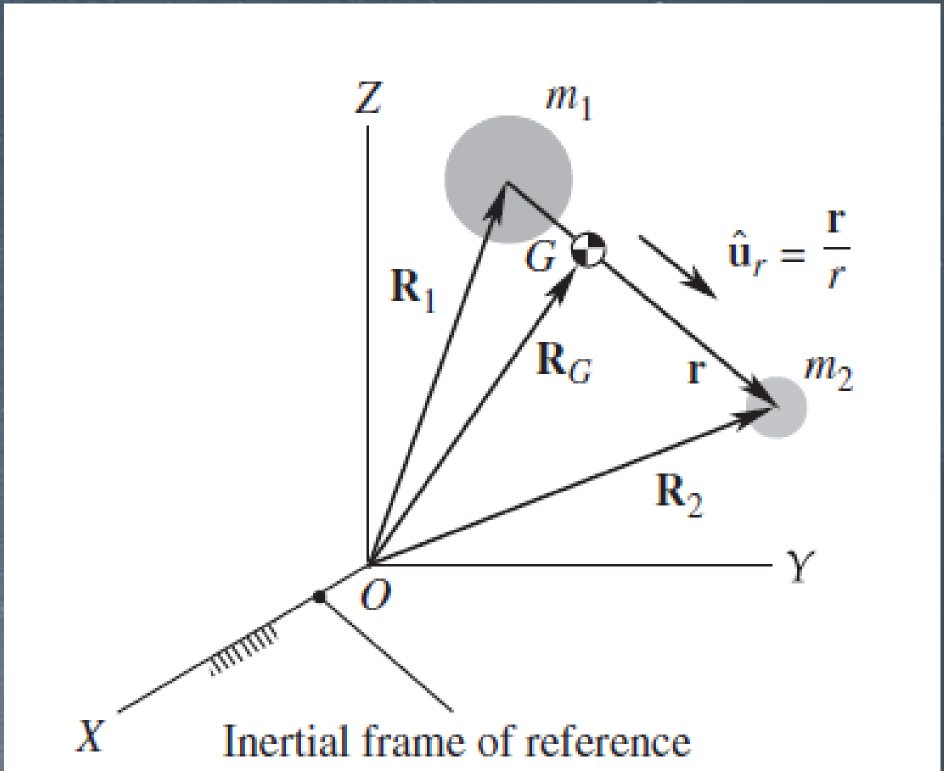
Zagadnienie dwóch ciał

Wektor położenia ciała M2 względem M1:

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$$

Wektor jednostkowy wskazujący kierunek od ciała M1 do M2

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$



Zagadnienie dwóch ciał

Siła wywierana przez masę M2 na M1:

$$\vec{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}(-\hat{u}_r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{u}_r$$

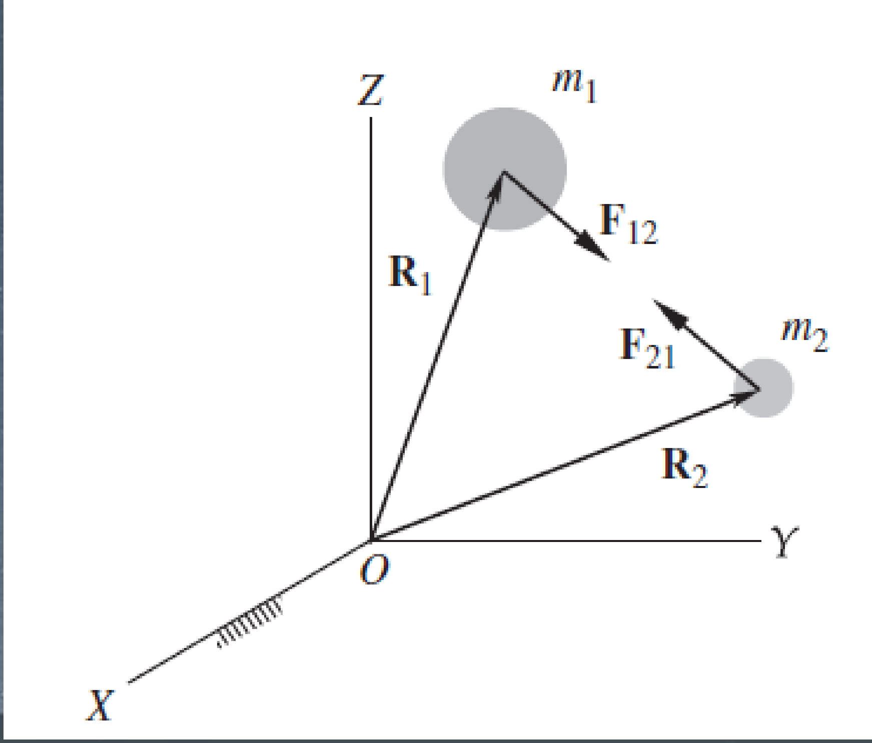
Siła wywierana przez masę M1 na M2:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{u}_r$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$\vec{F}_{21} = am_2 = \ddot{\vec{R}}_2 m_2$$

$$\vec{F}_{12} = am_1 = \ddot{\vec{R}}_1 m_1$$



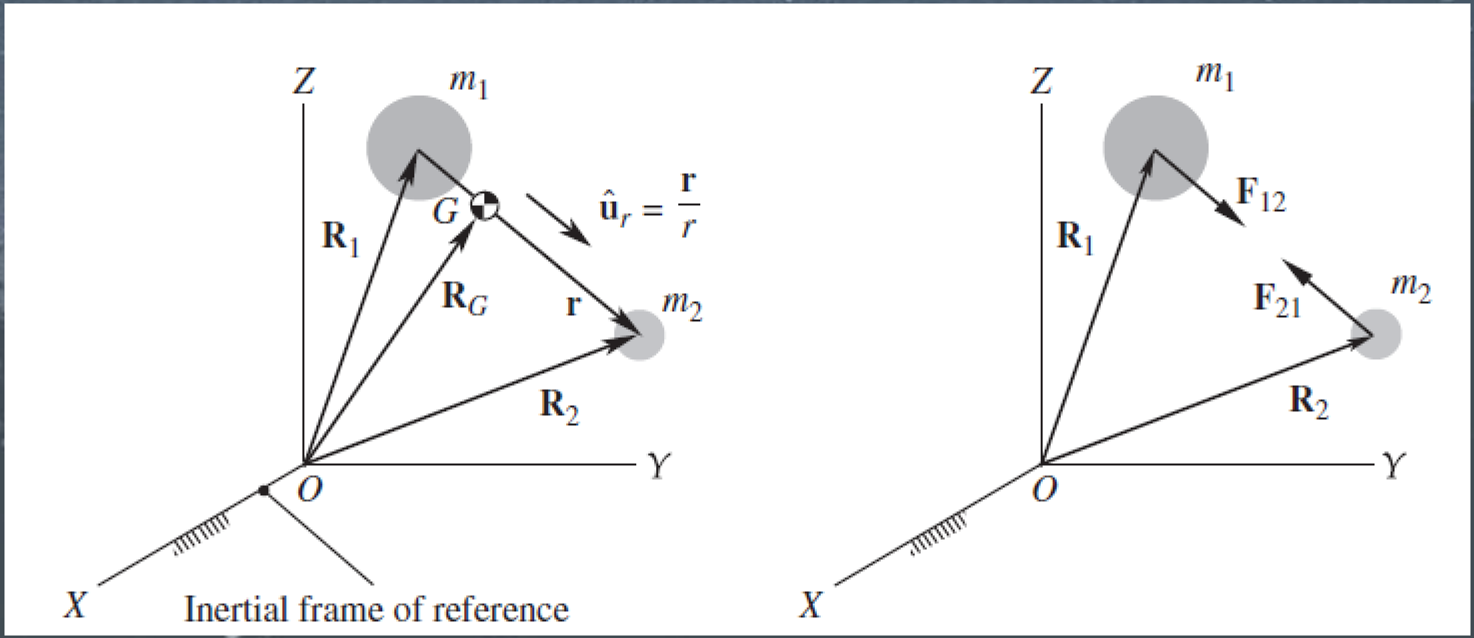
Zagadnienie dwóch ciał

Zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Stąd:

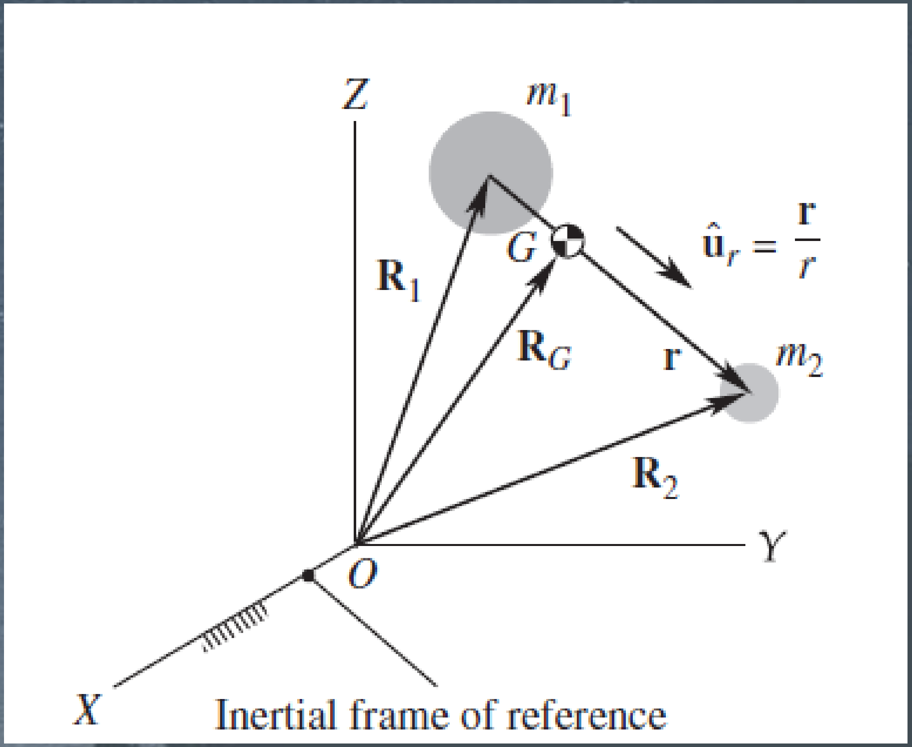
$$\ddot{\vec{R}}_1 m_1 + \ddot{\vec{R}}_2 m_2 = 0$$



Zagadnienie dwóch ciał

Położenie środka masy układu ciał – G:

$$\vec{R}_G = \frac{m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2}{m_1 + m_2}$$



Po zróżniczkowaniu otrzymujemy prędkość oraz przyśpieszenie środka masy układu:

$$\vec{V}_G = \dot{\vec{R}}_G = \frac{m_1\dot{\vec{R}}_1 + m_2\dot{\vec{R}}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{a}_G = \ddot{\vec{R}}_G = \frac{m_1\ddot{\vec{R}}_1 + m_2\ddot{\vec{R}}_2}{m_1 + m_2}$$

Zagadnienie dwóch ciał

Ponieważ

$$\ddot{\vec{R}}_1 m_1 + \ddot{\vec{R}}_2 m_2 = 0$$

To przyspieszenie środka masy układu jest równe zero:

$$\vec{a}_G = \ddot{\vec{R}}_G = \frac{m_1 \ddot{\vec{R}}_1 + m_2 \ddot{\vec{R}}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Stąd wynika, że dla każdego układu dwóch ciał, na który nie działają siły zewnętrzne środek masy układu porusza się po linii prostej ze stałą prędkością.

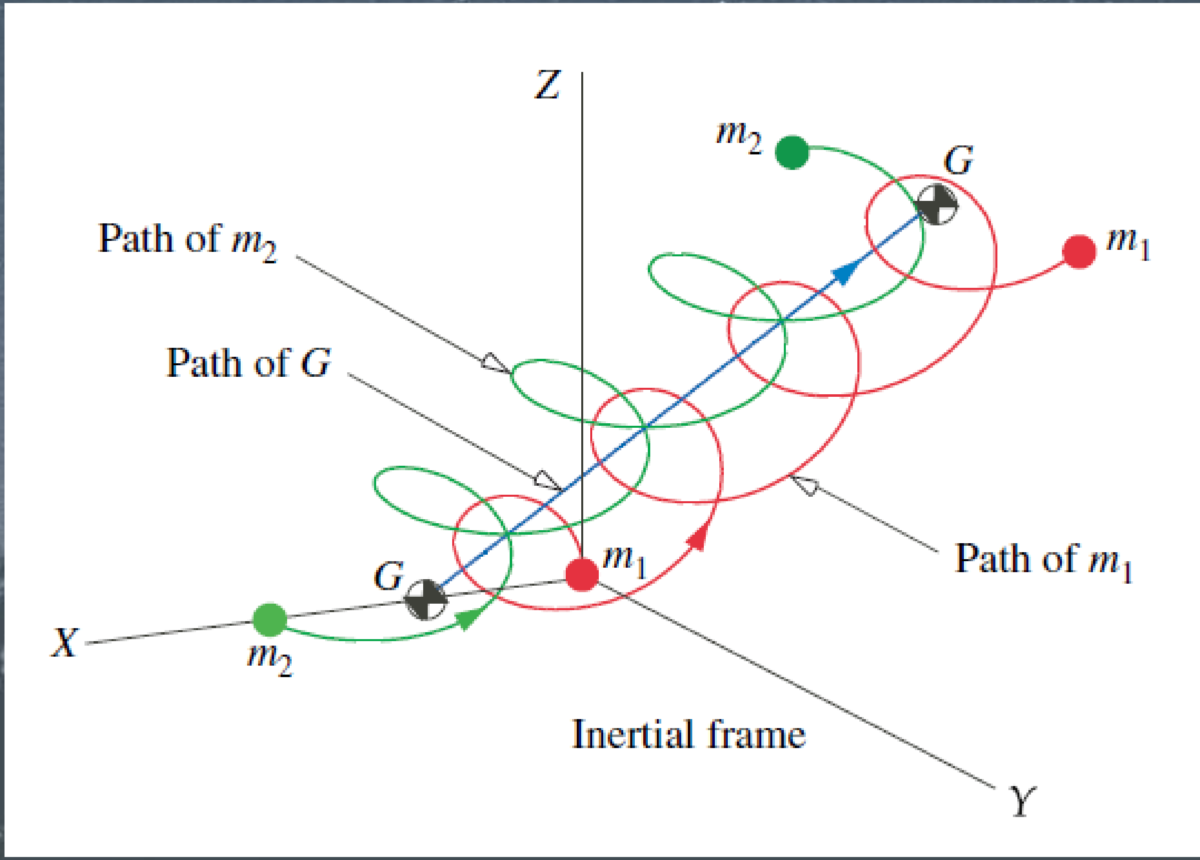
Nieprzyspieszający środek masy układu może służyć jako początek inercjalnego układu współrzędnych.

Zagadnienie dwóch ciał

Położenie środka masy w układzie XYZ jest opisane równaniem:

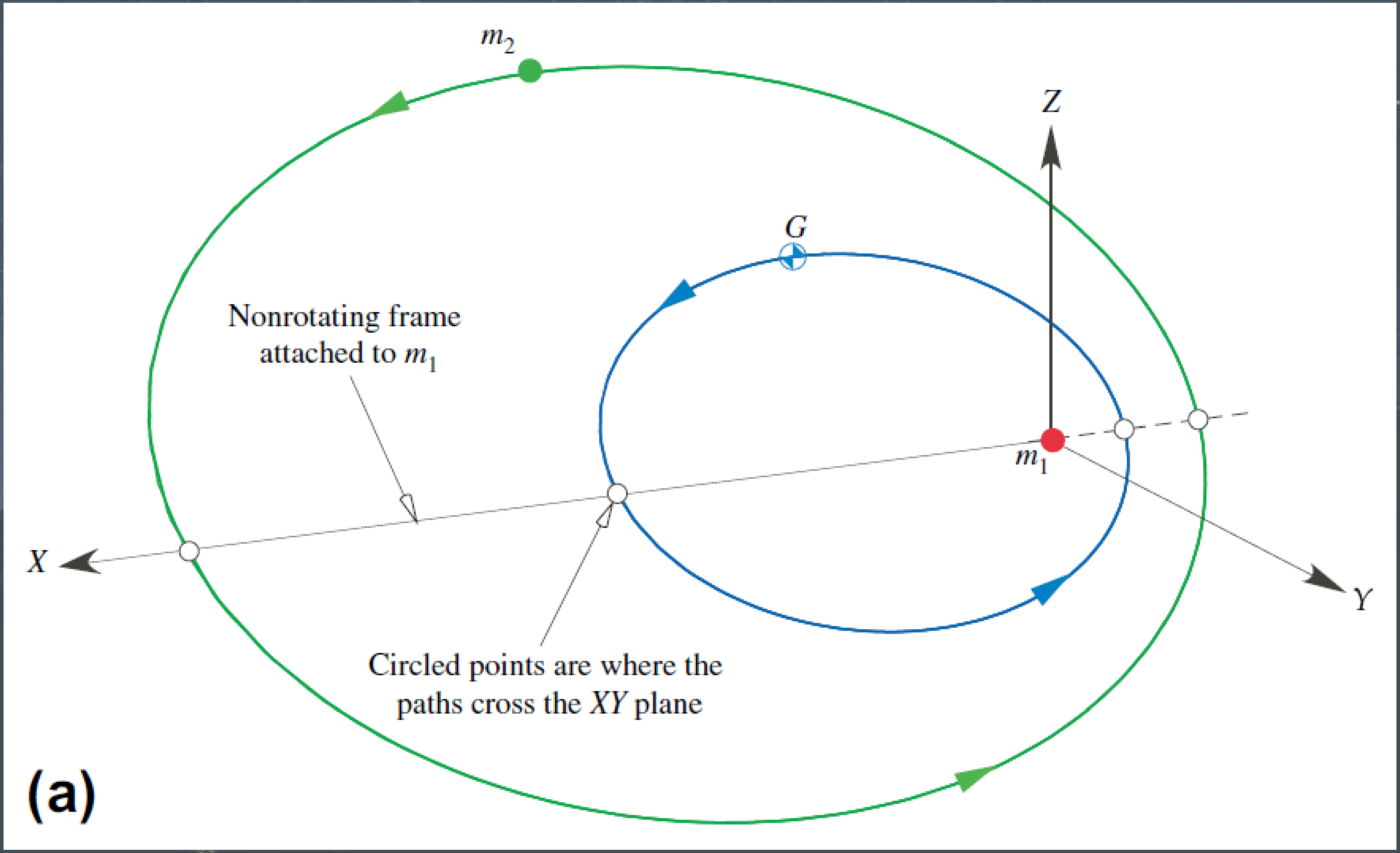
$$\vec{R}_G = \vec{R}_{G_0} + \vec{V}_G t$$

Gdzie $\vec{R}_{G_0}$ - położenie środka masy w chwili czasu t=0



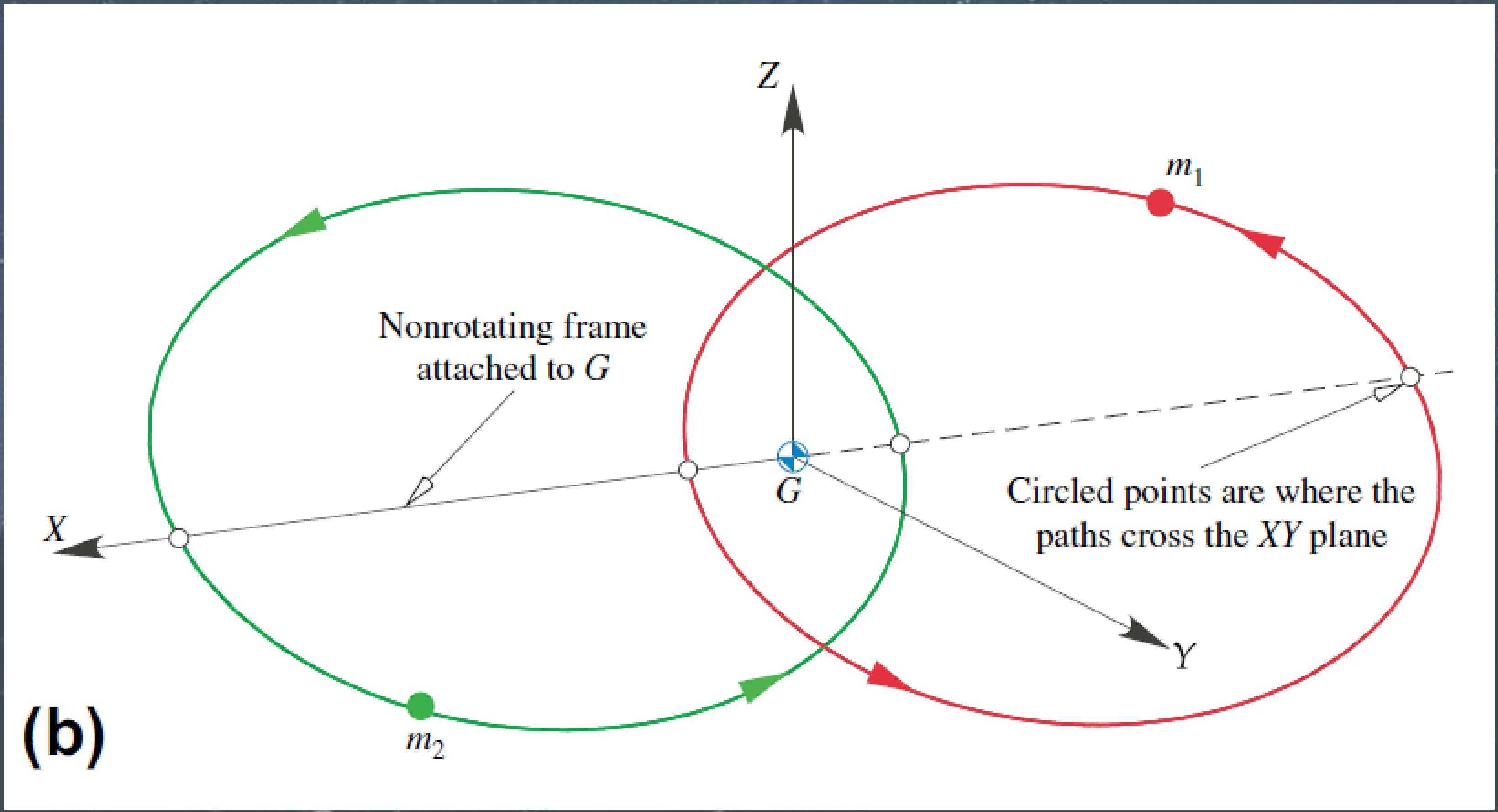
Zagadnienie dwóch ciał

Ruch układu dwóch ciał przedstawiony względem ciała M1 lub M2



Zagadnienie dwóch ciał

Ruch układu dwóch ciał przedstawiony względem środka masy układu



Zagadnienie dwóch ciał

Ogólna postać równania ruchu ciała M2 względem ciała M1:

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$$

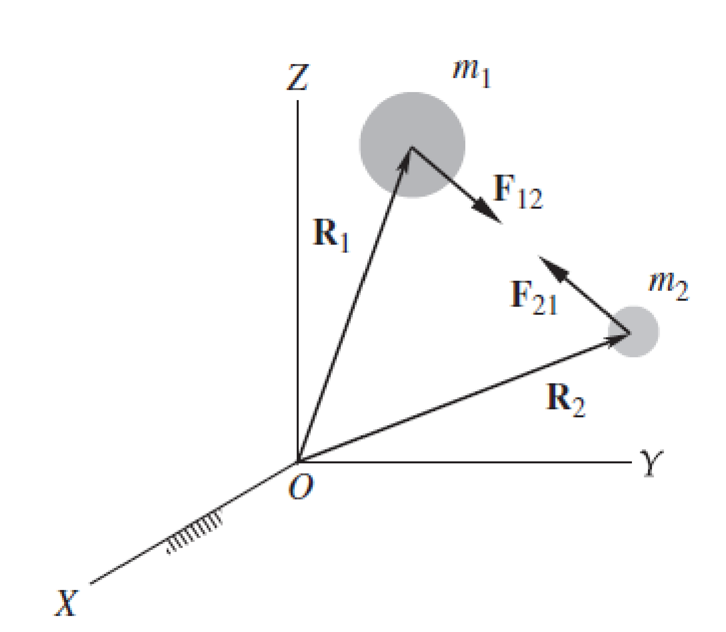
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_2 - \ddot{\vec{R}}_1$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \qquad \ddot{\vec{R}}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = -\frac{\vec{F}_{21}}{m_1}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right)\vec{F}_{21}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{m_1 + m_2}{r^3}\vec{r}$$

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

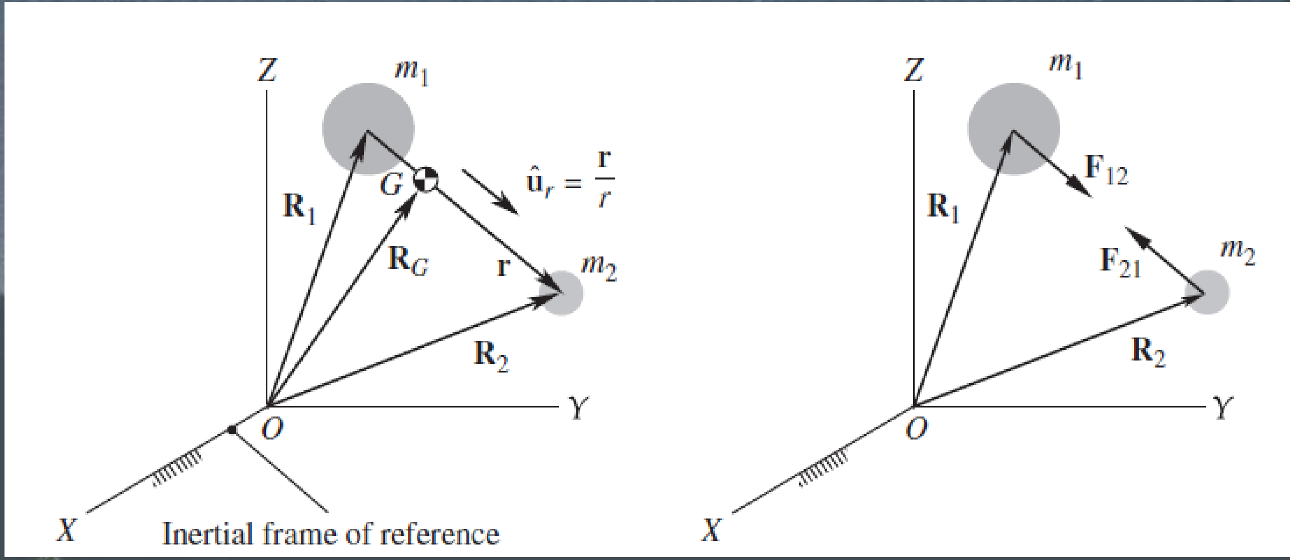


$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = \frac{\mu}{r^3}\vec{r}}$$

Zagadnienie dwóch ciał

W wielu przypadkach zagadnienia dwóch ciał jedno z nich ma wyraźnie większą masę np. układ Słońce – Ziemia. Wtedy środek masy dużego ciała jest w przybliżeniu środkiem masy układu i problem ruchu dwóch ciał sprowadza się do ruchu ciała o małej masie wokół ciała głównego.

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$



Zagadnienie dwóch ciał

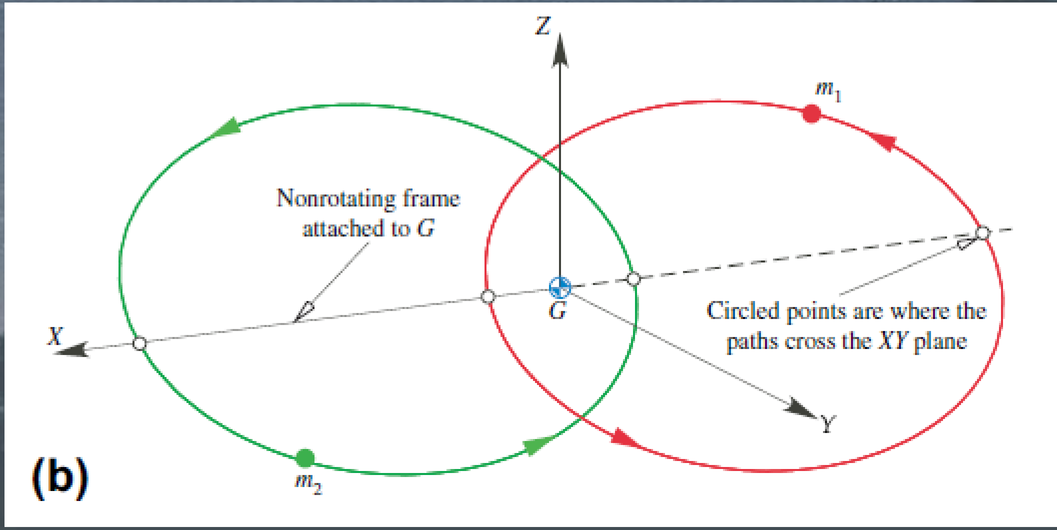
Jeżeli początek układu inercjalnego znajduje się w środku masy układu dwóch ciał to równanie ruchu ciał mają postać:

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\mu'}{r_2^3}\overrightarrow{r_2}$$

$$\mu' = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^3 \mu$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{\mu''}{r_1^3}\overrightarrow{r_1}$$

$$\mu'' = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^3 \mu$$



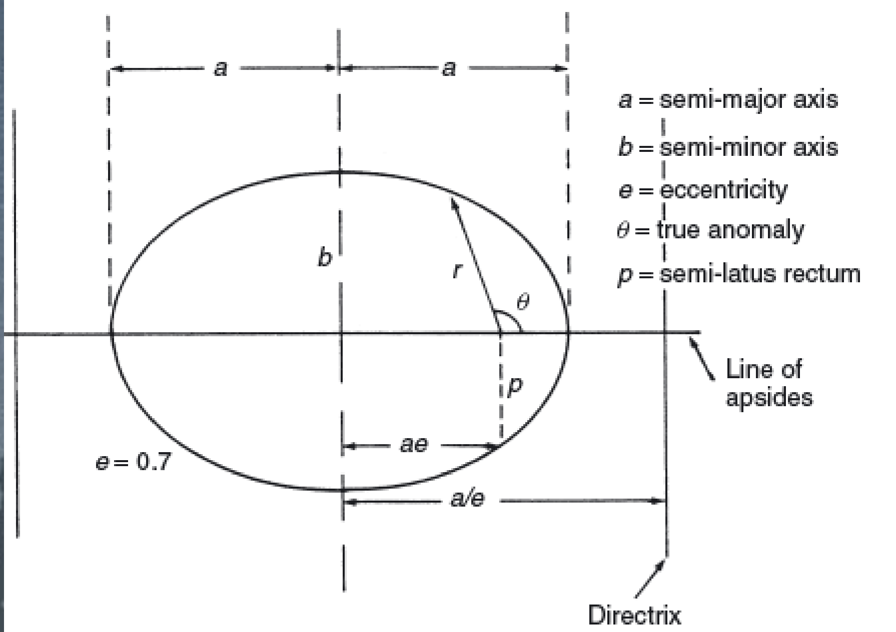
Zagadnienie dwóch ciał

Rozwiązaniem równania ruchu względnego dwóch ciał przy wykorzystaniu zasady zachowania momentu pędu jest tzw. równanie orbitalne opisujące krzywą stożkową po jakiej porusza się ciało.

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e\,cos\theta}$$

Gdzie:

- r - promień orbity
- h - moment pędu
- e - mimośród
- θ - anomalia prawdziwa
- μ - parametr grawitacyjny



Zagadnienie dwóch ciał na przykładzie obiektów w Układzie Słonecznym

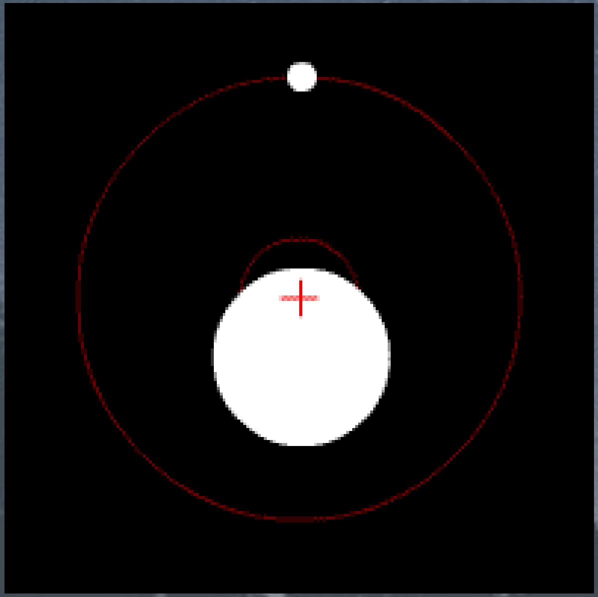
Główne ciało	$\frac{M_1}{M_{Earth}}$	Drugie ciało	$\frac{M_2}{M_{Earth}}$	a [km]	r_1 [km]	R_1 [km]	$\frac{r_1}{R_1}$ [km]
Ziemia	1	Księżyc	0.0123	384 000	4 670	6 380	0.732
Pluton	0.0021	Charon	0.000254	19 600	2 110	1 150	1.83
Słońce	333 000	Ziemia	1	150 000 000	449	696 000	0.000646
Słońce	333 000	Jowisz	318	778 000 000	742 000	696 000	1.07

$\boldsymbol{M_1}$ - masa głównego ciała,
$\boldsymbol{M_2}$ - masa drugiego ciała układu,
$\boldsymbol{r_1}$ [km] – odległość między środkiem masy głównego ciała i środkiem masy układu ciał,
$\boldsymbol{R_1}$ [km] – promień głównego ciała,
$\boldsymbol{r_1/R_1}$ - dla stosunku odległości < 1 środek masy układu znajduje się wewnątrz ciała głównego.

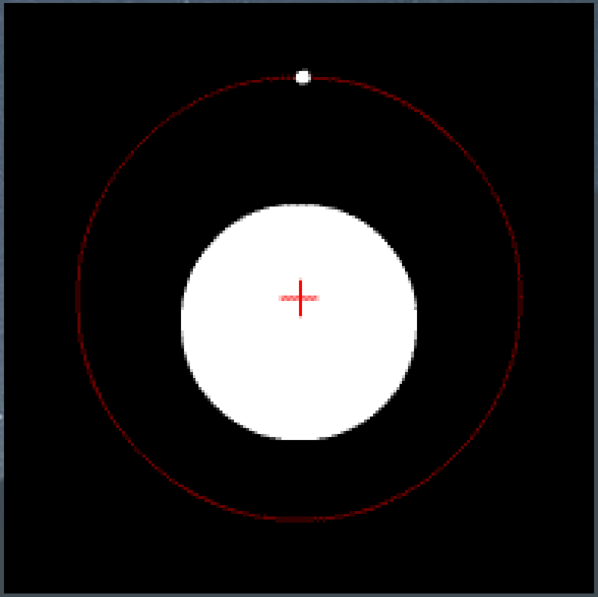
Zagadnienie dwóch ciał na przykładzie obiektów w Układzie Słonecznym

Animacje przedstawiające układy dwóch ciał zbliżone do układów:

Ziemia - Księżyc



Słońce - Ziemia



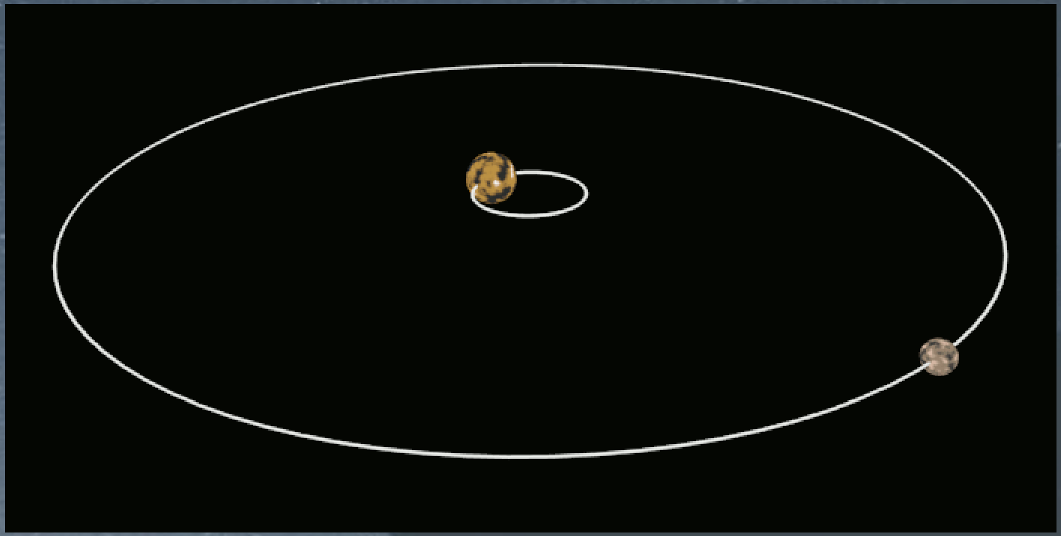
Zagadnienie dwóch ciał

W przypadku układów dwóch ciał o masach bardzo zbliżonych nie można zastosować przybliżenia do układu jednego ciała. Do przykładów takich układów należą:

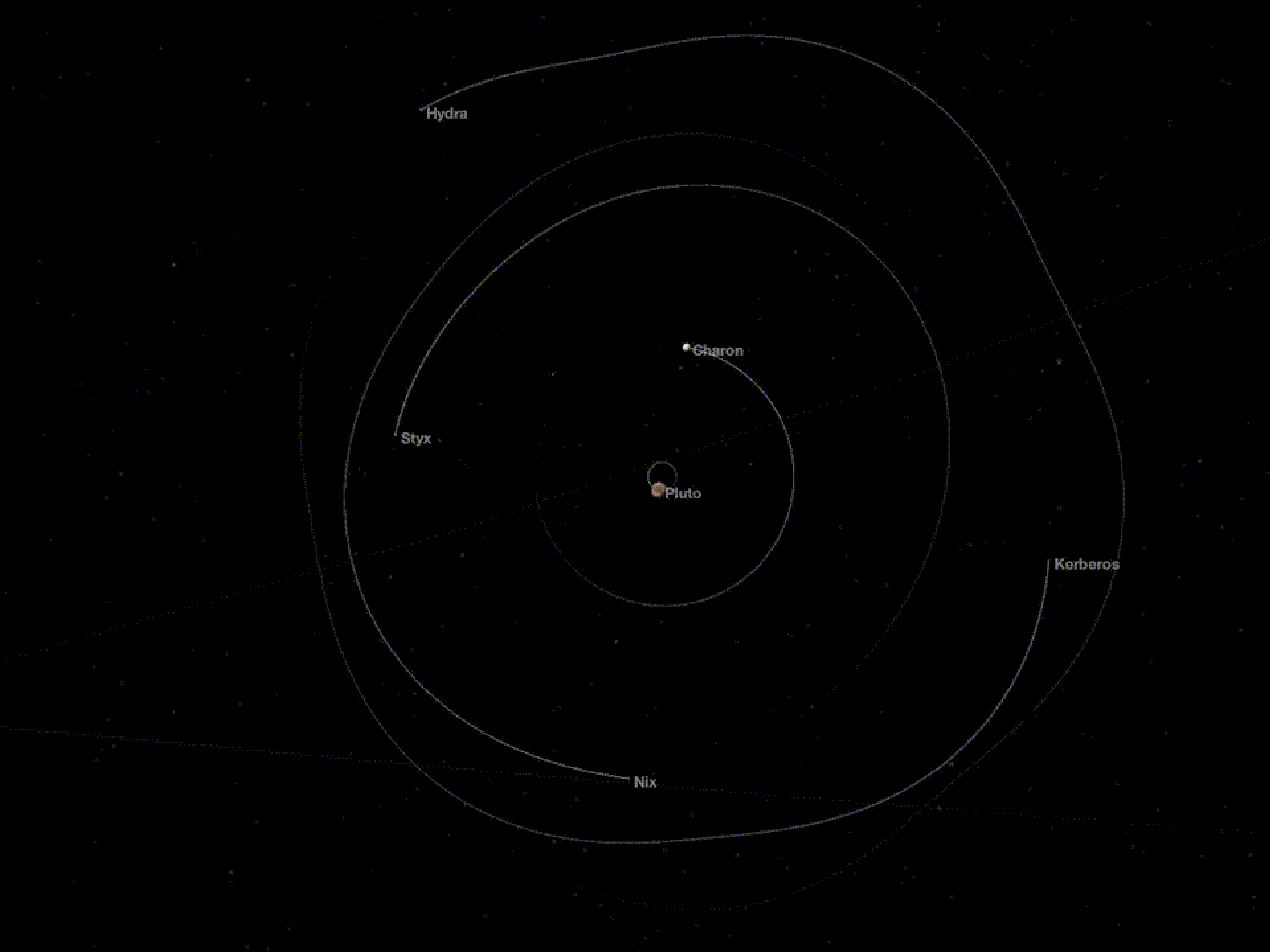
- gwiazdy podwójne np. Alpha Centauri
- planety podwójne np. Pluton i Charon
- asteroidy podwójne np. Antiope

Zagadnienie dwóch ciał na przykładzie obiektów w Układzie Słonecznym

Układ Pluton - Charon



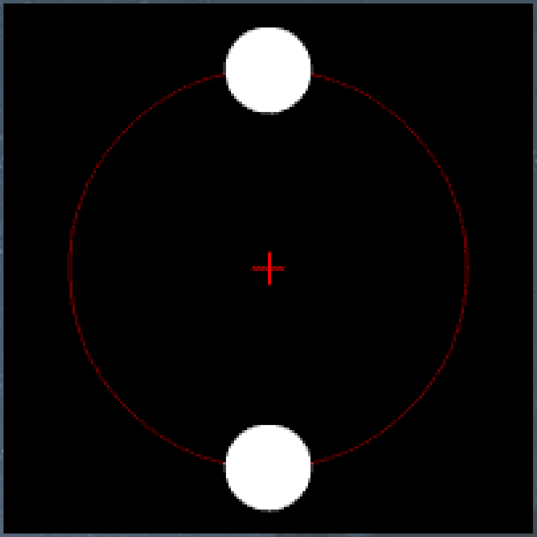
Zdjęcia Plutona i Charona wykonane przez sondę New Horizons i złożone w animację.



Hydra
Charon
Styx
Pluto
Kerberos
Nix

Zagadnienie dwóch ciał

Układ podwójny planetoidy Antiope



Antiope jest planetoidą podwójną pasa głównego, w której układzie znajdują się dwa obiekty o niemal jednakowych rozmiarach. Maksymalne średnice składników to 93 km i 89,4 km. Składniki rotują wokół wspólnego środka masy, oddalone od siebie o 171 km. Okres obrotu wokół własnych osi oraz okres obiegu są najprawdopodobniej równe i wynoszą 16,5 godziny – są one zatem odwrócone do siebie zawsze tymi samymi stronami.

Zadanie 1

Używając równań ruchu dla układu dwóch ciał pokazać dlaczego astronauci na orbicie odczuwają stan nieważkości.

Rozwiązanie:

Rozważmy astronautę o masie m_a w statku kosmicznym o masie m_s na orbicie wokół Ziemi. Odległość między środkiem Ziemi i statkiem jest równa r, a masa Ziemi M_z.

Jedyną zewnętrzną siłą działającą na statek jest siła grawitacji, więc równanie ruchu statku ma postać:

$$F_{g_s} = m_s a_s$$

$$F_{g_s} = -\frac{G M_z m_s}{r^2}\hat{u}_r$$

$$a_s = -\frac{G M_z}{r^2}\hat{u}_r$$

Gdzie

$\hat{u}_r$ - wektor jednostkowy skierowany z Ziemi do statku kosmicznego

Zadanie 1

Rozwiązanie cd. :

Natomiast równanie ruchu astronauty:

$$F_{g_a} + C_a = m_a a_a$$

Gdzie

C_a - wypadkowa siła nacisku działająca na astronautę

$$F_{g_a} = -\frac{GM_z m_a}{r^2}\hat{u}_r$$

Astronauta porusza się razem ze statkiem, stąd:

$$a_a = a_s = -\frac{GM_z}{r^2}\hat{u}_r$$

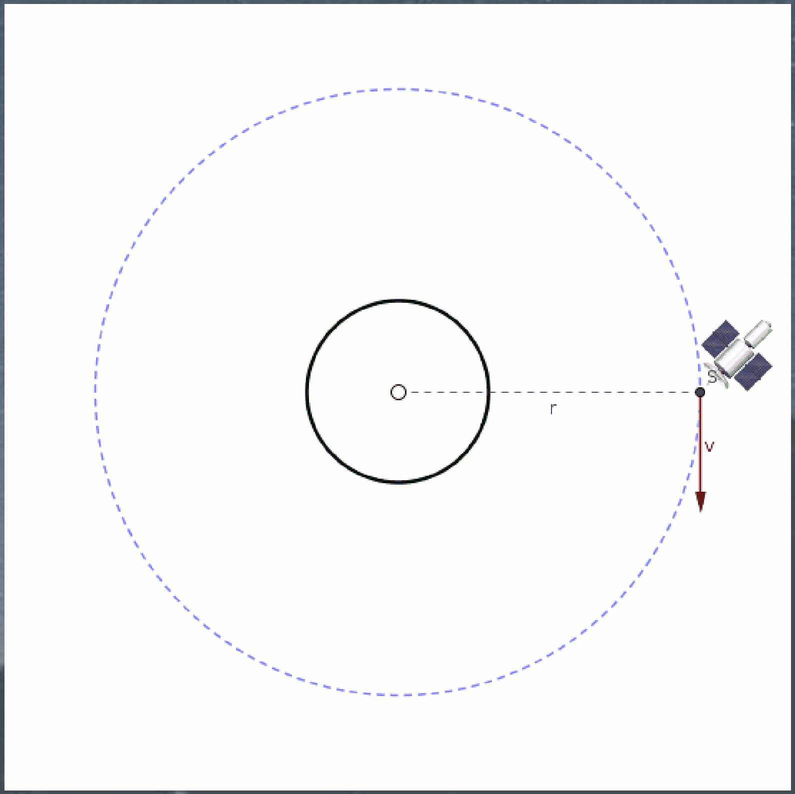
Wstawiając do równania ruchu astronauty:

$$-\frac{GM_z m_a}{r^2}\hat{u}_r + C_a = m_a\left(-\frac{GM_z}{r^2}\hat{u}_r\right)$$

$$C_a = 0$$

Zadanie 2

Oblicz ile musiałaby wynosić masa satelity znajdującego się na orbicie geostacjonarnej, aby środek układu Ziemia – satelita znajdował się poza Ziemią.



Literatura

[1] V. A. Chobotov, *Orbital Mechanics, Third Edition*. 2002.
[2] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students, third edition*. 2013.
[3] P. Fortescue, G. Swinerd, and J. Stark, *Systems Engineering Spacecraft Systems*. 2011.
[4] "NASA's Hubble Finds Pluto's Moons Tumbling in Absolute Chaos," 2015. [Online]. Available: https://www.nasa.gov/press-release/nasa-s-hubble-finds-pluto-s- moons-tumbling-in-absolute-chaos. [Accessed: 22-Nov-2017].
[5] "Gravitational two body problem." [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_two-body_problem. [Accessed: 21-Nov-2017].
[6] "Barycenter." [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Barycenter. [Accessed: 21-Nov-2017].
[7] "The View from New Horizons: A Full Day on Pluto-Charon," 2015. [Online]. Available: https://www.nasa.gov/content/the-view-from-new-horizons-a-full-day-on-pluto-charon. [Accessed: 21-Nov-2017].