

文章编号:1006-3080(2007)03-0405-05

## 模式分析的核函数设计方法及应用

柳桂国<sup>1,2</sup>, 柳 贺<sup>1</sup>, 黄 道<sup>1</sup>

(1. 华东理工大学工业自动化国家工程中心分部, 上海 200237;

2. 浙江工商职业技术学院, 浙江宁波 315020)

**摘要:**利用卷积算子和  $H^1(R)$  核函数给出了一种设计  $H^n(R)$  核函数的新方法, 该方法简便易行。运用该方法设计的核函数, 应用在轴承正常振动信号数据、轴承内圈、外圈以及滚动体故障振动信号数据进行核主成分分析(KPCA)中, 仿真结果表明: 该方法可以有效地识别轴承正常和内圈、外圈以及滚动体故障。

**关键词:**核函数; 模式分析; 卷积算子; 核主成分分析(KPCA); 故障诊断

**中图分类号:**TP301

**文献标识码:**A

## Design Method and Application with Kernel Function for Pattern Analysis

LIU Gui-guo<sup>1,2</sup>, LIU He<sup>1</sup>, HUANG Dao<sup>1</sup>

(1. State Engineering Research Center of Industrial Automation, East China

University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;

2. Zhejiang Business Technology Institute, Ningbo 315020, Zhejiang, China)

**Abstract:** We present a new method for designing kernel function of  $H^n(R)$  using kernel function of  $H^1(R)$  and convolution operator. It's possible to select the most suitable kernel function with the method, and its calculation becomes very easy. The method is applied successfully to design the kernel function for kernel principal component analysis using the vibration data of normal, outer race, inner race and ball bearings. The simulation results show the effectiveness of detecting bearings faults.

**Key words:** kernel function; pattern analysis; convolution operator; kernel principal component analysis(KPCA); fault diagnosis

模式分析核方法, 首先要建立核函数或核矩阵, 把非线性数据映射到线性可分的特征空间中。传统的核函数构造是试凑性的, 即预先给定核函数, 根据问题的需要筛选核函数, 直至满足需要。近年来, 核函数设计是模式分析核方法的一个研究焦点, 尽管有人尝试根据黎曼度量的性质构造核函数, 然后根据实际问题的需要调整其参数, 取得了一定的效果<sup>[1]</sup>。但是, 从理论上设计核函数至今还没见报道。

本文利用卷积算子和  $H^1(R)$  核函数给出了一种设计  $H^n(R)$  核函数的方法, 该方法是理论上设计核函数的一次尝试。运用该方法设计的核函数, 应用在轴承正常振动信号数据、轴承内圈、外圈以及滚动体故障振动信号数据进行核主成分分析(KPCA)中, 可以有效地识别轴承正常和内圈、外圈以及滚动体故障。

收稿日期: 2006-06-15

作者简介: 柳桂国(1963-), 男, 浙江宁波人, 副教授, 博士生, 主要从事智能信号处理、智能控制理论与应用、故障诊断方面研究。

E-mail: taiyl@nbip.net

# 1 核函数及再生核函数

## 1.1 核函数

如果给定一组数据向量构成数据空间的一个子空间  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_l\} \subseteq \mathbf{R}^n$ , 为了采用模式分析核方法, 需要把该子空间  $S$  映射到特征空间的子空间  $F = \{\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_l)\} \subseteq \mathbf{R}^N$ . 这里的映射实际上是一种模式函数  $\phi(\cdot)$ , 即

$$\phi(\cdot): x \in S \subseteq \mathbf{R}^n \mapsto \phi(x) \in F \subseteq \mathbf{R}^N \quad (1)$$

通常数据空间  $\mathbf{R}^n$  是一种非线性空间, 而特征空间  $\mathbf{R}^N$  是一种线性的内积空间, 也就是 Hilbert 空间。

核函数定义为 Hilbert 空间中模式函数  $\phi(\cdot)$  的内积, 即

$$k(x, z) = \langle \phi(x), \phi(z) \rangle \quad (2)$$

因此, 核函数实际上是一个把连续或可导的数据域映射成一个有界的非负实数域  $\mathbf{R}^+$ , 即

$$k(\cdot, \cdot): S \times S \mapsto \mathbf{R}^+; 0 \leq \mathbf{R}^+ < +\infty \quad (3)$$

模式分析核方法, 首先要建立核函数或核矩阵, 把非线性数据映射到线性可分的特征空间中。传统的核函数构造是试凑性的, 即预先给定核函数, 根据问题的需要筛选核函数, 直至满足需要。尽管有人尝试根据黎曼度量的性质构造核函数, 然后根据实际问题的需要调整其参数, 取得了一定的效果。但是, 从实际数据本身出发, 构造核函数至今还没有理论和方法。

## 1.2 再生核函数

再生核定义: 设  $X$  是一个抽象集,  $H$  是定义在  $X$  上的实值或复值函数  $f$  的 Hilbert 空间。在  $X \times X$  域上的函数  $K(x, y)$  称为再生核,  $K(x, y)$  满足以下 2 个特性:

- (1)  $K(x, \cdot) \in H, \forall x \in X$ ;
- (2)  $\langle f(y), K(x, y) \rangle_y = f(x); x \in X, f \in H$ 。

如果  $H$  是一个具有再生核的可分的 Hilbert 函数空间, 并且  $H$  中的正交基为  $\{\varphi_i(x)\}$ , 那么  $H$  中的再生核为:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y) \quad (4)$$

文献[2~4]介绍了一种采用  $\delta$  函数在  $H^1(R)$  和  $H^2(R)$  的 2 种空间上计算再生核的技术。

令  $K_1(x)$  是算子  $L = 1 - \frac{d^2}{dx^2}$  的基本解, 满足内积定义,  $\langle u, v \rangle = \int_R (uv + u'v') dx$  的  $H^1(R)$  的再生核是  $K_1(x-y)$ 。

令  $K_2(x)$  是算子  $L = \frac{d^4}{dx^4} - 2 \frac{d^2}{dx^2} + 1$  的基本

解, 满足内积定义,

$$\langle u, v \rangle = \int_R (uv + 2u'v' + u''v'') dx \text{ 的 } H^2(R) \text{ 上}$$

再生核是  $K_2(x-y)$ 。

# 2 $H^n(R)$ 核函数设计

## 2.1 $H^n(R)$ 核函数性质

考虑 Hilbert 空间  $H^n(R)$  上的内积定义为

$$\langle u, v \rangle = \int_R \sum_{i=0}^n C_i u^{(i)} v^{(i)} dx \quad (5)$$

其中:  $C_i (i=1, 2, \dots, n)$  是  $(a+b)^n$  的系数。

$$\text{定理 1 } K_2(x) = (K_1 * K_1)(x) \quad (6)$$

式(6)中,  $*$  为卷积。

证明 令  $F(x)$  为  $x$  的 Fourier 变换, 则

$$F(K_1(x)) = \frac{1}{1+\omega^2},$$

$$F((K_1 * K_1)) = F(K_1(x)) \cdot F(K_1(x)) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2} = F(K_2(x))$$

因此, 式(6)成立。

定理 2 定义  $K_n(x-y)$  为  $H^n(R)$  上的再生核, 则

$$K_n(x-0) = K_n(x) = (K_1 * K_{n-1})(x) = \dots = (K_1 * K_1 * \dots * K_1)(x) \quad (7)$$

证明 因为  $\langle u, v \rangle = \int_R \sum_{i=0}^n C_i u^{(i)} v^{(i)} dx$ , 所以

$$\begin{aligned} & \langle K_n(x-y), f(y) \rangle_{H^n(R)} = \\ & C_0 \langle K_n(x-y), f(y) \rangle_{L^2(R)} + \\ & C_1 \langle K_n'(x-y), f'(y) \rangle_{L^2(R)} + \dots + \\ & C_n \langle K_n^{(n)}(x-y), f^{(n)}(y) \rangle_{L^2(R)} \end{aligned}$$

Fourier 变换后, 有

$$\begin{aligned} & \frac{C_0}{2\pi} \langle e^{i\omega x} K_n(\omega), f(\omega) \rangle_{L^2(R)} + \\ & \frac{C_1}{2\pi} \langle i\omega e^{i\omega x} K_n(\omega), i\omega f(\omega) \rangle_{L^2(R)} + \dots + \\ & \frac{C_n}{2\pi} \langle (i\omega)^n e^{i\omega x} K_n(\omega), (i\omega)^n f(\omega) \rangle_{L^2(R)} = \\ & \frac{C_0}{2\pi} \langle e^{i\omega x} (K_1(\omega))^n, f(\omega) \rangle_{L^2(R)} + \\ & \frac{C_1}{2\pi} \langle \omega^2 e^{i\omega x} (K_1(\omega))^n, f(\omega) \rangle_{L^2(R)} + \dots + \\ & \frac{C_n}{2\pi} \langle \omega^{2n} e^{i\omega x} (K_1(\omega))^2, f(\omega) \rangle_{L^2(R)} = \\ & \frac{1}{2\pi} \langle e^{i\omega x} \frac{1}{(1+\omega^2)^n} (C_0 + C_1 \omega^2 + \dots + \end{aligned}$$

$$C_n \omega^{2n}, f(\omega) \rangle_{L^2(R)} = \frac{1}{2\pi} \langle e^{in\omega}, f(\omega) \rangle_{L^2(R)}$$

Fourier 反变换后,  $F^{-1}[f(\omega)] = f(x)$ 。因此,

$$K_n(x) = (K_1 * K_1 * \cdots * K_1)(x)。$$

**定理 3** 如果  $\{x_i\}_{i=1}^\infty$  在  $R$  上稠密并且彼此不同, 则

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (H_m u)(x) &= u(x), \\ (H_m u)(x) &= \sum_{i=1}^m (u, \varphi_i^*) \varphi_i^*, \forall u(x) \in H^n(R) \end{aligned} \quad (8)$$

$\{\varphi_i\}_{i=1}^m$  是利用 Schmidt 正交性从  $\{\varphi_i = K_n(x - x_i)\}_{i=1}^m$  导出的正交函数系。

**证明** 首先证明  $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$  是线性独立的, 令

$$C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \cdots + C_m \varphi_m = 0$$

采用反证法, 假设  $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$  线性不独立。对上式两边取 Fourier 变换, 则

$$C_1 e^{-ix_1 \omega} + C_2 e^{-ix_2 \omega} + \cdots + C_m e^{-ix_m \omega} = 0$$

若  $C_1 \neq 0$ , 则

$$1 = - \left( \frac{C_2}{C_1} e^{i(x_1 - x_2)\omega} + \cdots + \frac{C_m}{C_1} e^{i(x_1 - x_m)\omega} \right)$$

根据上式知道一定存在至少不全等于 0 的  $C_1, \dots, C_m$ , 如果  $C_2 \neq 0$ , 那么,  $C_2/C_1 \neq 0$ 。

令

$$x_1 - x_2 = y_2, \dots, x_1 - x_m = y_m,$$

$$\frac{C_2}{C_1} = a_2, \frac{C_m}{C_1} = a_m,$$

从上式可得到,

$$0 = -(a_2 y_2 e^{-iy_2 \omega} + \cdots + a_m y_m e^{-iy_m \omega})$$

显然,  $y_2, \dots, y_m \neq 0$ ,

令  $a_2 y_2 = b_2, \dots, a_m y_m = b_m$ , 则上式成为

$$0 = -(b_2 e^{-iy_2 \omega} + \cdots + b_m e^{-iy_m \omega})$$

由于  $b_2 \neq 0$ , 因此, 存在  $b_3, \dots, b_m$  不全为 0。如果  $b_3 \neq 0$ , 我们能够得到  $c_m e^{-ix_m \omega} = 0$  ( $c_m \neq 0$ ), 产生矛盾。因此,  $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$  必是线性独立的。

对  $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$  进行 Schmidt 正交化, 有

$$\varphi_i^* = \sum_{k=1}^j a_{ki} \varphi_k(x) a_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

令  $\langle \varphi_i^*, u \rangle = 0, (i = 1, 2, \dots, m)$ , 即

$$\sum_{k=1}^j a_{ki} u(x_k) = 0, u(x_k) = 0, (k = 1, 2, \dots)$$

利用  $u(x) = 0$  的连续性以及  $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$  在  $R$  上的稠密性, 可以得出  $\{\varphi_i^*\}_{i=1}^\infty$  是  $H^n(R)$  上的正交基。

因此, 如果  $(H_m u)(x) = \sum_{i=1}^m (u, \varphi_i^*) \varphi_i^*$ , 则

$$(H_m u)(x) \rightarrow u(x) (m \rightarrow \infty)$$

## 2.2 $H^n(R)$ 核函数设计

$H^n(R)$ 核函数设计如下:

因为  $K_1(x) = F^{-1}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ , 所以

$$K_1(x-y) = \frac{1}{2}e^{-|x-y|} = K_1(x, y) \quad (9)$$

又因为

$$\begin{aligned} K_2(x) &= (K_1 * K_1)(x) = \\ \frac{1}{2} \int_R e^{-|y| - |x-y|} dy &= \frac{1}{4}(1 + |x|)e^{-|x|} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} K_2(x-y) &= \frac{1}{4}(1 + |x-y|)e^{-|x-y|} = \\ K_2(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

$$K_3(x) = (K_1 * K_2)(x) =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_R (1 + |y|) e^{-|y| - |x-y|} dy &= \\ \frac{1}{16}(x^2 + 3|x| + 3)e^{-|x|} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} K_3(x-y) &= \frac{1}{16}[(x-y)^2 + \\ 3|x-y| + 3]e^{-|x-y|} &= K_3(x, y) \end{aligned} \quad (11)$$

## 3 应用实例

### 3.1 核主成分分析(KPCA)

定义核矩阵

$$K = (K)_{ij} \equiv k(x_i, x_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, l) \quad (12)$$

式(10)中  $x_i, x_j$  为轴承信号数据。

令  $v_k, \lambda_k$  为  $K$  的特征向量和对应的特征值, 则用核函数表达的特征值方程为:

$$K v_k = \lambda_k v_k \quad (13)$$

设特征值  $\lambda_k$  的顺序排列为:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$ , 相应的前  $p$  个特征矢量为:  $v_1, v_2, \dots, v_p$ 。对于任意测试滚动轴承信号数据  $x$ , 可求得第  $k$  个主成分为  $x$  在对负荷矢量  $\alpha^k$  方向的投影:

$$y_k = \sum_{j=1}^p \alpha_j^k k(x, x_j) \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (14)$$

其中负荷矢量

$$\alpha^k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} v_k \quad (k = 1, 2, \dots, p)。$$

### 3.2 实验

滚动轴承振动信号数据来自 CWRU(the Case Western Reserve University Bearing Data Center)轴承数据中心。所采用的轴承由 SKF 公司提供, 轴承类型分为: 正常、外圈故障、滚动体故障和内圈故

障 4 种。轴承振动信号数据测试条件是:轴承直径 42.7 mm,轴承载荷 1.5 kW,轴承转速为 1 750 r/min。图 1a~d 为 4 种类型滚动轴承某一种样本振动信号图。

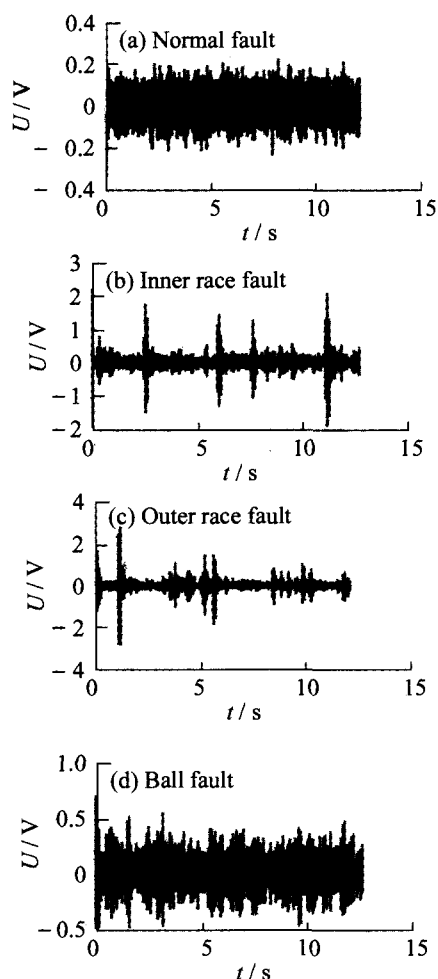


图 1 滚动轴承振动信号时域图

Fig. 1 Vibration signal of rolling bearings

每一种轴承类型分 40 组,每一组分别计算 10 个统计量作为 10 维轴承信号数据向量  $x$ 。10 个统计量定义为:

$$\text{标准差 } p_1 = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2};$$

$$\text{偏斜度 } p_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{N\sigma^3};$$

$$\text{峭度 } p_3 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^4}{N\sigma^4};$$

$$\text{最大值 } p_4 = \max_i(x_i);$$

$$\text{绝对均值 } p_5 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i|;$$

$$\text{均方根幅值 } p_6 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2};$$

$$\text{峰值指标 } p_7 = \frac{p_4}{x_{\text{rms}}};$$

$$\text{波形指标 } p_8 = \frac{x_{\text{rms}}}{p_5};$$

$$\text{脉冲指标 } p_9 = \frac{p_4}{p_5};$$

$$\text{裕度指标 } p_{10} = p_4 \left/ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{|x_i|} \right)^2 \right.$$

上述指标中  $x_i (i=1, 2, \dots, N)$  是原始振动数据样本,  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  是均值。

图 2a 为外圈故障、滚动体故障和内圈故障轴承信号数据进行主成分分析(PCA)后得到的第 1 主成分与第 2 主成分的相关图。从图 2a 可以看出,3 种故障类型的分布混杂重叠在一起,表现出模式分类效果不明显,主要原因是 3 种类型的原始样本特征数据存在非线性关系。

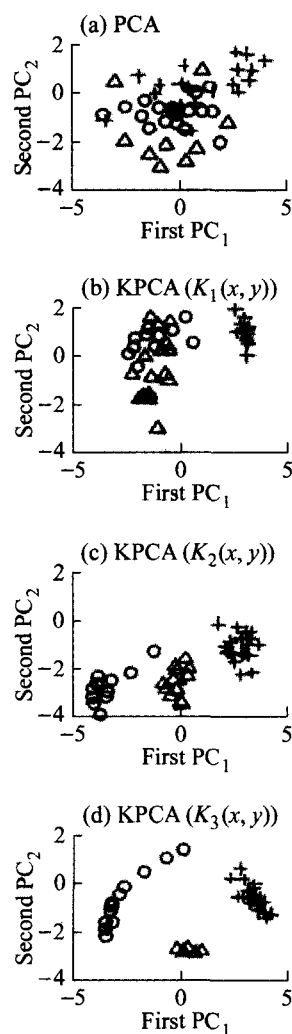


图 2 核函数主元分析在滚动轴承故障模式分类

Fig. 2 Kernel principal component analysis applied for pattern of fault bearings

为了对3种类型的原始样本特征数据进行模式分类,需要采用核方法,把非线性的原始特征数据空间映射到线性的特征空间,核函数采用式(7)、式(8)和式(9)方法获得。图2b、图2c和图2d是分别采用核函数式(7)、式(8)和式(9)的核主成分分析(KPCA)的第1主成分与第2主成分的相关图。从图可以看出,KPCA对于模式分类,其效果优于PCA。其中图2d采用式(9)的核主成分分析,效果最优。

## 4 结 论

利用卷积算子和  $H^1(R)$  核函数可以设计  $H^n(R)$  核函数。实验表明:从高阶可导的函数空间中设计出的核函数,其模式分类效果比从低阶可导的函数空间中设计出的核函数好。工程上究竟采用多少阶可导的函数空间,需要根据实际数据的光滑性能。但至少说明,在采用核方法进行有关数据处理时,采用试凑法预先选取某一种核函数,比如径向

基函数,往往不是最佳的。采用本文设计核函数的方法,结合具体的工程实际情况,可以选择最佳的或次佳的核函数。当然,如果能够自适应地选择最佳的或次佳的核函数,是下一步需要研究的课题。

## 参考文献:

- [1] Shun-ichi Amari, Si Wu. Improving support vector machine classifiers by modifying kernel functions[J]. Neural Networks, 1999, **12**:783-789.
- [2] Xie Xiaggen, Nashed M Z. The Backus-Gilbert methods for signals in reproducing kernel Hilbert spaces and wavelet subspaces[J]. Inverse Problems, 1994, **10**:785-804.
- [3] Zhang Qinli. The numerical methods for solving Euler system of equations in reproducing kernel space  $H^2(R)$ [J]. Journal of Computational Mathematics, 2001, **3**(19):327-336.
- [4] Cui Minggen. Wavelet analysis of differential operator spline in  $H^1(R)$  space[J]. Ukr Acad Sci Dokl Math, 1996, **4**(10):12231-12232.
- [5] 国家环保局《水和废水监测分析法》编委会. 水和废水监测分析法(第3版)[M]. 北京:中国环境科学出版社, 1986.
- [6] 朱 屯. 萃取与离子交换[M]. 北京:冶金工业出版社, 2005.
- [7] 戚海雁, 何晶晶, 章 骅. 给水厂排泥水及污泥的处置[J]. 上海环境科学, 2002, **21**(7):442-443.
- [8] 陆在宏, 吴今明, 唐意祥. 给水厂排泥水处理工艺研究(上)[J]. 给水排水, 1993, (10):5-8.
- [9] 武 江, 蒋光勤. 试论铝生产过程中的乳化问题[J]. 有色矿冶, 2000, **16**(4):25-28.
- [10] 马 赞, 朱 屯. P204 从盐酸体系中萃取铝的动力学[J]. 中国有色金属学报, 1992, **2**(4):26-32.
- [11] 冯旭东, 林 屹. P204-煤油萃取剂的生物降解性[J]. 环境科学, 2000, **21**(5):74-76.

(上接第378页)

## 参考文献:

- [1] HG2227-91, 水处理剂硫酸铝[S].
- [2] 徐美燕, 马 燕, 孙贤波, 等. 水厂污泥萃取法铝回收技术研究: I. 清液萃取法[J]. 华东理工大学学报(自然科学版), 2007, **33**(3):369-374.
- [3] Cornwell David A, Cline Gary C, Przybyla John M, et al. Demonstration Testing of Alum Recovery By Liquid Ion Exchange[J]. AWWA, 1981, (6): 326-332.
- [4] Cornwell David A, Lemunyon Roger M. Feasibility studies on liquid ion exchange for alum recovery from water treatment plant sludge[J]. AWWA, 1980, (1): 64-68.