Mécanique et Ondes

Ce module comporte trois parties :

« mécanique »

« structure de la matière »

et

les « ondes mécaniques et lumineuses »

Fridolin KWABIA TCHANA,
kwabia@lisa.ipsl.fr
Maître de Conférences, Université Paris Cité

Plan du cours

1ère partie : Mécanique

CM1 - Forces, référentiel inertiel et lois de Newton

CM2 - Cinématique d’un point matériel

CM3 - Travail, puissance et énergie

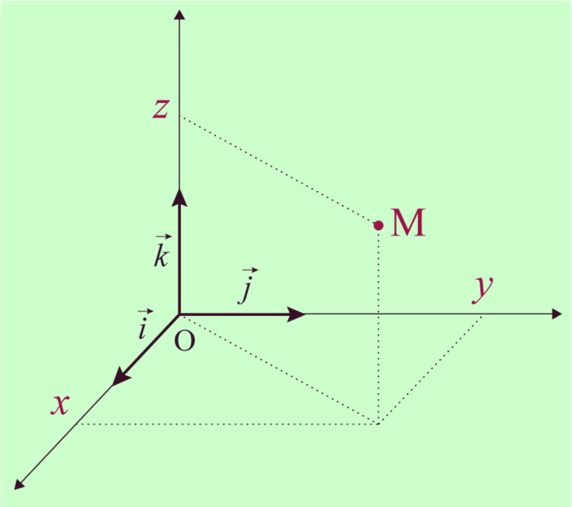
1. Référentiel, repère et coordonnées

Définitions : Un **référentiel** est un ensemble de points, fictifs ou matériels, immobiles les uns par rapport aux autres et qui servent à repérer le système dont on étudie le mouvement. On peut en quelque sorte se représenter un référentiel comme un solide rigide, idéalisé ou réel.

Un **événement** est un phénomène qui a lieu en un endroit ponctuel donné à un instant précis.

Un **repère** (**spatial**) est l'ensemble formé d'un point géométrique, nommé origine et souvent noté O, et de trois axes orthogonaux ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Un **repère** (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est **orthonormé si les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux** et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.



1. Référentiel, repère et coordonnées

Définitions : Un **point matériel** est la modélisation idéalisée d'un système physique considéré comme un point géométrique doté de certaines propriétés physiques (une masse, une charge électrique, etc), mais sans volume ni superficie. Dans un système de coordonnées donné et à une date fixée, il est repéré de manière unique par 3 coordonnées spatiales.

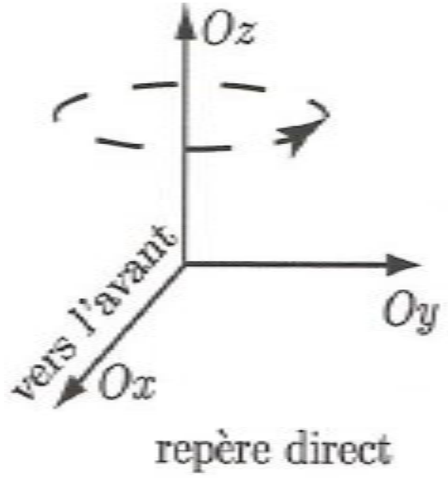
Dans un référentiel, et étant donné un repère, la position d'un point peut être repérée à l'aide de 3 nombres, dits **coordonnées**, qui l'identifient de manière unique. Ces coordonnées, notées usuellement $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, sont respectivement nommées l'**abscisse**, l'**ordonnée** et la **cote**.

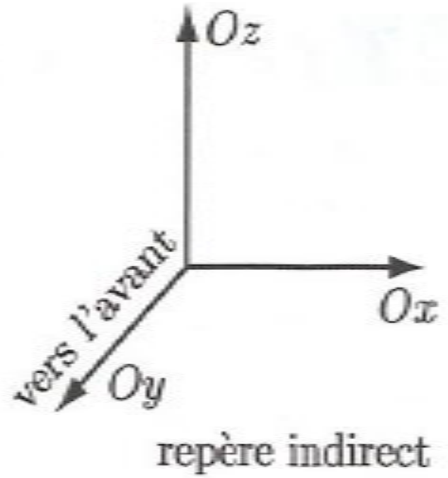
Dans un référentiel, la **trajectoire** d'un point matériel est l'ensemble des positions qu'il occupe au cours du temps.

1. Référentiel, repère et coordonnées

Définitions : Dans un système de coordonnées, une trajectoire peut être caractérisée par des **équations horaires** ($x = f(t)$, $y = f(t)$, $z = f(t)$), qui décrivent les coordonnées en fonction du temps.
Pour déterminer l'**équation de la trajectoire**, on élimine le temps t entre les équations horaires ou équations paramétriques.

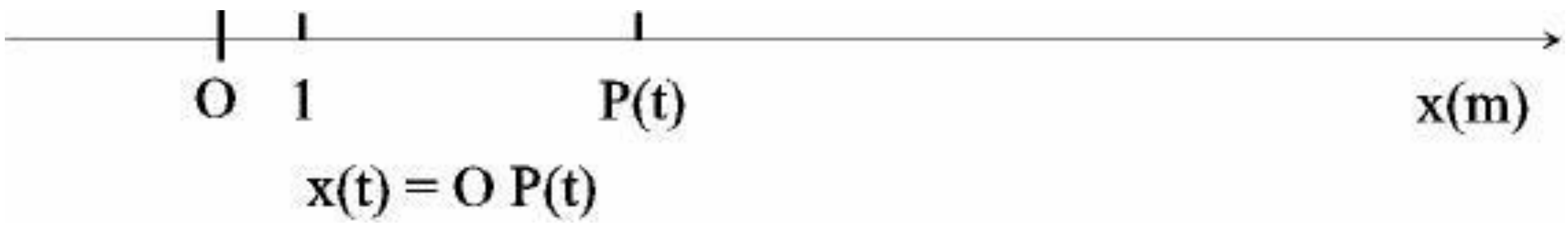
On dit que le **repère** tridimensionnel est **direct** si, lorsque l'on regarde le plan contenant les axes Ox et Oy en ayant l'axe Oz dirigé vers soi, le repère du plan l'est également.





C'est le cas particulier de la trajectoire rectiligne

Le mobile est repéré par une coordonnée cartésienne x(t) sur un axe x qui coïncide avec la trajectoire (ou qui lui est parallèle). Ceci implique le choix d'une origine, d'un sens et d'une unité de mesure (voir la figure dessous).



Soit deux positions du mobile P_1 et P_2 à deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$). La **vitesse moyenne** du mobile entre les instants t_1 et t_2 est donnée par :

$$v_{moy} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

où x_1 et x_2 sont les coordonnées des points P_1 et P_2.

Δx est le déplacement du mobile pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

Vitesse instantanée

La **vitesse instantanée** d'un point matériel est la dérivée de sa coordonnée spatiale x par rapport au temps t, à l'instant considéré(*) :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Par conséquent, pour retrouver la position d'un mobile à chaque instant, à partir de sa vitesse instantanée, on intègre l'expression ci-dessous en recherchant un primitive de la vitesse. Ceci implique la connaissance de la position du mobile à l'instant initiale t_0, soit : $x(t_0)$.

(*) Pour alléger la notation, nous omettrons d'indiquer explicitement la dépendance en t des variables cinématiques lorsque ce n'est pas indispensable à la compréhension : $x = x(t)$, $v = v(t)$…

Accélération instantanée

L'**accélération instantanée** d'un mobile est la dérivée de sa vitesse par rapport au temps, à l'instant considéré :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Par conséquent, pour retrouver la vitesse d'un mobile à chaque instant, à partir de son accélération instantanée, on intègre l'expression ci-dessous en recherchant un primitive de l'accélération. Ceci implique la connaissance de la vitesse du mobile à l'instant initiale t_0, soit : $v(t_0)$.

2. Cinématique à 1 dimension

Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)

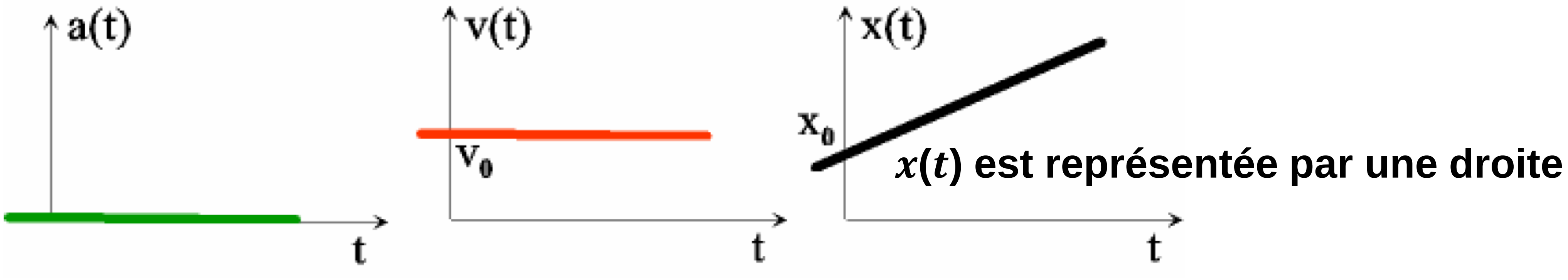
Le **MRU** est un mouvement rectiligne à **vitesse constante** : $v(t) = cte = v_0$

Les équations d'un **MRU** sont donc :

$$\begin{cases} a(t) = 0 \\ v(t) = v_0 \\ x(t) = v_0 t + x_0 \end{cases}$$

x_0 est la position à l'instant initial

La figure ci-dessous donne une représentation des équations d'un MRU :



2. Cinématique à 1 dimension

Mouvement Rectiligne Uniformément Varié (MRUV)

Le **MRUV** est un mouvement rectiligne à accélération constante : $a(t) = cte = a_0$

Les équations d'un **MRUV** sont donc :

$$\begin{cases} a(t) = a_0 \\ v(t) = a_0 t + v_0 \\ x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases}$$

x_0 et v_0 sont respectivement la position et la vitesse à l'instant initial

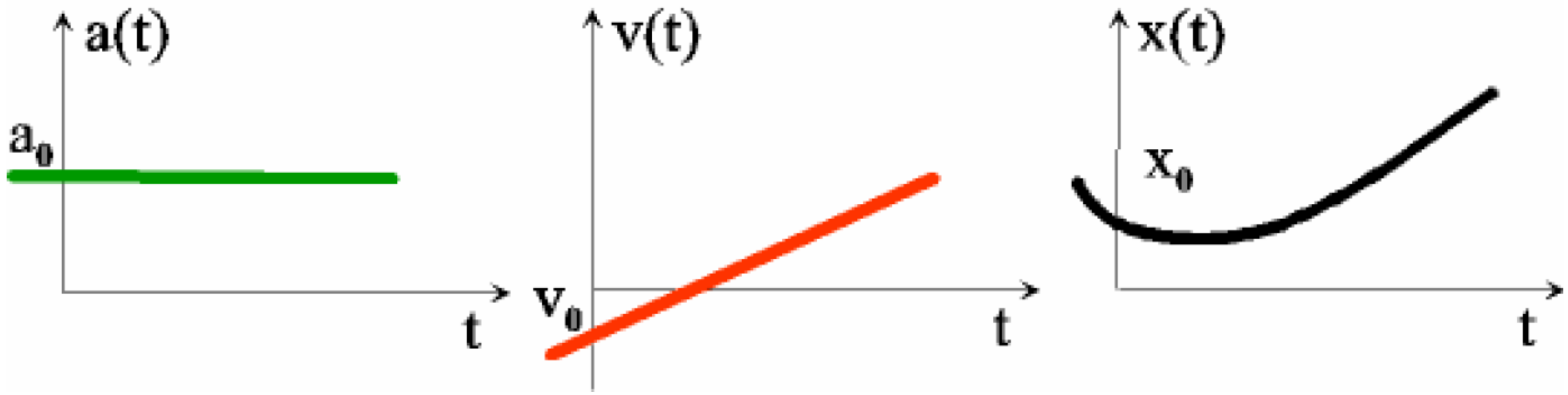
Relation indépendante du temps, applicable entre deux instants quelconque, ici t_1 et t_0 : $\Delta v^2 = 2a\Delta x \implies v_1^2 - v_0^2 = 2a(x_1 - x_0)$

Mouvement Rectiligne Uniformément Varié (MRUV)

Les équations d'un **MRUV** sont donc :

$$\begin{cases} a(t) = a_0 \\ v(t) = a_0 t + v_0 \\ x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases}$$

La figure ci-contre donne une représentation des équations d'un **MRUV**



La fonction $x(t)$ est du second degré et la courbe à laquelle elle correspond est une parabole.

2. Cinématique à 1 dimension

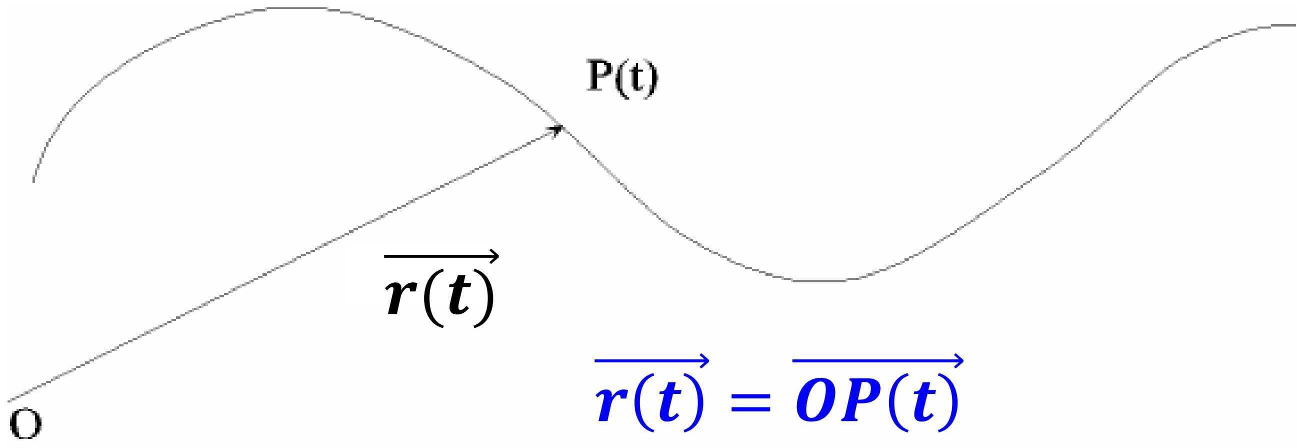
Unités

L'unité de **longueur** dans le système international d'unités (S.I.) est le mètre (**m**), celle du **temps**, la seconde (**s**). Par conséquent, dans le S.I., les **vitesses** se mesurent en mètre par seconde (**m/s**) et les **accélérations** en mètre par seconde au carré (**m/s²**).

3. Cinématique à plusieurs dimensions

Repérage du mobile

Dans le cas d'une trajectoire quelconque dans l'espace à 3 dimensions ou dans un plan, la position du mobile est entièrement déterminée par son vecteur position à chaque instant t : $\overrightarrow{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})}$.



$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}(\boldsymbol{t})}$$

Ceci implique le choix d'une origine O. Dans un référentiel $Oxyz$, le vecteur position peut s'exprimer en fonction de ses coordonnées cartésiennes x, y, et z : $\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{x}\vec{\imath} + \boldsymbol{y}\vec{\jmath} + \boldsymbol{z}\vec{k}$

où $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs de longueur unité (vecteurs unitaires) dirigés suivant les axes Ox, Oy et Oz.

3. Cinématique à plusieurs dimensions

La vitesse instantanée à 3 dimensions

Tout naturellement, on généralise la notion de vitesse instantanée vue dans le cas à une dimension, de la manière suivante :

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dr(t)}}{dt}$$

La vitesse instantanée est donc un vecteur qui est la dérivée du vecteur position par rapport au temps. Le vecteur $\vec{v}$ peut s'écrire en fonction de ses coordonnées dans le référentiel Oxyz, soit v_x, v_y et v_z :

$$\vec{\boldsymbol{v}} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad \text{avec : } v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt} \text{ et } v_z = \frac{dz}{dt}$$

Le module de v est donné par : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

3. Cinématique à plusieurs dimensions

L'accélération instantanée à 3 dimensions

L'accélération instantanée s'obtient de manière analogue : $\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{dv(t)}}{dt}$

L'accélération instantanée est donc un vecteur qui est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse. Le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire en fonction de ses coordonnées dans le référentiel *Oxyz*, soit a_x, a_y et a_z :

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

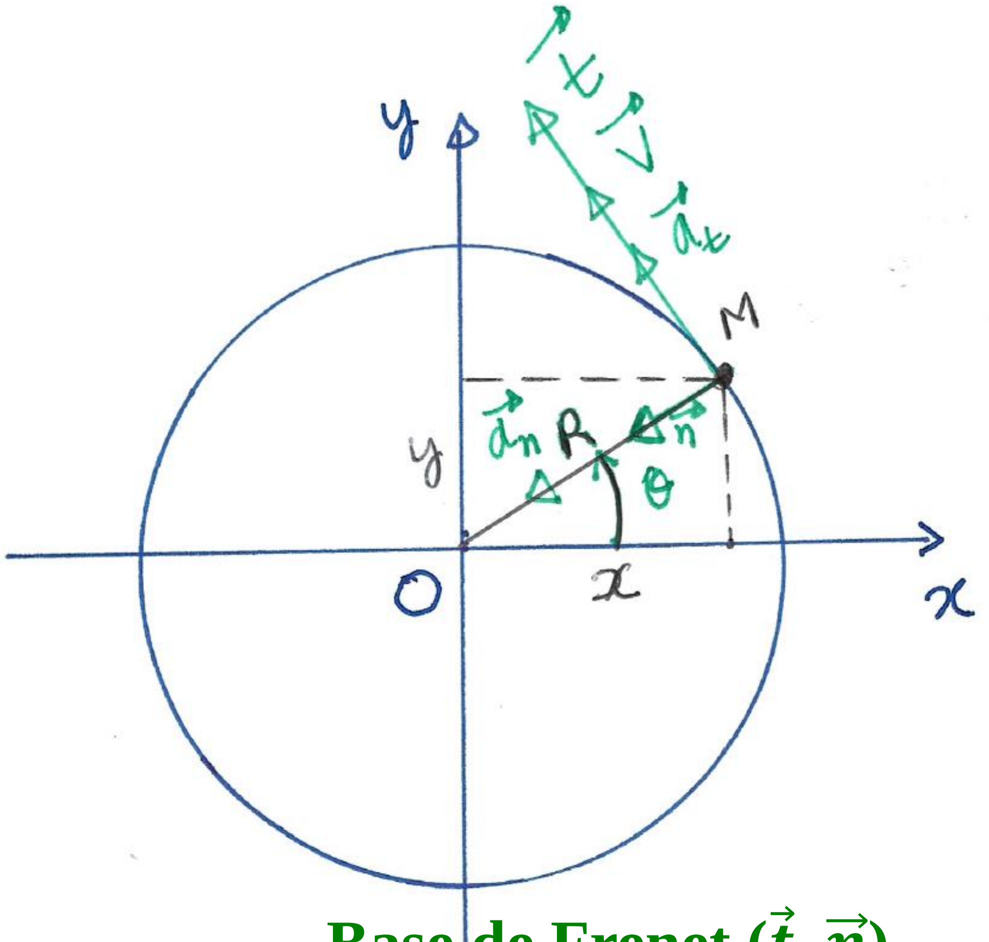
avec : $a_x = \dfrac{dV_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dV_y}{dt}$ et $a_z = \dfrac{dV_z}{dt}$

Le module de a s'obtient comme dans le cas de la vitesse : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

L’accélération dans le cas particulier d’un mouvement circulaire uniforme

Supposons un mobile qui décrit une **trajectoire circulaire** dans le plan *Oxy* ; la **circonférence a un rayon R** et est centrée sur l’origine des axes *O*.

Dans ce cas il est plus commode d’utiliser la **base de Frenet ($\vec{t}$, $\vec{n}$)** et de travailler avec des **coordonnées polaires R et θ**, plutôt qu’avec des coordonnées cartésiennes. Dans le cas d’une trajectoire circulaire de centre O, R est constant et la seule coordonnée qui varie dans le temps est l’angle θ; c’est elle qui détermine la position du point M à tout instant. La coordonnée radiale R est la distance du point M à l’origine O et θ est l’angle azimutal. Il se mesure depuis l’axe *Ox*, dans le sens trigonométrique.



Base de Frenet ($\vec{t}$, $\vec{n}$)

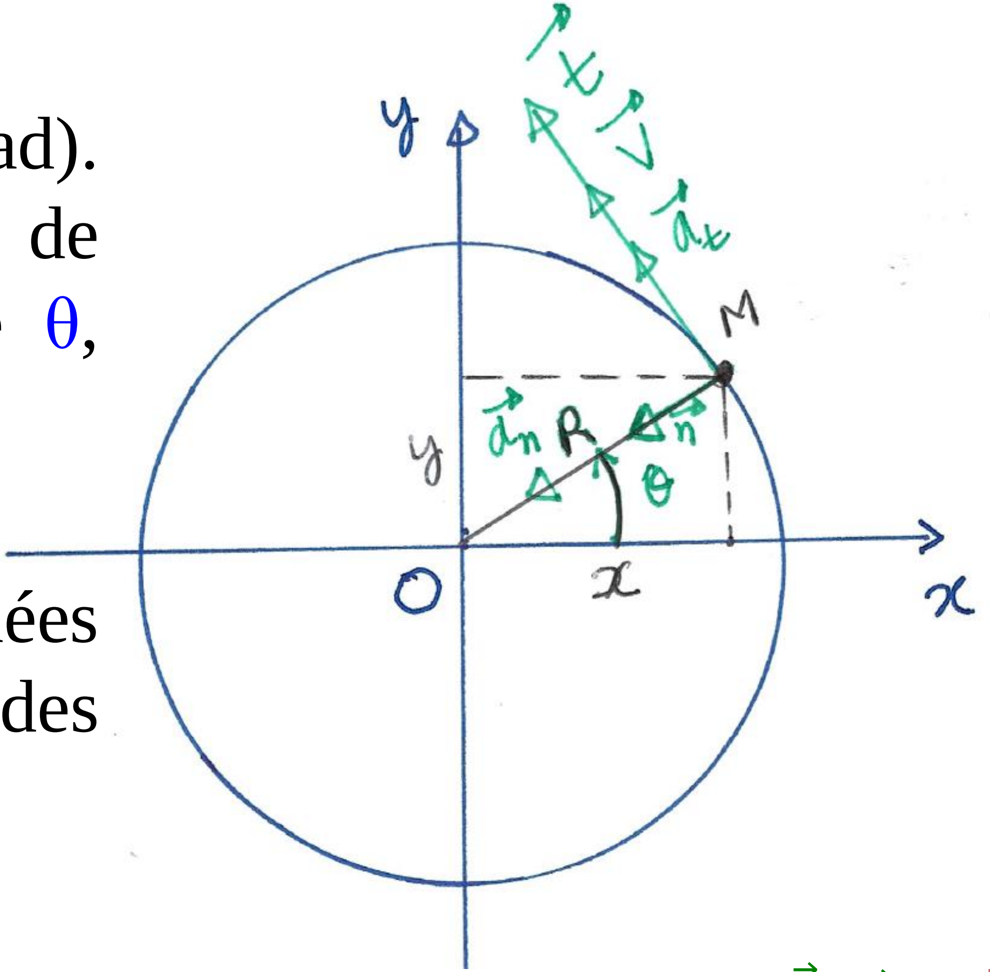
3. Cinématique à plusieurs dimensions

L’accélération dans le cas particulier d’un mouvement circulaire uniforme

Dans le SI, les angles sont mesurés en radian (rad). Cette unité est définie comme le rapport de l’arc de circonférence s, intercepté par l’angle au centre θ, divisé par le rayon de la circonférence R : $s = R\theta$

Les relations entre cordonnées polaires et coordonnées cartésiennes peuvent être établies aisément à partir des relations trigonométriques du triangle rectangle :

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta$$



Base de Frenet $(\vec{t}, \vec{n})$

3. Cinématique à plusieurs dimensions

L'accélération dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme

Le mouvement étant circulaire on définit la vitesse angulaire ω (rad/s) comme la dérivée par rapport au temps de l'angle azimutal :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Dans ce cas, la relation entre la vitesse linéaire v et la vitesse angulaire ω est : $v = R\omega$

On dit que le mouvement circulaire est uniforme (MCU) lorsque la vitesse angulaire ω et donc la vitesse linéaire v est constante. Le temps mis par le mobile pour effectuer un tour complet est constant et est défini comme la période T du MCU :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On appelle fréquence du mouvement, le nombre de révolutions effectuées par unité de temps. La fréquence est donc l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T}$ f (s^{-1}) ; T (s)

3. Cinématique à plusieurs dimensions

L'accélération dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme

Dans un mouvement curviligne quelconque, $\vec{a} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$

où $a_t = \frac{dv}{dt}$: l'**accélération tangentielle** due à la variation du module du vecteur vitesse et $a_n = \frac{v^2}{R}$: l'**accélération normale**, due au changement de direction de $\vec{v}$

Remarque: Pour un **mouvement circulaire uniforme**, v est constante donc $\vec{a} = a_n\vec{n}$

Caractéristiques du vecteur accélération pour un mouvement circulaire uniforme

$$\vec{a} \begin{cases} direction: radiale \\ sens: centripète \\ intensité : a = a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \end{cases}$$

Exemple de mouvement de translation : **Chute libre**

Les mouvements qu'on étudier dans cette partie seront considérés en référentiel galiléen du laboratoire.

Définition : Une **chute libre** est un mouvement sous le seul effet de la pesanteur. C'est le mouvement d'un système soumis à la seule force de gravitation.

1er cas : Chute libre sans vitesse initiale

En supposant que le corps n'est soumis qu'à la pesanteur, si un corps ponctuel M est lâché d'un point de cote z_0 sans vitesse initiale et si l'axe des z est orienté vers le haut, alors l'étude dynamique du corps est :

Exemple de mouvement de translation : **Chute libre**

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$$

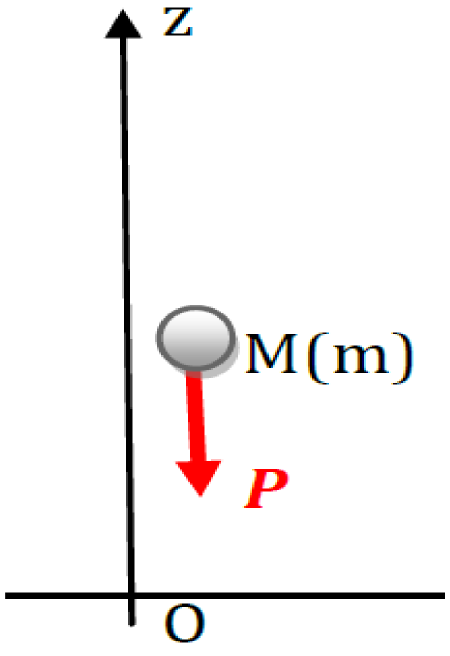
En projetant sur OZ on a : $a_z = -g$

En intégrant une première fois on a :

$$v_z = -gt + V_0 = -gt \quad \text{car} \quad V_0 = 0$$

En intégrant une seconde fois on a :

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$$



Temps de chute t_{chute} :

la masse m arrive au niveau du sol quand z=0

donc $-\frac{1}{2}g{t_{chute}}^2 + z_0 = 0$ d'où $t_{chute} = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$

La vitesse V_{imp} à l'impact est donnée donc par :

$$V = \sqrt{2gz_0}$$

Avec : z la hauteur du corps par rapport au sol; g l'accélération du champ de pesanteur terrestre (environ 9,81 m.s^{-2}); t le temps en secondes et z_0 l'altitude initiale

2ème cas : Chute libre avec vitesse initiale

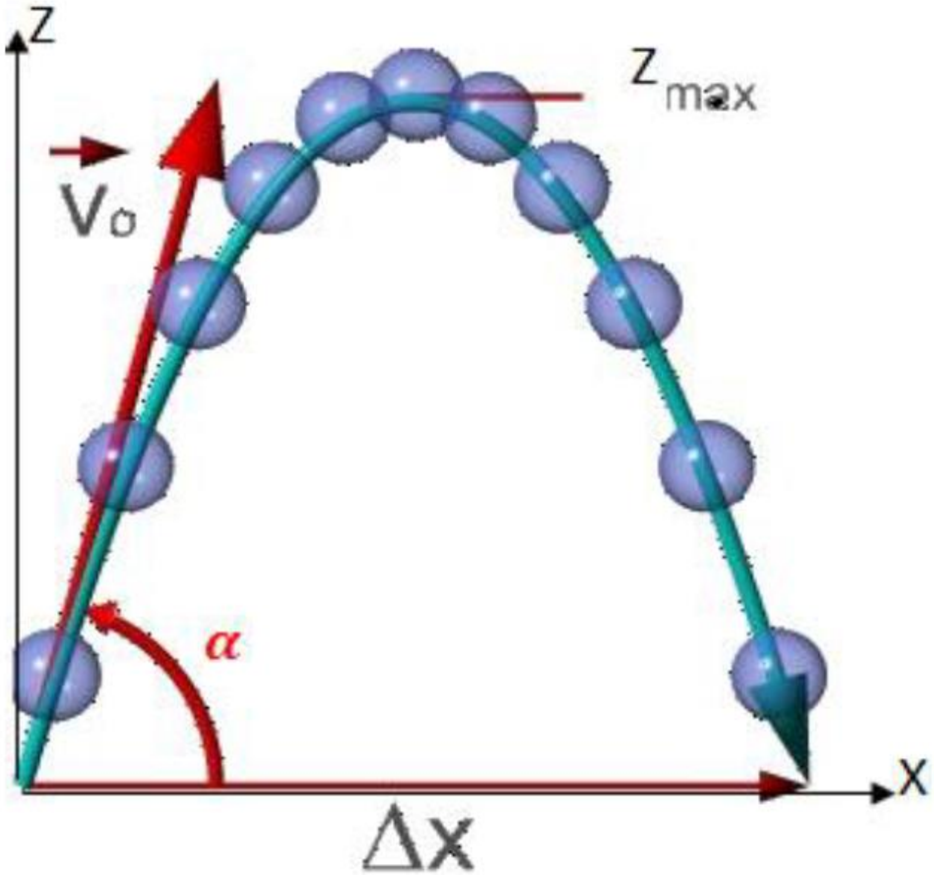
Lorsqu'on lance un objet en l'air, hormis le cas où il a été lancé rigoureusement à la verticale vers le haut, sa trajectoire est une courbe que l'on peut assimiler à une parabole.

Etude dynamique du mouvement de l'objet :

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$$

En projetant sur OZ on a : $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$



2ème cas : Chute libre avec vitesse initiale

En intégrant une première fois on a les équations horaires de la vitesse :

$$\begin{cases} v_x = cste = v_{x_0} = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + cste = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

En intégrant une seconde fois on a les équations horaires de la position :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$ car les $x(t=0) = 0$ et $y(t=0) = 0$

2ème cas : Chute libre avec vitesse initiale

Détermination de l'équation de la trajectoire :

Pour éliminer le temps entre les équations horaires on exprime d'abord t :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

On remplace dans l'expression de Z :

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + (v_0 \sin\alpha) \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

D'où l'équation de la trajectoire :

$$\boldsymbol{z = -\frac{1}{2} \frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha) x}$$

Remarque :

Il s'agit de l'équation d'une parabole.

2ème cas : Chute libre avec vitesse initiale

Détermination de la portée Δx :

Au point d'impact on a : z=0 donc $-\frac{1}{2}g{t_{chute}}^2 + (v_0 \sin\alpha)t_{chute} = 0$

Le temps de chute est donc : $t_{chute} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

D'où Δx $= (v_0 \cos\alpha)t_{chute} = \frac{2{v_0}^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$

On en déduit donc l'expression finale de la portée : $\boldsymbol{\Delta x = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}}$

Remarque :

La portée est maximale si $\sin 2\alpha = 1$ ou encore $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ donc si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (lancer suivant la première bissectrice).

$2^{\text{ème}}$ cas : Chute libre avec vitesse initiale

Détermination de la portée Z_{max} :

Au sommet de la parabole on a : $v_z = 0$ donc $-gt_{sommet} + v_0 \sin\alpha = 0$

Le temps quand l'objet arrive au sommet de la parabole est donc :

$$t_{sommet} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

D'où $Z_{max} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)$

On en déduit donc l'expression finale de Z_{max} : $\mathbf{Z_{max}} = \dfrac{\boldsymbol{v_0}^2 \sin^2 \boldsymbol{\alpha}}{2\boldsymbol{g}}$

Remarque :

Z_{max} est maximale si $\sin\alpha = 1$ ou encore $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (lancer vertical).