

十月月赛题解

2019.8 by dst

1. masterex

如果 $a_A + b_A + c_A \geq a_B + b_B + c_B - \max(a_B, b_B, c_B)$, 则 A 能打败 B 。处理出数组 $s_i = a_i + b_i + c_i - \max(a_i, b_i, c_i)$, 并以 s_i 为关键字排序。然后尺取法, 第一个指针 $i (1 \leq i \leq n)$, i 每移动一个单位, 第二个指针 j 不断右移, 直到 $a_i + b_i + c_i \geq s_j$ 不成立。 $j - i$ 即为答案。 std 采用了二分查找的做法。时间复杂度: $O(n \log n)$ 。

2. planex

容斥原理。 $ans = n - \sum \lfloor \frac{n}{a_i} \rfloor (1 \leq i \leq m) + \sum \lfloor \frac{n}{\text{lcm}(a_i, a_j)} \rfloor (1 \leq i < j \leq m) - \sum \lfloor \frac{n}{\text{lcm}(a_i, a_j, a_k)} \rfloor (1 \leq i < j < k \leq m) + \dots + (-1)^m \lfloor \frac{n}{\text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_m)} \rfloor$ 。

时间复杂度: $O(\sum_{i=1}^m \binom{m}{i} * m \log a_i) = O(2^m m \log a_i)$ 。

3. or

贪心+枚举。将答案从二进制下的最高位开始向下枚举。先假设当前位是 0, 将所有权值该位为 1 的点设置为不可经过的点。跑一遍 dfs/bfs 判断连通性。如果连通, 则答案当前位是 0, 将所有权值该位为 1 的点设置为不可经过的点; 否则 (不连通), 答案当前位为 1, 不作其他处理。

时间复杂度: $O(nm \log d_i)$ 。

4. control

最优比率生成树。二分答案 r , 不难发现, 当 $r \leq \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ 时, r 有更优答案或 r 为最优答案。我们可以将原式变形:

$$\begin{aligned} r &\leq \frac{\sum_{i=1}^m v_i}{\sum_{i=1}^m w_i} \\ r \times \sum_{i=1}^m w_i &\leq \sum_{i=1}^m v_i \\ r \times (w_1 + w_2 + \dots + w_m) &\leq v_1 + v_2 + \dots + v_m \\ r \times w_1 + r \times w_2 + \dots + r \times w_m &\leq v_1 + v_2 + \dots + v_m \\ (r \times w_1 - v_1) + (r \times w_2 - v_2) + \dots + (r \times w_m - v_m) &\leq 0 \end{aligned}$$

将所有的点 $i, j (i \neq j, k_i \neq k_j)$ 建无向边, 边权为 $r \times (a_i \text{ xor } a_j) - (f_i \text{ xor } f_j)$ 。根据“任何两个人都只能以唯一的方式建立联系”, 故建立关系就是在图中生成树的过程。使得上式成立, 就要使边权和最小, 即最小生成树。由于本题中的图是近似满图, 可以近似地认为 $m = n^2$, 故朴素的 $Prim$ 算法比 $Kruscal$ 算法跑得快。但我只卡了 $Kruscal$ 算法 10 分。

使用 $Kruscal$ 算法后的时间复杂度: $O(n^2 \log(n^2 f_i))$ 。

使用朴素的 $Prim$ 算法后的时间复杂度: $O(n^2 \log f_i)$ 。