Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

EL MÓDELO DEL ÁRBOL BINOMIAL APLICADO EN LAS FINANZAS

Javier de San José Recinos Ortega

Asesorado por Phd. Ricardo Pontaza

Guatemala, 1

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

EL MÓDELO DEL ÁRBOL BINOMIAL APLICADO EN LAS FINANZAS

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

JAVIER DE SAN JOSÉ RECINOS ORTEGA

ASESORADO POR PHD. RICARDO PONTAZA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, 1

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
SECRETARIO ACADÉMICO	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR	Perengano
EXAMINADOR	Zutano
EXAMINADOR	Fulano 2

Este archivo pdf es una muestra

Fecha

datos

cuerpo

despedida

firma

nombre

AGRADECIMIENTOS

DEDICATORIA

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$:=$	es definido por
$\cong$	es isomorfo a
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\varnothing$	conjunto vacío
E^c	complemento de E
$\subsetneq$	estrictamente contenido
$E \setminus F$	diferencia entre E y F
$E \Delta F$	diferencia simétrica entre E y F
$\mathcal{P}(X)$	conjunto potencia de X
χ_E	función característica de E
$E_n\!\uparrow$	E_n es una sucesión creciente
$\mathfrak{L}$	σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue-medibles
$\mathscr{S}$	espacio muestral
$\mathfrak{A}$	σ-álgebra de eventos
$(\mathscr{S}, \mathfrak{A}, P)$	espacio de probabilidad
$\mathscr{D}$	espacio de las funciones de prueba
$\mathscr{D}'$	espacio de las distribuciones
δ_0	medida de Dirac, función δ de Dirac o δ-función
$\Phi^\times$	espacio antidual de Φ
$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$	espacio de Hilbert equipado o tripleta de Gel'fand
$\vert\psi\rangle$	vector *ket*
$\langle\psi\vert$	funcional *bra*
$\langle\varphi\vert\psi\rangle$	*braket*

OBJETIVOS

General

Escriba el objetivo general.

Específicos

Enumere los objetivos específicos.

1.
2.

INTRODUCCIÓN

1. CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1. Conjuntos, funciones y sucesiones

En adición a los conjuntos de puntos que se trabajan con normalidad en Matemáticas —puras y aplicadas—, se tendrá que hacer uso frecuentemente de los conjuntos de conjuntos, si por ejemplo X es la recta real, como un intervalo es un conjunto de puntos, es decir un subconjuto de X, se tendrá que el conjunto de todos los intervalos es un conjunto de conjuntos.

En especial, cuando una clase hace referencia a subconjuntos del conjunto X, la llamaremos **familia**. En especial el **conjunto potencia** $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ es una familia de X. Asimismo, se definirá el **complemento** de A por

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}.$$

Definición 1.1. Una **función de selección** para un conjunto X es una función f la cual asocia a cada subconjunto no vacío E de X un elemento de E: $f(E) \in E$.

Axioma 1.1 (de selección)**.** Para cualquier conjunto existe una función de selección.

Nota 1.1. Con frecuencia el axioma 1.1 se presenta en la forma: para cada $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, elegimos un elemento $x \in E$. Asimismo, es equivalente al lema de Zorn, para más detalles consultar [8, p. 97], [9, p. 338] o [11, p. 14].

Una **clase disjunta** es una clase $\boldsymbol{A}$ de conjuntos tal que para cualquier par de conjuntos distintos de $\boldsymbol{A}$ son disjuntos, en este caso nos referiremos a la unión de conjuntos de $\boldsymbol{A}$ como **unión disjunta**.

Si E es un subconjunto de X, la función χ_E definida para $x \in X$ por la relación:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \notin E. \end{cases} \tag{1.1}$$

Es llamada **función característica** del conjunto E. La correspondencia entre los conjuntos y sus funciones características es inyectiva, y todas las propiedades de conjuntos y operaciones entre conjuntos pueden ser expresadas por medio de funciones características.

Tabla 1.1. Propiedades de los espacios L^p. Fuente: tomada de [2, Cap. 3].

Espacio	Reflexivo[1]	Separable	Dual
L^p, $1 < p < \infty$	Si	Si	L^q, $1/p + 1/q = 1$
L^1	No	Si	L^∞
L^∞	No	No	$L^1 \subsetneq (L^\infty)'$

Definición 1.2. Si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos, definiremos los conjuntos $\overline{\text{lím}}E_n$ y $\underline{\text{lím}}E_n$ de la siguiente forma:

$$\overline{\text{lím}}E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i, \quad \underline{\text{lím}}E_n = \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} E_i$$

y los llamaremos **límite superior** y **límite inferior**, respectivamente, de la sucesión $\{E_n\}$. Si tenemos $\overline{\text{lím}}E_n = \underline{\text{lím}}E_n$, usaremos la notación $\lim_n E_n$ para este conjunto. Si la sucesión es tal que $E_n \subset E_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$ le llamaremos **creciente** y se denotará por $E_n\!\uparrow$ y su límite será $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$; si es tal que $E_n \supset E_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$ le llamaremos **decreciente** y se denotará por $E_n\!\downarrow$ y su límite será $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. En ambos casos nos referiremos a ella como **monótona**.

Definición 1.3. Sea f una aplicación definida del conjunto X al conjunto Y, es decir $f : X \longrightarrow Y$. Para cualquier subconjunto $T \subseteq Y$, definimos la **imagen inversa** de T, bajo f, denotada por $f^{-1}(T)$, como sigue:

$$f^{-1}(T) = \{s \in X \mid f(s) \in T\}.$$

Teorema 1.1.1. *Para la aplicación $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ se tienen las propiedades siguientes:*

1. $f^{-1}(\bigcup_j T_j) = \bigcup_j f^{-1}(T_j)$.
2. $f^{-1}(\bigcap_j T_j) = \bigcap_j f^{-1}(T_j)$.
3. *Si* $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, *entonces* $f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2) = \varnothing$.
4. $f^{-1}(T^c) = [f^{-1}(T)]^c$.
5. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.
6. $f^{-1}(Y) = X$.

[1] En el sentido topológico.

Las propiedades (1) y (3) del teorema 1.1.1 establecen las condiciones para la unión disjunta en una familia en Y. Sea ahora $\mathfrak{D}$ una familia cualquiera de subconjuntos de Y, y definamos la familia $f^{-1}(\mathfrak{D})$ de subconjuntos de X como sigue:

$$f^{-1}(\mathfrak{D}) = \{A \subseteq X \mid A = f^{-1}(T) \text{ para algún } T \in \mathfrak{D}\} = \{f^{-1}(T) \mid T \in \mathfrak{D}\}. \quad (1.2)$$

El sistema de numeros reales extendido o **recta real extendida** es el conjunto definido por $[-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, con la siguiente relación de orden: para $a \in \mathbb{R}$ tenemos $-\infty < a < +\infty$. La topología para este conjunto se define por declarar como abiertos a los siguientes conjuntos: (a, b), $[-\infty, b)$, $(a, +\infty]$ y cualquier unión de conjuntos de este tipo. Cuando se haga referencia a los **numeros reales extendidos** o **valor real extendido**, se estará hablando de los numeros reales y de los símbolos $\pm\infty$. Cuando trabajamos con teoría de la integración, nos encontraremos con ∞, una razón es que algunas veces trataremos de integrar sobre conjuntos de medida infinita, este es caso de la recta real.

Por tal motivo, se hacen las siguientes definiciones para facilitar su manejo: $a + \infty = \infty + a := \infty$ si $0 \leq a \leq \infty$, y

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a := \begin{cases} \infty, & \text{si } 0 < a \leq \infty \\ 0, & \text{si } a = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

las leyes de cancelación se tratan así: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$ y $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$ sólo cuando $0 < a < \infty$.

Definición 1.4. Sea $\{a_j\}$ una sucesión en la recta real extendida, y sean $b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, y $\beta = \inf\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Entonces llamaremos a β el **límite superior** de $\{a_j\}$, y escribiremos $\beta = \limsup_{j\to\infty}(a_j)$. El **límite inferior** se define análogamente, al intercambiar sup e ínf en las anteriores definiciones; notemos que

$$\liminf_{j\to\infty}(a_j) = -\limsup_{j\to\infty}(-a_j).$$

Si $\{a_j\}$ converge, entonces tenemos $\liminf_{j\to\infty}(a_j) = \limsup_{j\to\infty}(a_j) = \lim_{j\to\infty}(a_j)$.

Proposición 1.1. *Si $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots$, tales que $a_j \longrightarrow a$ y $b_j \longrightarrow b$. Entonces $a_j b_j \longrightarrow ab$.*

Definición 1.5. Supongamos que $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones de valor real extendido en un conjunto X. Entonces $\sup_j f_j$ y $\limsup_{j\to\infty} f_j$ son las funciones definidas en X por:

$$\left(\sup_j f_j\right)(x) := \sup_j(f_j(x)), \quad \left(\limsup_{j\to\infty} f_j\right)(x) := \limsup_{j\to\infty}(f_j(x)).$$

Si $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$, y asumimos que el límite existe para cualquier $x \in X$, entonces llamaremos a f el **límite puntual** de la sucesión $\{f_j\}$ y hablaremos de **convergencia puntual** en este contexto.

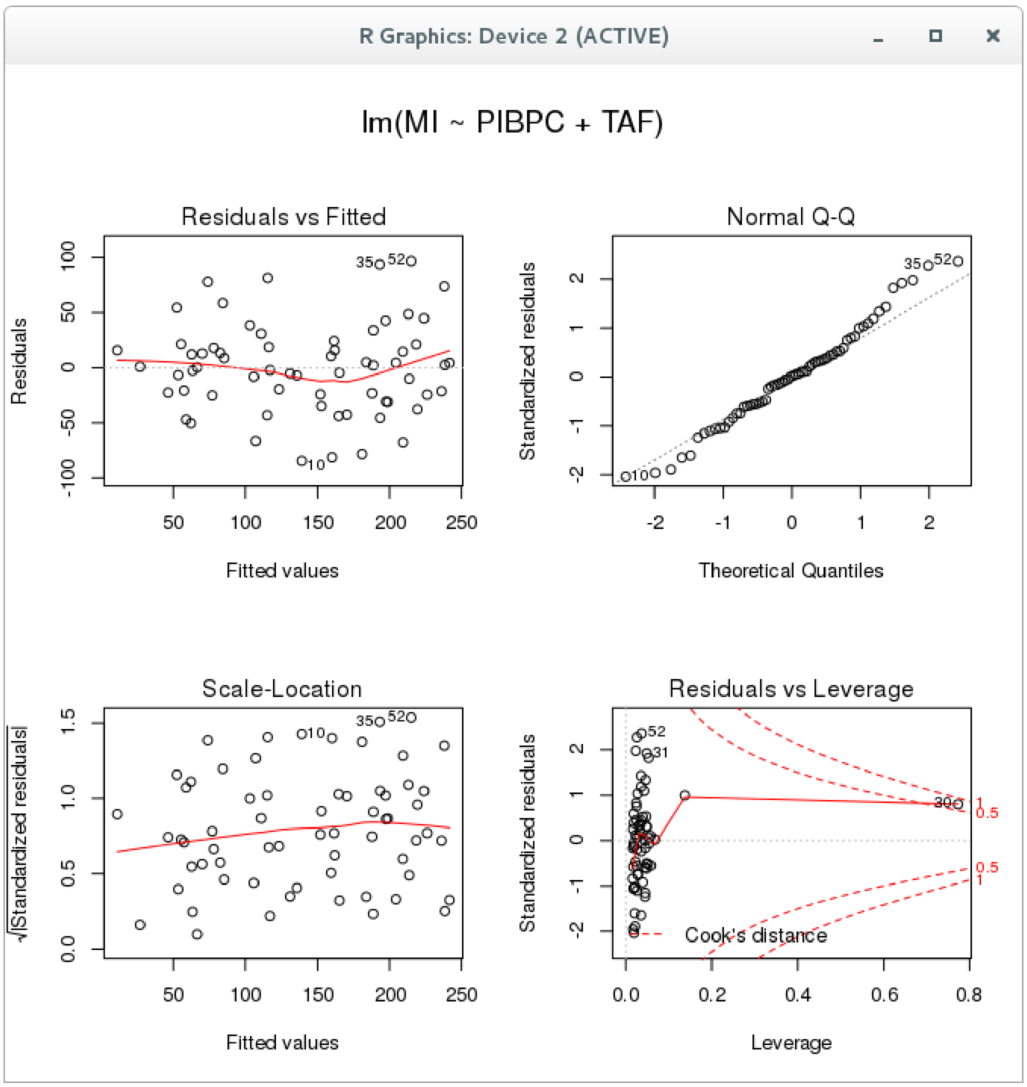

Figura 1.1. Título en el documento. Las imágenes pueden ser raster (de preferencia jpg, png con buena resolución para imprimir) o vectorial (convertir a pdf, en este caso la resolución no afecta) Fuente: imagen tomada de [14].

Lema 1.1. *Sean* $z, w \in \mathbb{C}$, $1 < p \leq 2$ *y* $1/p + 1/q = 1$. *Entonces tenemos*

$$|z+w|^q + |z-w|^q \leq 2(|z|^p + |w|^p)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Demostración. Consultar [11, p. 227]. □

Definición 1.6. Sea $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ una aplicación. Se definen las aplicaciones $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := -\min\{f, 0\}$, a f^+ y f^- se les llama la **parte positiva y negativa** de f, respectivamente.

Proposición 1.2. *Para cualquier aplicación* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *denotaremos su valor absoluto con* $|f|$, *entonces tenemos*

$$|f| = f^+ + f^-, \quad f = f^+ - f^-.$$

1.2. Tablas y Gráficas

Las tablas y gráficas deben tener un título `\caption{text}` que la identifique, debe especificar la **fuente**, y una etiqueta `\label{text}` para hacer referencias cruzadas dentro del documento.

Tabla 1.2. Diccionario de datos, tabla *marn*. Fuente: obtenida de pgAdminIII

Name	Data type	Not Null?	Primary key?	Default
id	*integer*	*Yes*	*Yes*	*nextval('marn_id_seq' ::regclass)*[2]
Clave primaria que obtendrá su valor de forma secuencial al ingresar un nuevo registro				
lista_tax	*text*	*No*	*No*	
Clasificación del proyecto en base al Listado Taxativo del MARN				
no_marn	*text*	*No*	*No*	
Numero de expediente asignado por el MARN				
date0	*date*	*No*	*No*	
Día del ingreso del expediente del proyecto (instrumento ambiental) en el MARN				
notas	*text*	*No*	*No*	
Observaciones				
no_res_ap	*text*	*No*	*No*	

[2]Note que la tabla es mas ancha que lo preestablecido. Procure diseñar elementos acordes con el espacio preestablecido.

Tabla 1.2. Diccionario de datos, tabla *marn* (continuación)

Name	Data type	Not Null?	Primary key?	Default
Numero de resolución aprobatoria del proyecto por el MARN[3]				
date_res_ap	*date*	*No*	*No*	
Día de emisión de la resolución aprobatoria por el MARN				
date0_fianza	*date*	*No*	*No*	
Día de emisión de fianza del proyecto.				
no_res_fianza	*text*	*No*	*No*	
Numero de la resolución de aceptación de fianza por el MARN				
date1_fianza	*date*	*No*	*No*	
Fecha de inicio de fianza				
date2_fianza	*date*	*No*	*No*	
Fecha de finalización de fianza (renovación)				
lic_ambiental	*text*	*No*	*No*	
Numero de licencia ambiental				
date_lic_ambiental	*date*	*No*	*No*	
Fecha de finalización de ultima licencia ambiental				
proyecto_id	*integer*	*Yes*	*No*	
Enlace con la tabla proyecto_id				

[3] Note que en esta línea la tabla se corta y continua en la siguiente página. Utilizar paquete longtable y ambiente *longtable*.

2. Conceptos Financieros

2.1. Acciones,Opciones, Calls y Puts

Una **acción** es un título emitido por una sociedad que representa el valor de las fracciones iguales en que se divide su capital social. Que además la empresa puede decidir ponerlas en venta a los inversores, en el cual tiene clasificaciones:

- Acciones de clase A
- Acciones de clase B

Acciones de clase A : Son aquellas acciones en las cuales, uno puede ejercer dividendos[1] y toma de decisiones de la empresa.
Acciones de clase B: Son aquellas que no ejercen derechos de la empresa ni cobrar dividendos, solo son acciones con cierto valor, por lo general están cotizadas en una **bolsa de valores**[2].
Para las acciones de clase B las empresas utilizan esas inversiones para proyectos, ampliaciones, o cosas que necesiten la empresa; pero las empresas están obligadas a dar sus estados financieros, eso quiere decir que están obligados a presentar su contabilidad y sus ventas.
Con la siguiente gráfica podemos apreciar como se comporta una acción de clase B, esta gráfica fue sacada de Yahoo finance en donde esta abierta para todo publico para cotizar acciones.

[1]Es la parte del beneficio de una empresa que se reparte entre los accionistas de una sociedad.
[2]Es una organización privada que brinda las facilidades necesarias para que sus miembros, atendiendo los mandatos de sus clientes, como realizar venta y compra de valores, tales como bonos, acciones de sociedades.

Figura 2.1. Acción de Google cotizada en la bolsa de valores de U.S.A

Como se puede apreciar en la gráfica (él lado derecho) es el valor del precio de una acción en dolares, en la parte inferior tenemos el **volumen**[3] de la acción.
las acciones se comportan de forma estocástica, dado que tienen un cierre y una apertura, por lo general una acción vista en forma diaria se aprecia como en la gráfica 1.

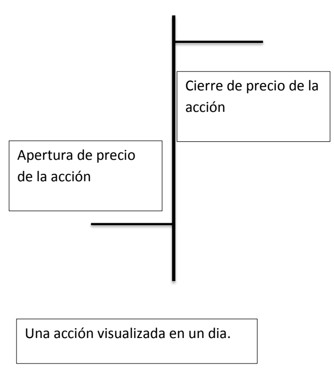

Figura 2.2. Comportamiento de una acción cuando el mercado esta abierto.

[3]El volumen de una acción es el numero de transacciones.

Una **opción** es un contrato que se da a su comprador el derecho pero no la obligación a comprar o vender bienes, hasta una fecha concreta existen dos tipos de opciones:

- Opción de compra (Calls)
- Opción de venta (Puts)

Un **call** es una opción de compra, en el que uno tiene el derecho pero no la obligación de comprar las acciones asociadas; si se emite un **Call** tiene la obligación de entregar las acciones asociadas al precio de ejecución.
Un **Put** es una opción de venta, en el que uno tiene el derecho pero no la obligación de vender las acciones asociadas; si se emite un **Put** tiene la obligación de entregar las acciones asociadas al precio de ejecución.

Definición 2.1. Un **Call** es $C = Max(0, S - X)$;donde X es el precio de la opción y S es el precio de la acción.

Definición 2.2. Un **Put** es $C = Max(0, X - S)$;donde X es el precio de la opción y S es el precio de la acción.

2.1.1. Rentabilidad a lo largo

Una rentabilidad a lo largo para un **call** es cuando la acción sube de precio entonces, el precio de la opción sube.
Aquí va una imagen
Una rentabilidad a lo largo para un **put** es cuando la acción baja de precio entonces, el precio de la opcion sube.
Aquí va una imagen

2.1.2. Rentabilidad a lo corto

Una rentabilidad a lo largo para un **call** es cuando la accion baja de precio entonces, el precio de la opcion naja.
Aqui va una imagen
Una rentabilidad a lo corto para un **put** es cuando la accion sube de precio entonces, el precio de la opcion baja.
Aqui va una imagen

2.2. Valor Intriseco

Es cuando el valor del bien menos el derecho que vale, sus tres formas que se pueden dar son:

- In the Money
- At the Money
- out of the Money

Si es **In the Money** para un **call** es si el precio de ejecución de un call es mayor que el precio de la acción en pocas palabras $S > X$.
Si es **In the Money** para un **put** es si el precio de ejecución de un put es menor que el precio de la accion en pocas palabras $X > S$.
Si es **At the Money** para un **Call** es si el precio de ejecución de un call es igual que el precio de la accion en pocas palabras $S = X$.
Si es **At the Money** para un **Put** es si el precio de ejecución de un put es igual que el precio de la accion en pocas palabras $S = X$.
Si es **out the Money** para un **Call** es si el precio de ejecución de un call es menor que el precio de la accion en pocas palabras $S < X$.
Si es **out the Money** para un **Put** es si el precio de ejecución de un put es mayor que el precio de la acción en pocas palabras $X < S$.

Definición 2.3. Una **Prima de una opción** es el precio del contrato o de la opción en pocas palabras es:

$$Prima = V.I + V.T \tag{2.1}$$

Donde $V.I$ es el valor intrínseco y $V.T$ es el valor del tiempo.
El **Valor del tiempo** de una opción se desvanece con mayor rapidez a partir de sus últimos días de expiran.

2.3. Estrategias sobre opciones

Las estrategias sobre opciones implican tomar posiciones en opciones, los activos subyacentes, y los prestamos otorgados, las 4 posiciones que tienen son: **call a lo largo, call a lo corto, put a lo largo y un put a lo corto**. Las estrategias pueden ser de tres tipos:

- Alcista
- Mercado pesimista
- Neutral

En términos de perspectivas del mercado pueden ser tres:**Agresivo, defensivo y Riesgos** el termino de riesgo viene por obtener beneficios en mercados calmados.

2.4. Valor del dinero en el tiempo

El **interés** es el costo de pedir prestado dinero, entonces sea r el interés anual, si el interés es compuesto una vez por año , entonces el valor del futuro (VF) de una cantidad inicial P después de n años es.

$$VF = P(1+r)^n \tag{2.2}$$

el valor presente (VP) que es el valor del día de hoy se puede escribir como:

$$P = VF(1+r)^{-n} \tag{2.3}$$

2.4.1. Valor presente

Sea (VP) y sea C_n un fluido de dinero a través del tiempo $1, 2, \cdots, n$ y r el interés anual es:

$$VP = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r)^n} \tag{2.4}$$

2.5. Opciones arbitrarias

Una oportunidad de arbitraje sin riesgo es aquella que, sin ninguna inversión inicial, genera una rentabilidad no negativa en todas las circunstancias y rendimientos positivos. En un mercado eficiente. **El principio dominante del portafolio** dice que él portafolio A debería ser mas valioso que el portafolio B si la rentabilidad de A es al menos tan buena bajo todas las circunstancia.
Derivando las relaciones libres de arbitraje que los valores de las opciones deben de satisfacer. Estas relaciones son independientes del modelo probabilístico del precio de acciones, solo asumimos que no hay costo de transacción y los prestamos están disponibles a la tasa de interés sin riesgo, las tasas de interés son no negativas y no

hay oportunidad de arbitraje, simplificando esto tenemos que el tiempo sea cero. $VP(x)$ donde x son los dolares a expirar.

$$VP(x) = xd(\tau) \tag{2.5}$$

Donde τ es el tiempo a expirar

Lema 2.1. *En la bolsa americana un call y un put con tiempo mas largo a la expiración no puede valer menos que un call y un put en un menor tiempo de expiración*

Lema 2.2. *La opción Call y put con un precio de ejercicio mas alto (mas bajo) respectivamente no puede valer mas que un call y un put idéntico con un precio de ejercicio mas bajo (más alto).*

Lema 2.3. *La diferencia en los valores de dos opciones por lo demás idénticas no puede ser mayor que la diferencia de sus precios de ejercicio*

Demostración. Consideremos los Calls nada mas. Sea 2 precios de ejercicio tal que $X_1 < X_2$. Asumamos que $C_1 - C_2 < X_2 - X_1$ en lugar. Compramos el precio mas bajo C_2 y escribimos a C_1 el precio mas alto, generando retornos positivos y depositando $X_2 - X_1$ en una cuenta sin riesgo en un banco.
Supongamos que se ejecuta C_1 antes del tiempo de expiracion, tendríamos dos casos. Si $C_2 > S - X_1$, entonces vendemos C_2, la rentabilidad de la venta seria $C_2 - (S - X_1) > 0$ de lo contrario C_2 realizaría un flujo de caja de $X_1 - X_2 < 0$, en ambos casos cerramos la transacción con el dinero en el banco realizaríamos un flujo de efectivo no negativo.
Supongamos ahora que no se ejecuta antes de la fecha de vencimiento C_1, entonces el flujo de efectivo es 0, $X_1 < S$, y $X_1 - X_2 < 0$, respectivamente si $S \leq X_1$, $X_1 < S < X_2$ y $S \leq X_2$, el flujo sigue siendo no negativo despues de que el dinero se agrega en la cuenta bancaria.

□

2.5.1. La paridad de una opción

Supongamos que la acción no paga dividendos en efectivo o que las opciones están protegidas para que los valores de las opciones sean insensibles a los dividendos en efectivo. Por lo tanto, los resultados de las opciones protegidas no se enumeran por separado.

El principio del no arbitraje implica que la inversión inicial establece que el portafolio también debe de ser nula. Con esto tenemos la paridad para las opciones europeas:

$$C = P + S - VP(x) \tag{2.6}$$

Consideremos $C - P = S - VP(x)$ lo que implica que un *call* a lo largo y un *put* a lo corto ponen a una posición larga en acciones y toman prestado VP del precio de ejercicio en pocas palabras es tomar una acción a lo largo como comprar acciones en margen. entonces la paridad del call y del put seria:

$$C = (S - X) + [X - VP(x)] + P \geq S - X \tag{2.7}$$

Por que $C \geq 0$ dado que $C \geq max(S - X)$, el valor intrínseco; un call americano no puede valer menos que su valor intrínseco. por lo tanto tenemos los siguientes lemas.

Lema 2.4. *Un call de una acción que no paga dividendos nunca vale menos que su valor intrínseco*

Lema 2.5. *Para los put europeos,* $P \geq max(VP(X) - S, 0)$

Teorema 2.5.1. *Un Call americano se ejercerá solo al momento del vencimiento o justo antes de que se venza los dividendos*

2.5.2. Convexidad de los precios de la opciones

Teorema 2.5.2. *la convexidad de los precios de las opciones, tenemos que para tres calls con precio de ejercicio idénticos* $X_1 < X_2 < X_3$*, tenemos el:*
$C_{X_2} \leq \lambda C_{X_1} + (1 - \lambda) C_{X_3}$, $P_{X_2} \leq \lambda P_{X_1} + (1 - \lambda) P_{X_3}$
Donde $\lambda = (X_3 - X_2/(X_3 - X_1))$

Demostración. Supongamos que no es convexa, primero anotamos en nuestro portafolio a C_{X_2} entonces compramos λC_{X_1}, y compramos $(1-\lambda)C_{X_3}$, estamos generando un flujo efectivo positivo. si call a lo corto no es ejecutado antes del día de expiracion manteniendo los calls hasta la expiracion el flujo de caja es descrito como:

	$S \leq X_1$	$X_1 < S \leq X_2$	$X_2 < S < X_3$	$X_3 \leq S$
Call descrito en X_2	0	0	$X_2 - S$	$X_2 - S$
λ calls compradas en X_1	0	$\lambda(S - X_1)$	$\lambda(S - X_1)$	$\lambda(S - X_1)$
$1 - \lambda$ calls compradas en X_3	0	0	0	$(1 - \lambda)(S - X_3)$
	0	$\lambda(S - X_1)$	$\lambda(S - X_1) + (X_2 - S\ )$	0

Tenemos que el flujo de dinero es 0 o positivo, esto es una propiedad de arbitraje.
Supongamos que el call a lo corto se ejerce anticipadamente cuando el precio de la acción S. Si $\lambda C_{X_1} + (1 - \lambda)C_{X_3} > S - X_2$, vendemos calls a lo largo para generar un flujo de dinero de $\lambda C_{X_1} + (1 - \lambda)C_{X_3} - (S - X_2) > 0$. De lo contrario, ejecute calls a lo largo y entregue las acciones, entonces el flujo neto de dinero es $-\lambda X_1 - (1 - \lambda)X_3 + X_2 = 0$De nuevo tenemos que es una propiedad arbitraria.
Por el lema 2.3, sabemos que la pendiente del valor de un call (put), cuando se traza con el precio de ejercicio, es a lo mas uno (menos uno, respectivamente). esto prueba que se forma la convexidad. □

2.6. Conceptos de los modelos financieros

En esta parte solo sera una breve definición, y en el otro capítulo sera el contenido mas detallado.

2.6.1. Árbol binomial

En el modelo del Árbol binomial en opciones y en acciones, tenemos que el tiempo es discreto y una medida en periodos, el modelo asume que si el precio actual de la acción es$S$, puede subir su precio Su con una probabilidad q, ahora si el precio de la acción baja Sd tiene que tener una probabilidad de $1 - q$, donde $0 < q < 1$ y $d < u$. En efecto, $d < R < u$ donde $R = e^{\widehat{r}}$ con $\widehat{r} > 0$, Resultando que se necesita 6 datos conocidos para determinar el valor de la opción basándose en las condiciones de arbitraje: S, u,d,X,$\widehat{r}$ y el numero de periodo antes de la expiración.
Aqui va una imagen

2.6.2. Simulación Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es una técnica que utiliza muestreo aleatorio para estimar los resultados del modelo. Las estadísticas calculadas sobre estos resultados, tales como media, desviación estándar y percentiles. Entonces el método de Monte Carlo se puede interpretar como el valor esperado de una variable aleatoria Z definida como

$$Z = \frac{max(0, Su^j d^{n-j} - X)}{R^n} \tag{2.8}$$

Con probabilidad $b(j; n, p)$ con $0 \leq j \leq n$

2.6.3. Black- Scholes

Es la formula matemática utilizada para obtener los precios de las opciones sobre divisas fijas, fecha caducidad, el modelo genera precios basado e un conjunto de ideales relacionados con la volatilidad, distribución normal y las densidades de probabilidad, los principales impulsadores del modelo de fijación de precios son el precio de divisas, valor intrínseco, el tiempo de caducidad y la volatilidad, el la formula de Black- Scholes esta dado como:

$$C = SN(x) - Xe^{-r\tau}N(x - \sigma\sqrt{\tau}) \tag{2.9}$$

y para Put

$$P = Xe^{-r\tau}N(-x + \sigma\sqrt{\tau}) - SN(-x) \tag{2.10}$$

Donde $x = \dfrac{Ln(S/X) + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\tau}}$

CONCLUSIONES

1. Conclusión 1.
2. Conclusión 2.
3. Conclusión 3.

RECOMENDACIONES

1. Recomendación 1.
2. Recomendación 2.
3. Recomendación 3.

BIBLIOGRAFÍA

[1] P. Albin, E. Leichtnam, R. Mazzeo y P. Piazza. The signature package on Witt spaces. *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4)*, **45**(2):241–310, 2012.

[2] H. Brezis. *Analyse functionnelle, théorie et applications.* (Collection Mathématiques Appliquées pour la Maítrise) Masson, Paris, 1992.

[3] Y. Choquet-Bruhat y otros. *Analysis, manifolds and physics. (volumen 1)* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1996.

[4] R. Courant y D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. (volumen 2)* Interscience Publishers, Nueva York, 1962.

[5] R. De la Madrid. The rigged Hilbert space of the free hamiltonian. Consultado en marzo de 2005 en `http://arxiv.org/abs/quant-ph/0210167`.

[6] J. Escamilla-Castillo. *Topología.* 2.ª ed. s.e., Guatemala, 1992.

[7] N. Haaser y J. Sullivan. *Análisis real.* Tr. Ricardo Vinós. Trillas, México, 1978.

[8] P. Halmos. *Teoría intuitiva de los conjuntos.* 8.ª ed. Tr. Antonio Martín. Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1973.

[9] F. Hausdorff. *Set theory.* 2.ª ed. Chelsea Publishing Company, Nueva York, 1962.

[10] W. Heisenberg. *The physical principles of the quantum theory.* Dover Publications, Inc., Nueva York, 1949.

[11] E. Hewitt y K. Stromberg. *Real and abstract analysis.* Springer-Verlag, Nueva York, 1965.

[12] A. Kolmogorov y S. Fomin. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* Tr. Carlos Vega. MIR, Moscú, 1975.

[13] F. Kronz. Quantum theory: von Neumann versus Dirac. Consultado en marzo de 2005 en `http://plato.stanford.edu/entries/qt-nvd/`.

[14] K. Liu, X. Sun, and S.-T. Yau. Goodness of canonical metrics on the moduli space of Riemann surfaces. *Pure Appl. Math. Q.*, **10**(2):223–243, 2014

[15] E. Leader and C. Lorcé, The angular momentum controversy: What's it all about and does it matter?, *Phys. Rept.* **541**, 163 (2014).

[16] Omnès, R. *The interpretation of quantum mechanics.* (Princeton Series in Physics) Princeton University Press, Princeton, 1994.

[17] R. Penrose. *La mente nueva del emperador.* Tr. José García. Fondo de Cultura Económica, México, 1996.

[18] S. Sternberg. Theory of functions of a real variable. Consultado en abril de 2005 en `http://www.math.harvard.edu/~shlomo`.

[19] G. Teschl. Mathematical methods in quantum mechanics with applications to Schrödinger operators. Consultado en abril de 2005 en `http://www.mat.univie.ac.at/~gerald`.