Übungsblatt 6

Diskrete Strukturen, Prof. Dr. Gerhard Hiß, WS 2019/20

Für Matrikelnummer: 406008
Abgabezeitpunkt: Do 28 Nov 2019 14:00:00 CET
Dieses Blatt wurde erstellt: Di 11 Feb 2020 11:23:12 CET

Die Lösungen der ersten drei Aufgaben sind online abzugeben.

26 Es sei $B := \{0,1\}$. Wir definieren Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, xor und nand auf B durch

$$
\begin{aligned}
x \wedge y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) = (1,1), \\ 0, & \text{für } (x,y) \in \{(1,0),(0,1),(0,0)\}, \end{cases} \\
x \vee y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,1),(1,0),(0,1)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases} \\
x \Rightarrow y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,1),(0,1),(0,0)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) = (1,0), \end{cases} \\
x \Leftrightarrow y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,1),(0,0)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) \in \{(1,0),(0,1)\}, \end{cases} \\
x \operatorname{xor} y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,0),(0,1)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) \in \{(1,1),(0,0)\}, \end{cases} \\
x \operatorname{nand} y &:= \begin{cases} 1, & \text{für } (x,y) \in \{(1,0),(0,1),(0,0)\}, \\ 0, & \text{für } (x,y) = (1,1). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Untersuchen Sie in den folgenden Fällen, ob B zur angegebenen algebraischen Struktur wird.
Hinweis. Auch wenn die Elemente von B hier mit 0 und 1 bezeichnet werden, soll dies im Folgenden nicht zwingend bedeuten, dass 0 ein Nullelement bzw. 1 ein Einselement ist.

abelsches Monoid mit Monoidverknüpfung $\Leftrightarrow$	◯ Ja / ◯ Nein
kommutativer Ring mit Addition xor und Multiplikation $\wedge$	◯ Ja / ◯ Nein
abelsches Monoid mit Monoidverknüpfung nand	◯ Ja / ◯ Nein
Ring mit Addition $\vee$ und Multiplikation $\wedge$	◯ Ja / ◯ Nein
Monoid mit Monoidverknüpfung $\wedge$	◯ Ja / ◯ Nein

27 Sind die folgenden Aussagen wahr?

Es seien Monoide M_1 und M_2 gegeben. Dann wird $M_1 \times M_2$ zu einem Monoid mit Monoidverknüpfung gegeben durch $(x_1,x_2)(y_1,y_2) = (x_1y_1,x_2y_2)$ für $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in M_1 \times M_2$.	◯ Ja / ◯ Nein
Für jedes Monoid M und alle $y \in M$ ist $M \to M$, $x \mapsto xy$ eine Bijektion.	◯ Ja / ◯ Nein
Jede Gruppe mit 3 Elementen ist kommutativ.	◯ Ja / ◯ Nein
Es wird $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu einem Körper mit Addition gegeben durch $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1,x_2+y_2)$ und Multiplikation gegeben durch $(x_1,x_2)(y_1,y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ für $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.	◯ Ja / ◯ Nein
Es wird $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu einem Körper mit Addition gegeben durch $(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1,x_2+y_2)$ und Multiplikation gegeben durch $(x_1,x_2)(y_1,y_2) = (x_1y_1,x_2y_2)$ für $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.	◯ Ja / ◯ Nein

28 Seien $f = 3X^3 - 15X + 10$, $g = -3X^4 + 2X^3 - 3X^2 + X$ und $h = X^{100} - 1 \in \mathbb{R}[X]$ Polynome.

	Was ist der konstante Koeffizient von $(X+1)h-g^3$?	______
	Was ist der Grad von fgh?	______
	Was ist der Leitkoeffizient von gh?	______
	Was ist der Wert von f an der Stelle 2?	______
	Was ist die Summe der Koeffizienten von f?	______

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen zu den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in das Ihrer Gruppennummer entsprechende Fach im Abgabekasten des Lehrstuhl D für Mathematik (Flur 2.OG im Hauptgebäude, neben der Mathematischen Bibliothek). Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt deutlich Ihre Matrikelnummer, Ihren Namen und Ihre **Gruppennummer**. Ihre Gruppennummer finden Sie auf der Webseite unter dem Punkt *Ergebnisse abfragen* heraus.

29

(a) Es seien $(G,\bullet)$ und $(G',\circ)$ zwei Gruppen. Zeigen Sie, dass die Menge $G\times G'$ mit der Verknüpfung

$$(g_1,g_1')\cdot(g_2,g_2') := (g_1\bullet g_2, g_1'\circ g_2')$$

wieder eine Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z},+)$.

30

Erinnerung: Für einen kommutativen Ring R und $a,b\in R$ schreiben wir $a\mid b$, wenn a ein Teiler von b ist (das heißt, wenn es ein $x\in R$ gibt mit $xa=b$).

(a) Sei R ein kommutativer Ring, $a,a',b\in R$ und sei b kein Nullteiler. Beweisen Sie die Kürzungsregel

$$a\cdot b = a'\cdot b \Rightarrow a = a'.$$

(b) Sei R ein kommutativer Ring, $a,b\in R$ und a kein Nullteiler. Weiter gelte $a\mid b$ und $b\mid a$. Zeigen Sie, dass es eine Einheit $w\in R^\times$ gibt mit $b=wa$.

(c) Sei R ein kommutativer Ring, $R^\times$ seine Einheitengruppe und seien $a,b\in R$. Zeigen Sie, dass genau dann $ab\in R^\times$ ist, wenn $a\in R^\times$ und $b\in R^\times$ ist. (Dies zeigt, dass auch $R\setminus R^\times$ abgeschlossen unter der Multiplikation ist.)

Abgabe bis spätestens Donnerstag, dem 28.November 2019, 14 Uhr, sowohl am Abgabekasten als auch online.