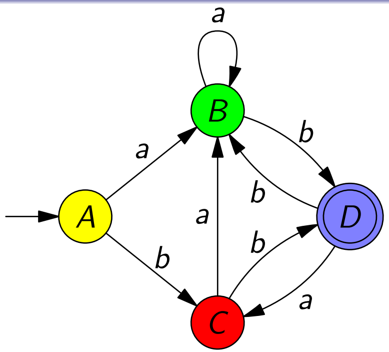
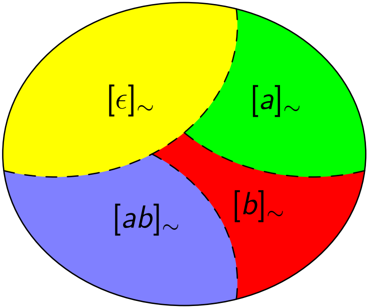
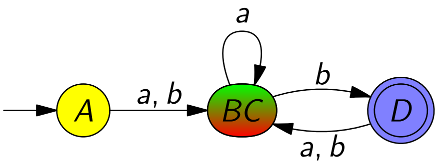
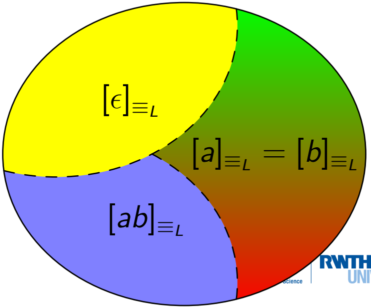


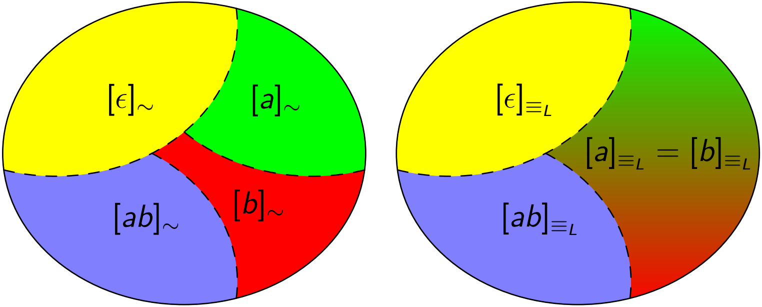






$\sim$ ist Verfeinerung von $\equiv_L$.

Eindeutigkeit des minimalen DFA



- Jede Äquivalenzklasse von $\equiv_L$ ist Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\sim$.
- Jede Äquivalenzklasse von $\sim$ ist eindeutig einem Zustand zugeordnet.
- Haben $\sim$ und $\equiv_L$ den gleichen Index, dann sind sie gleich.

Definition

Es seien DFAs gegeben:

- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$

Eine Abbildung $h\colon Q \to Q'$ mit

1. $h(q) \in F' \iff q \in F$
2. $h(q_0) = q_0'$
3. $h(\delta(q, a)) = \delta'(h(q), a)$

heißt *Homomorphismus* von M nach M'.

Ist h bijektiv, dann ist es ein *Isomorphismus.*

Es $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

$\sim$ definiert vermöge $u \sim v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$.

Sei $M' = (Q', \Sigma, \delta', [\epsilon]_\sim, F')$ mit

- $Q' = \Sigma^*/\sim$ (Äquivalenzklassen von $\sim$)
- $\delta' \colon ([w]_\sim, a) \mapsto [wa]_\sim$
- $F' = \{ [w]_\sim \mid w \in L(M) \}$

M und M' sind isomorph.

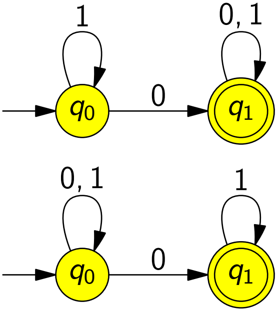
$h \colon q \mapsto \{ w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) = q \}$ ist ein Isomorphismus.

Folgerung: Alle minimalen Automaten sind isomorph:

- M' hängt nur von L und $\sim$ ab.
- $\sim = \equiv_L$, falls M minimal.
- Also hängt M' *nur* von L ab (der Myhill–Nerode–DFA).

Frage:

Sind auch kleinste NFAs isomorph?



Gegenbeispiel! Beide akzeptieren $(0+1)^*0(0+1)^*$.

Die Eindeutigkeit des minimalen DFAs ist etwas besonderes!

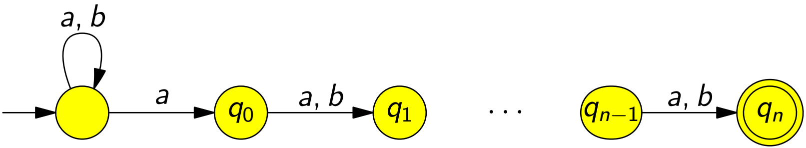
Andere Konsequenz des Satzes von Myhill–Nerode:

> *Die Anzahl der Zustände des minimalen Automaten für L ist der Index von $\equiv_L$.*

Zwei wichtige Anwendungen:

1. Untere Schranken für die Anzahl der Zustände.
2. Beweis, daß eine Sprache nicht regulär ist.

Es sei $L = (a+b)^* a (a+b)^n$ mit $n \in \mathbf{N}$.
NFA für L:



Es sind $n+2$ Zustände.

Wähle $N = (a+b)^n$.
Behauptung: Falls $u, v \in N$ mit $u \neq v$, dann $u \not\equiv_L v$.
Beweis:
o.B.d.A. $u = wau'$, $v = wbv'$. Dann $ua^{n-|u'|} \in L$, $va^{n-|u'|} \notin L$.

Also hat $\equiv_L$ mindestens $|N| = 2^n$ viele Äquivalenzklassen.
Jeder DFA der L akzeptiert, hat mindestens 2^n Zustände.

Es sei $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$.

Wähle $N = a^*$.

Wieder gilt:
$u, v \in N$, $u \neq v$, dann $u \not\equiv_L v$.

Denn: $a^i b^i \in L$, $a^j b^i \notin L$, falls $a^i \neq a^j$.

Index von $\equiv_L$ ist mindestens $|N| = \infty$.

Wäre L regulär, dann hätte der minimale DFA mindestens $|N|$ Zustände.

Das beweist, daß L nicht regulär ist.

Es sei $L = \{\, a^p \mid p \text{ ist Primzahl } \}$.

Vorüberlegung:
Es seien $p_1 < p_2$ zwei Primzahlen und $d = p_2 - p_1$.
Betrachte $p_1 + nd$ mit $1 \leq n \leq p_1$.

Behauptung:
Es gibt ein n mit

- $1 \leq n \leq p_1$
- $p_1 + nd$ ist prim
- $p_1 + (n+1)d = p_2 + nd$ ist nicht prim

Wähle $N = L$.
Es seien $a^{p_1}, a^{p_2} \in N$ mit $p_1 < p_2$.

Dann ist $a^{p_1} a^{nd} \in L$ und $a^{p_2} a^{nd} \notin L$.

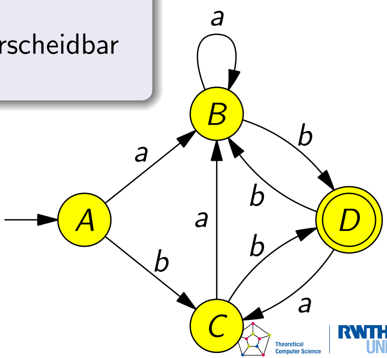
Also hat $\equiv_L$ unendlichen Index.

Minimierung von DFAs

Definition

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.
$q_1, q_2 \in Q$ sind *unterscheidbar*, falls

1. $q_1 \in F$, $q_2 \notin F$ oder
2. $q_1 \notin F$, $q_2 \in F$ oder
3. $\delta(q_1, a)$ und $\delta(q_2, a)$ sind unterscheidbar für ein $a \in \Sigma$.



Lemma

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.
$q_1, q_2 \in Q$ unterscheidbar genau dann wenn:
Es gibt $w \in \Sigma^*$ mit

- $\hat{\delta}(q_1, w) \in F$, $\hat{\delta}(q_2, w) \notin F$ *oder*
- $\hat{\delta}(q_2, w) \in F$, $\hat{\delta}(q_1, w) \notin F$.

Beweis.

„$\Longleftarrow$" Induktion über $|w|$:

$|w| = 0$: Dann $\hat{\delta}(q_i, w) = q_i$ und damit $q_1 \in F$ und $q_2 \notin F$ oder umgekehrt.

$|w| > 0$: Es sei $w = au$ mit $u \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$.

$q_1' = \delta(q_1, a)$ und $q_2' = \delta(q_2, a)$ unterscheidbar nach I.V.:
$\hat{\delta}(q_1', u) \in F$, $\hat{\delta}(q_2', u) \notin F$ oder umgekehrt.

„$\Longrightarrow$" Übungsaufgabe! $\square$

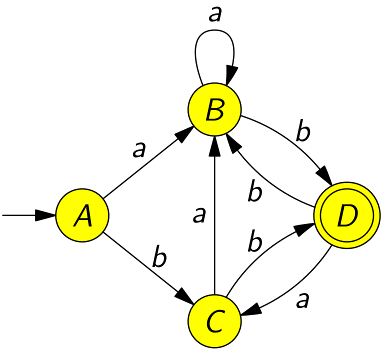
Markierungsalgorithmus

```
M := ∅;
for((q, p) in Q × Q) {
  if(p ∈ F ∧ q ∉ F) M := M ∪ {(q, p)};
  if(p ∉ F ∧ q ∈ F) M := M ∪ {(q, p)};
}
do {
  M_old := M;
  for((q, p) ∈ Q × Q)
    for(a ∈ Σ)
      if((δ(q, a), δ(p, a)) ∈ M) M := M ∪ {(q, p)};
} while(M_old ≠ M);
```

Laufzeit: Sehr grobe Abschätzung $O(|Q|^4)$

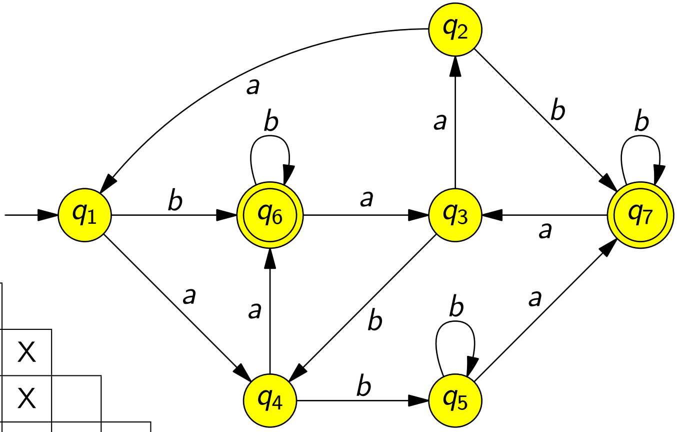
- Maximal $|Q|^2$ Wiederholungen (jedesmal ein Paar markiert)
- Jede Wiederholung in $O(|Q|^2)$ Schritten

Beispiel 1



M	A	B	C	D
A		×	×	×
B	×			×
C	×			×
D	×	×	×	

Beispiel 2



2	X					
3	X	X				
4	X	X	X			
5	X	X	X			
6	X	X	X	X	X	
7	X	X	X	X	X	$\{4,5\}$ $\{1,2\}$
	1	2	3	4	5	6

Schnellerer Markierungsalgorithmus

$M := \emptyset;$
for$((q,p) \in Q \times Q)$ $\{$
  if$(p \in F \wedge q \notin F)$ $M := M \cup \{(q,p)\};$
  if$(p \notin F \wedge q \in F)$ $M := M \cup \{(q,p)\};$
$\}$
for$((q,p) \in Q \times Q)$
  for$(a \in \Sigma)$ $\{$
    $q' := \delta(q,a);$ $p' := \delta(p,a);$
    if$((q',p') \in M)$ $\{$
      $M := M \cup \{(q,p)\};$
      Füge rekursiv $L(q,p)$ in M ein
    $\}$
    else $L(q',p') := L(q',p') \cup \{(q,p)\};$
  $\}$

Laufzeit: Mit amortisierter Analyse $O(|Q|^2)$

Konstruktion des minimalen DFA

Lemma

Es sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA und $p, q \in Q$.
Weiter sei $p = \hat{\delta}(q_0, u)$ und $q = \hat{\delta}(q_0, v)$.

Falls $u \equiv_{L(M)} v$, dann sind u und v nicht unterscheidbar.

Beweis.

Andernfalls gäbe es w mit $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \notin F$.

Dann gilt auch $\hat{\delta}(q_0, uw) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, vw) \notin F$.

Damit ist $uw \in L(M) \Leftrightarrow vw \notin L(M)$.

Das ist ein Widerspruch zu $u \equiv_{L(M)} v$. $\square$

Konstruktion des minimalen DFA

Theorem

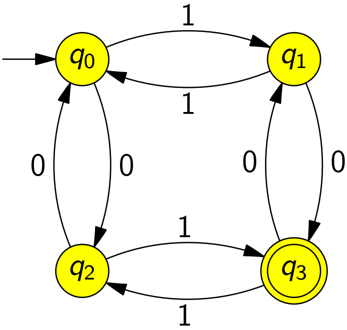
Verschmelzen wir die nicht unterscheidbaren Zustände eines DFA, erhalten wir den zugehörigen minimalen DFA.

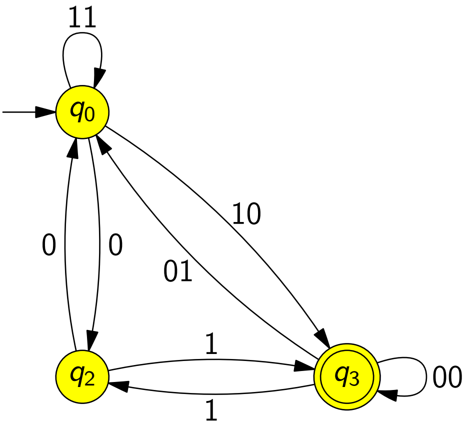
Beweis.

Letztes Lemma:
Falls keine unterscheidbaren Zustände, dann $\sim = \equiv_{L(M)}$.

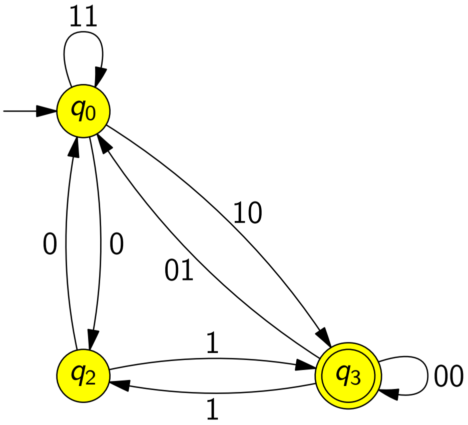
Satz von Myhill–Nerode: Der Automat ist minimal. $\square$

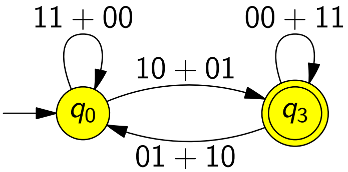
Eliminierung von Zuständen





Statt Symbolen: Reguläre Ausdrücke auf Übergängen!





Regulärer Ausdruck:

$$(11+00)^*(10+01)(00+11+(01+10)(11+00)^*(10+01))^*$$

Sehr kurz!