

# Proiect Teoria sistemelor 1



2020-2021

Student : Ciordaș Dragoș-Florin  
Grupa 30123

Îndrumător:  
As. drd. Ing. Șușcă Mircea

# 1. Procesul (sistemul) ales

## 1.1 Schema procesului

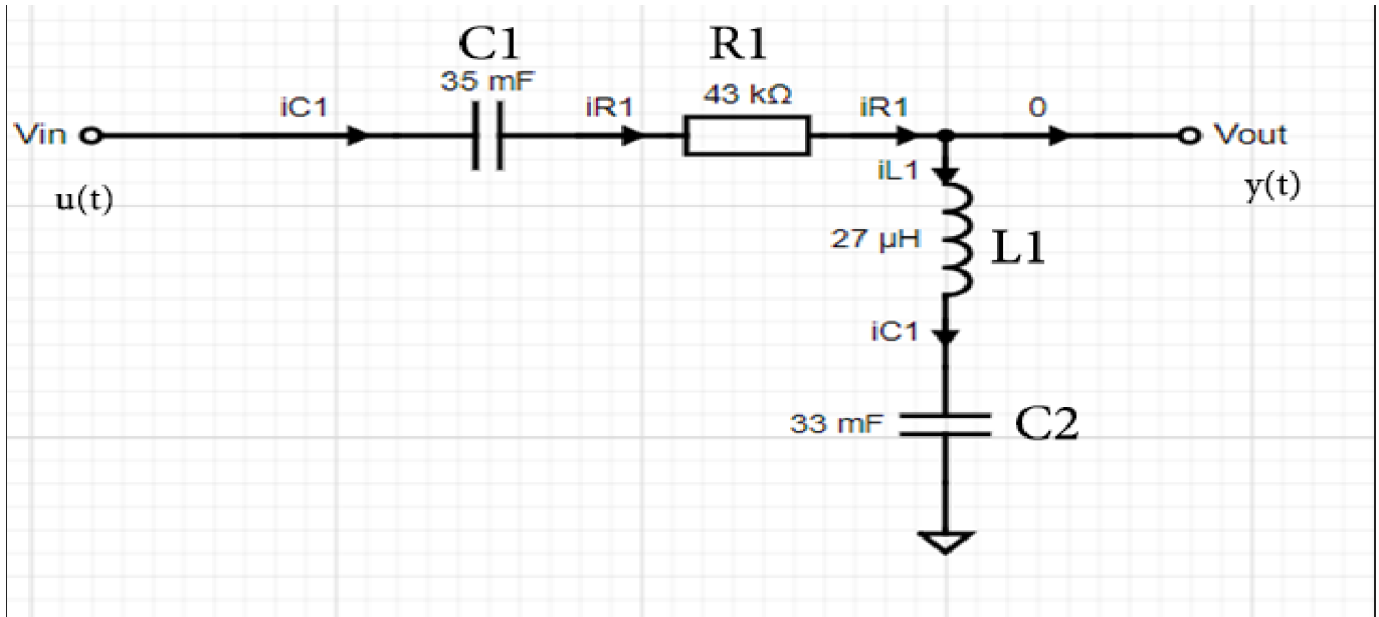


Figure 1: Proces de ordin 3 LTI

## 1.2 Prezentarea procesului

Am ales un sistem de ordinul trei, liniar și invariant în timp (LTI).

Sistemul are ca particularități

- două condensatoare C1 și C2
- o rezistență R1
- o bobină L1

Toate componentele precizate mai sus sunt legate în serie, fapt ce denotă trecerea aceluiași curent prin acestea.

Semnalele de intrare și ieșire sunt:  $u(t)$  - intrarea sistemului și  $y(t)$  – ieșirea sistemului, notate și pe figura .

Valorile numerice ale componentelor sunt:

$$R_1 = 43 \text{ k}\Omega ; L_1 = 27 \text{ }\mu\text{H} ; C_1 = 35 \text{ mF} ; C_2 = 33 \text{ mF}.$$

## 2. Variabilele de stare ale sistemului

### 2.1 Precondiții

Deducem variabilele de stare, pe baza schemei procesului și realizăm prezentarea ecuațiilor diferențiale de stare, ecuația de ieșire și realizarea de stare în formă compactă.

Deoarece sistemul are în componență trei elemente active, care înmagazinează energie, acesta va fi de ordinul trei, având tot trei variabile de stare.

Elementele active sunt  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L_1$ .

Matricea stărilor va avea forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 & u_{C1} \\ x_2 & i_{L1} \\ x_3 & u_{C2} \end{bmatrix}$$

Conform primei legi a lui Kirchhoff, suma intensităților curenților care intră într-un nod de rețea este egală cu suma intensităților curenților care ies din același nod. Acest parcurs este reprezentat în Figure 1, cu săgeți negre.

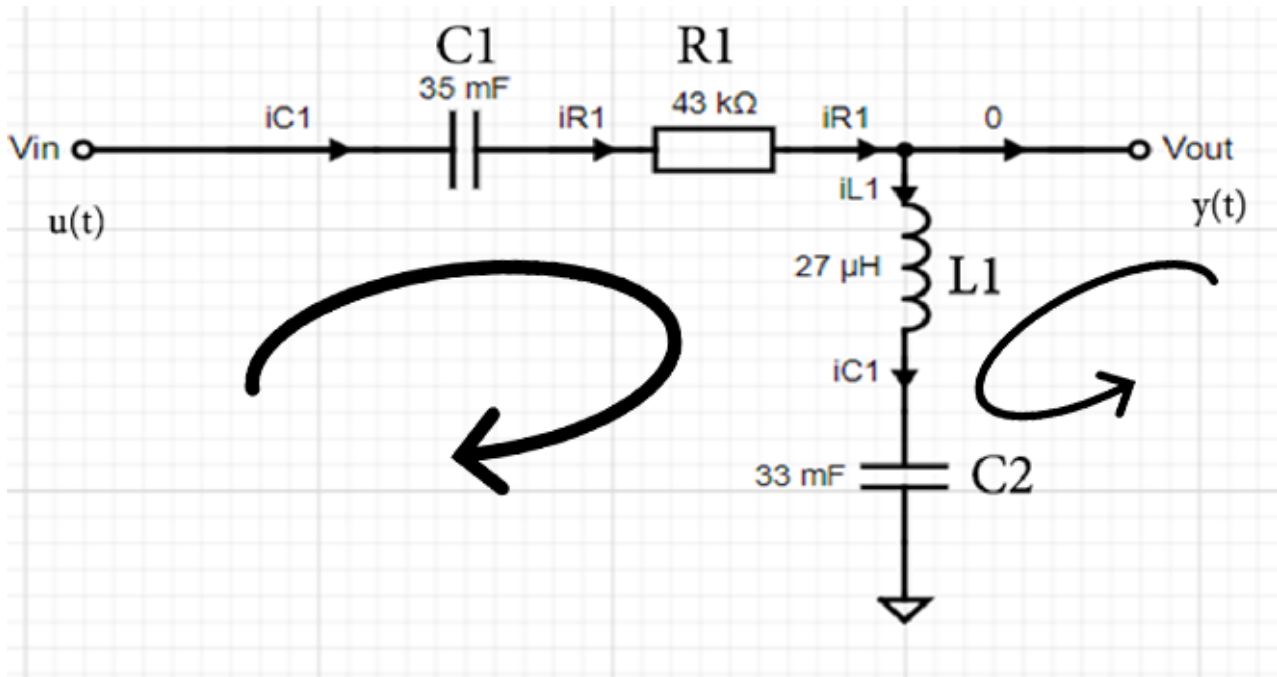
Deoarece toate componentele sunt înseriate, același curent va străbate toate componentele.

$$i_{C1} = i_{C2} = i_{L1} = i_{R1} \quad (1)$$

A doua lege a lui Kirchhoff se referă la ochiuri de rețea și afirmă:

De-a lungul conturului unui ochi de rețea, suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor este egală cu suma algebrică a produselor dintre intensitatea curenților și rezistența totală de pe fiecare latură.

Pe scurt, suma algebrică a tensiunilor de-a lungul oricărui ochi de circuit este nulă.



Astfel putem deduce relațiile :

$$u(t) = u_{C1} + u_{R1} + u_{C2} + u_{L1} \quad (1^*)$$

$$u_{L1} + u_{C2} = y(t) \quad (2^*)$$

## 2.2 Ecuațiile diferențiale de stare

Pe baza relațiilor deduse cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff prezentate anterior, vom deduce formele celor patru ecuații diferențiale de stare.

Vom utiliza legile lui Ohm și vom ține cont de relațiile :

$$u_L = L_n \frac{di_{L_n}}{dt} = L_n \dot{x}_n, \quad i_{C_n} = C_n \frac{du_{C_n}}{dt} = C_n \dot{x}_n$$

Astfel din relația (1) și relațiile de mai sus rezultă :

$$\begin{aligned} i_{C1} = i_{L1} &\leftrightarrow C_1 \dot{x}_1 = x_2 \leftrightarrow \dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} x_2 \\ i_{C2} = i_{L1} &\leftrightarrow C_2 \dot{x}_3 = x_2 \leftrightarrow \dot{x}_3 = \frac{1}{C_2} x_2 \end{aligned}$$

Din relația (1\*), relațiile de mai sus și legea lui Ohm rezultă :

$$u = x_1 + R_1 i_{L1} + x_3 + L_2 \dot{x}_2 \leftrightarrow \dot{x}_2 = -\frac{1}{L_1} x_1 - \frac{R_1}{L_1} x_2 - \frac{1}{L_1} x_3 + \frac{1}{L_1} u$$

Pentru ieșire, alegem relația (2\*), astfel :

$$y = L_1 \dot{x}_2 + x_3 \leftrightarrow y = -x_2 - R_1 x_2 - x_3 + u + x_3 \leftrightarrow y = -x_1 - R_1 x_2 + u$$

Din ecuațiile diferențiale de stare rezultă realizarea de stare:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (-1 \quad -R_1 \quad 0) x(t) + (1) u(t) \end{cases}$$

Sistemul are m=1 intrări și p=1 ieșiri, deci este un sistem SISI (Single Input Single Output)

Realizarea de stare în formă compactă are forma:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ \hline -1 & -R_1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Înlocuind cu valorile date, obținem

$$\begin{pmatrix} 0 & 28,57 & 0 & 0 \\ -3,7 \cdot 10^4 & -1,59 \cdot 10^9 & -3,7 \cdot 10^4 & 3,7 \cdot 10^4 \\ 0 & 30,3 & 0 & 0 \\ -1 & -43 \cdot 10^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3. Modelul matematic de tip funcție de transfer

Pe baza ecuațiilor diferențiale de stare deduse anterior se poate deduce o ecuație diferențială de tip intrare-ieșire pentru sistemul dat. Aplicând Transformata Laplace pe ecuația diferențială obținută, va rezulta un model matematic de tip funcție de transfer.

#### 3.1 Determinarea ecuației diferențiale de tip intrare-ieșire

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}(s)}{\mathcal{L}\{u(t)\}(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Această relație, conform subpunctului următor, este echivalentă cu:

$$\frac{s^3 + \frac{1}{L_1 C_2} s}{s^3 + \frac{R_1}{L_1} s^2 + \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2} s} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Produsul mezilor este egal cu produsul extremilor și rezultă:

$$U(s) \cdot s^3 + \frac{1}{L_1 C_2} U(s) \cdot s = Y(s) \cdot s^3 + \frac{R_1}{L_1} Y(s) \cdot s^2 + \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2} Y(s) \cdot s \Big| \mathcal{L}^{-1}$$

$$\boxed{\ddot{u}(s) + \frac{1}{L_1 C_2} \dot{u}(s) = \ddot{y}(s) + \frac{R_1}{L_1} \dot{y}(s) + \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2} y(s)}$$

## 3.2 Spațiul stărilor și funcția de transfer

Pentru a trece din spațiul stărilor la funcția de transfer echivalentă, în cazul sistemelor de tipul SISO, se realizează prin aplicarea Transformatei Laplace în condiții inițiale nule

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \Big| \mathcal{L} \leftrightarrow \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Prin eliminarea lui  $X(s)$  se obține relația de legătură între  $U(s)$  și  $Y(s)$  astfel:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \leftrightarrow Y(s) = [C(sI - A)^{-1} + D]U(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

$$C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} -1 & -R_1 & 0 \end{pmatrix} \frac{adj(sI - A)}{\det(sI - A)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L_1} \end{pmatrix} + 1$$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{L_1} & s + \frac{R_1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & s \end{vmatrix} = s^2 \left( s + \frac{R_1}{L_1} \right) + \frac{s}{L_1 C_2} + \frac{s}{L_1 C_1} = s^3 + \frac{R_1}{L_1} s^2 + \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2} s$$

$$\begin{aligned}
 adj(sI - A) &= \begin{pmatrix} s^2 + \frac{R_1}{L_1}s + \frac{1}{C_2L_1} & \frac{1}{L_1}s & -\frac{1}{C_1L_1} \\ -\frac{1}{L_1}s & s^2 & -\frac{1}{C_1}s \\ -\frac{1}{C_2L_1}s & \frac{1}{C_2}s & s^2 + \frac{R_1}{L_1}s + \frac{1}{C_1L_1} \end{pmatrix}^T = \\
 &= \begin{pmatrix} s^2 + \frac{R_1}{L_1}s + \frac{1}{C_2L_1} & -\frac{1}{L_1}s & -\frac{1}{C_2L_1} \\ \frac{1}{L_1}s & s^2 & \frac{1}{C_2}s \\ -\frac{1}{C_1L_1}s & -\frac{1}{C_1}s & s^2 + \frac{R_1}{L_1}s + \frac{1}{C_1L_1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Observație: Înmulțind matricile ( $M_{1,3} \cdot M_3 \cdot M_{31} = M_1$ ) obținem o matrice de 1x1, adică un polinom.

Astfel se obține funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{L_1} \left( -R_1 s^2 - s \frac{1}{C_1} \right)}{\det(sI - A)} + 1 = \frac{-\frac{R_1}{L_1} s^2 - \frac{1}{C_1 L_1} s}{s^3 + \frac{R_1}{L_1} s^2 + \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2} s} + 1$$

$$H(s) = \frac{s^3 + \frac{1}{L_1 C_2} s}{s^3 + \frac{R_1}{L_1} s^2 + \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2} s}$$

Înlocuind cu valorile fizice date, obținem:

$$H(s) = \frac{s^3 + 1,122 \cdot 10^6 s}{s^3 + 1,59 \cdot 10^9 s^2 + 2,18 \cdot 10^6 s}$$



## 4. Singularitățile sistemului

Funcția de transfer este compusă din două polinoame  $\alpha(s)$  și  $\beta(s)$ :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$$

### 4.1 Polii sistemului

Aceștia sunt dați de rădăcinile polinomului de la numitor, și anume  $\alpha(s)$ , prin rezolvarea ecuației  $\alpha(s) = 0$

$$\text{În cazul nostru, } \alpha(s) = (s^3 + \frac{R_1}{L_1}s^2 + \frac{C_1+C_2}{L_1C_1C_2}s)$$

Se va rezolva acum ecuația

$$\alpha(s) = 0 \leftrightarrow s^3 + \frac{R_1}{L_1}s^2 + \frac{C_1 + C_2}{L_1C_1C_2}s = 0$$

Obținem prima rădăcină, evidentă  $\hat{s}_1 = 0$ , o dăm factor comun după care rămânem cu

$$s \left( s^2 + \frac{R_1}{L_1}s + \frac{C_1 + C_2}{L_1C_1C_2} \right) = 0 \leftrightarrow \left( s^2 + \frac{R_1}{L_1}s + \frac{C_1 + C_2}{L_1C_1C_2} \right) = 0$$

$$\hat{s}_2 = \frac{-\frac{R_1}{L_1} - \sqrt{\left(\frac{R_1}{L_1}\right)^2 - 4\frac{C_1 + C_2}{L_1C_1C_2}}}{2}$$

$$\hat{s}_3 = \frac{-\frac{R_1}{L_1} + \sqrt{\left(\frac{R_1}{L_1}\right)^2 - 4\frac{C_1 + C_2}{L_1C_1C_2}}}{2}$$

Înlocuind cu valori numerice, obținem:

$$\hat{s}_2 = -1,59 \cdot 10^9$$

$$\hat{s}_3 = -1,37 \cdot 10^3$$

## 4.2 Zerourile sistemului

Acestea sunt date de rădăcinile polinomului de la numărător, și anume  $\beta(s)$ , rezolvând ecuația  $\beta(s) = 0$ .

$$s^3 + \frac{1}{L_1 C_2} s = 0$$

Un prim zero, evident:  $s_1 = 0$ , după care rămânem cu:

$$s^2 + \frac{1}{L_1 C_2} = 0$$

$$s_2 = \sqrt{-\frac{1}{L_1 C_2}} = j \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2}}$$

$$s_3 = -\sqrt{-\frac{1}{L_1 C_2}} = -j \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2}}$$

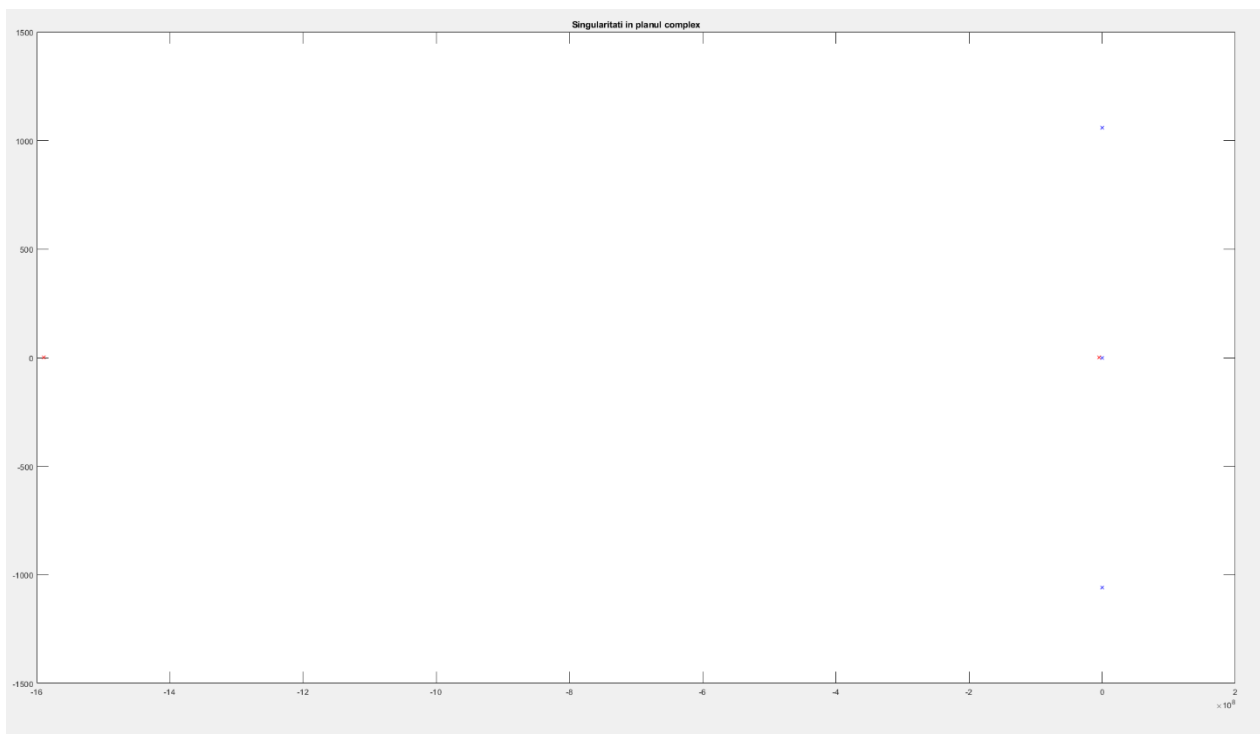
Înlocuind cu valori numerice, obținem:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 1,059 \cdot 10^3 j$$

$$s_3 = -1,059 \cdot 10^3 j$$

## 4.3 Reprezentarea singularităților, în planul complex



# 5. Formele Canonice de control și observare

Scopul formelor canonice este de a supraveghea și controla comportamentul sistemului, dar și pentru a face trecerea din funcția de transfer în spațiul stărilor.

## 5.1 Forma Canonică de Control – FCC

Se consideră un sistem LTI descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + a_0} + d$$

Aceasta are forma:

$$\left( \begin{array}{c|c} \frac{A_{FCC}}{C_{FCC}} & \frac{B_{FCC}}{D} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc|c} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & d \end{array} \right)$$

Cu ajutorul funcției MATLAB tf2ss(numarator,numitor), unde ‘numitor’ e numitorul funcției de transfer iar ‘numarator’ e numărătorul funcției de transfer, obținem forma canonică de control.

$$\left( \begin{array}{c|c} \frac{A_{FCC}}{C_{FCC}} & \frac{B_{FCC}}{D} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|c} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{C_1+C_2}{L_1C_1C_2} & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1C_1} & 0 & 1 & \end{array} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1.59 \cdot 10^9 & -2.18 \cdot 10^6 & -2.36 \cdot 10^{-13} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.59 \cdot 10^9 & -1.05 \cdot 10^6 & 2.36 \cdot 10^{-13} & 1 \end{pmatrix}$$

Observație: introducând în MATLAB, obținem niște valori diferite de 0, rezultate din aproximările facute de acest program și de capacitățile sale limitate ( $-2.36 \cdot 10^{-13}$ ).

## 5.2 Forma canonică de Observare – FCO

Aceasta are forma:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|c} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & d \end{array} \right).$$

unde,  $A_{FCO} = A_{FCC}^T$ ,  $B_{FCO} = C_{FCC}^T$ ,  $C_{FCO} = B_{FCC}^T$

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{cccc|c} -\frac{R_1}{L_1} & 1 & 0 & -\frac{R_1}{L_1} \\ -\frac{C_1+C_2}{L_1 C_1 C_2} & 0 & 1 & -\frac{1}{L_1 C_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} -1.59 \cdot 10^9 & 1 & 0 & -1.59 \cdot 10^9 \\ -2.18 \cdot 10^6 & 0 & 1 & -1.05 \cdot 10^6 \\ -2.36 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 & 2.36 \cdot 10^{-13} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 5.3 Schemele bloc ale formelor canonice

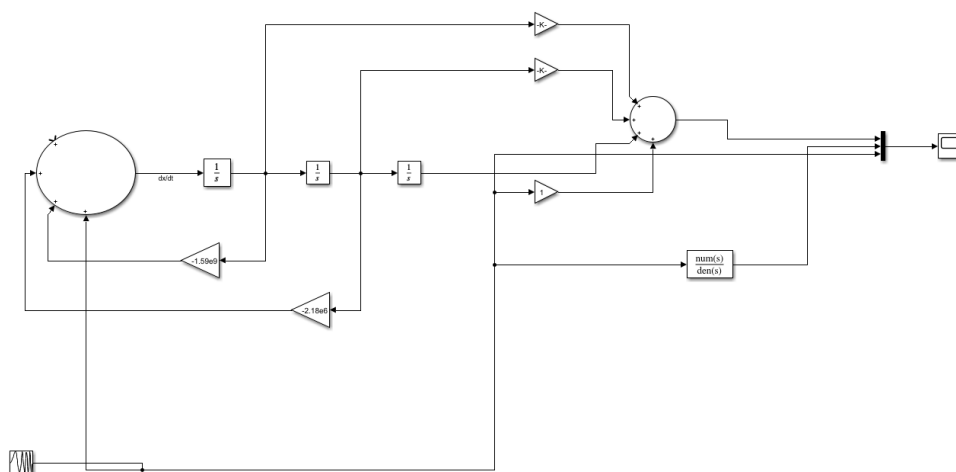


Figure 2 Forma canonică de control

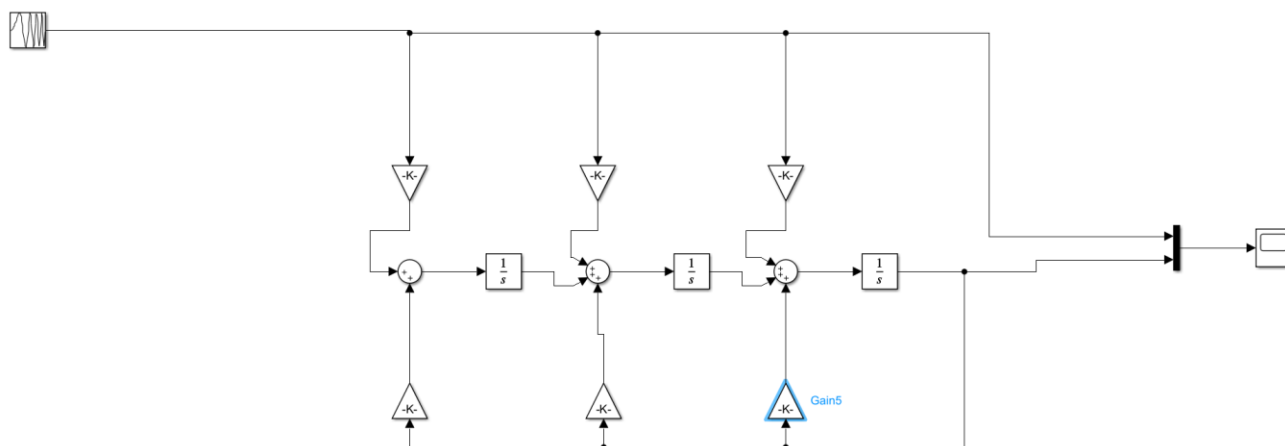


Figure 3 Forma canonică de observare

## 6. Funcția de transfer în formă minimală

### 6.1 Determinarea funcției de transfer în formă minimală

Funcția de transfer are forma raportului a două polinoame , sub forma:

$$H(s) = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + a_0} = \sum_{k \geq 0} \gamma_k s^{-k}, m \leq n$$

Aceasta poate fi exprimată, prin împărțire, într-o sumă de parametrii Markov ( $\gamma_k$ ).Nu toți acești parametrii sunt liniar independenți.

Astfel, conform teoremei, funcția de transfer  $H(s)$  este în formă minimală doar dacă rangul matricei Hankel este egal cu ordinul sistemului.

$$\text{rang}(H_{n,n}) = n$$

În cazul funcției noastre de transfer cu gradul  $n=3$

$$H(s) = \frac{s^3 + 1,22 \cdot 10^6 s}{s^3 + 1,59 \cdot 10^9 s^2 + 2.18 \cdot 10^6 s}$$

Deoarece simplificarea este evidentă

$$H_m(s) = \frac{s^2 + 1,22 \cdot 10^6}{s^2 + 1,59 \cdot 10^9 s + 2.18 \cdot 10^6}$$

Pentru a realiza o verificare vom determina dacă rangul matricei  $H_{2,2}$  este egal cu ordinul funcției de transfer.

Determinăm parametrii Markov în Matlab și obținem

$$\gamma_1 = -1.59 \cdot 10^9, \gamma_2 = 2.52 \cdot 10^{18}, \gamma_3 = -4.01 \cdot 10^{27}$$

Formăm matricea Hankel de ordin 2

$$H_{2,2} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.59 \cdot 10^9 & 2.52 \cdot 10^{18} \\ 2.52 \cdot 10^{18} & -4.01 \cdot 10^{27}_3 \end{pmatrix}$$

Cum  $\text{rang}(H_{2,2}) = 2 = n' = n$  rezultă că funcția de transfer e în formă minimală.

## 6.2 Prezentarea algoritmului

În cazul în care simplificările nu erau evidente, s-ar fi obținut un rang mai mic decât ordinul funcției de transfer,  $\text{rang}(H_{3,3}) < n$ , după care se rezolva sistemul de forma:

$$-\begin{pmatrix} \gamma_{n+1} \\ \gamma_{n+2} \\ \vdots \\ \gamma_{2n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n+1} & \dots & \gamma_{2n-1} \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}_{n,n}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Se rescrie sistemul,

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \dots & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Se determină funcția de transfer în forma minimală

$$H_m(s) = \frac{\beta'(s)}{\alpha'(s)}$$



# 7. Stabilitatea sistemului

## 7.1 Determinarea stabilității interne

Considerăm intrarea sistemului  $u=0$ , astfel soluția ecuației de stare este

$$x(t) = e^{At}x(0).$$

Aplicând Transformata Laplace obținem:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

Impunem ca  $\det(\lambda I - A) = 0$  pentru a obține valorile proprii ale matricei  $A$  ( $\text{eig}(A)$  in MATLAB). Pentru a avea un sistem asimptotic stabil intern, toate valorile proprii trebuie să aibă partea reală negativă, adică să aparțină semiplanului stâng.

$$\text{Re}\{\lambda_i\} < 0, \forall \lambda_i \in \Lambda(A)$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{L_1} & \lambda + \frac{R_1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \left( \lambda + \frac{R_1}{L_1} \right) + \frac{\lambda}{L_1 C_2} + \frac{\lambda}{L_1 C_1} = \lambda^3 + \frac{R_1}{L_1} \lambda^2 + \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2} \lambda$$

OBSERVAȚIE: O condiție necesară dar nu suficientă pentru un sistem să fie intern asimptotic stabil este ca toți coeficienții polinomului caracteristic să fie reali pozitivi.

Se observă soluțiile polinomului caracteristic sunt

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -1,59 \cdot 10^9 \\ \lambda_3 &= -1,37 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Deoarece avem o rădăcină  $\lambda_1 = 0$ , o valoare proprie simplă (cu ordin de multiplicitate  $1 \leftrightarrow \operatorname{Re}\{\lambda_1(A)\} = 0 \rightarrow \rho_i = 1$ ) iar restul rădăcinilor au partea reală negativă, conform unei teoreme putem spune că sistemul este **intern asimptotic stabil**.

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0, \forall \lambda_i \in \Lambda(A)$$

Stabilitatea poate fi determinată și cu ajutorul criteriului **Routh-Hurwitz**, care are rolul de a determina numărul rădăcinilor din semiplanul drept al unui polinom dat.

$$P_c(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, a_n \neq 0$$

Polinomul caracteristic  $P_c(s)$  are toate rădăcinile în semiplanul stâng dacă și numai dacă **pe prima coloană** a tabelului nu există nicio schimbare de semn.

În caz contrar, numărul acestor schimbări indică și numărul de rădăcini aflate în semiplanul drept.

Urmează construirea tabelului astfel:

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^0$	$m_1$	0	0	$\dots$

Reguli de completare:

- Linia ce nu are destui coeficienți pentru a completa o linie, se completează cu 0
- Linia a treia se completează cu:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \quad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

- Linia a patra se completeaza cu:

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \quad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$$

- Algoritmul se continuă până la calcularea lui  $m_1$  corespunzător liniei cu termenii liberi  $s^0$
- dacă o linie e formată doar din 0-uri, aceasta va fi înlocuită cu derivata liniei precedente
- dacă primul element al unei linii este 0, acesta se înlocuiește cu o valoare foarte mică  $\varepsilon$  și se continuă calculele

Polinomul nostru caracteristic are forma

$$P_c(\lambda) = \lambda^3 + \frac{R_1}{L_1}\lambda^2 + \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2}\lambda$$

$\lambda^3$	1	$1,59 \cdot 10^9$
$\lambda^2$	$2,18 \cdot 10^6$	0
$\lambda^1$	$2,18 \cdot 10^6$	0
$\lambda^0$	0	0

Deoarece nu există schimbări de semn pe prima coloană valorică, sistemul este intern stabil, fapt demonstrat și anterior.

## 7.2 Determinarea stabilității externe

Faptul că sistemul nostru este intern stabil indică stabilitatea externă a acestuia, și anume un sistem extern stabil.

Acest lucru se poate demonstra și analizând polii funcției de transfer în formă minimală

$$H_m(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{L_1 C_2}}{s^2 + \frac{R_1}{L_1}s + \frac{C_1 + C_2}{L_1 C_1 C_2}}$$

Cu polii:

$$\begin{aligned}\hat{s}_1 &= -1,59 \cdot 10^9 \\ \hat{s}_2 &= -1,37 \cdot 10^3\end{aligned}$$

Având poli aparținând semiplanului stâng (cu partea reală negativă), deducem că sistemul este **extern stabil**, astfel având intrare mărginită și ieșire tot mărginită (*BIBO – Bounded Input, Bounded Output*).

## 7.3 Stabilitatea internă în sens Lyapunov

Metoda II a lui Lyapunov : Considerăm sistemul descris prin ecuația de stare  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  și căutăm o funcție scalară de tip ‘energie’, pozitiv definită, având derivata negativă.

Această funcție are forma

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0 \rightarrow$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (x^T A^T) P x + x^T P (A x) = x^T (A^T P + P A) x < 0$$

Sistemul este stabil dacă:

$$A^T P + P A = -Q, Q = Q^T > 0$$

Se caută o matrice definit pozitivă  $Q = Q^T > 0$  ;i se determină matricea P, prin rezolvarea ecuației Lyapunov:

$$A^T P + P A = -Q$$

Astfel, dacă matricea P are toate valorile proprii pozitive atunci sistemul este intern asimptotic stabil.

În cazul nostru, considerăm o matrice Q, pozitiv definită astfel:

$$Q = 69 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 69 & 0 & 0 \\ 0 & 69 & 0 \\ 0 & 0 & 69 \end{pmatrix}$$

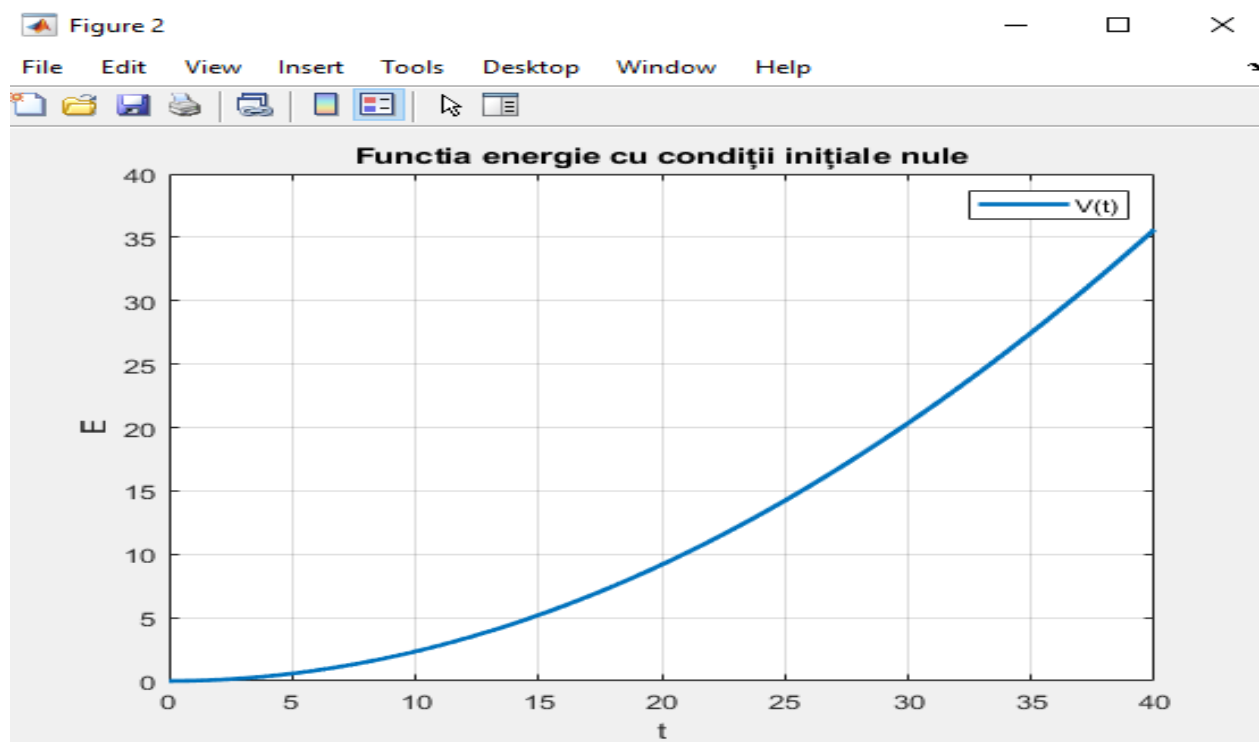
Se rezolvă ecuația  $A^T P + P A = -Q$  folosind MATLAB, prin intermediul funcției `lyap(A',Q)`.

$$P = \text{lyap}(A', Q) = \begin{pmatrix} -3,1 \cdot 10^{14} & -0,14 \cdot 10^{-11} & 2,9 \cdot 10^{14} \\ -0,14 \cdot 10^{-11} & 2,1 \cdot 10^{-8} & 0,24 \cdot 10^{-11} \\ 2,9 \cdot 10^{14} & 0,24 \cdot 10^{-11} & -2,7 \cdot 10^{14} \end{pmatrix}$$

Valorile proprii ale matricei P sunt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -5,9 \cdot 10^{14} \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 25197,625 \end{aligned}$$

Deoarece nu toate valorile proprii sunt pozitive, sistemul nu este intern asimptotic stabil



## 8. Răspunsurile sistemului

$$H_m(s) = \frac{s^2 + 1,22 \cdot 10^6}{s^2 + 1,59 \cdot 10^9 s + 2,18 \cdot 10^6}$$

Factorul de proporționalitate este  $K = H(0) = 0,56$

### 8.1 Răspuns la impuls

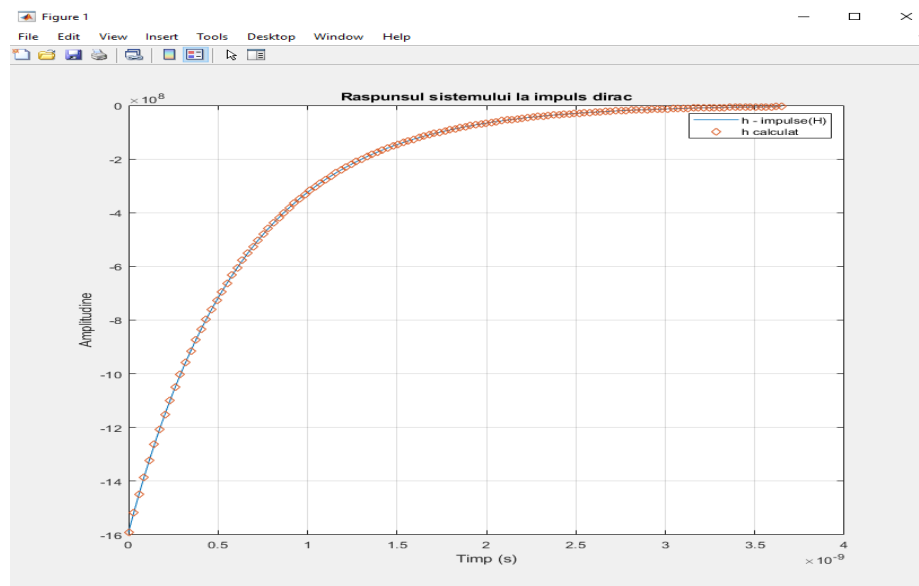
Răspunsul la impuls Dirac

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\delta(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

În cazul nostru,

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 1,22 \cdot 10^6}{s^2 + 1,59 \cdot 10^9 s + 2,18 \cdot 10^6}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1,59 \cdot 10^9}{s + 1,59 \cdot 10^9} + \frac{7,04 \cdot 10^{-4}}{s + 0,0014} + \frac{5,58 \cdot 10^{-20}}{s - 1,08 \cdot 10^{-19}} + 1\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1,59 \cdot 10^9}{s + 1,59 \cdot 10^9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7,04 \cdot 10^{-4}}{s + 0,0014}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5,58 \cdot 10^{-20}}{s - 1,08 \cdot 10^{-19}}\right\} = \\ &\quad -1,59 \cdot 10^9 e^{\{-1,59 \cdot 10^9\}} + 7,04 \cdot 10^{-7} e^{\{-0,0014t\}} \\ &\quad + 5,58 \cdot 10^{-20} e^{\{1,08 \cdot 10^{-19}\}} \end{aligned}$$

Răspunsul a fost generat atât cu funcția impulse(H) cât și calculat separat.



## 8.2 Răspuns indicial

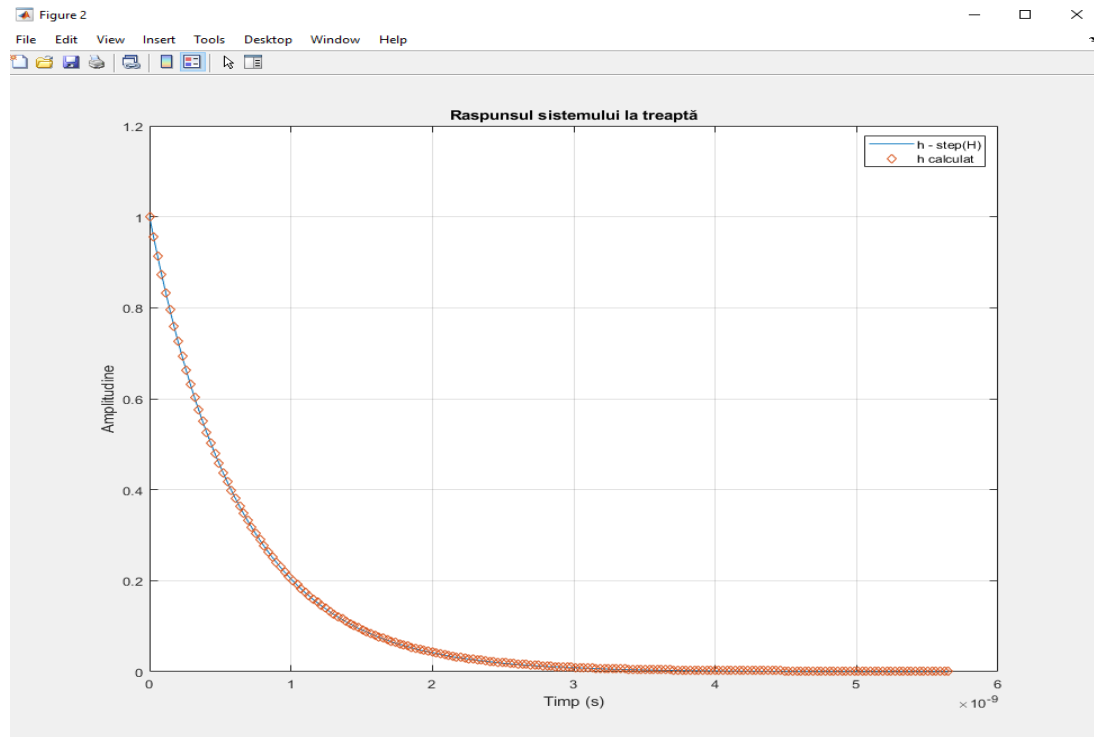
Răspunsul la treaptă

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \frac{1}{s} \right\}$$

În cazul de față

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 1,22 \cdot 10^6}{s^2 + 1,59 \cdot 10^9 s + 2,18 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 1,22 \cdot 10^6}{s^3 + 1,59 \cdot 10^9 s^2 + 2,18 \cdot 10^6 s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1,59 \cdot 10^9} + \frac{-0,5144}{s + 0,0014} + \frac{0,5155}{s} \right\} \\ &= e^{\{-1,59 \cdot 10^9 t\}} - 0,5144 e^{\{-0,0014 t\}} + 0,5155 H(t) \end{aligned}$$

Răspunsul a fost generat atât cu funcția step(H) cât și calculat separat.





## 8.3 Răspuns la rampă

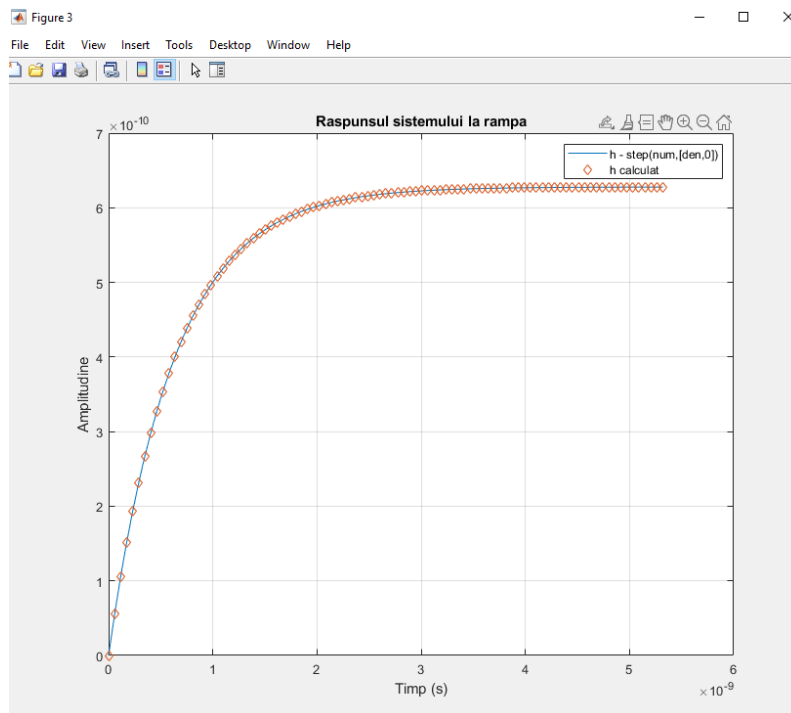
Răspunsul la rampă

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \frac{1}{s^2} \right\}$$

În cazul de față

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 1,22 \cdot 10^6}{s^2 + 1,59 \cdot 10^9 s + 2,18 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 1,22 \cdot 10^6}{s^4 + 1,59 \cdot 10^9 s^3 + 2,18 \cdot 10^6 s^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-6 \cdot 10^{-11}}{s + 1,59 \cdot 10^9} + \frac{375,74}{s + 0,0014} + \frac{-375,74}{s} + \frac{0,5144}{s} \right\} \\ &= -0,627 \cdot 10^{-12} e^{-1,59 \cdot 10^9 t} + 375,74 e^{-0,0014 t} - 375,74 H(t) \\ &\quad + 0,5144 H(t) \end{aligned}$$

Răspunsul a fost generat atât cu funcția `step(num, [den,0])` cât și calculat separat.



## 9. Performanțele sistemului

Răspunsul unui sistem LTI descris prin funcția de transfer  $H(s)$  la o intrare  $u(t)$  se calculează astfel:

$$y(t) = h(t) \cdot u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\} = y_l(t) + y_p(t)$$

unde,  $y_l(t)$  este componenta tranzitorie sau liberă, specifică sistemului, iar  $y_p(t)$  este componenta permanentă, dependentă de intrarea sistemului.

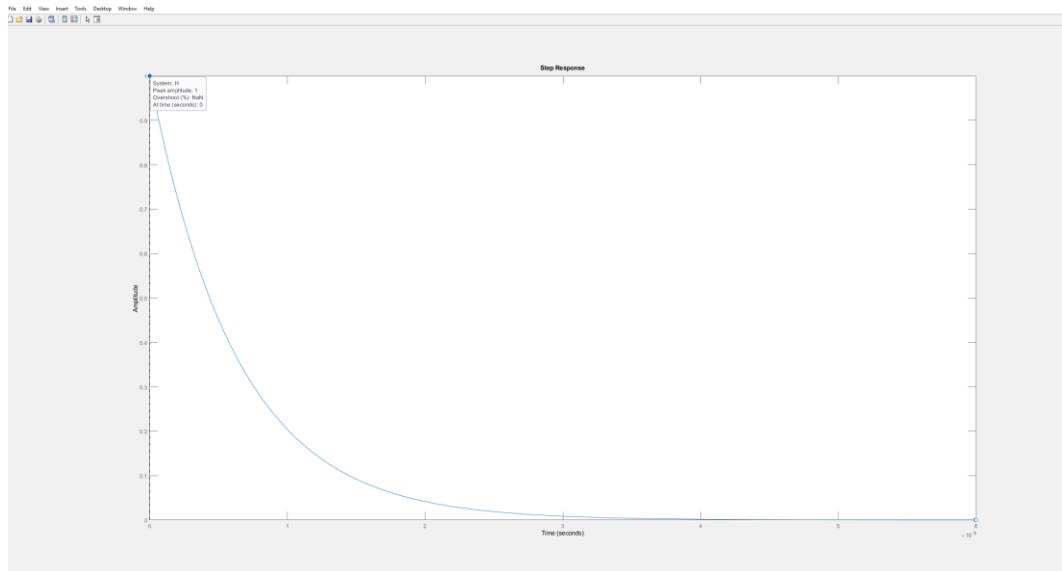
### 9.1 Performanțele sistemului în regim tranzitoriu

Sistemul nostru este descris prin funcția de transfer

$$H(s) = \frac{s^3 + 1,22 \cdot 10^6 s}{s^3 + 1,59 \cdot 10^9 s^2 + 2,18 \cdot 10^6 s} = \frac{s^2 + 1,22 \cdot 10^6}{s^2 + 1,59 \cdot 10^9 s + 2,18 \cdot 10^6}$$

având trei poli și trei zerouri (două complet imaginare).

- a) Factorul de proporționalitate este  $K = H(0) = 0,56$
- b) Timpul de răspuns, conform MATLAB este de aproximativ  $t_r \approx 0$
- c) Suprareglajul  $\sigma = \infty$



## Performanțele sistemului în regim staționar

În funcție de semnalul de intrare, poate fi măsurată capacitatea sistemului de reglare de a urmări acel semnal, cu o eroare staționară  $\varepsilon_{ss}$

Componenta permanentă a unui sistem LTI este de natura semnalului de intrare.

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(U(s) - Y(s))$$

Aceste erori sunt de mai multe tipuri:

- eroarea staționară la poziție  $\varepsilon_{ssp} = 1 - H(0)$ , în cazul unei intrări de tip treaptă unitară (Heaviside)  $u(t)=1 \leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$
- eroarea staționară la viteză  $\varepsilon_{ssv}$ , în cazul unei intrări de tip rampă  $u(t)=t \leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$
- eroarea staționară la accelerație  $\varepsilon_{ssa}$ , în cazul unei intrări de tip parabolă  $u(t) = t^2 \leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s^3}$

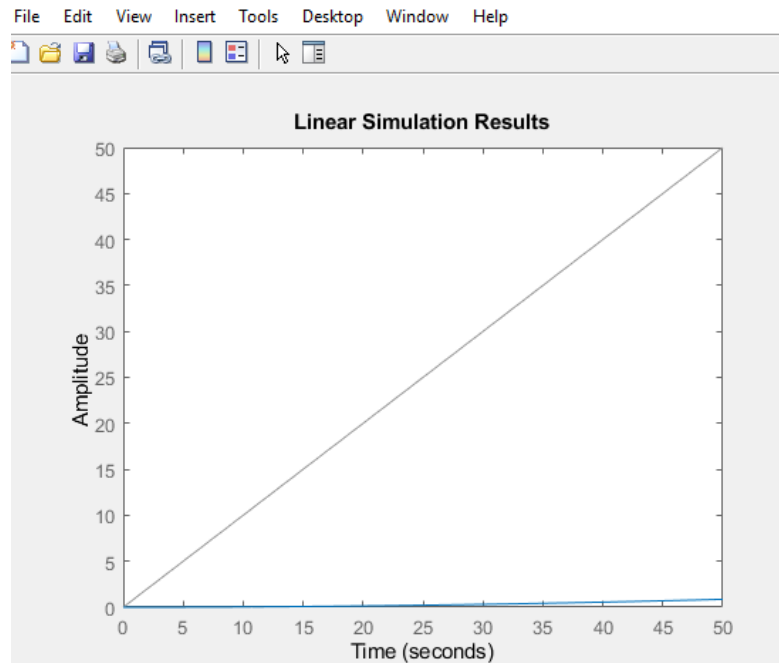
$\varepsilon_{ssv}$  este finită doar în cazul în care sistemul are  $\varepsilon_{ssp} = 0$ , iar  $\varepsilon_{ssa}$  este finită doar dacă  $\varepsilon_{ssv}=0$

În cazul sistemului nostru, eroarea staționară la poziție este

$$\varepsilon_{ssp} = 1 - H(0) = 1 - K = 0,44$$

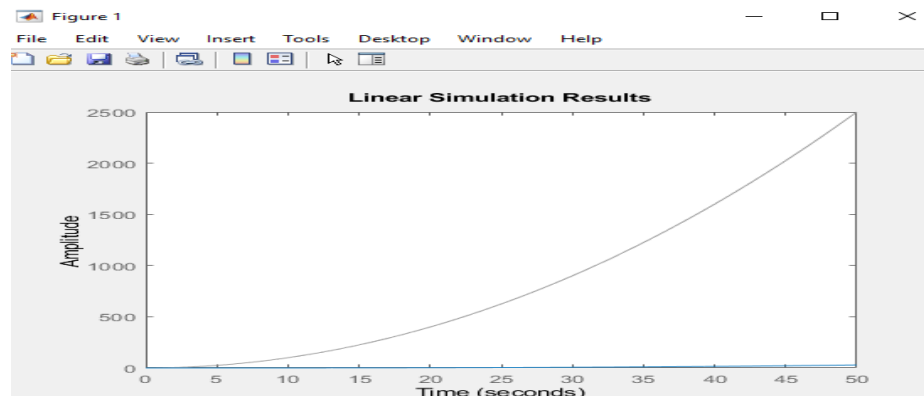
Eroarea staționară la viteză

$$\varepsilon_{ssv} = \pm\infty, \varepsilon_{ssp} \neq 0$$



Eroarea staționară la accelerație

$$\varepsilon_{ssa} = \pm\infty, \varepsilon_{ssv} \neq 0$$



## 9.2 Regimul de funcționare și modurile de oscilație

Regimul de funcționare prezintă caracterul general al regimului tranzitoriu al unui sistem LTI.

Modurile de oscilație ale sistemului sunt determinate de polii acestuia, având polii dominanți în dreapta planului complex, și sunt de mai multe tipuri:

- poli reali de multiplicitate  $n$ :  $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\hat{s}t}$
- perechi de poli complex conjugați de multiplicitate  $n$ :  $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{Re\{\hat{s}\}t} \sin(Im\{\hat{s}\}t)$

Deoarece sistemul nostru are doi poli reali negativi și un pol în origine, acesta va avea un **regim aperiodic amortizat (BIBO)**, cu modurile de oscilație:

$$\hat{s}_1 \neq \hat{s}_2 \in \mathbb{R}_-, \hat{s}_3 = 0$$

$$e^{0t} = 1, e^{\hat{s}_1 t}, e^{\hat{s}_2 t}$$

# 10. Sistemul cu structură de reglare în buclă închisă

## 10.1 Determinarea funcției de transfer în buclă închisă

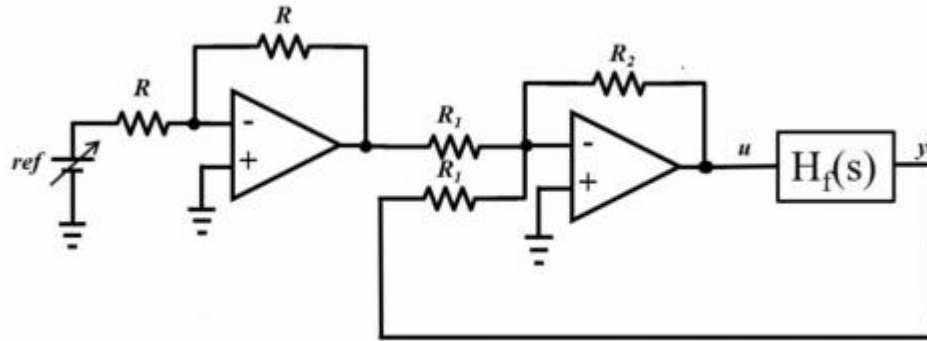


Figure 4 Schema unui sistem de reglare

Dat fiind sistemul de reglare în buclă închisă, vom deduce funcția de transfer a sistemului, unde  $H_f(s)$  reprezintă funcția de transfer a sistemului ales pentru acest proiect, prezentat de multe ori anterior.

Schema poate fi divizată în două părți:

$H_{A01}(s)$  – funcția de transfer pe primul amplificator operațional, împreună cu cele două rezistențe  $R$

$H_{A02}(s)$  – funcția de transfer pe al doilea amplificator operațional, împreună cu cele două rezistențe identice  $R1$  și rezistența  $R2$ .

Deoarece primul amplificator se află în montaj inversor, funcția de transfer va fi determinată considerând impedanțele  $Z$  echivalente cu  $R$ , astfel:

$$H_{A01}(s) = -\frac{Z_{reactie}(s)}{Z_{intrare}(s)} = -\frac{R}{R} = -1$$

În cazul amplificatorului secund, se observă că acesta este de fapt un sumator, astfel:

$$H_{A02}(s) = -\frac{Z_{reac\acute{t}ie}(s)}{R_1(-R_{ef}(s) - Y(s))} = \frac{R_2}{R_1(-H_{A0}(s) - H_f(s))} = -1$$

Schema poate fi reprezentată acum sub forma, unde  $K = \frac{R_1}{R_2}$

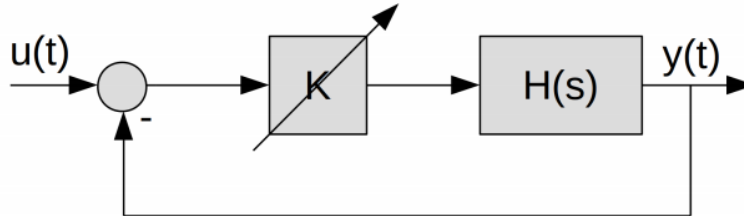


Figure 5 Schemă de reglare tipică locului rădăcinilor

Funcția de transfer în buclă închisă  $H_o(s)$  este:

$$H_o(s) = \frac{H_d(s)}{1 - H_d(s)H_r(s)} = \frac{H_d(s)}{1 - H_{des}(s)} = \frac{K \cdot H(s)}{1 + K \cdot H(s)}$$

$$H_d(s) = H_f(s) \cdot \frac{R_1}{R_2} \text{ și } H_r(s) = -1$$

$$\begin{aligned} H_o(s) &= \frac{H_f(s) \cdot \frac{R_1}{R_2}}{1 + H_f(s) \cdot \frac{R_1}{R_2}} = \frac{R_2 \cdot H_f(s)}{R_1 + R_2 H_f(s)} \\ &= \frac{R_2 \cdot \frac{s^3 + 1,22 \cdot 10^6 s}{s^3 + 1,59 \cdot 10^9 s^2 + 2,18 \cdot 10^6 s}}{R_1 + R_2 \frac{s^3 + 1,22 \cdot 10^6 s}{s^3 + 1,59 \cdot 10^9 s^2 + 2,18 \cdot 10^6 s}} \\ &= \frac{R_2 \cdot (s^3 + 1,22 \cdot 10^6 s)}{R_1(s^3 + 1,59 \cdot 10^9 s^2 + 2,18 \cdot 10^6 s) + R_2(s^3 + 1,22 \cdot 10^6 s)} \end{aligned}$$

Polii funcției de transfer în buclă închisă sunt rădăcinile polinomului caracteristic

$$P_c(s) = 1 + K \cdot H(s) = 0$$

Pentru  $H(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$

$$1 + KH(s) = 0 \leftrightarrow \alpha(s) + K\beta(s) = 0$$

Astfel pentru  $K \rightarrow 0$ , polii sistemului sunt dați de rădăcinile polinomului  $\alpha(s) = 0$  iar pentru  $K \rightarrow \infty$ , polii sistemului închis sunt dați de:

$$\frac{1}{K} \alpha(s) + \beta(s) = 0$$

Polii sistemului în buclă închisă pornesc din polii sistemului în buclă deschisă, adică polii tind în zerourile sistemului deschis, pentru  $K \in [0, \infty)$ .

Dacă sistemul inițial în buclă deschisă descris prin  $H(s)$  este de ordinul  $n$ , cu  $n$  poli, atunci sistemul rezultat în urma închiderii buclei are tot ordinul  $n$ , caz în care nu există simplificări.

Locul geometric al rădăcinilor sistemului în buclă închisă va avea  $n$  ramuri, în funcție de  $K = \frac{R_2}{R_1}$

## 10.2 Trasarea și interpretarea locului rădăcinilor

### *Reguli de trasare*

1. Locul rădăcinilor este simetric față de axa reală.
2. Se marchează cu  $x$  în planul complex poziția polilor în buclă deschisă. Cele  $n$  ramuri ale locului rădăcinilor pleacă din polii sistemului deschis.
3. Se marchează cu  $o$  în planul complex poziția zeroului în buclă deschisă.  $m$  ramuri ale locului rădăcinilor ajung în zerourile sistemului deschis, iar celelalte  $n - m$  ramuri vor tinde asimptotic spre infinit.
4. Asimptotele se vor intersecta în centrul de greutate al locului rădăcinilor situat pe axa reală și calculat cu ajutorul formulei:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\hat{s}_i) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\hat{s}_i)}{n - m},$$

iar unghiurile de plecare sunt:

$$\Phi_{a_i} = \frac{(2i - 1)\pi}{n - m}, \quad i = \overline{1, n - m}.$$

5. Un punct  $s_x$  de pe axa reală aparține locului rădăcinilor dacă este respectată condiția de fază:



$$\sum_{i=1}^m \angle(s_x - \hat{s}_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s_x - \hat{s}_i) = \angle\left(\frac{-1}{k \cdot k'}\right).$$

Astfel:

- pentru  $k' > 0$ , atunci un punct de pe axa reală se află pe locul rădăcinilor dacă în partea dreaptă există un număr impar de singularități;
- pentru  $k' < 0$ , atunci un punct de pe axa reală se află pe locul rădăcinilor dacă în partea dreaptă există un număr par de singularități;

6. Unghiurile de plecare din poli se calculează astfel:

– pentru  $k' > 0$  avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = \sum_{i=1}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - (2l+1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z};$$

– pentru  $k' < 0$  avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = \sum_{i=1}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

7. Unghiurile sosire în zerouri se calculează astfel

– pentru  $k' > 0$  avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = - \sum_{i=1, i \neq j}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + \sum_{i=1}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + (2l+1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z};$$

– pentru  $k' < 0$  avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = - \sum_{i=1, i \neq j}^m \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + \sum_{i=1}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

8. Intersecția ramurilor locului rădăcinilor cu axa imaginară se calculează cu ajutorul tabelului Routh-Hurwitz aplicat pentru ecuația caracteristică  $1 + kH_{des}(s) = 0$ .

9. Punctele de desprindere de pe axa reală sau de revenire pe axa reală se calculează rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} 1 + kH_{des}(s) = 0 \\ \frac{dH_{des}(s)}{ds} = 0 \end{cases}$$

Cu ajutorul MATLAB am reușit să trasăm locul rădăcinilor, prin intermediul funcției `rlocus(H)`. Acesta este trasat pentru  $H_{des}(s)$  însă este interpretat pentru  $H_o(s)$ . Polii sistemului în buclă închisă pornesc din polii sistemului în buclă deschisă.

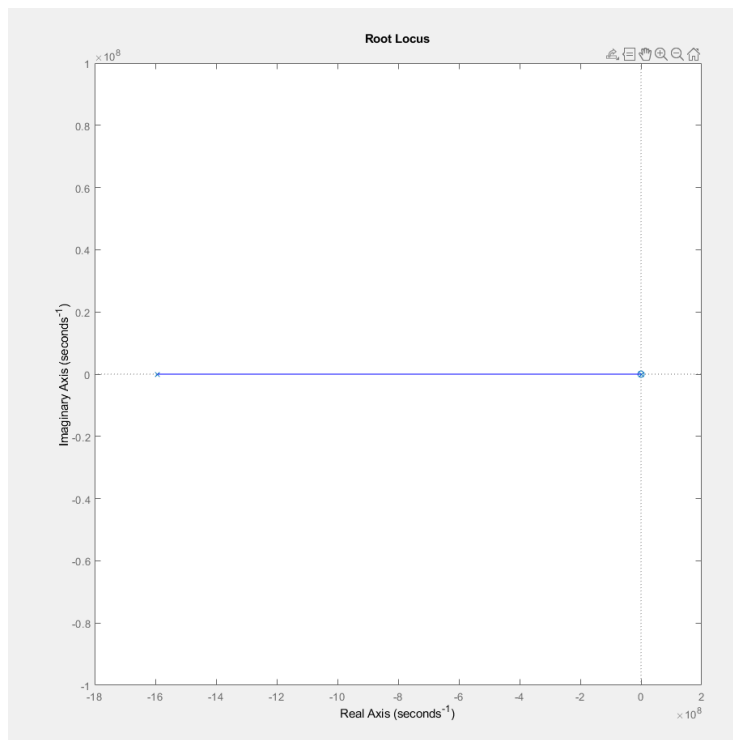


Figure 6 Locul Rădăcinilor

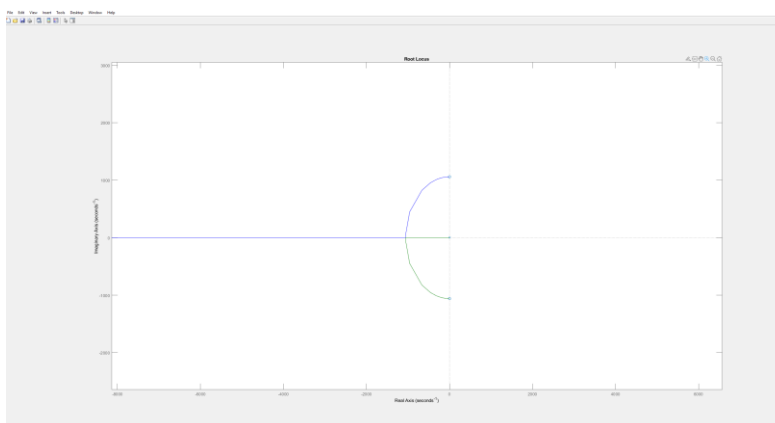


Figure 7 Locul rădăcinilor

*Interpretarea LR:*

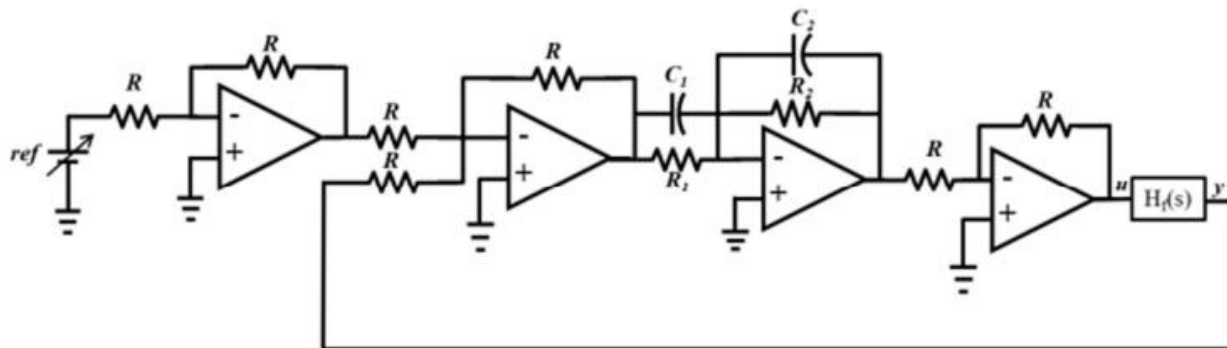
Deși în funcția de transfer avem 3 poli și 3 zerouri, pe reprezentare vor rămâne doar două perechi, un pol și un zero anulându-se.

Pe graficul mărit se disting două ramuri, una care pleacă din  $\hat{s}_1 = -0.00137$  și una din  $\hat{s}_2 = -1,59 \cdot 10^9$ . Având două zerouri rămase, polii se vor ciocni și vor merge fiecare către un zero.

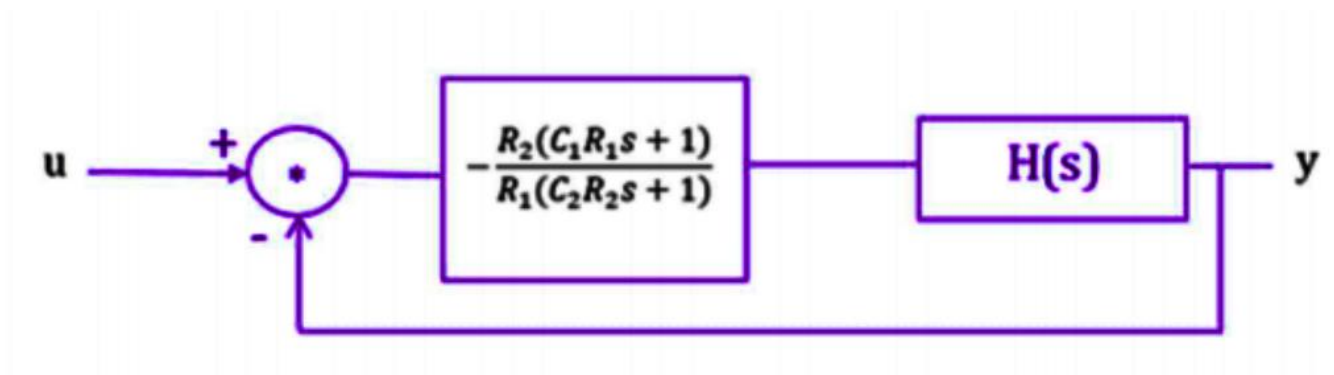
Pe parcursul acestora apare o ciocnire în dreptul lui  $k_{despr} = 7,51 \cdot 10^5$ , după care părăsesc axa reală și se despart în poli complex conjugați până la ajungerea lor în zero. Dacă rădăcinile ajungeau în semiplanul complex drept, stabilitatea sistemului s-ar fi schimbat.

- pentru  $K \in (0, k_{despr} = 7,51 \cdot 10^5)$  avem regim aperiodic amortizat, cu modurile  $e^{\hat{s}_1 t}, e^{\hat{s}_2 t}$ , cu  $\hat{s}_1 \neq \hat{s}_2 \in \mathbb{R}_-$
- pentru  $K = k_{despr} = 7,51 \cdot 10^5$  avem regim aperiodic critic amortizat, cu modurile  $e^{\hat{s} t}, t e^{\hat{s} t}$ , cu  $\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = \hat{s} \in \mathbb{R}_-$
- pentru  $K \in (k_{despr} = 7,51 \cdot 10^5, \infty)$  avem regim oscilant amortizat, cu modurile  $e^{Re\{\hat{s}_{1,2}\}t} \sin(Im\{\hat{s}_{1,2}\}t)$ , cu  $\hat{s}_1 \neq \hat{s}_2 \in \mathbb{C}_-$

# 11. Structura de reglare în buclă închisă



Forma echivalentă pentru această structură este:



# 12. Bibliografie

- Îndrumătorul de laborator
- Cursul TSI
- GOOGLE.COM
- MATLAB 2021
- [www.symbolab.com](http://www.symbolab.com)

# Cuprins

1. Procesul (sistemul) ales .....	2
<b>1.1 Schema procesului</b> .....	2
<b>1.2 Prezentarea procesului</b> .....	2
2. Variabilele de stare ale sistemului .....	3
<b>2.1 Precondiții</b> .....	3
<b>2.2 Ecuațiile diferențiale de stare</b> .....	4
3. Modelul matematic de tip funcție de transfer .....	6
<b>3.1 Determinarea ecuației diferențiale de tip intrare-ieșire</b> .....	6
<b>3.2 Spațiul stărilor și funcția de transfer</b> .....	7
4. Singularitățile sistemului .....	9
4.1 Polii sistemului.....	9
4.2 Zerourile sistemului.....	10
4.3 Reprezentarea singularităților, în planul complex .....	11
5. Formele Canonicе de control și observare .....	12
5.1 Forma Canonică de Control – FCC.....	12
5.2 Forma canonică de Observare – FCO .....	13
5.3 Schemele bloc ale formelor canonice.....	14
6. Funcția de transfer în formă minimală .....	15
6.1 Determinarea funcției de transfer în formă minimală .....	15
6.2 Prezentarea algoritmului .....	16
7. Stabilitatea sistemului .....	17
7.1 Determinarea stabilității interne.....	17
7.2 Determinarea stabilității externe .....	20
7.3 Stabilitatea internă în sens Lyapunov .....	20
8. Răspunsurile sistemului.....	23
8.1 Răspuns la impuls.....	23
8.2 Răspuns indicial .....	24
8.3 Răspuns la rampă.....	25
9. Performanțele sistemului .....	26
9.1 Performanțele sistemului în regim tranzitoriu .....	26
9.2 Regimul de funcționare și modurile de oscilație .....	29

10.	Sistemul cu structură de reglare în buclă închisă .....	30
10.1	Determinarea funcției de transfer în buclă închisă.....	30
10.2	<b>Trasarea și interpretarea locului rădăcinilor</b> .....	32
11.	Structura de reglare în buclă închisă.....	36
12.	Bibliografie .....	37