Lucrarea 7

.1 Metoda celor mai mici pătrate

Având o secvenţă de date $x_1, .., x_N$, media $\overline{x}$ este definită ca fiind:

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n. \tag{.1}$$

Varianţa secvenţei $\{x_1, .., x_N\}$, notată prin σ_x^2 este:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2 \tag{.2}$$

Deviaţia standard σ_x este rădăcina pătrată a varianţei:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} \tag{.3}$$

Pentru un model liniar $y = ax + b$, diferenta $y - (ax + b)$ ar trebui să fie zero. Astfel, având măsurătorile

$$\{(x_1, y_1), .., (x_N, y_N)\} \tag{.4}$$

analizăm

$$\{y_1 - (ax_1 + b), .., y_N - (ax_N + b)\} \tag{.5}$$

Media ar trebui să aibă o valoare mică (în cazul unei potriviri bune), şi varianţa va măsura cât de bună este potrivirea. De observat că varianţa pentru acest set de date este:

$$\sigma_{y-(ax+b)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (y_n - (ax_n + b))^2 \tag{.6}$$

Pentru datele $\{(x_1, y_1), .., (x_N, y_N)\}$, se poate defini eroarea asociată cu $y = ax + b$ prin:

$$J(a, b) = \sum_{n=1}^{N} (y_n - (ax_n + b))^2 \qquad (.7)$$

Aceasta este de N ori varianţa setului de date $\{y_1 - (ax_1 + b), .., y_n - (ax_N + b)\}$. Se observă că eroarea este o funcţie de două variabile.

Valorile a şi b care minimizează eroarea definită de ecuaţia .7 satisfac ecuaţia matricială (***Demonstrati acest lucru***):

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N} x_n^2 & \sum_{n=1}^{N} x_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \\ \sum_{n=1}^{N} y_n \end{pmatrix}$$

dând astfel soluţia la problema noastră:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N} x_n^2 & \sum_{n=1}^{N} x_n \\ \sum_{n=1}^{N} x_n & \sum_{n=1}^{N} 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \\ \sum_{n=1}^{N} y_n \end{pmatrix}$$

atât timp cât matricea a cărei inversă trebuie calculată este inversabilă.

.2 Exemplul 1

Determinarea modelului liniar asociat unui rotametru, la etalonarea căruia s-au obţinut datele experimentale prezentate în Tabelul 1.

Table .1: Datele experimentale obţinute la etalonarea unui rotametru

Nr. exp.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Debit [ml/min]	120	150	180	200	250	300	320	340	380	400
Înălţime [mm]	13	17	20	25	30	34	35	39	41	44

Nr. exp.	11	12	13	14	15	16	17	18
Debit [ml/min]	450	500	550	600	650	700	750	800
Înălţime [mm]	50	53	58	62	66	69	72	78

Se cere relaţia care corelează debitul de fluid cu nivelul la care se ridică plutitorul rotametrului, respectiv:

$$q = b + a \cdot h \qquad (.8)$$

Coeficientul de intercepţie b respectiv de regresie a sunt:

$$b = -7.9891, \ a = 9.6325$$

Valorile medii sunt:

$$\overline{h} = 44.7778, \ \overline{q} = 423.3333$$

Deviaţiile standard sunt:

$$\sigma_h = 19.3119, \ \sigma_q = 207.0218$$

Dreapta de regresie este prezentată în Figura .1

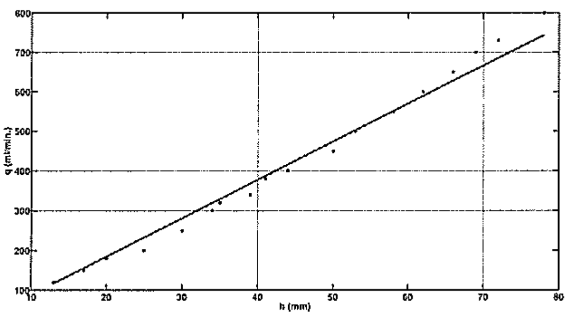

Figure .1: Dreapta de regresie în cazul unui rotametru

.2.1 Cerinţe

Programul în *Matlab* pentru calculul coeficientului de intercepţie b a coeficientului de regresie a, a valorii medii pentru debitul q şi înălţimea h şi a deviaţiilor standard σ_h şi σ_q.

```
Script matlab
{
}
```

.2.2 Observaţii

- Cum se poate folosi metoda regresiei monodimensionale pentru determinarea modelului neliniar al unui proces cu o intrare şi o ieşire?

- Cum se poate folosi metoda regreiei monodimensionale pentru determinarea modelului dinamic al unui proces de ordinul întâi?

.3 Exemplul 2

Modelarea compartimentului alveolar al plămânului uman constă dintr-o pereche de recipiente telescopice conectate între ele printr-un resort care se întinde pe măsură ce volumul compartimentului (V) creşte (figura .2). Tensiunea generată în resortul întins produce o presiune elastică (P_{el}) în interiorul compartimentului. P_{el} determină compartimentul să revină la volumul iniţial atunci când presiunea de umflare este înlăturată. Aceasta imită expirarea pasivă care are loc într-un plămân atunci când muşchii respiratorii se relaxează la sfârşitul unei inspiraţii.

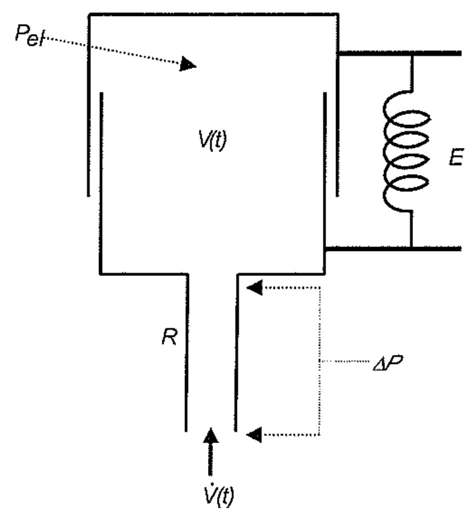

Figure .2: Modelul liniar al unui plămân cu un singur compartiment

O singură conductă conectează compartimentul modelului din figura .2 cu exteriorul. Este necesară o anumită presiune (ΔP) pentru a conduce un flux de aer prin conductă, la fel cum presiunea este necesară pentru a conduce fluxul de aer prin căile respiratorii pulmonare.

Considerând proprietăţile elastice ale compartimentului alveolar care determină relaţia dintre P_{el} şi V, dacă resortul respectă legea lui Hooke atunci forţa elastică creşte liniar pe măsură ce este întins, prin urmare P_{el} în interiorul compartimentului creşte liniar cu V. Această presupunere permite descrierea relaţiei dintre P_{el} şi V în termeni de un singur număr, panta E:

$$P_{el} = EV \tag{.9}$$

unde s-a presupus că V este măsurat relativ la volumul din compartiment când resortul este complet relaxat. E este *elastanţa* şi este o măsură a cât de dificil este a umfla compartimentul alveolar.

Rezistenţa prin conductă poate fi caracterizată în mod similar, presupunând că diferenţa de presiune (ΔP) între capetele conductei creşte liniar cu debitul:

$$\Delta P = R\dot{V} \tag{.10}$$

unde R este definit ca fiind *rezistenţa* conductei, iar debitul $\dot{V}$ este derivata lui V în raport cu timpul.

Presiunea totală în model, de la intrarea conductei la exteriorul peretelui compartimentului, este suma dintre căderea de presiune pe conductă şi presiunea în compartiment (Figura .2):

$$P = P_{el} + \Delta P = EV + R\dot{V} \tag{.11}$$

Ecuaţia (.11) este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi, ecuaţia de mişcare a modelului liniar cu un singur compartiment. Variabilele modelului sunt P, V, şi $\dot{V}$, iar parametrii sunt E şi R. Presupunând că dorim să determinăm parametrii modelului descris de ecuaţia (.11) utilizând un set de măsurători ale lui P, V, şi $\dot{V}$, valorile pot fi determinate prin *regresie liniară multiplă*. Această metodă va determina o formulă explicită pentru valorile cele mai potrivite ale lui R şi E.

Similar cu abordarea anterioară, se caută valorile care minimizează expresia:

$$SSR = \sum_{i=1}^{N}\left[P_i - \hat{P}_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[P_i - EV_i - R\dot{V}_i\right]^2 \tag{.12}$$

unde P este presiunea măsurată, $\hat{P}$ este presiunea estimată (ecuaţia (.11)) şi suma este peste toate cele N puncte de date măsurate.

$$\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} V_1 & \dot{V}_1 \\ V_2 & \dot{V}_2 \\ \cdots & \\ V_n & \dot{V}_n \end{bmatrix} \tag{.13}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} E \\ R \end{bmatrix} \tag{.14}$$

$$\underline{P} = \underline{\underline{X}}\,\underline{A} \tag{.15}$$

$$\underline{\underline{X}}^T \underline{P} = \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}}\,\underline{A} \quad (.16)$$

$$\underline{A} = [\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}}]^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{P} \quad (.17)$$

.4 Date experimentale referitoare la Exemplul 2

Folosind datele din Tabelul .2 anexat, reprezentaţi grafic mărimile variabile în timp din ecuaţia (.11) (prezentate în Figura .3) şi determinaţi parametrii modelului folosind formulele de mai sus. Ieşirea estimată este prezentată în Figura .4.

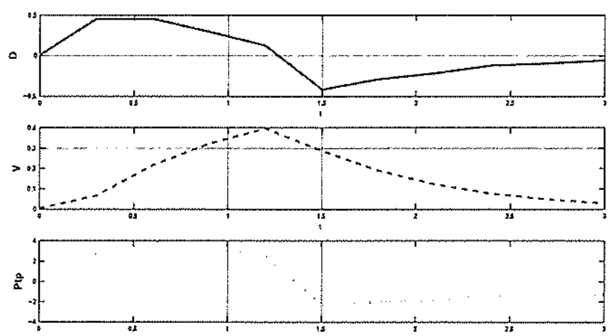

Figure .3: Evoluţia în timp a datelor experimentale

Reluaţi procedura pentru un model augmentat prin introducerea unui nou parametru:

$$P_{tp} = E_L V + R_t \dot{V} + P_0 \quad (.18)$$

Comparaţi rezultatele cu cele obţinute folosind funcţia **regress** din Matlab.

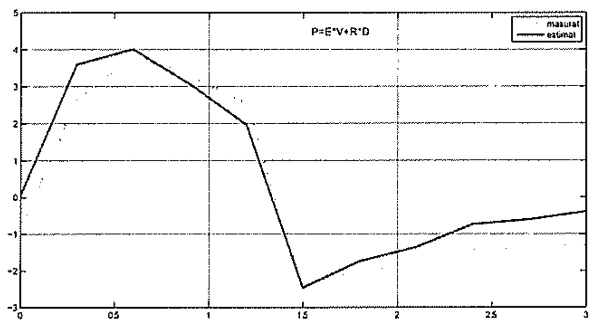

Figure .4: Ieşirea măsurată şi ieşirea estimată

Table .2: Date experimentale

t $[s]$	$\dot{V}$ $[Ls^{-1}]$	V $[L]$	P_{mas} $[cmH_2O]$
0.0000	0.0048	0.0031	-0.8796
0.3000	0.4512	0.0639	2.6633
0.6000	0.4524	0.2146	3.8347
0.9000	0.2916	0.3214	3.2975
1.2000	0.1212	0.3966	2.5159
1.5000	-0.4220	0.2860	-2.3584
1.8000	-0.2943	0.1892	-2.0160
2.1000	-0.2205	0.1203	-1.8821
2.4000	-0.1222	0.0741	-1.4588
2.7000	-0.0963	0.0465	-1.4265
3.0000	-0.0611	0.0273	-1.2926