1. Fie $A = (1,1)$, $B = (4,7)$, $M_\alpha = (-1+\alpha, -3+2\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Arătaţi că punctele A, B şi M_α sunt coliniare pentru orice α şi determinaţi valorile lui α pentru care $r(A, M_\alpha, B) > 0$. **(10p)**

Am acordat 5p dacă a fost verificată doar coliniaritatea. Pentru condiţia ca raportul să fie pozitiv (rezultatul corect era $\alpha \in (2,5)$), am acordat punctaje parţiale pentru soluţii incomplete, iar, pentru finalizare, am scăzut 1p în cazul erorilor de calcul.

2. Fie punctele $P_1 = (-5,3)$, $P_2 = (-4,3)$, $P_3 = (-3,3)$, $P_4 = (-2,4)$, $P_5 = (-1,6)$, $P_6 = (1,2)$, $P_7 = (2,1)$, $P_8 = (3,2)$. (i) Alegeţi un punct P_9 pe dreapta $x = 5$, astfel ca P_8 să nu aparţină frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, unde $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_8, P_9\}$. Justificaţi alegerea făcută! **(4p)** (ii) Detaliaţi cum evoluează lista $\mathcal{L}_i$ a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew (punctul P_9 este cel ales la (i)). Justificaţi! **(6p)**

(i) Orice alegere de forma $(5,\alpha)$, cu $\alpha \in (0,4)$ era corectă, altminteri punctul P_8 era pe frontieră (fie inferioară, fie superioară). Pentru valorile 0 şi 4 punctul P_8 este pe frontieră, chiar dacă nu participă la determinarea acesteia. Am scăzut 1p pentru astfel de alegeri eronate.

(ii) Am scăzut 1p sau 2p pentru mici erori în aplicarea Graham's scan (unul sau mai multe puncte incluse în listă, deşi trebuiau eliminate, faptul că P_9 nu a fost inclus, deşi apărea explicit, etc.).

3. Daţi exemplu de mulţimi $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^2$, fiecare cu 5 puncte, astfel ca, pentru fiecare dintre ele, diagrama Voronoi asociată să conţină exact 5 semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ să conţină exact 3 semidrepte. Justificaţi! **(5p)** Justificaţi câte muchii şi câte triunghiuri are o triangulare a mulţimii $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. **(5p)**

(i) Sunt diverse variante de răspunsuri corecte. Am scăzut 1p dacă nu era verificată condiţia să fie 3 puncte pe frontiera reuniunii (chiar dacă aceasta era determinată de 3 puncte).

(ii) Era un calcul bazat pe formula din curs.

4. Fie semiplanele $H_1 : -y - 1 \le 0, H_2 : -x - 2 \le 0, H_3 : -x + y - 3 \le 0$. (i) Alegeţi două semiplane H_4 şi H_5 astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile: (i) intersecţia $D = H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5$ este un trapez dreptunghic şi punctul $(-2,1)$ este vârf al acestuia **(5p)**; (ii) considerând problema de programare liniară dată de semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 şi de funcţia obiectiv $f(x,y) = -y$, această problemă admite un unic punct optim (punct de maxim) **(5p)**. Justificaţi şi desenaţi!

Pentru a verifica şi (i) şi (ii) cel mai simplu era să alegeţi un semiplan paralel cu H_3 (de exemplu $x - y + 1 \le 0$) şi un semiplan perpendicular pe H_3 (de exemplu $x + y - 4 \le 0$). Astfel se obţine un trapez dreptunghic, cu un unic "cel mai de jos punct", deci maxim pentru $f(x,y) = -y$).

(i) Am scăzut 2p dacă nu era scrisă nicio justificare, fie ea minimală (o figură, indicarea vârfurilor care determină trapezul, figura nu era un trapez dreptunghic, etc.).

(ii) Am acordat 1p dacă era considerat un trapez dreptunghic pentru care erau o infinitate de puncte de maxim pentru funcţia dată, 2p dacă era un unic punct de maxim, dar pentru $f(x,y) = y$.

5. Fie punctele $A = (2,3), B = (0,1), C = (1,0), D = (-1,-1), E = (2,-4), F = (5,\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 6\}$. Fie $\mathcal{P} = ABCDEF$. Discutaţi, în funcţie de α: (i) numărul de vârfuri convexe/concave ale poligonului $\mathcal{P}$ **(3p)**; (ii) numărul de vârfuri principale ale lui $\mathcal{P}$ **(5p)**. Explicaţi de ce au fost excluse valorile -7 şi 6 **(2p)**.

(i) Pentru $\alpha \in (-\infty, -7) \cup (6, \infty)$ sunt 4 vârfuri convexe şi 2 concave, $\alpha \in (-7, 6)$ sunt 5 convexe şi 1 concav.

(ii) $\alpha \in (-\infty, -7) \cup (-7, -4) \cup (2, 6) \cup (6, \infty)$ sunt 5 vârfuri principale şi 1 neprincipal, $\alpha \in (-4, 2)$ sunt 6 vârfuri principale.

(iii) Valorile au fost excluse datorită coliniarităţii unor puncte (nu se mai obţinea un poligon).

Am scăzut puncte pentru confuziile dintre rezultatul de la (i) şi cel de la (ii), pentru determinarea incorectă a intervalelor, pentru confuziile legate de concepte (în special cel de vârf principal).

6. În planul cartezian Oxy se consideră n triunghiuri $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n$. Fiecare triunghi este isoscel şi are o latură orizontală de lungime 8. Pentru fiecare triunghi sunt indicate coordonatele vârfurilor. Se presupune că, pentru toate triunghiurile, acestea sunt întregi şi nu există două vârfuri cu aceeaşi abscisă. Notăm cu σ_{ij} aria intersecţiei triunghiurilor $\mathcal{T}_i$ şi $\mathcal{T}_j$. Descrieţi succint (nu este necesar să detaliaţi calculele matematice, este suficient să le explicaţi pe scurt) un algoritm cât mai eficient care să determine $\max\limits_{i,j=1,\ldots,n} (\sigma_{ij})$. Justificaţi şi exemplificaţi! **(10p)**

O variantă era de a sorta vârfurile după abscisă. Apoi, ţinând cont de dimensiunea unei laturi şi de faptul că vârfurile au coordonate întregi, se deducea că fiecare triunghi poate avea intersecţii nevide cu $O(1)$ triunghiuri. Apoi se aplica paradigma dreptei de baleiere. Complexitatea finală era $O(n \log n)$. Am punctat şi parţial, în funcţie de ideile soluţiilor. Am acordat punctaj parţial şi pentru soluţia de complexitate $O(n^2)$, în care sunt considerate toate perechile de triunghiuri.