

Algoritmi avansați

C4 - Diagrame Voronoi

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2022 - 2023

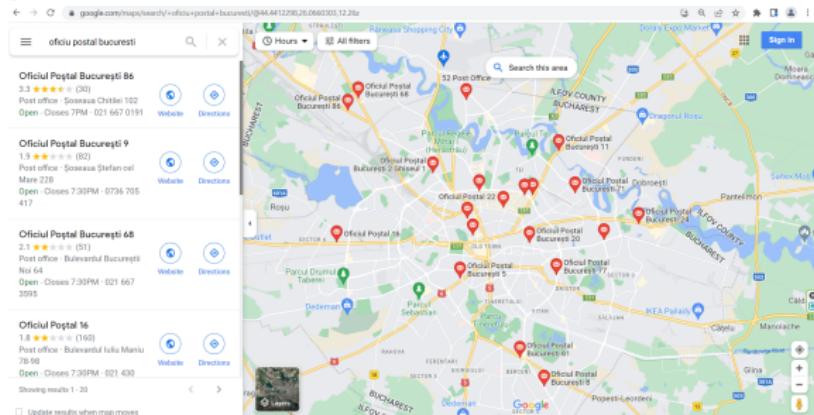
Definiție, proprietăți elementare

Diagrame Voronoi și triangulări Delaunay

Un algoritm eficient

Motivație

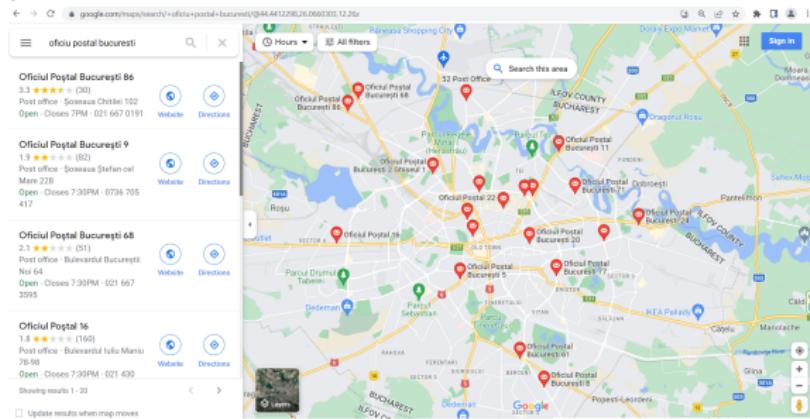
- *Problema oficiilor poștale:* Se consideră o mulțime de puncte (oficiile poștale) din plan. Ce zone vor deservi aceste oficii?



Sursa: [Google Maps](#)

Motivație

- ▶ *Problema oficiilor poștale:* Se consideră o mulțime de puncte (oficiile poștale) din plan. Ce zone vor deservi aceste oficii?



Sursa: [Google Maps](#)

- ▶ Ideea de a delimita “zone de influență” a apărut cu multă vreme în urmă (de exemplu în [lucrările lui Descartes](#), dar și în [legătură cu alte probleme](#); este utilizată în mod curent în varii domenii. În plus, astfel de “împărțiri” apar [în natură](#). Conceptul aferent este cel de **diagramă Voronoi** - există o multitudine de aplicații.

Aplicații - rețele de transport

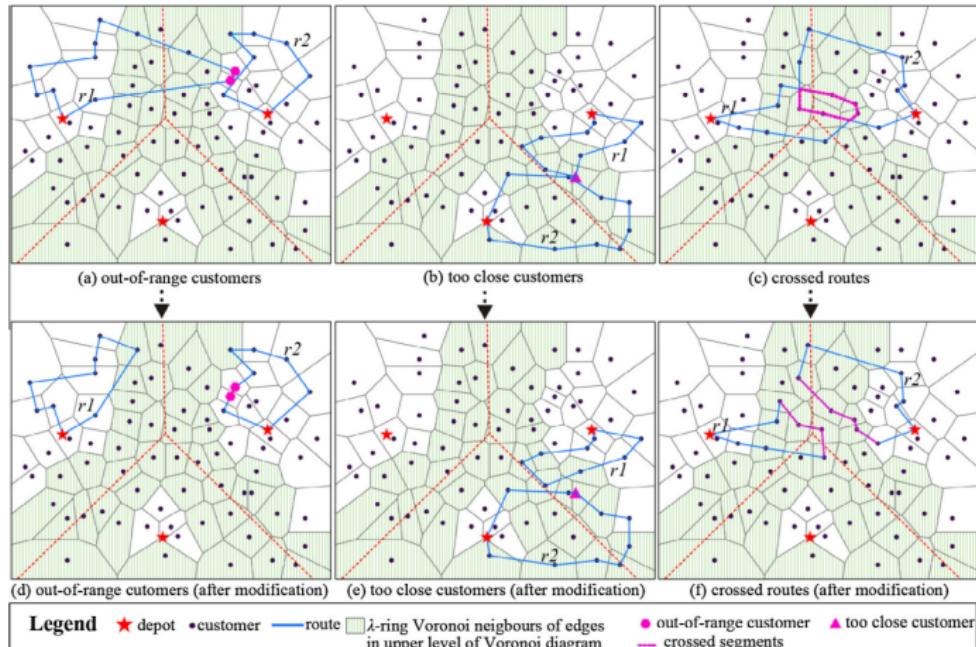


Fig. 3. Inappropriate routes between depots and their modifications.

Sursa: [Tu et al., 2014]

Aplicații - rețele de transport

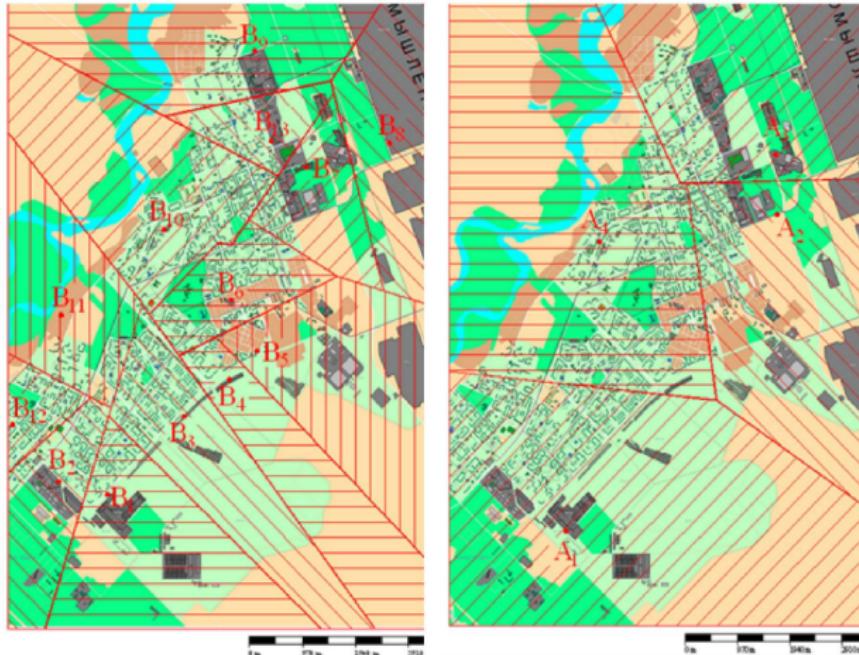


Fig. 4. Voronoi diagram to optimize: (a) the zones serviced by transport terminals of large city districts;(b) freight delivery zones from the logistic centers of a large city.

Sursa: [Lebedeva et al., 2018]

Aplicații - medicină

ANTIGA *et al.*: COMPUTATIONAL GEOMETRY FOR PATIENT-SPECIFIC RECONSTRUCTION AND MESHING OF BLOOD VESSELS

681

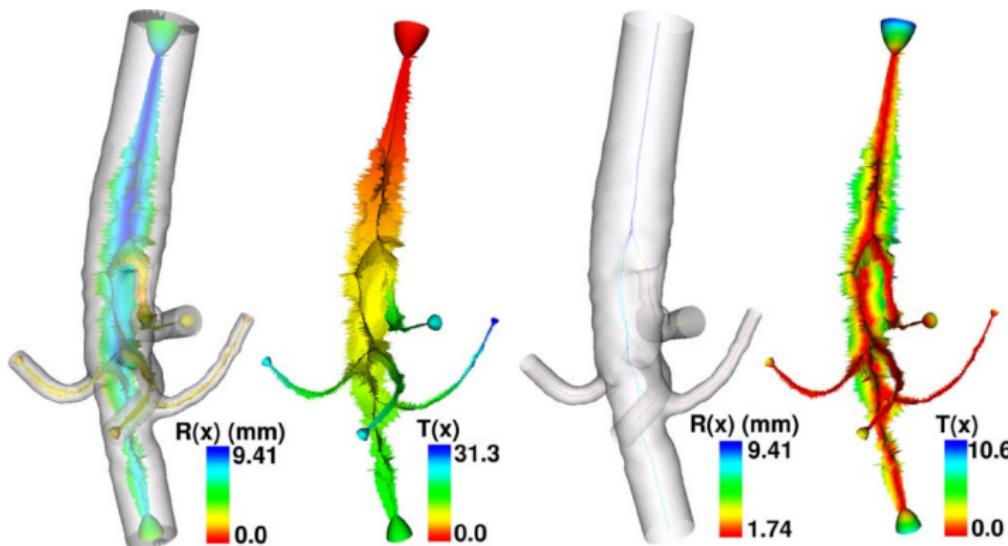


Fig. 8. Voronoi diagram colored according to maximal inscribed sphere radius values $R(x)$ (left), and solution $T(x)$ of Eikonal equation from aorta inlet (right) for the abdominal aorta model (Surface: 8096 points, 16188 triangles. Voronoi diagram: 26463 points, 18370 polygons. Voronoi diagram computation time: 10 s. Solution of Eikonal equation time: 8 s).

Fig. 9. Calculated central paths (left) and solution of Eikonal equation from central path points (right) for subsequent surface characterization (total five central paths backtracing time: 1 s. Solution of Eikonal equation time: 8 s). $R(x)$ is maximal inscribed ball radius values defined on central paths, and $T(x)$ is radial traveltime (since in this case $F(x) = 1$ everywhere, $T(x)$ also represents geodesic distance).

Sursa: [Antiga et al., 2003]

Aplicații - medicină

C. Wang, H.R. Roth, T. Kitasaka et al. / Computerized Medical Imaging and Graphics 77 (2019) 101642

3

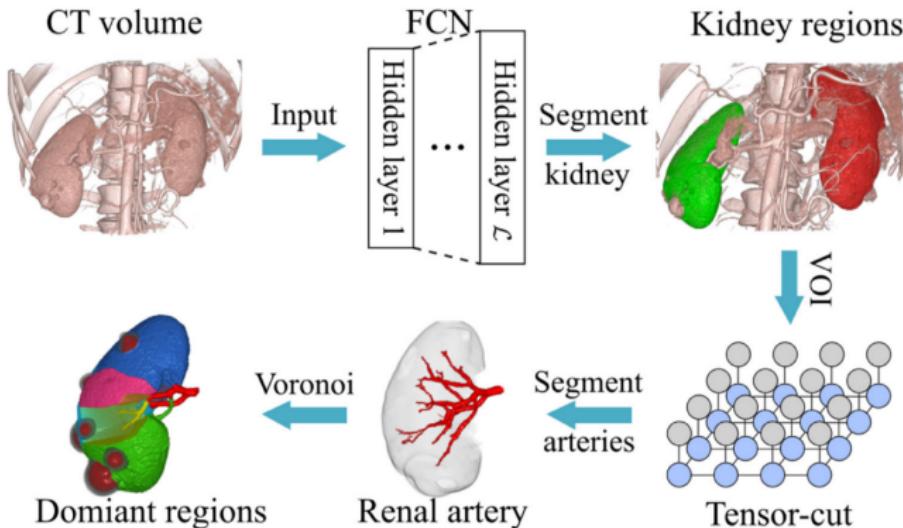
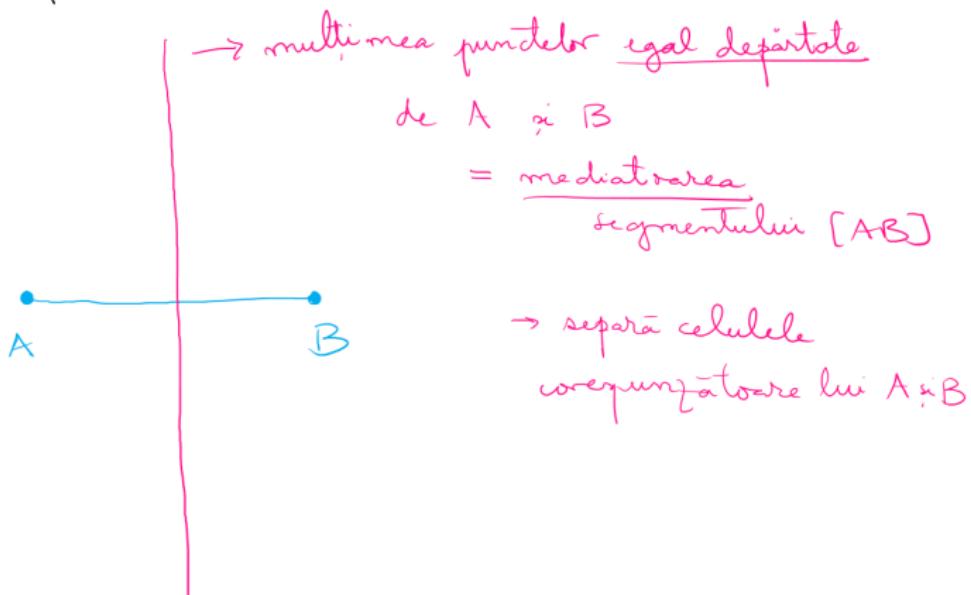


Fig. 1. Workflow: Our precise estimation approach can be divided into three parts: kidney segmentation, renal artery segmentation and estimation of vascular dominant regions.

Sursa: [Wang et al., 2019]

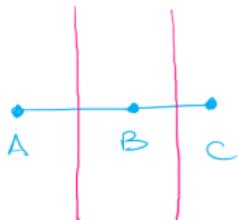
Exemple - diagrame Voronoi în context 2D

1)

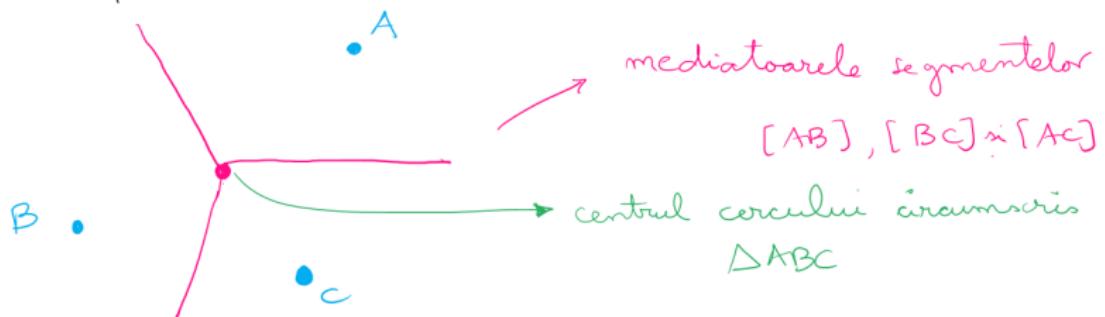
2 puncte distincte

Exemple - diagrame Voronoi în context 2D

2) 3 puncte distincte, coliniare

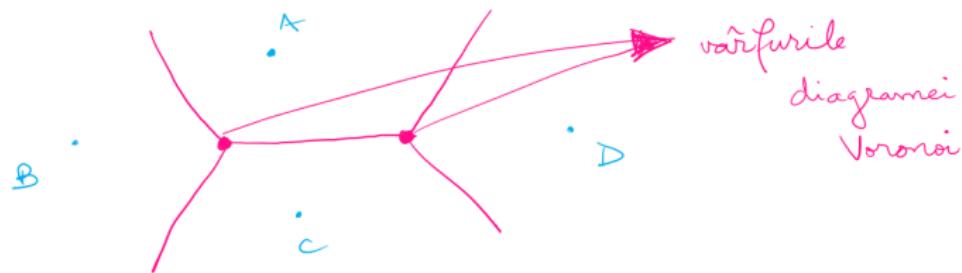


3) 3 puncte necoliniare

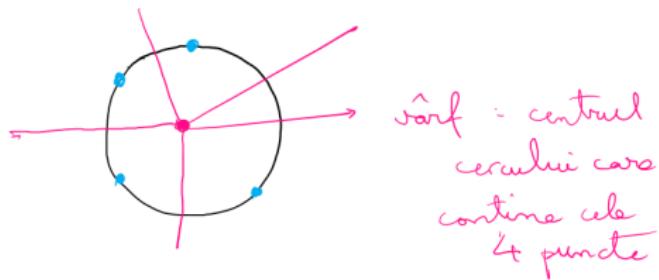


Exemple - diagrame Voronoi în context 2D

4) 4 puncte neclimni ore , necociclice



4') 4 puncte concidice



Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

- ▶ Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

- ▶ Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).
- ▶ **Atenție!** Vârfurile lui $\text{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din \mathcal{P} .

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

- ▶ Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).
- ▶ **Atenție!** Vârfurile lui $\text{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din \mathcal{P} .
- ▶ Uneori, prin abuz de limbaj, este precizată doar împărțirea în muchii / vârfuri.

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

- ▶ Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).
- ▶ **Atenție!** Vârfurile lui $\text{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din \mathcal{P} .
- ▶ Uneori, prin abuz de limbaj, este precizată doar împărțirea în muchii / vârfuri.
- ▶ Diagrame Voronoi pot fi construite pentru **diverse funcții distanță** (e.g. **distanța Manhattan**); forma celulelor depinde de **forma "cercului"** în raport cu funcția distanță respectivă.

Structura unei diagrame Voronoi

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul \mathbb{R}^2 .

Structura unei diagrame Voronoi

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul \mathbb{R}^2 .
- ▶ Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane:

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} h(P_i, P_j),$$

unde $h(P_i, P_j)$ este semiplanul determinat de mediatoarea segmentului $[P_i P_j]$ care conține punctul P_i . În particular: fiecare celulă este o mulțime convexă.

Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

Structura unei diagrame Voronoi

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul \mathbb{R}^2 .
- ▶ Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane:

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} h(P_i, P_j),$$

unde $h(P_i, P_j)$ este semiplanul determinat de mediatoarea segmentului $[P_i P_j]$ care conține punctul P_i . În particular: fiecare celulă este o mulțime convexă.

Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

- ▶ Dacă toate punctele sunt coliniare, atunci diagrama Voronoi asociată $\text{Vor}(\mathcal{P})$ conține $n - 1$ drepte paralele între ele (în particular, pentru $n \geq 3$, ea nu este conexă).
- ▶ În caz contrar, diagrama este conexă, iar muchiile sale sunt fie *segmente*, fie *semidrepte* (cui corespund acestea?).

Structura unei diagrame Voronoi

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul \mathbb{R}^2 .
- ▶ Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane:

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} h(P_i, P_j),$$

unde $h(P_i, P_j)$ este semiplanul determinat de mediatoarea segmentului $[P_i P_j]$ care conține punctul P_i . În particular: fiecare celulă este o mulțime convexă.

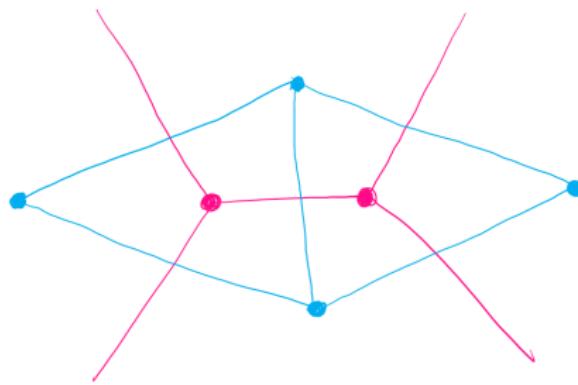
Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

- ▶ Dacă toate punctele sunt coliniare, atunci diagrama Voronoi asociată $\text{Vor}(\mathcal{P})$ conține $n - 1$ drepte paralele între ele (în particular, pentru $n \geq 3$, ea nu este conexă).
- ▶ În caz contrar, diagrama este conexă, iar muchiile sale sunt fie *segmente*, fie *semidrepte* (cui corespund acestea?).
- ▶ **Propoziție.** Fie o mulțime cu n situri. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalitățile

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

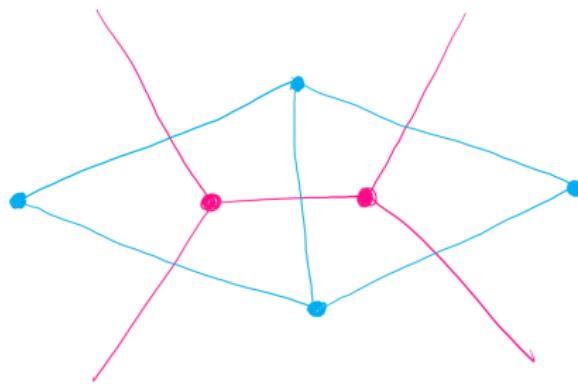
unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei și n_m este numărul de muchii al acesteia.

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime



- ▶ Construcție:

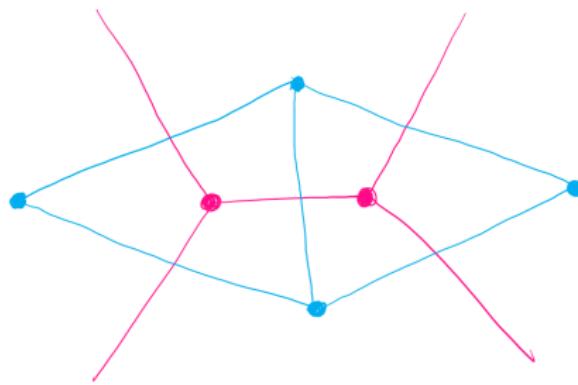
Legătura cu triangulările legale / unghiular optime



► Construcție:

- Multime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$

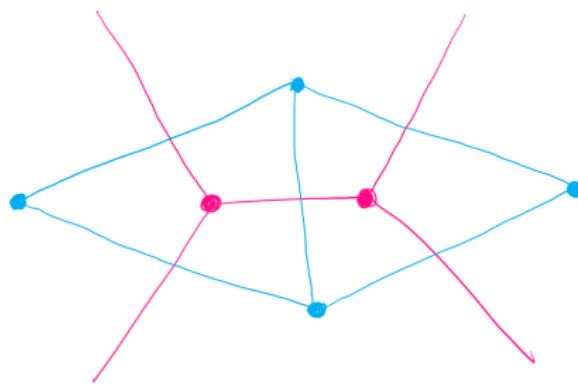
Legătura cu triangulările legale / unghiular optime



► Construcție:

- Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
- Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$

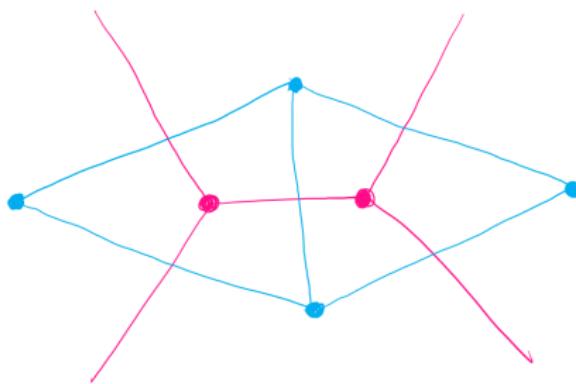
Legătura cu triangulările legale / unghiular optime



► Construcție:

- Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
- Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$
- Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună \implies

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

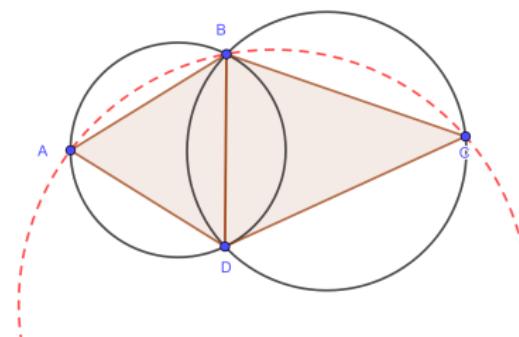


► Construcție:

- Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
- Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$
- Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună \implies
- Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

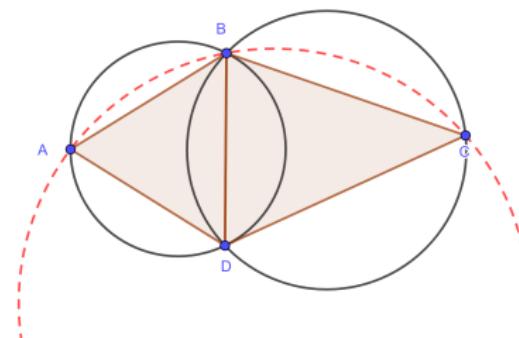
- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} . Atunci \mathcal{T} este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din \mathcal{T} cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui \mathcal{P} .



Pentru punctele A, B, C, D din figură, triangularea construită este o triangulare Delaunay. În schimb, triunghiul ΔABC nu poate participa la realizarea unei triangulări Delaunay, deoarece D este în interiorul cercului circumscris acestuia.

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} . Atunci \mathcal{T} este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din \mathcal{T} cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui \mathcal{P} .

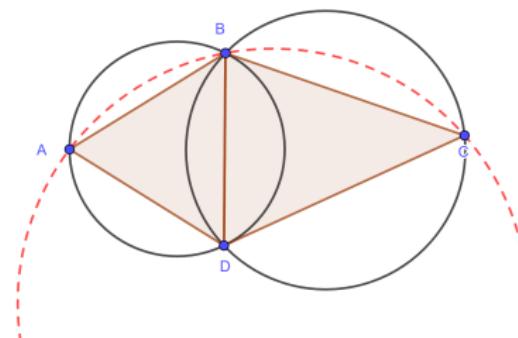


Pentru punctele A, B, C, D din figură, triangularea construită este o triangulare Delaunay. În schimb, triunghiul ΔABC nu poate participa la realizarea unei triangulări Delaunay, deoarece D este în interiorul cercului circumscris acestuia.

- ▶ **Teoremă.** O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} . Atunci \mathcal{T} este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din \mathcal{T} cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui \mathcal{P} .

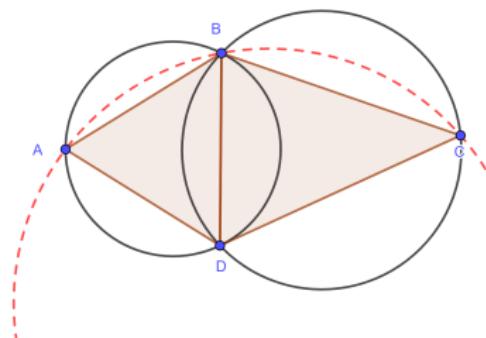


Pentru punctele A, B, C, D din figură, triangularea construită este o triangulare Delaunay. În schimb, triunghiul ΔABC nu poate participa la realizarea unei triangulări Delaunay, deoarece D este în interiorul cercului circumscris acestuia.

- ▶ **Teoremă.** O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.
- ▶ **Teoremă.** Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Pentru mulțimile în poziție generală (nu există patru puncte conciclice), orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui \mathcal{P} .

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} . Atunci \mathcal{T} este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din \mathcal{T} cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui \mathcal{P} .



Pentru punctele A, B, C, D din figură, triangularea construită este o triangulare Delaunay. În schimb, triunghiul ΔABC nu poate participa la realizarea unei triangulări Delaunay, deoarece D este în interiorul cercului circumscris acestuia.

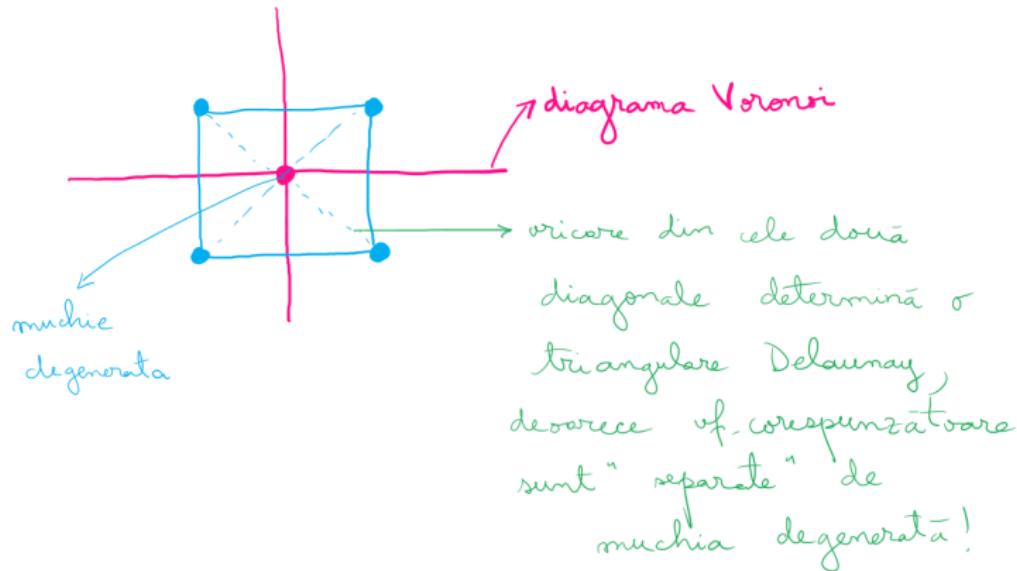
- ▶ **Teoremă.** O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.
- ▶ **Teoremă.** Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Pentru multimile în poziție generală (nu există patru puncte conciclice), orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui \mathcal{P} .
- ▶ Alte link-uri: <http://www.cs.cornell.edu/info/people/chew/Delaunay.html>
<http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/projects.pr.98/tesson/taxi/taxivoro.html>

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime - cazul unui pătrat

Întrebare: Cum “funcționează” această construcție când punctele din \mathcal{P} sunt (de exemplu) vârfurile unui pătrat?

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime - cazul unui pătrat

Întrebare: Cum "funcționează" această construcție când punctele din \mathcal{P} sunt (de exemplu) vârfurile unui pătrat?



Algoritmul lui Fortune [1987]

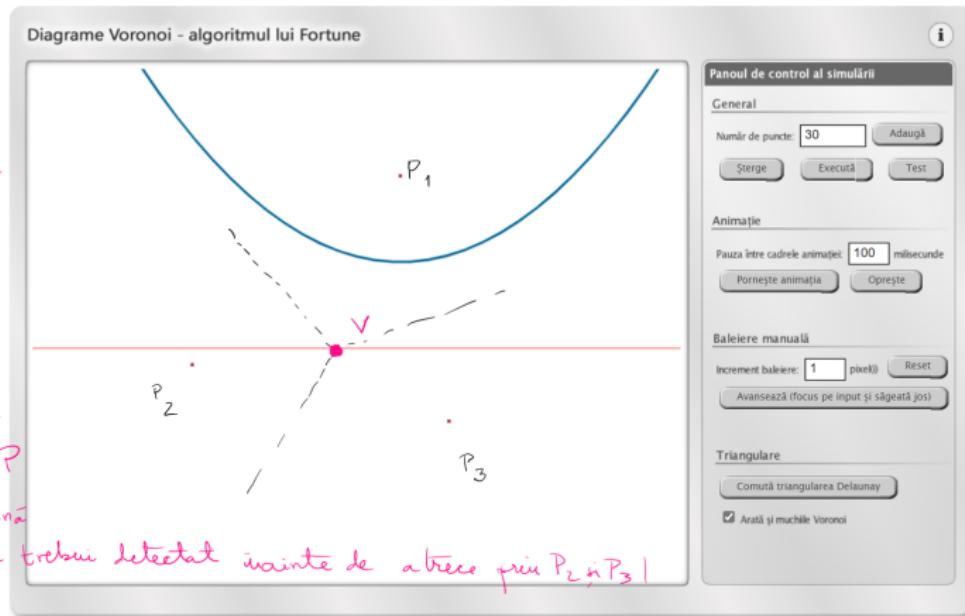
- ▶ Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 . Complexitate: $O(n \log n)$.
Detalii:
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi>.
Suport vizual disponibil.

Algoritmul lui Fortune [1987]

- ▶ Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 . Complexitate: $O(n \log n)$.
Detalii:
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi>.
Suport vizual disponibil.
- ▶ **Principiu (paradigmă):** sweep line / dreaptă de baleiere.

Adaptarea paradigmei dreptei de baleiere - problematizare

Inconvenient: la întâlnirea unui vîrf al diagramei, dreapta de baleiere nu a întâlnit încă toate siturile (punkte din \mathcal{P}) care determină acest vîrf!



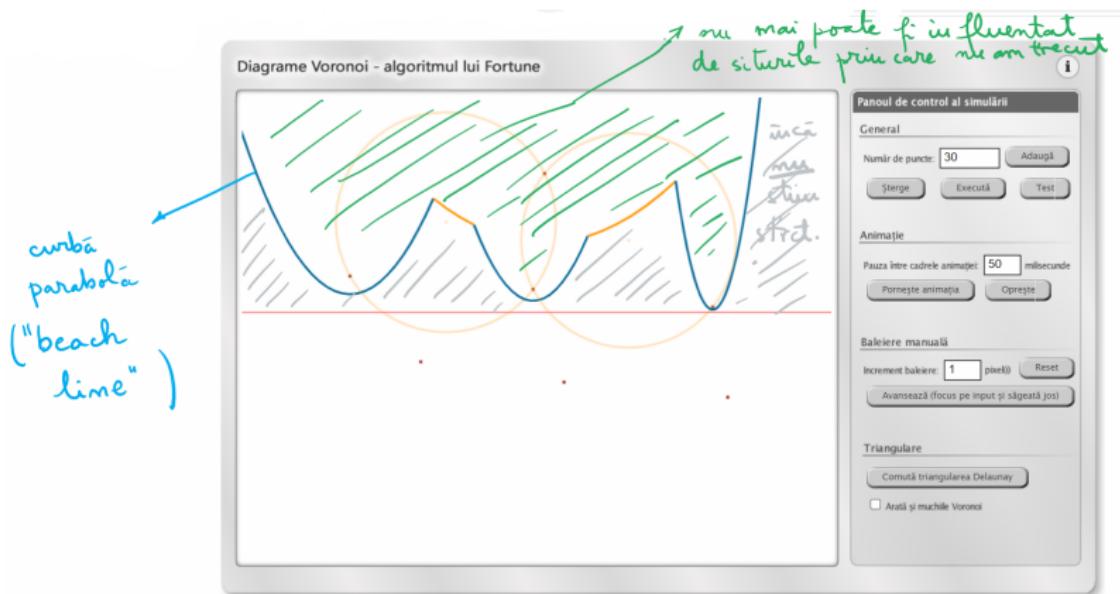
Adaptarea paradigmăi dreptei de baleiere

Adaptare: nu reținem informația legată de intersecția dintre dreapta de baleiere și diagramă, ci doar informația legată de partea diagramei care nu mai poate fi influențată de punctele situate de dincolo de dreapta de baleiere.



Adaptarea paradigmăi dreptei de baleiere - curba parabolică

Din punct de vedere practic, apare o reuniune de arce de parabolă (**curbă parabolică**), ceea ce este situat deasupra acestei curbe nu mai poate fi influențat de evenimentele nedetectate.



Despre curba parabolică (I)

- ▶ **Curba parabolică (*beach line*):**

Despre curba parabolică (I)

► Curba parabolică (*beach line*):

- Este o reuniune de arce de parabolă.
- Un punct de pe curba parabolică este egal depărtat de situl care determină arcul de parabolă și dreapta de baleiere. Presupunem că dreapta de baleiere d are ecuația $y = 0$, iar situl P_i , situat deasupra lui d (adică $y_i > 0$) are coordonatele (x_i, y_i) . Locul geometric al punctelor egal depărtate de d și P_i are ecuația

$$y = \frac{1}{2y_i}x^2 - \frac{x_i}{y_i}x + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2y_i}.$$

Despre curba parabolică (I)

► Curba parabolică (*beach line*):

- Este o reuniune de arce de parabolă.
- Un punct de pe curba parabolică este egal depărtat de situl care determină arcul de parabolă și dreapta de baleiere. Presupunem că dreapta de baleiere d are ecuația $y = 0$, iar situl P_i , situat deasupra lui d (adică $y_i > 0$) are coordonatele (x_i, y_i) . Locul geometric al punctelor egal depărtate de d și P_i are ecuația

$$y = \frac{1}{2y_i}x^2 - \frac{x_i}{y_i}x + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2y_i}.$$

- Punctele de racord ale arcelor de parabolă aparțin muchiilor diagramei Voronoi;

Despre curba parabolică (I)

► Curba parabolică (*beach line*):

- ▶ Este o reuniune de arce de parabolă.
- ▶ Un punct de pe curba parabolică este egal depărtat de situl care determină arcul de parabolă și dreapta de baleiere. Presupunem că dreapta de baleiere d are ecuația $y = 0$, iar situl P_i , situat deasupra lui d (adică $y_i > 0$) are coordonatele (x_i, y_i) . Locul geometric al punctelor egal depărtate de d și P_i are ecuația

$$y = \frac{1}{2y_i}x^2 - \frac{x_i}{y_i}x + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2y_i}.$$

- ▶ Punctele de racord ale arcelor de parabolă aparțin muchiilor diagramei Voronoi;
- ▶ Curba parabolică este x -monotonă, adică orice dreaptă verticală o intersectează *exact* într-un punct (la ce folosește această proprietate?).

Despre curba parabolică (II)

- Modificarea curbei parabolice:

Despre curba parabolică (II)

- ▶ Modificarea curbei parabolice:
 - ▶ **Site event / eveniment de tip locație.** (i) La trecerea printr-un sit apare un arc de parabolă (care “la început” este degenerat) și, reciproc, apariția unui nou arc este posibilă doar la trecerea printr-un sit. (ii) În consecință, la un moment fixat, curba parabolică are maxim $(2n - 1)$ arce.

Despre curba parabolică (II)

► Modificarea curbei parabolice:

- **Site event / eveniment de tip locație.** (i) La trecerea printr-un sit apare un arc de parabolă (care "la început" este degenerat) și, reciproc, apariția unui nou arc este posibilă doar la trecerea printr-un sit. (ii) În consecință, la un moment fixat, curba parabolică are maxim $(2n - 1)$ arce.
- **Circle event / eveniment de tip cerc.** (i) La întâlnirea punctului inferior al unui cerc care trece prin cel puțin trei situri și este tangent la dreapta de baleiere dispare un arc de parabolă și, reciproc, arcele de parabolă dispar doar la acest tip de evenimente. (ii) Un eveniment de tip cerc este dat de trei arce de parabolă consecutive de pe curba parabolică, deci trebuie testate toate tripletele consecutive de arce, pe măsură ce ele apar. (iii) Un astfel de eveniment este asociat unui vîrf al diagramei Voronoi. (iv) Există triplete de arce consecutive (muchiile ale diagramei Voronoi) pentru care muchiile nu se întâlnesc. (v) Unele evenimente de tip cerc detectate nu au loc.

Adaptarea paradigmăi dreptei de baleiere - formalizare

- ▶ **Statut:** structura curbei parabolice (succesiunea de arce de parabolă); este modificat de două tipuri de evenimente

Adaptarea paradigmăi dreptei de baleiere - formalizare

- ▶ **Statut:** structura curbei parabolice (succesiunea de arce de parabolă); este modificat de două tipuri de evenimente
- ▶ **Evenimente:**
 - ▶ site event / eveniment de tip locație: întâlnirea unui sit, adică a unui punct din mulțimea \mathcal{P} (apare un arc de parabolă)
 - ▶ circle event / eveniment de tip cerc: întâlnirea unui “punct inferior” al unui cerc care trece prin cel puțin trei situri, tangent la dreapta de baleiere (dispare un arc de parabolă) - **vârf al diagramei Voronoi**

Structuri de date utilizate

- **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlănțuită DCEL \mathcal{D}

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlăncuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente \mathcal{Q} și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - detectate pe parcursul algoritmului.

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlăncuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente \mathcal{Q} și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - detectate pe parcursul algoritmului.
- ▶ **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat \mathcal{T} .

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlăncuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente \mathcal{Q} și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - detectate pe parcursul algoritmului.
- ▶ **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat \mathcal{T} .
 - ▶ **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se inserează un arc, iar la un eveniment de tip cerc se șterge un arc;

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlăncuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente \mathcal{Q} și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - detectate pe parcursul algoritmului.
- ▶ **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat \mathcal{T} .
 - ▶ **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se inserează un arc, iar la un eveniment de tip cerc se stergă un arc;
 - ▶ **în nodurile interne:** punctele de racord ale arcelor de parabolă (memorate simbolic) - corespund muchiilor diagramei Voronoi

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlăncuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente \mathcal{Q} și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - detectate pe parcursul algoritmului.
- ▶ **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat \mathcal{T} .
 - ▶ **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se inserează un arc, iar la un eveniment de tip cerc se stergă un arc;
 - ▶ **în nodurile interne:** punctele de racord ale arcelor de parabolă (memorate simbolic) - corespund muchiilor diagramei Voronoi
 - ▶ pointeri (eventual nuli) de la frunze către evenimentele de tip cerc; de la nodurile interne către muchiile diagramei Voronoi

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlăncuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente \mathcal{Q} și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - detectate pe parcursul algoritmului.
- ▶ **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat \mathcal{T} .
 - ▶ **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se inserează un arc, iar la un eveniment de tip cerc se șterge un arc;
 - ▶ **în nodurile interne:** punctele de racord ale arcelor de parabolă (memorate simbolic) - corespund muchiilor diagramei Voronoi
 - ▶ pointeri (eventual nuli) de la frunze către evenimentele de tip cerc; de la nodurile interne către muchiile diagramei Voronoi
- ▶ **Analiză preliminară a complexității:** (i) Câte evenimente sunt în total? (ii) Care este complexitatea-timp pentru a actualiza coada de evenimente la un eveniment de tip cerc? (iii) Care este complexitatea-timp (totală) pentru a actualiza coada de evenimente? (iv) Întrebări similare pentru statut.

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** **PROCESSEVSIT**(p_i), cu $p_i = \text{ev}$

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** $\text{PROCESSEvSIT}(p_i)$, cu $p_i = \text{ev}$
6. **else** $\text{PROCESSEvCERC}(\gamma)$, cu $\gamma = \text{arc}(\text{ev}) \in \mathcal{T}$

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** **PROCESSEvSIT**(p_i), cu $p_i = \text{ev}$
6. **else** **PROCESSEvCERC**(γ), cu $\gamma = \text{arc}(\text{ev}) \in \mathcal{T}$
7. Nodurile interne încă prezente în \mathcal{T} corespund semidreptelor diagramei Voronoi.
Consideră un *bounding box* care conține toate vârfurile diagramei Voronoi în interiorul său și leagă semidreptele de acest *bounding box*, prin actualizarea corespunzătoare a lui \mathcal{D} .

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** **PROCESSEvSIT**(p_i), cu $p_i = \text{ev}$
6. **else** **PROCESSEvCERC**(γ), cu $\gamma = \text{arc}(\text{ev}) \in \mathcal{T}$
7. Nodurile interne încă prezente în \mathcal{T} corespund semidreptelor diagramei Voronoi.
Consideră un *bounding box* care conține toate vârfurile diagramei Voronoi în interiorul său și leagă semidreptele de acest *bounding box*, prin actualizarea corespunzătoare a lui \mathcal{D} .
8. Traversează muchiile pentru a adăuga celulele diagramei și pointeri corespunzători.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.
2. Caută în \mathcal{T} arcul α situat deasupra lui p_i . Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din \mathcal{Q} , atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.
2. Caută în \mathcal{T} arcul α situat deasupra lui p_i . Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din \mathcal{Q} , atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.
3. Înlocuiește frunza lui \mathcal{T} care reprezintă α cu un subarbore cu trei frunze: cea din mijloc reține situl p_i și celelalte două situl p_j asociat lui α . Memorează perechile reprezentând punctele de racord în două noduri interne. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.
2. Caută în \mathcal{T} arcul α situat deasupra lui p_i . Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din \mathcal{Q} , atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.
3. Înlocuiește frunza lui \mathcal{T} care reprezintă α cu un subarbore cu trei frunze: cea din mijloc reține situl p_i și celelalte două situl p_j asociat lui α . Memorează perechile reprezentând punctele de racord în două noduri interne. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar.
4. Generează noi înregistrări de tip semi-muchie în structura diagramei Voronoi (\mathcal{D}), pentru muchiile care separă celulele $V(p_i)$ și $V(p_j)$, corespunzând celor două noi puncte de racord.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.
2. Caută în \mathcal{T} arcul α situat deasupra lui p_i . Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din \mathcal{Q} , atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.
3. Înlocuiește frunza lui \mathcal{T} care reprezintă α cu un subarbore cu trei frunze: cea din mijloc reține situl p_i și celelalte două situl p_j asociat lui α . Memorează perechile reprezentând punctele de racord în două noduri interne. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar.
4. Generează noi înregistrări de tip semi-muchie în structura diagramei Voronoi (\mathcal{D}), pentru muchiile care separă celulele $V(p_i)$ și $V(p_j)$, corespunzând celor două noi puncte de racord.
5. Verifică tripletele de arce consecutive nou create, pentru a verifica dacă muchiile corespunzătoare punctelor de racord se întâlnesc. Dacă da, inserează evenimente de tip cerc în \mathcal{Q} și adaugă pointeri de la nodurile lui \mathcal{T} la evenimentele corespunzătoare din \mathcal{Q} .

Procedura PROCESSEvCERC (γ)

1. Șterge frunza $\gamma \in \mathcal{T}$ care corespunde arcului de cerc α care dispare. Actualizează în nodurile interne perechile care corespund punctelor de racord. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar. Șterge toate evenimentele de tip cerc care îi corespund lui α (cu ajutorul pointerilor de la predecesorul și succesorul lui γ în \mathcal{T}).

Procedura PROCESSEVERCC(γ)

1. Șterge frunza $\gamma \in \mathcal{T}$ care corespunde arcului de cerc α care dispare. Actualizează în nodurile interne perechile care corespund punctelor de racord. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar. Șterge toate evenimentele de tip cerc care îi corespund lui α (cu ajutorul pointerilor de la predecesorul și succesorul lui γ în \mathcal{T}).
2. Adaugă centrul cercului care determină evenimentul ca înregistrare de tip vârf în \mathcal{D} . Creează înregistrări de tip semi-muchie corespunzând noului punct de racord de pe linia parabolică și asignează pointeri corespunzători.

Procedura PROCESSEVERCC(γ)

1. Șterge frunza $\gamma \in \mathcal{T}$ care corespunde arcului de cerc α care dispare. Actualizează în nodurile interne perechile care corespund punctelor de racord. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar. Șterge toate evenimentele de tip cerc care îi corespund lui α (cu ajutorul pointerilor de la predecesorul și succesorul lui γ în \mathcal{T}).
2. Adaugă centrul cercului care determină evenimentul ca înregistrare de tip vârf în \mathcal{D} . Creează înregistrări de tip semi-muchie corespunzând noului punct de racord de pe linia parabolică și asignează pointeri corespunzători.
3. Verifică tripletele de arce consecutive nou create (care au foștii vecini ai lui α în centru), pentru a verifica dacă muchiile corespunzătoare punctelor de racord se întâlnesc. Dacă da, inserează evenimente de tip cerc în \mathcal{Q} și adaugă pointeri de la nodurile lui \mathcal{T} la evenimentele corespunzătoare din \mathcal{Q} .

Rezultate principale

- ▶ **Teoremă.** *Diagrama Voronoi a unei mulțimi de n situri poate fi determinată cu un algoritm bazat pe paradigma dreptei de baleiere având complexitate-temp $O(n \log n)$ și complexitate-spațiu $O(n)$.*

Rezultate principale

- ▶ **Teoremă.** *Diagrama Voronoi a unei mulțimi de n situri poate fi determinată cu un algoritm bazat pe paradigma dreptei de baleiere având complexitate-timp $O(n \log n)$ și complexitate-spațiu $O(n)$.*
- ▶ **Teoremă.** *Triangularea Delaunay a unei mulțimi de n situri poate fi determinată cu un algoritm bazat pe paradigma dreptei de baleiere având complexitate-timp $O(n \log n)$ și complexitate-spațiu $O(n)$.*

Scurt rezumat

- ▶ Conceptul de diagrama Voronoi. Aspecte cantitative legate de numărul de vârfuri/muchii/muchii de tip semidreaptă (și la seminar).

Scurt rezumat

- ▶ Conceptul de diagrama Voronoi. Aspecte cantitative legate de numărul de vârfuri/muchii/muchii de tip semidreaptă (și la seminar).
- ▶ Legătura cu triangulările unghiular optime.

Scurt rezumat

- ▶ Conceptul de diagrama Voronoi. Aspecte cantitative legate de numărul de vârfuri/muchii/muchii de tip semidreaptă (și la seminar).
- ▶ Legătura cu triangulările unghiular optime.
- ▶ Algoritmul lui Fortune.