

# REȚELE BAYESIENE

- Ideea: În lumea reală majoritatea evenimentelor sunt independente de celelalte, astfel încât interacțiunile dintre ele nu trebuie luate în considerație. În schimb, se poate folosi o reprezentare locală având rolul de a descrie grupuri de evenimente care interacționează (dependenta locala intre variabile).
- Relațiile de independentă condiționată dintre variabile pot reduce substanțial numărul probabilităților condiționate care trebuie specificate.
- Structura de date folosită cel mai frecvent pentru a reprezenta dependența dintre variabile și pentru a da o specificație concisă a repartiției de probabilitate multidimensionale este rețeaua Bayesiană.

- Retelele Bayesiene sunt un tip de model grafic probabilist care utilizeaza inferenta Bayesiană pentru calculul probabilitatilor.
- Retelele Bayesiene isi propun sa modeleze dependenta conditionata si, prin urmare, cauzalitatea, prin reprezentarea dependentei conditionate sub forma muchiilor dintr-un graf directionat. Prin aceste relatii, se poate efectua inferenta asupra variabilelor aleatoare din graf.
- Reteaua Bayesiană constituie un graf directionat aciclic in care fiecare muchie corespunde unei dependente conditionate si fiecare nod corespunde unei variabile aleatoare unice.
- Pentru retelele Bayesiene s-au creat algoritmi performanti care efectueaza
  - ✓ Inferentasau
  - ✓ Invatarein retea Bayesiană.
- Vom studia un algoritm de inferenta in retele Bayesiene.

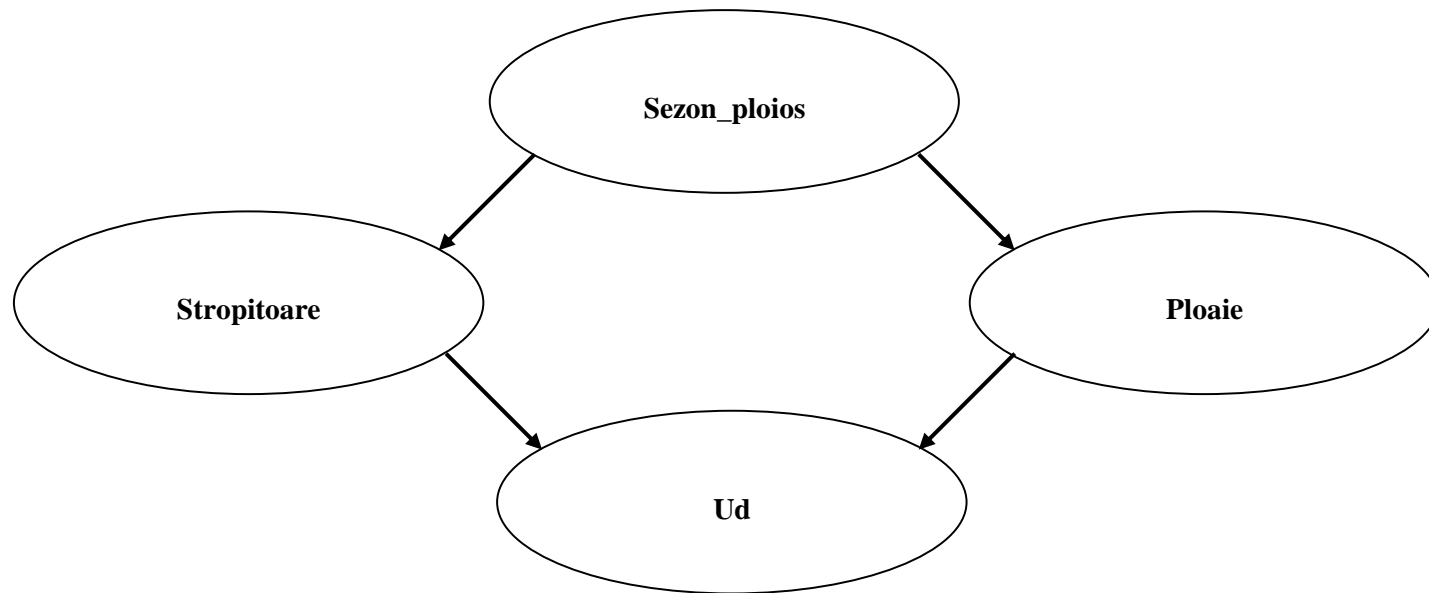
## Definiția 1

O rețea Bayesiană este un graf cu următoarele proprietăți:

- (1) Graful este direcționat și aciclic.
- (2) O mulțime de variabile aleatoare constituie nodurile rețelei.
- (3) O mulțime de arce direcționate conectează perechi de noduri. În mod intuitiv, semnificația unui arc direcționat de la nodul  $X$  la nodul  $Y$  este aceea că  $X$  are o influență directă asupra lui  $Y$ .
- (4) Fiecărui nod îi corespunde un tabel de probabilități condiționate care cuantifică efectele pe care părinții le au asupra nodului respectiv. (Părinții unui nod sunt toate acele noduri din care pleacă arce direcționate înspre acesta).

- Un expert în domeniu decide relațiile directe de dependență condiționată care sunt valabile în domeniu.
- După stabilirea topologiei rețelei Bayesiene, nu mai este necesară decât specificarea probabilităților condiționate ale acelor noduri care participă în dependențe directe. Acestea vor fi folosite în calculul oricăror alte probabilități.
- Concret: se construiește un graf direcționat aciclic care reprezintă relațiile de cauzalitate dintre variabile. Variabilele dintr-un astfel de graf pot fi propoziționale (caz în care pot lua valorile TRUE sau FALSE) sau pot fi variabile care primesc valori de un alt tip (spre exemplu o temperatură a corpului sau măsurători făcute de către un dispozitiv de diagnosticare).

- Pentru a putea folosi graful cauzalității (rețea) ca bază a unui raționament de tip probabilist sunt necesare însă mai multe informații.
- În particular, este necesar să cunoaștem, pentru o valoare a unui nod părinte, ce dovezi sunt furnizate referitor la valorile pe care le poate lua nodul fiu.



**Probabilitățile condiționate corespunzătoare pot fi date sub forma unui tabel de tipul:**

Atribut	Probabilitate
$p(\text{Ud} \text{Stropitoare}, \text{Ploaie})$	0.95
$p(\text{Ud} \text{Stropitoare}, \neg \text{Ploaie})$	0.9
$p(\text{Ud} \neg \text{Stropitoare}, \text{Ploaie})$	0.8
$p(\text{Ud} \neg \text{Stropitoare}, \neg \text{Ploaie})$	0.1
$p(\text{Stropitoare} \text{Sezon ploios})$	0.0
$p(\text{Stropitoare} \neg \text{Sezon ploios})$	1.0
$p(\text{Ploaie} \text{Sezon ploios})$	0.9
$p(\text{Ploaie} \neg \text{Sezon ploios})$	0.1
$p(\text{Sezon ploios})$	0.5

## **Exemple:**

- **probabilitatea a priori de a avea un sezon ploios este 0.5**
- **dacă suntem în timpul unui sezon ploios, probabilitatea de a avea ploaie într-o noapte dată este 0.9**

- Pentru a putea folosi o asemenea reprezentare în rezolvarea problemelor este necesar un mecanism de calcul al influenței oricărui nod arbitrar asupra oricărui alt nod.
- Pentru a obține acest mecanism de calcul este necesar ca:
  - graful inițial să fie convertit la un graf nedirecționat, în care arcele să poată fi folosite pentru a se transmite probabilități în oricare dintre direcții, în funcție de locul din care provin dovezile;
  - să existe un mecanism de folosire a grafului care să garanteze transmiterea corectă a probabilităților (exemplu: iarba udă să nu constituie o dovadă a ploii, care să fie considerată apoi o dovadă a existenței ierbii ude).



- Există trei mari clase de algoritmi care efectuează aceste calcule.
- Ideea care stă la baza tuturor acestor metode este aceea că nodurile au domenii limitate de influență.
- Metoda cea mai folosită este probabil cea a transmiterii mesajelor [Pearl, 1988], abordare care se bazează pe observația că, pentru a calcula probabilitatea unui nod  $A$  condiționat de ceea ce se știe despre celelalte noduri din rețea, este necesară cunoașterea a trei tipuri de informații:
  - suportul total care sosește în  $A$  de la nodurile sale părinte (reprezentând cauzele sale);
  - suportul total care sosește în  $A$  de la fiii acestuia (reprezentând simptomele sale);
  - intrarea în matricea fixată de probabilități condiționate care face legătura dintre nodul  $A$  și cauzele sale.

## Relații de independență condiționată în rețele Bayesiene

- O rețea Bayesiană exprimă independența condiționată a unui nod și a predecesorilor săi, fiind dați părinții acestuia și folosește această independență pentru a proiecta o metodă de construcție a rețelelor.
- Pentru a stabili algoritmi de inferență trebuie însă să știm dacă se verifică independențe condiționate mai generale, adică:
  - ✓ Fiind dată o rețea, dorim să putem ”citi” dacă o mulțime de noduri  $X$  este independentă de o altă mulțime  $Y$  fiind dată o mulțime de ”noduri dovezi”  $E$ .
- Metoda de stabilire a acestui fapt se bazează pe noțiunea de separare dependentă de direcție sau  $d$ -separare.

## **Definiția 2**

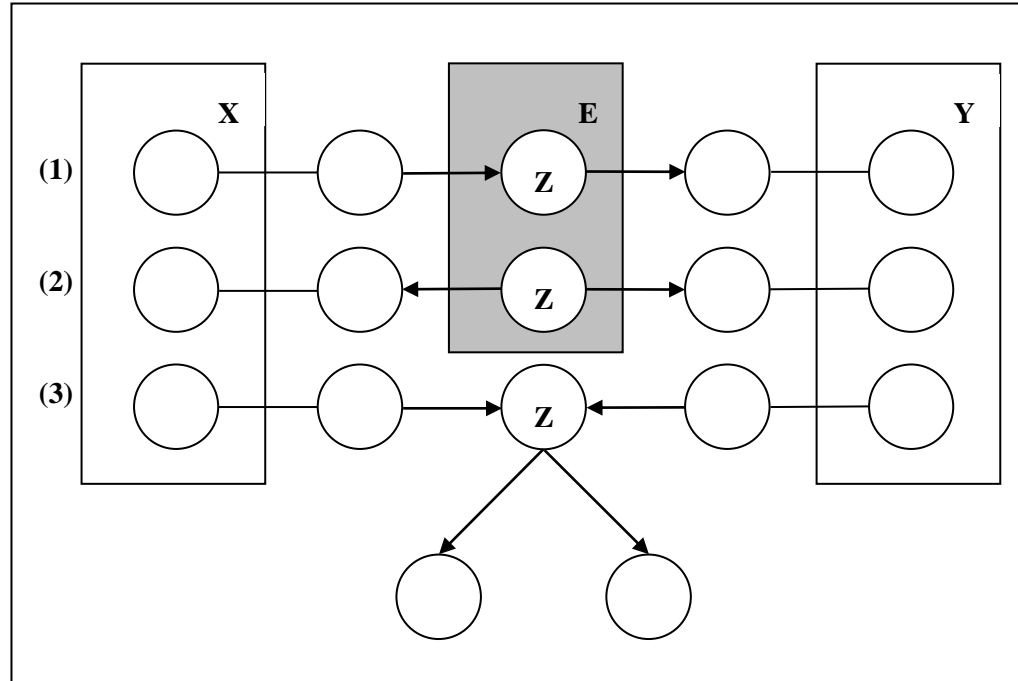
O mulțime de noduri  $E$  *d-separă* două mulțimi de noduri  $X$  și  $Y$  dacă orice drum nedirecționat de la un nod din  $X$  la un nod din  $Y$  este *blocat* condiționat de  $E$ .

### Definiția 3

Fiind dată o mulțime de noduri  $E$ , spunem că un drum este blocat condiționat de  $E$  dacă există un nod  $Z$  aparținând drumului, pentru care una dintre următoarele trei condiții se verifică:

- (1)  $Z$  aparține lui  $E$  și  $Z$  are o săgeată a drumului intrând în  $E$  și o săgeată a drumului ieșind din  $E$ .
- (2)  $Z$  aparține lui  $E$  și  $Z$  are ambele săgeți ale drumului ieșind din  $E$ .
- (3) Nici  $Z$  și nici vreunul dintre descendenții săi nu aparțin lui  $E$ , iar ambele săgeți ale drumului țințesc înspre  $Z$ .

Figura următoare ilustrează cele trei cazuri posibile:



- S-a demonstrat că (teorema fundamentală a rețelelor Bayesiene, demonstrată de Verma și Pearl):
  - ✓ *dacă orice drum nedirecționat de la un nod din  $X$  la un nod din  $Y$  este d-separat de  $E$ , atunci  $X$  și  $Y$  sunt independente condiționat de  $E$ .*
- Procesul construirii și folosirii rețelelor Bayesiene nu utilizează d-separarea.
- Noțiunea de d-separare este fundamentală în construcția algoritmilor de inferență.

## Inferența în rețele Bayesiene

- Sarcina principală a oricărui sistem probabilist de inferență este aceea de a calcula probabilități a posteriori de tipul
$$P(\text{Interogare}|\text{Dovezi})$$
corespunzător unei mulțimi de variabile de interogare condiționat de valori exacte ale unor variabile dovezi.
  - ✓ Exemplu: În exemplul considerat, *Ud* este o variabilă de interogare, iar *Stropitoare* și *Sezon\_ploios* ar putea fi variabile dovezi.
- Rețelele Bayesiene sunt suficient de flexibile pentru ca orice nod să poată servi fie ca o variabilă de interogare, fie ca o variabilă dovadă.
- Un agent primește valori ale variabilelor dovezi de la senzorii săi (sau în urma altor raționamente) și întreabă despre posibilele valori ale altor variabile astfel încât să poată decide ce acțiune trebuie întreprinsă.

- **Sarcina cea mai frecventă și mai utilă a rețelelor Bayesiene:**
  - ✓ **determinarea probabilităților condiționate a posteriori ale variabilelor de interogare.**

**Literatura de specialitate discută patru tipuri distincte de inferență, care poate fi realizată de rețelele Bayesiene:**

- inferență de tip diagnostic (de la efecte la cauze);
- inferență cauzală (de la cauze la efecte);
- inferență intercauzală (între cauze ale unui efect comun);
- inferențe mixte (reprezentând combinații a două sau mai multe dintre inferențele anterioare).

**Exemplu:** Setând efectul *Stropitoare* la valoarea "adevărat" și cauza *Sezon\_ploios* la valoarea "fals", ne propunem să calculăm

$$P(Ud|Stropitoare, \neg Sezon\_ploios).$$

**Aceasta este o inferență mixtă, care reprezintă o utilizare simultană a inferenței de tip diagnostic și a celei cauzale.**



## Un algoritm pentru răspunsul la interogări

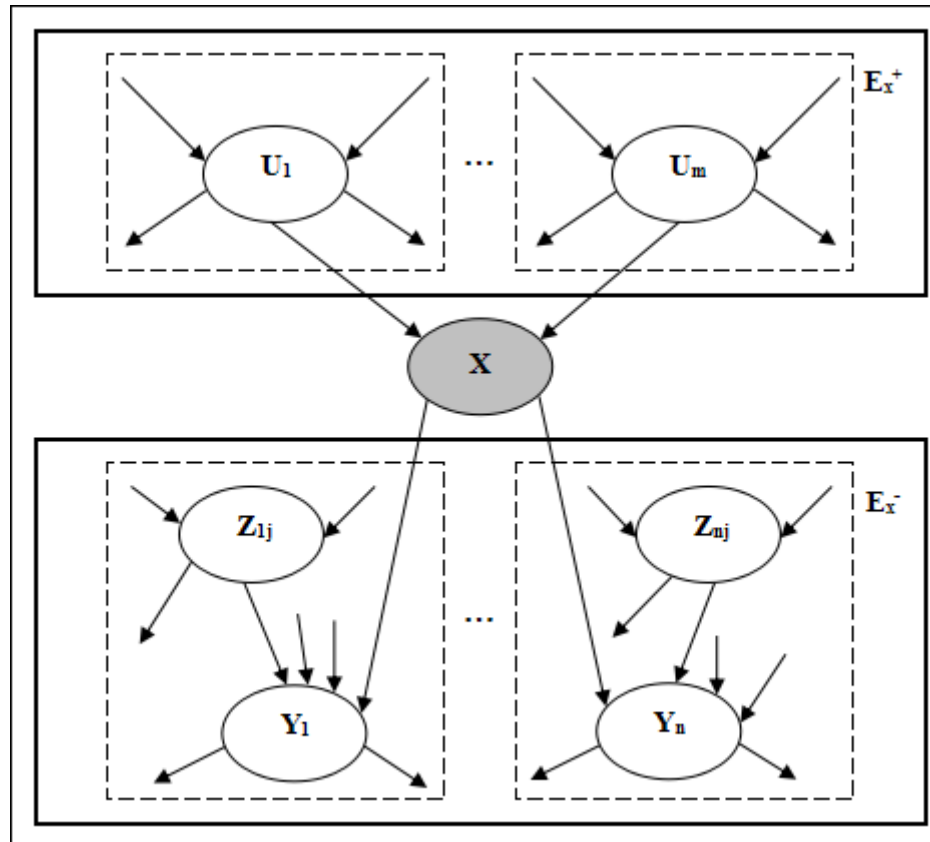
(algoritm de calcul al probabilităților condiționate a posteriori ale variabilelor de interogare)

- Algoritmul va fi de tip înlănțuire înapoi prin faptul că pleacă de la variabila de interogare și urmează drumurile de la acel nod până la nodurile dovezi.
- Algoritmul se referă numai la rețele unic conectate, numite și poli-arbori.  
(In poli-arbori există cel mult un drum nedirecționat între oricare două noduri ale rețelei).
- Algoritmii pentru rețele generale vor folosi algoritmii referitori la poli-arbori ca principală subrutină.

- **Figura care urmează prezintă o rețea generică unic conectată.**
- **În această rețea nodul  $X$  are părinții  $U = U_1 \dots U_m$  și fiii  $Y = Y_1 \dots Y_n$ . Corespunzător fiecărui fiu și fiecărui părinte a fost desenat un dreptunghi care include toți descendenții nodului și toți strămoșii lui (cu excepția lui  $X$ ).**
- **Proprietatea de unică conectare înseamnă că toate dreptunghiurile sunt disjuncte și că nu există legături care să le conecteze între ele.**
- **Se presupune că  $X$  este variabila de interogare și că există o mulțime  $E$  de variabile dovezi.**
- **Se urmărește calcularea probabilității condiționate**  

$$P(X | E)$$
- **Dacă însuși  $X$  este o variabilă dovadă din  $E$ , atunci calcularea lui  $P(X | E)$  este banală. Presupunem că  $X$  nu aparține lui  $E$ .**

- Rețeaua din figură este **partiționată în conformitate cu părinții și cu fiii variabilei de interogare  $X$ .**
- Pentru a concepe un algoritm, va fi util să ne putem referi la diferite **porțiuni ale dovezilor**:
  - $E^+_X$  reprezintă **suportul cauzal** pentru  $X$  - variabilele dovezi aflate “deasupra” lui  $X$ , care sunt conectate la  $X$  prin intermediul părinților săi.
  - $E^-_X$  reprezintă **suportul probatoriu** pentru  $X$  - variabilele dovezi aflate “dedesubtul” lui  $X$  și care sunt conectate la  $X$  prin intermediul fiilor săi.



**Fie rețeaua generică unic conectată din figura anterioară, partiționată în conformitate cu părinții și cu fiii variabilei de interogare  $X$ . Nodul  $X$  are părinții  $U = U_1 \dots U_m$  și fiii  $Y = Y_1 \dots Y_n$ . Presupunem ca există o mulțime  $E$  de variabile dovezi,  $E = \{E^-_X, E^+_X\} = \{U_1, \dots, U_m, Y_1, \dots, Y_n\}$ , mulțime de variabile aleatoare discrete, unde:**

- $E^+_X$  reprezintă suportul cauzal pentru  $X$  - variabilele dovezi aflate "deasupra" lui  $X$ , care sunt conectate la  $X$  prin intermediul părinților săi.**
- $E^-_X$  reprezintă suportul probatoriu pentru  $X$  - variabilele dovezi aflate "dedesubtul" lui  $X$  și care sunt conectate la  $X$  prin intermediul fiilor săi.**

**Se urmărește calcularea probabilității condiționate  $P(X | E)$ .**

**Strategia generală pentru calculul lui  $P(X | E)$  este următoarea:**

- **Exprimă  $P(X | E)$  în termenii contribuțiilor lui  $E^+_X$  și  $E^-_X$ .**
- **Calculează contribuția mulțimii  $E^+_X$  calculând efectul ei asupra părinților lui  $X$  și apoi transmițând acest efect lui  $X$ .**
- **Calculează contribuția mulțimii  $E^-_X$  calculând efectul ei asupra fiilor lui  $X$  și apoi transmițând acest efect lui  $X$ .**

**Exprimarea lui  $P(X | E)$  în termenii contribuțiilor lui  $E^+_X$  și  $E^-_X$  este următoarea:**

$$P(X | E) = \alpha P(X | E^+_X) P(E^-_X | X) \quad (1)$$

**În urma efectuării calculelor, se obține contribuția mulțimii  $E^+_X$  ca fiind dată de**

$$P(X | E^+_X) = \sum_{(u_1, \dots, u_m)} P(X | \{U_1 = u_1, \dots, U_m = u_m\}) \prod_{i=1}^m P(\{U_i = u_i\} | E_{U_i \setminus X}) \quad (2)$$

**și, introducând (2) în (1), avem:**

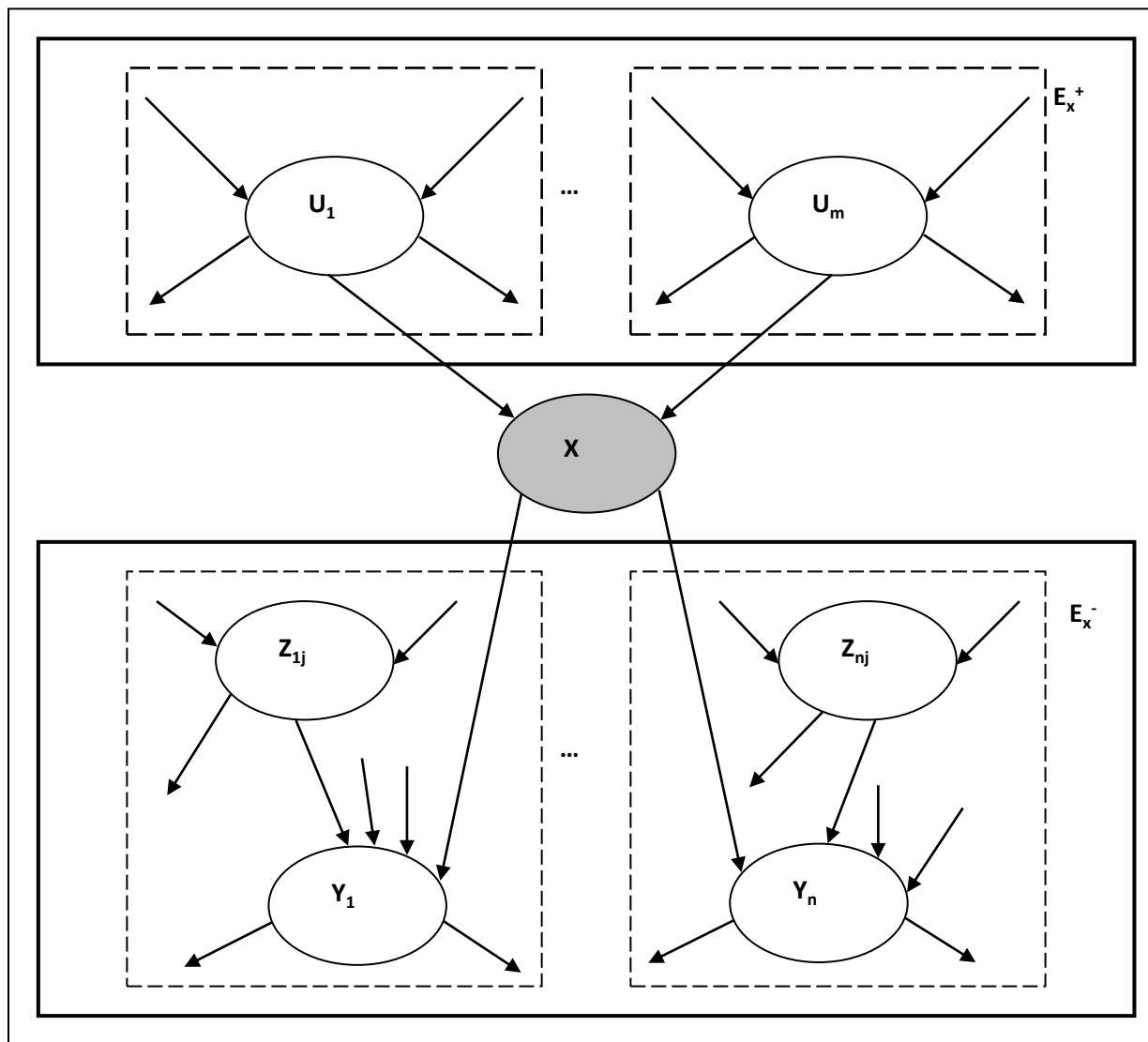
$$P(X | E) = \alpha P(E^-_X | X) \sum_{\mathbf{u}} P(X | \mathbf{u}) \prod_{i=1}^m P(\{U_i = u_i\} | E_{U_i \setminus X})$$

**Contribuția mulțimii  $E^-_X$  se obține ca fiind:**

$$P(E^-_X|X) = \beta \prod_i \sum_{y_i} P(E^-_{Y_i}|y_i) \sum_{z_i} P(y_i|X, z_i) \prod_j P(z_{ij}|E_{Z_{ij}\setminus Y_i})$$

**Menționăm că:**

- **Notația  $E_{U_i\setminus X}$  este folosită pentru a se face referire la toate dovezile conectate cu nodul  $U_i$ , mai puțin cele prin drumul de la  $X$ ;**
- **$U$  este vectorul părinților  $U_1 \dots U_m$  și  $u$  reprezintă o atribuire de valori pentru aceștia;**
- **$Y$  este vectorul fiilor  $Y_1, \dots, Y_n$  și fie  $y = (y_1, \dots, y_n)$  o realizare a acestuia;**
- **$Z_i$  sunt părinții lui  $Y_i$ , alții decât  $X$  și fie  $z_i$  o atribuire de valori ale acestor părinți (vezi figura următoare).**





**Folosind aceste notații, scriem, în pseudocod, algoritmul pentru răspunsul la interogări care calculează probabilitatea condiționată a posteriori a variabilei de interogare  $X$ , adică  $P(X | E)$ .**

## Algoritmul

**function** INTEROGARE-REȚEA ( $X$ ) **return**

o distribuție de probabilitate a valorilor lui  $X$

**input:**  $X$ , o variabilă aleatoare

SUPPORT-EXCEPT ( $X$ , nul)

**function** SUPPORT-EXCEPT ( $X, V$ ) **return**  $P(X|E_{X \setminus V})$

**if** DOVEZI ? ( $X$ ) **then return** distribuția observată pentru  $X$

**else**

calculează  $P(E_{X \setminus V}^- | X) = \text{DOVEZI-EXCEPT}(X, V)$

$U \leftarrow \text{PĂRINȚI}[X]$

**if**  $U$  este vid

**then return**  $\alpha P(E_{X \setminus V}^- | X) P(X)$

**else**

**pentru fiecare**  $U_i$  **in**  $U$  **do**

calculează și memorează  $P(U_i | E_{U_i \setminus X}) =$   
 $= \text{SUPPORT-EXCEPT}(U_i, X)$

**return**  $\alpha P(E_{X \setminus V}^- | X) \sum_{\mathbf{u}} P(X | \mathbf{u}) \prod_i P(U_i | E_{U_i \setminus X})$

**function** DOVEZI-EXCEPT ( $X, V$ ) **return**  $P(E_{X \setminus V}^- | X)$

$Y \leftarrow \text{FII}[X] - V$

**if**  $Y$  este vid

**then return** o repartiție uniformă

**else**

**pentru fiecare**  $Y_i$  **in**  $Y$  **do**

calculează  $P(E_{Y_i}^- | y_i) = \text{DOVEZI-EXCEPT}(Y_i, \text{nul})$

$Z_i \leftarrow \text{PĂRINȚI}[Y_i] - X$

**pentru fiecare**  $Z_{ij}$  **in**  $Z_i$

calculează  $P(Z_{ij} | E_{Z_{ij} \setminus Y_i}) =$   
 $= \text{SUPPORT-EXCEPT}(Z_{ij}, Y_i)$

**return**  $\beta \prod_i \sum_{y_i} P(E_{Y_i}^- | y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} P(y_i | X, \mathbf{z}_i) \prod_j P(z_{ij} | E_{Z_{ij} \setminus Y_i})$