Контрольная работа №2: Задачи выпуклого программирования

Цель работы --- научиться проверять оптимальность заданного план в задаче выпуклого программирования, используя теорему Куна-Таккера, а также критерии оптимальности в прямой и двойственной формах.

Данная работа состоит из двух частей и для ее выполнения необходимо осуществить следующее.

I) Ознакомиться с теоремой Куна-Таккера и научиться применять эту теорему для проверки оптимальности планов в задачах выпуклого программирования небольшой размерности. Для одного конкретного примера нужно подробно описать, как осуществяется такая проверка.

Теоретический материал и иллюстративные примеры см. в теме (модуле)№3. Задачи для самостоятельного решения для первой части работы приведены ниже. Номер задачи, которрую надо рассмотреть, необходимо уточнить у преподавателя.

II) Используя условия оптимальности в прямой или двойственной форме, написать программу, позволяющую проверить любой допустимый план x^* задачи

$$f(x) \to \min,\ \ g_i(x) \le 0,\ \ i = 1,\ldots,m,\ x \ge 0, \qquad \textbf{(1.1)}$$

где $f(x),\ \ g_i(x) \le 0,\ \ i = 1,\ldots,m,$ - заданные достаточно гладкие функции, $x \in \mathbb{R}^n$,

на оптимальность и в случае его неоптимальности построить другой план вида $\overline{x}^* = x^* + \Delta x$ с лучшим значением целевой функции.

Предполагается, что ограничения задачи удовлетворяют условию Слейтера, т.е. существует такой вектор $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, что $\overline{x} \ge 0,\ \ g_i(\overline{x}) < 0, i = 1,\ldots,m$.

Проиллюстрировать работу программы на примерах из заданий для второй части работы, которые приводены ниже. Номер задания надо уточнить у преподавателя.

Теоретический материал и иллюстративные примеры приведены в разделах темы (модуля) №3.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ПЕРВОЙ ЧАСТИ РАБОТЫ

Задача 1. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана x^0 = *(3, 9)* в задаче

$$f(x) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 \to min$$

при ограничениях

$$x_1^2 + (x_2 - 9)^2 \leq 9$$

Задача 2. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана x^0 = *(0,1,0)* в задаче

$$f(x) = 3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \to min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \leq 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Задача 3. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана x^0 = *(3;4)* в задаче

$$f(x) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 5)^2 \to min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &x_1^2 - 2x_2 - 1 \leq 0, \\ &-x_1 + x_2 \leq 1, \\ &x_1 - x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Задача 4. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана x^0 = *(0.5;1)* в задаче

$$f(x) = x_1^1 + x_2^2 - 3x_3 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &-2x_1 + x_2^2 \leq 0, \\ &x_1 - 2x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Задача 5. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана x^0 = *(1;1;1)* в задаче

$$f(x) = 8(x_1 - x_2)^2 + x_3^2 - 4x_1 \to \min$$

при ограничениях

$$(x_1 - x_3)^2 + x_2 \geq 1,$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4.$$

Задача 6. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана $x^0 = (-1;0;1)$ в задаче

$$f(x) = (x_1 + x_2)^2 + (2x_2 - x_3)^2 \to \min$$

при ограничениях

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + x_3^2 \leq 11,$$
$$x_1^2 - 4x_1 + 2x_1x_2 + 3x_3^2 - x_3 \geq 7.$$

Задача 7. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана $x^0 = (1;1;1)$ в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 16x_2^3 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3 \to \min$$

при ограничениях

$$x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 4,$$
$$x_1^2 - 2x_1x_3 + 4x_3^2 \leq 3.$$

Задача 8. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана $x^0 = (1;2;-1)$ в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1 + 2x_2 - x_3) \to \min$$

при ограничениях

$$(x_1 - x_3)^2 - x_2 \geq 2,$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 3.$$

Задача 9. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана $x^0 = (1;-2;1)$ в задаче

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1 - 2x_2 + x_3) \to \min$$

при ограничениях

$$(x_1 - x_2)^2 - x_3 \geq 8,$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 6.$$

Задача 10. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана $x^0 = (1;1;2)$ в задаче

$$f(x) = \sqrt{x_1 + 4x^2 + x_3^2} \to \min$$

при ограничениях

$$(x_1 - x_3)^2 - x_2 \geq 0,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ВТОРОЙ ЧАСТИ РАБОТЫ

Задание 1.

Рассмотрим задачу (1.1), в которой $n = 8,\ m = 5$ и функции $f(x),\ g_i(x) \leq 0,\ \ i = 1, ..., 5,$ имеют вид

$$f(x) = 0.5x'B(0)'B(0)x + c(0)'x,$$
$$g_i(x) := 0.5x'B(i)'B(i)x + c(i)'x + \alpha(i), \mathrm{i} = 1, ..., 5,\ \ x \in \mathbb{R}^8,$$

со следующими значениями данных

$$B(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B(1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 & -1.0 & 0.5 & 0 & -2.0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 2.5 & 4.0 \end{pmatrix},$$

$$B(2)=\begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 & -1.5 & 3.0 & -2.5 & 0 & -1.0 & -0.5 \\ -1.5 & -0.5 & -1.0 & -2.5 & 3.5 & -3.0 & -1.5 & -0.5 \\ 1.5 & 2.5 & -1.0 & 1.0 & 2.5 & 1.5 & 3.0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(3)=\begin{pmatrix} 0.75 & 0.50 & 1.00 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.75 \\ -1.00 & 1.00 & 4.00 & 0.75 & -0.75 & 0.50 & 8.00 & -0.75 \\ 0.50 & -0.25 & 0.50 & 0.75 & 0.50 & 1.25 & -0.75 & -0.25 \end{pmatrix},$$

$$B(4)=\begin{pmatrix} 2.5 & -1.5 & -1.5 & 2.0 & 1.5 & 0 & 0.5 & -1.5 \\ -0.5 & -2.5 & -0.5 & -6.0 & -2.5 & 4.5 & 1.0 & 1.0 \\ -2.5 & 1.0 & -2.0 & -1.5 & -2.5 & 0.5 & 8.5 & -2.5 \end{pmatrix},$$

$$B(5)=\begin{pmatrix} 1.00 & 0.25 & -0.50 & 0 & 1.25 & -0.50 & 0.25 & -0.75 \\ -1.00 & -0.75 & -0.75 & 0.50 & -0.25 & -1.25 & 0.25 & -0.50 \\ 0 & 0.75 & 0.50 & -0.50 & -1.00 & 1.00 & -1.00 & 1.00 \end{pmatrix},$$

c(0) =(-2 -4 -1 -1 -2 0 -3 -3),
c(1)=(60 0 80 0 0 0 40 0),
c(2)=(2 0 3 2 2 0 3 0),
c(3) =(0 0 80 0 0 0 0 0),
c(4) =(0 -2 1 2 0 0 -2 1),
c(5)=(-4 -2 6 0 4 -2 60 2).

$\alpha(1)$= -84.2500 , $\alpha(2)$= -158.7500, $\alpha(3)$= -126.5625,
$\alpha(4)$= -117.6250, $\alpha(5)$= -17.8125.

Требуется проверить, является ли план

$$x^* = (0 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0)$$

оптимальным в этой задаче.

В случае его неоптимальности построить новый план с лучшим значением целевой функции.

В качестве вектора $\overline{x}$, удовлетворяющего соотношениям $\overline{x} \geq 0, \quad g_i(\overline{x}) < 0, \mathrm{i} = 1, \ldots, 5,$ можно взять вектор $\overline{x} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$.

Задание 2. Выполнить задание 1 при условии что теперь вектор c(0) имеет вид

$$c(0) = (-38.1250 \ \ -163.5000 \ \ -333.2500 \ \ -155.3750 \ \ -24.0625 \ \ -146.6250 \ \ -287.9375 \ \ -126.5625).$$

Задание 3. Выполнить задание 1 при условии что теперь вектор c(0) имеет вид

$$c(0) = (2, \ 4, \ -3, \ -5, \ 6, \ -2, \ 4, \ -3)$$

Задание 4. Выполнить задание 1 при условии что теперь матрица B(0) имеет вид

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Выполнить задание 1 при условии что теперь вектор c(0) и матрица B(0) имеют вид

$$c(0) = (-2, \ 1, \ -3, \ -7, \ 3, \ -1, \ 8, \ -3),$$

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Выполнить задание 1 при условии что теперь вектор c(0) и матрица B(0) имеют вид

$$c(0) = (-7,\ 1,\ -3,\ -2,\ 3,\ 10,\ 1,\ -3),$$

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 8 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 5 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$