3.4. Критерий оптимальности базисного потока

Пусть *x* — базисный поток, $U_{\text{в}}$ — соответствующее базисное множество дуг, а $u_i, i \in I$ — соответствующие потенциалы (2.7) и $\Delta_{ij}, (i, j) \in U_{\text{н}}$ — соответствующие оценки (2.8) .

Теорема 15 (*Критерий оптимальности) Неравенства*

$$\Delta_{ij} \le 0, \qquad (i, j) \in U_{\text{н}} \tag{2.11}$$

достаточны, а в случае невырожденности необходимы для оптимальности базисного потока x.

Доказательство. Достаточность. Поскольку по построению $x_{ij} \equiv 0, j \in U_{\text{н}}; \overline{x}_{ij} \ge 0, (i, j) \in U_{\text{н}}$, то

$$\Delta x_{ij} = \overline{x}_{ij} - x_{ij} \ge 0, \quad (i, j) \in U_{\text{н}} \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.11), (2.12) в (2.10) следует, что

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} \ge 0.$$

Отсюда с учетом (2.6) получаем неравенство

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} \overline{x}_{ij} \ge \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij}$$

справедливое для любого допустимого потока $\overline{x}$. Следовательно, x — оптимальный поток.

Необходимость. Пусть x — оптимальный невырожденный базисный поток, т.е.

$$x_{ij} > 0, \qquad (i, j) \in U_{\text{в}} \tag{2.13}$$

Предположим, что соотношения (2.11) нарушаются, т. е. существует дуга $(i_0, j_0) \in U_{\text{н}}$ такая, что

$$\Delta_{i_0 j_0} > 0 \tag{2.14}$$

Построим специальное приращение потока $\Delta x = (\Delta x_{ij}, (i, j) \in U)$ следующим образом. Определим небазисные приращения дуговых потоков по правилу

$$\Delta x_{ij} = \begin{cases} \theta \geq 0, & \text{если } (i,j) = (i_0, j_0)\ , \\ \quad 0, & \text{если } (i,j) \neq (i_0, j_0)\ , \end{cases} \quad (i,j) \in U_{\text{н}}. \tag{2.15}$$

Остальные компоненты Δx_{ij}, $(i,j) \in U_{\text{в}}$, найдем из условий

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} \Delta x_{ji} = 0, \qquad i \in I;$$

которые с учетом (2.15) принимают вид

$$\sum_{j \in I_i^+(U_{\text{В}})} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_{\text{В}})} \Delta x_{ji} = \begin{cases} -\theta, & \text{если } i = i_0\ , \\ \quad \theta, & \text{если } i = j_0\ , \\ \quad 0, & \text{если } i \neq j_0, i_0\ , \end{cases} \qquad i \in I. \tag{2.16}$$

Найдем решение системы (2.16), которая определена на сети $S_1 = \{I, U_{\text{в}} \cup (i_0, j_0)\}$. Добавление дуги (i_0, j_0) к дереву $S_{\text{в}} = \{I, U_{\text{в}}\}$ приводит к появлению единственного цикла **(лемма 6)**, содержащего дугу (i_0, j_0). Значение дугового потока $\Delta x_{i_0 j_0}$ на дуге (i_0, j_0) задано (см. (2.15)): $\Delta x_{i_0 j_0} = \theta$. Тогда для выполнения (2.16) необходимо и достаточно, чтобы:

1. $\Delta x_{ij} = \theta$, если *(i, j)* — прямая дуга, принадлежащая циклу; $\Delta x_{ij} = -\theta$, если *(i, j)* — прямая дуга, принадлежащая циклу. В цикле направление обхода определяется дугой (i_0, j_0).
2. $\Delta x_{ij} = 0$, если $(i,j) \in U_{\text{в}}$, но *(i, j)* не принадлежит циклу.

Следовательно, мы построили (i_0, j_0) - циркуляцию со значением θ.

Наложим построенную циркуляцию на базисный поток *x*. В результате получим новый поток с дуговыми потоками:

$$\overline{x}_{i_0 j_0} = x_{i_0 j_0} + \Delta x_{i_0 j_0} = \theta \geq 0,$$
$$\overline{x}_{ij} = x_{ij}, \quad (i,j) \in U_{\text{н}} \backslash (i_0, j_0);$$

$$\overline{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{если } (i,j) \in U_{\text{В}}\ , (i,j) \notin \text{циклу}, \\ x_{ij} \pm \theta, & \text{если } (i,j) \in U_{\text{В}}\ , (i,j) \in \text{циклу}. \end{cases}$$

Из (2.13) следует, что при достаточно малых $\theta > 0$ верно неравенство: $\overline{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij} \geq 0, (i,j) \in U_{\text{в}}$. Следовательно, $\overline{x}$ поток на сети *S* при достаточно малых $\theta > 0$. Из формулы приращения получаем

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} \overline{x}_{ij} - \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} = - \sum_{(i,j) \in U_{\text{н}}} \Delta_{ij} \Delta x_{ij} = -\Delta_{i_0 j_0} \theta < 0$$

Однако это противоречит оптимальности потока x. Следовательно, неравенства (2.11) имеют место. Теорема доказана.

Таким образом, проверка критерия оптимальности сводится к следующим операциям:

• по правилам (2.7), используя множество $U_{\text{в}}$, находим потенциалы узлов $u_i, i \in I$;

• зная потенциалы узлов, находим оценки $\Delta_{ij},\ (i, j) \in U_{\text{н}}$, небазисных дуг согласно (2.8);

• проверяем неравенства (2.11).