Иллюстративные примеры к теме № 1 "Линейное программирование"

1.1. Решение задач линейного программирования симплекс-методом

ПРИМЕР 1.

Решить задачу линейного программирования вида

$$c'x \to \max,\ Ax = b,\ x \geq 0, \qquad (1.1)$$

со следующими исходными данными

$$c = (-5\ -2\ 3\ -4\ -6\ 0\ -1\ -5)', \quad b = (6\ 10\ -2\ 15) \qquad (1.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} m = 3,\ n = 8,$$

и заданным начальным базисным планом

$$x^{нач} = (4\ 0\ 0\ 6\ 2\ 0\ 0\ 5)$$

$$J_Б = \{1\ 4\ 5\ 8\} = \{j_1 = 1, j_2 = 4, j_3 = 5, j_4 = 8\}$$

Итерация 1

По заданному множеству $J_Б = \{1\ 4\ 5\ 8\}$ сформируем матрицы и вектор

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B = A_b^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad c_Б = (-5\ -4\ -6\ -5)'$$

Вычислим вектор потенциалов

$$u' = c'_Б B = (1\ 0\ 6\ -5)$$

и оценок

$$\Delta = (\Delta_j, j = 1...8) = u'A - c' = (0\ 40\ -10\ 0\ 0\ 0\ 69\ 0).$$

Для данного вектора оценок условий $\Delta_j \geq 0, j \in J_H = J \setminus J_Б$, не выполняется.

Выберем индекс $j_0 \in J_H$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$:

$$j_0 = 3 \in J_H = \{2\ 3\ 6\ 7\}$$

Построим вектор

$$z = (z_1, z_2, ..., z_m)' := BA_{j_0} = (-4\ 4\ 1\ 1)'.$$

Для данного вектора z условие $z_i \leq 0$, $i = 1, ..., m$, не выполняется, поэтому продолжаем итерацию.

Найдем шаги θ_i, $i = 1,..., 4$, по правилу

$$\theta_i = \begin{cases} x_{j_i} / z_i, & если \ \ z_i > 0, \\ \infty & если \ \ z_i \leq 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, 4; \tag{1.3}$$

Получим

$$\theta_1 = \infty, \quad \theta_2 = 1.5000, \quad \theta_3 = 2, \quad \theta_4 = 5,$$

и найдем

$$\theta_0 = \min_{i=1,2,3,4} \theta_i = 1.5 = \theta_2 .$$

Следовательно, $s = 2, j_s = j_2 = 4$.

Построим новый базисный план $\bar{x} = (\bar{x}_j, j \in J) = (\bar{x}_j, j = 1, ... ,8)$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам

$$\bar{x}_j = 0, j \in J_H \setminus j_0; \quad \bar{x}_{j_0} = \theta_0; \qquad \bar{x}_{j_i} = x_{j_i} - \theta_0 z_i; i = 1, ..., m, \tag{1.4}$$

$$\bar{J}_Б = (\bar{J}_Б \setminus j_s) \cup j_0 = \{j_1, \ldots, j_{s-1}, j_0, j_{s+1}, \ldots, j_m\}. \tag{1.5}$$

В результате получаем новый план

$$\bar{x} = (10\ 0\ 1.5\ 0.5\ 0\ 0\ 3.5)$$

и новый базис

$$\bar{J}_Б = \{1\ 3\ 5\ 8\}$$

Переходим на следующую итерацию, исходя из новых плана

$$x := \bar{x} = (10\ 0\ 1.5\ 0\ 0.5\ 0\ 0\ 3.5)$$

и базиса

$$J_Б := \bar{J}_Б = \{1\ 3\ 5\ 8\}.$$

Итерация 2

По заданному множеству $J_Б = \{1\ 3\ 5\ 8\}$ сформируем матрицы и вектор

$$A_b = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & -1.0000 & 0 \\ -0.2500 & -1.0000 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix},\ c_Б = (-5\ 3\ -6\ -5)'.$$

Вычислим вектор потенциалов

$$u' = c'_Б B = (3.5\ 0\ 6\ -5)$$

и оценок

$$\Delta = (\Delta_j, j = 1, ..., 8) = u'A - c' = (0\ 42.5\ 0\ 2.5\ 0\ -7.5\ 81.5\ 0).$$

Для данного вектора оценок условий $\Delta_j \geq 0, j \in J_Н = J \setminus J_Б$, не выполняется.

Выберем индекс $j_0 \in J_Н$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$:

$$j_0 = 6 \in J_Н = \{2\ 4\ 6\ 7\}.$$

Построим вектор

$$z = BA_{j_0} = (0\ -0.75\ -2.25\ 3.75)'.$$

Для данного вектора z условие $z_i \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, не выполняется, поэтому продолжаем итерацию.

Найдем шаги θ_i, $i = 1, \dots, 4$, по правилу (1.3)

$$\theta_1 = \infty, \quad \theta_2 = \infty, \quad \theta_3 = \infty, \quad \theta_4 = 0.9333,$$

и найдем

$$\theta_0 = \min_{i=1,2,3,4} \theta_i = 0.9333 = \theta_4$$

Следовательно, $s = 4$, $j_s = j_4 = 8$.

Построим новый базисный план $\bar{x} = (\bar{x}_j, j \in J) = (\bar{x}_j, j = 1, \ldots, 8)$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам (1.4) и (1.5). В результате получаем новый план

$$\bar{x} = (10\ 0\ 2.2\ 0\ 2.6\ 0.9333\ 0\ 0)$$

и новый базис

$$\bar{J}_Б = \{1\ 3\ 5\ 6\}$$

Переходим на следующую итерацию, исходя из новых плана

$$x := \bar{x} = (10\ 0\ 2.2\ 0\ 2.6\ 0.9333\ 0\ 0)$$

и базиса

$$J_Б := \bar{J}_Б = \{1\ 3\ 5\ 6\}.$$

Итерация 3

По заданному множеству $J_Б = \{1\ 3\ 5\ 6\}$ сформируем матрицы и вектор

$$A_b = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.2000 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \\ -0.4000 & -0.6000 & -1.0000 & 0.6000 \\ -0.0667 & -0.2667 & 0 & 0.2667 \end{pmatrix}, \quad c_Б = (-5\ 3\ -6\ 0)'.$$

Вычислим вектор потенциалов

$$u' = c'_Б B = (3\ -2\ 6\ -3)$$

и оценок

$$\Delta = (\Delta_j, j = 1, \ldots, 8) = u'A - c' = (0\ 46\ 0\ 2\ 0\ 0\ 71\ 2.000071\ 2).$$

Для данного вектора оценок выполняется условие $\Delta_j \geq 0, j \in J_H = J \setminus J_Б$

Алгоритм заканчивает работу. Оптимальный план $x^0 = x = (10\ 0\ 2.2\ 0\ 2.6\ 0.9333\ 0\ 0)$ найден.

Ответ: $x^0 = (10\ 0\ 2.2\ 0\ 2.6\ 0.9333\ 0\ 0)$ - оптимальный план.

ПРИМЕР 2

Решить задачу линейного программирования вида (1.1) со следующими исходными данными

c = (-5 -2 3 -4 -6 0 1 -5)', b = (6 10 -2 15)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и заданным начальным базисным планом

$$x^{нач} = (10\ 0\ 1.5\ 0\ 0.5\ 0\ 0\ 3.5).$$

$$J_Б = \{1\ 4\ 5\ 8\} = \{j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5, j_4 = 8\}.$$

Итерация 1

По заданному множеству $J_Б = \{1\ 3\ 5\ 8\}$ сформируем матрицы и вектор

$$A_b = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.2500 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 0 & -1.0000 & 0 \\ -0.2500 & -1.0000 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}, \quad c_Б = (-5\ 3\ -6\ -5)'.$$

Вычислим вектор потенциалов

$$u' = c'_Б B = (3.5\ 0\ 6\ -5)$$

и оценок

$$\Delta = (\Delta_j, j = 1, ..., 8) = u'A - c' = (0\ 42.5\ 0\ 2.5\ 0\ -7.5\ 1.5\ 0\ ).$$

Для данного вектора оценок условий $\Delta_j \geq 0, j \in J_H = J \setminus J_Б$, не выполняется.

Выберем индекс $j_0 \in J_H$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$:

$$j_0 = 6 \in J_H = \{2\ 4\ 6\ 7\}.$$

Построим вектор

$$z = BA_{j_0} = (0\ -0.75\ -2.25\ 3.75)'.$$

Вычислим шаги θ_i, $i = 1, \ldots, 4$, по правилу (1.3)

$$\theta_1 = \infty, \theta_2 = \infty, \theta_3 = \infty, \theta_4 = 0.9333,$$

и найдем

$$\theta_0 = \min \theta_i = 0.93333 = \theta_4,$$

Следовательно, $s = 4, j_s = j_4 = 8$.

Построим новый базисный план $\bar{x} = (\bar{x}_j, j \in J) = (\bar{x}_j, j = 1, \ldots, 8)$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам (1.4) и (1.5). В результате получаем новый план

$$\bar{x} = (10\ 0\ 2.2\ 0\ 2.6\ 0.9333\ 0\ 0)$$

и новый базис

$$\bar{J}_Б = \{1\ 3\ 5\ 6\}$$

Переходим на следующую итерацию, исходя из новых плана

$$x := \bar{x} = (10\ 0\ 2.2\ 0\ 2.6\ 0.9333\ 0\ 0)$$

и базиса

$$J_Б := \bar{J}_Б = \{1\ 3\ 5\ 6\}.$$

Итерация 2

По заданному множеству $J_Б = \{1\ 3\ 5\ 6\}$ сформируем матрицы и вектор

$$Ab = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.2000 & -0.2000 & 0 & 0.2000 \\ -0.4000 & -0.6000 & -1.0000 & 0.60000 \\ -0.0667 & -0.2667 & 0 & 0.2667 \end{pmatrix}, \quad c_Б = (-5\ 3\ -6\ 0)'.$$

Вычислим вектор потенциалов

$$u' = c'_Б B = (3\ -2\ 6\ -3)$$

и оценок

$$\Delta = (\Delta_j, j = 1, \ldots, 8) = u'A - c' = (0\ 46\ 0\ 2\ 0\ 0\ -1\ 2.000071\ 2).$$

Для данного вектора оценок условий $\Delta_j \geq 0, j \in J_H = J \setminus J_Б$, не выполняется.

Выберем индекс $j_0 \in J_H$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$:

$$j_0 = 7 \in J_H = \{2\ 4\ 7\ 8\}.$$

Построим вектор

$$z = BA_{j_0} = (0\ 0\ 0\ -0.3333)'.$$

Для данного вектора выполняется условие $z_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Алгоритм останавливает свою работу.

Ответ: данная задача не имеет решения, т.к. ее целевая функция не ограничена на множестве планов.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить симплекс-методом задачу линейного программирования вида (1.1) с заданными исходными данными и начальным базисным планом.

Задача 1

$$c = (-5 \;\; 2 \;\; 3 \;\; -4 \;\; -6 \;\; 0 \;\; 1 \;\; -5)'$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -8 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 36 \\ -11 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$x = (4 \;\; 5 \;\; 0 \;\; 6 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 5)', \quad J_b = (1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 8)$

ОТВЕТ: $x^0 = (0 \;\, 9.5000 \;\, 5.3333 \;\, 1.5000 \;\, 0 \;\, 0 \;\, 3.6667 \;\, 0), \;\; c'x^0 = 32.6667.$

Задача 2

$$c = (-6 \;\; -9 \;\; -5 \;\; 2 \;\; -6 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 3)'$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0 & -8.0 & 1.0 & 5.0 \\ 0 & -1.0 & 0 & -7.5 & 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 2.0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 3.0 & -1.4 & 0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 0 & 3.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 15 \\ -45 \\ 1.8 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$x = (4 \;\; 0 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 0) \quad J_b = (1 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 7)$

ОТВЕТ: $x^0 = (0 \;\, 0 \;\, 0 \;\, 7.0555 \;\, 0 \;\, 1.8029 \;\, 2.57777 \;\, 3.9580), \;\; c'x^0 = 28.5628.$

Задача 3

$c = (-6 \quad -9 \quad -5 \quad 2 \quad -6 \quad 0 \quad 1 \quad 3)'$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1.0 & 1.0 & -7.5 & 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 2.0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 3.0 & -1.5 & 0 \\ 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 & 0 & 3.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1.5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$x = (4.0 \quad 0 \quad 6.0 \quad 0 \quad 4.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0)', \quad J_b = (1 \quad 3 \quad 5)$

ОТВЕТ: $x^0 = (0 \quad 0.7500 \quad 0 \quad 2.6818 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 13.4318), \quad c'x^0 = 38.9091.$

Задача 4

$c = (-6 \quad -9 \quad -5 \quad 2 \quad -6 \quad 0 \quad 1 \quad 3)'$

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & -1.0 & 1.0 & -7.5 & 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 4.0 & 2.0 & -1.0 & 0 & 1.0 & 2.0 & -1.0 & -4.0 \\ 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 & 0 & 3.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$x = (4 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)', \quad J_b = (1 \quad 3 \quad 5)$

ОТВЕТ: $x^0 = (4.625 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.0 \quad 0 \quad 2.375), \quad c'x^0 = -20.6250.$

Задача 5

$c = (-6 \quad 9 \quad -5 \quad 2 \quad -6 \quad 0 \quad 1 \quad 3)'$

$$A = \begin{pmatrix} -2.0 & -1.0 & 3.0 & -7.5 & 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 4.0 & 2.0 & -6.0 & 0 & 1.0 & 5.0 & -1.0 & -4.0 \\ 1.0 & -1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 3.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} -23.5 \\ -24.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

$x = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 7 \quad)', \quad J_b = (4 \quad 5 \quad 8)$

ОТВЕТ: Задача не имеет решения, т.к. целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых планов.

Задача 6

$c = (6 \quad -9 \quad 5 \quad -2 \quad 6 \quad 0 \quad -1 \quad 3)'$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 11 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$x = (4 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)'$, $J_b = (1 \quad 2 \quad 3)$

ОТВЕТ: $x^0 = (0 \quad 0 \quad 26 \quad 4 \quad 40 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, $c'x^0 = 362$.

1.2. Решение задач линейного программирования двойственным симплекс-методом

ПРИМЕР 1.

Решить двойственным симплекс-методом задачу линейного программирования вида

$$c'x \to \max, \qquad Ax = b, \qquad x \ge 0, \tag{2.1}$$

со следующими исходными данными

$$c = (2 \quad 2 \quad 1 \; -10 \quad 1 \quad 4 \quad -2 \quad -3)', \qquad b = (-2 \quad 4 \quad 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; m = 3, \; n = 8,$$

и заданным начальным двойственным планом

$$y^{нач} = (1 \; 1 \; 1), \qquad J_Б = \{j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 7\}$$

и соответстующим ему копланом

$$\delta = (\delta_j, j = 1, \ldots, 8) = y^{нач}{}'A - c' = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 1).$$

Итерация 1

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 7\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$$\chi_Б = Bb = (2\ \ -1\ \ -1) = (\chi_{j_1} = 2,\ \chi_{j_2} = -1,\ \chi_{j_3} = -1).$$

Условие $\chi_Б \geq 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$$k = 2, j_k = j_2 = 5.$$

Находим числа

$$\mu_j = B'_k A_j,\ j \in J, \tag{2.2}$$

где B'_k - k-я строка матрицы B, A_j - j-ый столбец матрицы условий A:

$$\mu = (\mu_j, j = 1, \dots, 8) = e'_k BA = (\mu_1 = 1, \mu_2 = 0, \mu_3 = 2, \mu_4 = -6, \mu_5 = 1, \mu_6 = 2, \mu_7 = 0, \mu_8 = -4)$$

Вычисляем шаги σ_j, $J_H = \{1\ 3\ 4\ 6\ 8\}$, σ_0 по правилам

$$\sigma_j = \begin{cases} -\delta_j / \mu_j, & если\ \ \mu_j < 0, \\ \infty\ \ если & \mu_j \geq 0, \end{cases} \qquad j \in J_H, \qquad \sigma_0 = \min_{j \in J_H} \sigma_j = \sigma_{j_0}. \tag{2.3}$$

Получим

$$\sigma_1 = \infty,\ \sigma_3 = \infty,\ \sigma_4 = 0.3333,\ \sigma_6 = \infty,\ \sigma_7 = \infty,\ \sigma_8 = 0.25,\ \ \sigma_0 = \min_{j \in J_H} = \sigma_8 = 0.25,\ \ j_0 = 8$$

Построим новый двойственный план

$$\bar{y} = y + \sigma_0 e'_k B = (1.25\ \ 1.25\ \ 0.75),$$

соответствующий ему новый коплан

$$\bar{\delta} = \delta + \sigma_0 \mu = \bar{y}A - c = (1.2500\ \ \ \ 0\ \ 1.5000\ \ 0.5000\ \ 0.2500\ \ 4.5000\ \ \ \ 0\ \ \ \ 0)$$

и новый базис $\bar{J}_Б = \{2\ 8\ 7\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых двойственного плана $y := \bar{y}$, соответствующего ему коплана

$$\delta := \bar{\delta} = (1.2500\ \ \ \ 0\ \ 1.5000\ \ 0.5000\ \ 0.2500\ \ 4.5000\ \ \ \ 0\ \ \ \ 0)$$

и базиса $J_Б := \bar{J}_Б = \{2\ 8\ 7\}$.

Итерация 2

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 2, j_2 = 8, j_3 = 7\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} -1.500 & -0.500 & 0.500 \\ -0.250 & -0.250 & 0.250 \\ -1.750 & -0.750 & -0.250 \end{pmatrix}$$

Вычисляем базисные компоненты псевдоплана

$$\chi_Б = Bb = (2.5\ 0.25\ \text{-}0.25) = (\chi_{j_1} = 2.5,\ \chi_{j_2} = 0.25,\ \chi_{j_3} = \text{-}0.25)$$

Условие $\chi_Б \geq 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$$k = 3, j_k = j_3 = 7.$$

Найдем числа $\mu_j, j \in J = \{1, 2, \dots, 8\}$, по правилу, (2.2), в результате получим

$$\mu = (\mu_j, j = 1, \dots, 8) = e'_k BA = (\mu_1 = 0.25, \mu_2 = 0, \mu_3 = \text{-}2.5, \mu_4 = 12.5, \mu_5 = \text{-}0.75, \mu_6 = \text{-}4.5, \\ \mu_7 = 1, \mu_8 = 0)$$

Вычисляем шаги σ_j, $J_Н = \{1\ 3\ 4\ 5\ 8\}$, σ_0 по правилам (2.3). Получим

$$\sigma_1 = \infty, \quad \sigma_3 = 0.6, \sigma_4 = \infty\ \sigma_5 = 0.3333\ , \sigma_8 = \infty, \qquad j_0 = 5$$
$$\sigma_0 = \min_{j \in J_Н} = \sigma_5 = 0.3333,$$

Построим новый двойственный план

$$\bar{y} := y + \sigma_0 e'_k B = (0.6667\ \ 1.0000\ \ 0.6667),$$

соответствующий ему новый коплан

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} -1.500 & -0.500 & 0.500 \\ -0.250 & -0.250 & 0.250 \\ -1.750 & -0.750 & -0.250 \end{pmatrix}$$

и новый базис $\bar{J}_Б = \{2\ 8\ 5\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых двойственного плана $y := \bar{y}$, соответствующего ему коплана

$$\delta := \bar{\delta} = (1.3333 \quad 0 \quad 0.6667 \quad 4.6667 \quad 0 \quad 3.0000 \quad 0.3333 \quad 0)$$

и базиса $J_Б := \bar{J}_Б = \{2\ 8\ 5\}$.

Итерация 3

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 2, j_2 = 8, j_3 = 5\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3333 & 0.0000 & 0.6667 \\ 0.3333 & -0.0000 & 0.3333 \\ 2.3333 & 1.0000 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

Вычисляем базисные компоненты псевдоплана

$$\chi_Б = Bb = (\chi_{j_1} = 2.6667,\ \chi_{j_2} = 0.3333,\ \chi_{j_3} = 0.3333)$$

Все базисные компоненты данного псевдоплана положительные. Алгоритм заканчивает свою работу построением оптимального плана исходной задачи:

оптимальный план:

$$x^0 = (0\ 2.6667\ 0\ 0\ 0.3333\ 0\ 0.3333)$$

оптимальное значение целевой функции

$$c'x^0 = 4.6667.$$

ПРИМЕР 2

Решить двойственным симплекс-методом задачу линейного программирования вида (2.1)со следующими исходными данными

$$c = (2\ 2\ 1\ -10\ 1\ 4\ 0\ -3), \qquad b = (-2\ 4\ -3)$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и заданным начальным двойственным планом

$$y^{нач} = (1\ 1\ 1),\ J_Б = \{j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 7\}$$

и соответсвующему ему коплану

$$\delta = (\delta_j, j = 1,\ldots,8) = y^{нач}{}'A - c' = (1\quad 0\quad 1\quad 4\quad 0\quad 4\quad 0\quad 1)\cdot$$

Итерация 1

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 7\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$$\chi_Б = Bb = (\chi_{j_1} = 2,\ \chi_{j_2} = -5,\ \chi_{j_3} = -5)$$

Условие $\chi_Б \geq 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$$k = 2, j_k = j_2 = 5.$$

Найдем числа $\mu_j, j \in J = \{1, 2, \dots, 8\}$, по правилу, (2.2), в результате получим

$$\mu = (\mu_j, j = 1, \dots, 8) = e'_k BA = (\mu_1 = -1, \mu_2 = 0, \mu_3 = 4, \mu_4 = -20, \mu_5 = 1, \mu_6 = 8, \mu_7 = 0, \mu_8 = 2)$$

Вычисляем шаги σ_j, $J_H = \{1\ 3\ 4\ 6\ 8\}$, σ_0 по правилам (2.3). Получим

$$\sigma_1 = 1,\ \sigma_3 = \infty,\ \sigma_4 = 0.2,\ \sigma_6 = \infty,\ \sigma_7 = \infty,\ \sigma_8 = \infty,\quad \sigma_0 = \min_{j \in J_н} = \sigma_4 = 0.2 \quad j_0 = 4$$

Построим новый двойственный план

$$\bar{y} = y + \sigma_0 e'_k B = (1.6\ \ 1.2\ \ \ 1.2),$$

соответствующий ему новый коплан

$$\bar{\delta} = \delta + \sigma_0 \mu = \bar{y}A - c = (0.8000 \quad 0 \ \ 1.8000 \quad 0 \ \ 0.2000 \ \ 5.6000 \quad 0 \ \ 1.4000)$$

и новый базис $\bar{J}_Б = \{2\ 4\ 7\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых двойственного плана $y := \bar{y}$, соответствующего ему коплана

$$\delta := \bar{\delta} = (0.8000 \quad 0 \ \ 1.8000 \quad 0 \ \ 0.2000 \ \ 5.6000 \quad 0 \ \ 1.4000)$$

и базиса $J_Б := \bar{J}_Б = \{2\ 4\ 7\}$.

Итерация 2

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 2, j_2 = 4, j_3 = 7\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0500 & 0.3500 & 0.3500 \\ -0.1500 & -0.0500 & -0.0500 \\ 0.1000 & -0.3000 & 0.7000 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$$\chi_Б = Bb = (\ \chi_{j_1} = 0.25, \chi_{j_2} = 0.25, \chi_{j_3} = -3.5)$$

Условие $\chi_Б \geq 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$$k = 3, j_k = j_3 = 7.$$

Найдем числа $\mu_j, j \in J = \{1, 2, \dots, 8\}$, по правилу, (2.2), в результате получим

$$\mu = (\mu_j, j = 1, \dots, 8) = e'_k BA = (\mu_1 = -0.7, \mu_2 = 0, \mu_3 = -0.2, \mu_4 = 0, \mu_5 = -0.3, \mu_6 = 0.6, \mu_7 = 1, \mu_8 = 2.4)$$

Вычисляем шаги σ_j, $J_Н = \{1\ 3\ 5\ 6\ 8\}$, σ_0 по правилам (2.3). Получим

$$\sigma_1 = 1.1429, \quad \sigma_3 = 9, \sigma_5 = 0.6667\ \sigma_6 = \infty\ , \ \sigma_8 = \infty,$$
$$\sigma_0 = \min_{j \in J_Н} = \sigma_5 = 0.6667, \qquad j_0 = 5$$

Построим новый двойственный план

$$\bar{y} = y + \sigma_0 e'_k B = (1.6667\ \ 1.0000\ \ 1.6667),$$

соответствующий ему новый коплан

$$\bar{\delta} = \delta + \sigma_0 \mu = \tilde{y}A - c = (0.3333 \quad 0 \quad 1.6667 \quad 0 \quad 0 \quad 6.0000 \quad 0.6667 \quad 3.0000)$$

и новый базис $\bar{J}_Б = \{2\ 4\ 5\}$.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых двойственного плана $y := \bar{y}$, соответствующего ему коплана

$$\delta := \bar{\delta} = (0.3333 \quad 0 \quad 1.6667 \quad 0 \quad 0 \quad 6.0000 \quad 0.6667 \quad 3.0000)$$

и базиса $J_Б := \bar{J}_Б = \{2\ 4\ 5\}$.

Итерация 3

По заданному множеству $J_Б = \{j_1 = 2, j_2 = 4, j_3 = 5\}$ сформируем матрицы

$$A_Б = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1667 & 0 & 1.1667 \\ -0.1667 & -0.0000 & -0.1667 \\ -0.3333 & 1.0000 & -2.3333 \end{pmatrix}.$$

Вычислим базисные компоненты псевдоплана

$$\chi_Б = Bb = (\chi_{j_1} = -3.8333,\ \chi_{j_2} = 0.8333,\ \chi_{j_3} = 11.6667)$$

Условие $\chi_Б \geq 0$ не выполняется.

Находим базисный индекс $j_k \in J_Б$, для которого $\chi_{j_k} < 0$:

$$k = 1, j_k = j_1 = 2.$$

Найдем числа $\mu_j, j \in J = \{1, 2, \dots, 8\}$, по правилу, (2.2), в результате получим

$$\mu = (\mu_j, j = 1, \dots, 8) = e'_k BA = (\mu_1 = 0.8333, \mu_2 = 1, \mu_3 = 0, \mu_4 = 0, \mu_5 = 0, \mu_6 = 3.5, \mu_7 = 1.1667, \mu_8 = 1.5)$$

Вычисляем шаги σ_j, $J_H = \{1\ 3\ 5\ 6\ 8\}$, σ_0 по правилам (2.3). Получим $\sigma_0 = \infty$

Алгоритм заканчивает свою работу.

Ответ: исходная задача не имеет решения, т.к. ее ограничения несовместны.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить двойственным симплекс-методом задачи линейного программирования вида (2.1) с заданными исходными данными и начальным двойственным базисным планом.

Задача 1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c = (5 \quad 2 \quad 3 \ -16 \quad 1 \quad 3 \ -3 \ -12), \quad y^{нач} = (1 \quad 2 \ -1), \quad J_Б = \{1 \quad 2 \quad 3\}.$$

Ответ:

$$x^0 = (0 \quad 0 \quad 0 \ \ 0.4000 \quad 0 \quad 0 \ \ 2.0000 \ \ 0.4000), \quad c'x^0 = -17.2000.$$

Задача 2

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c=\begin{pmatrix} -12 & 2 & 2 & -6 & 10 & -1 & -9 & 8 \end{pmatrix},\quad y^{нач}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\quad J_Б=\{2 \quad 4 \quad 6\}.$$

Ответ:

$$x^0=(0 \quad 0 \quad 5.0 \quad 1.0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.0 \quad 0),\quad c'x^0=-5.$$

Задача 3

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c=\begin{pmatrix} 12 & -2 & -6 & 20 & -18 & -5 & -7 & -20 \end{pmatrix},\quad y^{нач}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix},\quad J_Б=\{2 \quad 4 \quad 6\}.$$

Ответ:

Задача не имеет решения, т.к. пусто множество ее допустимых планов.

Задача 4

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 10 & -7 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c=\begin{pmatrix} 10 & -2 & -38 & 16 & -9 & -9 & -5 & -7 \end{pmatrix},\quad y^{нач}=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \end{pmatrix},\quad J_Б=\{2 \quad 8 \quad 5\}.$$

Ответ:

$$x^0=(1.35 \quad 0.20 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.45),\quad c'x^0=9.9500.$$

Задача 5

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 10 & -7 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 14 & 8 & 0 & 12 & -11 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c=\begin{pmatrix} 36 & -12 & 66 & 76 & -5 & 77 & -76 & -7 \end{pmatrix},\quad y^{нач}=\begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \end{pmatrix},\quad J_Б=\{7 \quad 8 \quad 4\}.$$

Ответ:

$$x^0=(0 \quad 0 \quad 0.2622 \quad 0.1662 \quad 0.5415 \quad 0 \quad 0 \quad 0),\quad c'x^0=27.2264.$$

1.3. Решение матричной транспортной задачи методом потенциалов

ПРИМЕР 1.

Имеется 3 склада, содержащие некоторое количество единиц однотипной продукции **(см.таблицу 1)**, имеется также 5 потребителей, нуждающихся в определенном количестве данной продукции **(см.таблицу 2)**. При перевозке одной единицы продукции со склада $\boldsymbol{i}$ потребителю $\boldsymbol{j}$ возникают издержки $\boldsymbol{c_{ij}}$. Величины издержек приведены в **таблице 3**. При перевозке $\boldsymbol{x_{ij}}$ единиц продукции со склада $\boldsymbol{i}$ потребителю $\boldsymbol{j}$ суммарные затраты на перевозку составляют $\boldsymbol{x_{ij}\, c_{ij}}$.

Требуется найти такой план перевозок, при котором общие затраты на перевозку всей продукции, по всем потребителям, будут минимальны.

Таблица 1

Склад №	Запас ед. продукции
1	20
2	30
3	25

Таблица 2

Потребитель №	Потребность в ед. продукции
1	10
2	10
3	10
4	10
5	10

Таблица 3
Издержки на перевозку единицы продукции со склада $\boldsymbol{i}$ потребителю $\boldsymbol{j}$

	Потребители				
Склад №	1	2	3	4	5
1	2	8	-5	7	10
2	11	5	8	-8	-4
3	1	3	7	4	2

Шаг 1
Проверка на сбалансированность.
Общее число запасов на складах: **75**; общая потребность: **50.**
Мы видим, что общее число запасов превышает общую потребность на **25**.
Задача является открытой (несбалансированной), для приведения ее к закрытой введем фиктивного потребителя **№6** с потребностью в продукции равной 25.
Все издержки по доставке продукции данному потребителю с любого склада принимаем равными нулю.

Шаг 2
Отыскание начального плана перевозок. Найдем начальный базисный план

перевозки методом северо-западного угла.

Запишем настоящую задачу в виде транспортной таблицы. В верхней строке перечислим потребности потребителей по порядку номеров. В левом столбце перечислим имеющиеся запасы на складах. На пересечении j-го столбца и i-й строки будем записывать количество продукции x_{ij}, поставляемое с i-го склада j-му потребителю. Пока начальное решение не найдено, оставим эти клетки пустыми.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$						
$a_2 = 30$						
$a_3 = 25$						

Введем вспомогательные строку и столбец, в которых будем отмечать оставшиеся нераспределенные запасы и соответственно потребности (остатки). Изначально их содержимое равно исходным запасам и потребностям, так как еще ничего не распределялось. На рисунке они представлены желтым цветом.

Выберем клетку, в которую будем распределять продукцию на следующей итерации, это левая верхняя клетка (северо-западный угол). На рисунке, как сама клетка, так и соответствующие ей остатки отображаются красным шрифтом.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$	
$a_1 = 20$	x_{11}						**20**
$a_2 = 30$							30
$a_3 = 25$							25
	10	10	10	10	10	25	

Итерация 1
Заполним клетку **(1,1)**.
Сравним значения остатков для производителя $\boldsymbol{a_1}$ и потребителя $\boldsymbol{b_1}$.

Нераспределенных остатков по потребностям для $\boldsymbol{b_1}$ меньше (см. таблицу выше, красный шрифт), положим $\boldsymbol{x_{11}} = \min\{a_1, b_1\}$ и запишем это в клетку (1,1) одновременно вычитая его из обеих клеток остатков (см. таблицу ниже). При этом клетка остатков по потребностям обнулится указывая, что все потребности для $\boldsymbol{b_1}$ удовлетворены (см. таблицу ниже). Поэтому исключим столбец $\boldsymbol{b_1}$ из дальнейшего рассмотрения (серый фон). Ненулевое значение остатка по запасам для $\boldsymbol{a_1}$ показывает, сколько единиц продукции у него осталось не потребленной.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$	

$a_1 = 20$	10	x_{12}					10
$a_2 = 30$							30
$a_3 = 25$							25
	0	10	10	10	10	25	

Итерация 2

Заполним клетку **(1,2)**.
Сравним значения остатков для производителя $\boldsymbol{a_1}$ и потребителя $\boldsymbol{b_2}$.

Они равны (см. таблицу выше, красный шрифт). Положим $x_{12} = \min\{10, 10\} = 10$ запишем это в клетку **(1,2)** и обнулим соответствующие клетки остатков (см. таблицу ниже). Так как все потребности для $\boldsymbol{b_2}$ удовлетворены и все запасы $\boldsymbol{a_1}$ использованы, исключим столбец $\boldsymbol{b_2}$ и строку $\boldsymbol{a_1}$ из дальнейшего рассмотрения (серый фон).

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$	
$a_1 = 20$	**10**	**10**					0
$a_2 = 30$			x_{12}				30
$a_3 = 25$							25
	0	0	10	10	10	25	

Итерация 3

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$	
$a_1 = 20$	**10**	**10**					0
$a_2 = 30$			**10**	x_{24}			20
$a_3 = 25$							25
	0	0	0	10	10	25	

Итерация 4

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$	
$a_1 = 20$	**10**	**10**					0
$a_2 = 30$			**10**	**10**	x_{25}		10
$a_3 = 25$							25
	0	0	0	0	10	25	

Итерация 5

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$	
$a_1 = 20$	**10**	**10**					0
$a_2 = 30$			**10**	**10**	**10**		0
$a_3 = 25$						x_{36}	**25**
	0	0	0	0	0	**25**	

Итерация 6

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$	
$a_1 = 20$	**10**	**10**					0
$a_2 = 30$			**10**	**10**	**10**		0
$a_3 = 25$						**25**	0
	0	0	0	0	0	0	

Получен начальный допустимый план перевозок (см. таблицу ниже), удовлетворены нужды всех потребителей и использованы все запасы производителей

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$	**10**	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**
$a_2 = 30$	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**	**0**
$a_3 = 25$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**25**

Шаг 3

Проверим полученный **план** на **невырожденность**. Количество клеток N с ненулевыми перевозками должно удовлетворять условию $\boldsymbol{N = n + m - 1}$. В нашем случае $N = 6$, $n + m = 6 + 3 = 9$, план является **выроженным**. Прежде чем двигаться дальше выберем 2 клетки с нулевыми значениями перевозок. Выбирать следует такие клетки, которые не образуют **циклов** с клетками с ненулевыми перевозками.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$	**10**	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**
$a_2 = 30$	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**	**0**
$a_3 = 25$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**25**

В последней таблице представлен построенный начальный базисный план перевозки. Базисные клетки отмечены серым цветом. Значения перевозок x_{ij}, $(i, j) \in U = \{(i, j): i = 1, ..., m, j = 1, ..., n\}$, отмечены синим цветом.

Шаг 4
Проведем поэтапное улучшение начального базисного плана перевозки, используя метод потенциалов.

Итерация 1
Составим вспомогательную рабочую матрицу затрат. Она строится из исходной матрицы издержек (см. Таблицу 3) путем переноса только тех значений c_{ij}, которые соответствуют базисным клеткам транспортной таблицы. Остальные ячейки остаются пустыми.
Кроме того, введем вспомогательный столбец, в который внесем значения неизвестных u_1, ..., u_3 (3, это $\boldsymbol{m}$ - число складов) и вспомогательную строку, в которую внесем значения неизвестных v_1, ..., v_6 (6, это $\boldsymbol{n}$ - число потребителей). На рисунке они представлены желтым цветом. Эти $n + m$ неизвестных должны для всех (i, j), соответствующих базисным клеткам, удовлетворять линейной системе уравнений $u_i + v_i = c_{ij}$, $(i, j) \in U_Б$.
Эту систему всегда можно решить следующим способом: На первом шаге полагают $v_6 = 0$. Если на k-м шаге найдено значение неизвестной, то в системе всегда имеется еще не определенная неизвестная, которая однозначно может быть найдена на $(k+1)$-м шаге из уравнения $u_i + v_i = c_{ij}$, так как значение другой неизвестной в этом уравнении уже известно. Переменные u_i и v_i называются потенциалами.
Рабочая матрица затрат с рассчитанными потенциалами представлена ниже.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	**2**	**8**	**-5**			**0**	$u_1 = 0$
a_2			**8**	**-8**	**-4**		$u_2 = 13$
a_3						**0**	$u_3 = 0$
	$v_1 = 2$	$v_2 = 8$	$v_3 = -5$	$v_4 = -21$	$v_5 = -17$	$v_6 = 0$	

Порядок вычисления потенциалов был следующий:
1) Пусть $v_6 = 0$;
2) $u_1 = c_{1,6} - v_6$;
3) $u_3 = c_{3,6} - v_6$;
4) $v_1 = c_{1,1} - u_1$;
5) $v_2 = c_{1,2} - u_1$;
6) $v_3 = c_{1,3} - u_1$;
7) $u_2 = c_{2,3} - v_3$;
8) $v_4 = c_{2,4} - u_2$;
9) $v_5 = c_{2,5} - u_2$;
Теперь для всех небазисный (свободных) клеток рабочей матрицы затрат вычислим оценки Δ_{ij}, по формуле $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, $(i, j) \in U_H = U \setminus U_Б$, (зеленый цвет). Если же среди оценок нет отрицательных - план является оптимальным, решение задачи

прекращаем. В противном случае продолжаем решение задачи.
Рабочая матрица затрат с заполненными оценками клетками представлена ниже.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	**2**	**8**	**-5**	**28**	**27**	**0**	$u_1 = 0$
a_2	**-4**	**-16**	**8**	**-8**	**-4**	**-13**	$u_2 = 13$
a_3	**-1**	**-5**	**12**	**25**	**19**	**0**	$u_3 = 0$
	$v_1 = 2$	$v_2 = 8$	$v_3 = -5$	$v_4 = -21$	$v_5 = -17$	$v_6 = 0$	

Из всех отрицательных оценок имеет смысл выбрать наибольшую по модулю (красный цвет), так как ее воздействие на общие затраты является максимальным. В нашем случае такая оценка находится в клетке $(i_0, j_0) = (2,2)$. В совокупности клеток содержится единственный цикл $U_{цикл} \cup (i_0, j_0)$. В таблице клетки цикла отмечены голубым цветом. Отметим в транспортной таблице ячейку $(i_0, j_0) = (2,2)$ знаком + . Начиная с клетки $(i_0, j_0) = (2,2)$, последовательно обойдем все клетки цикла, поочередно помечая их знаками - и +. В результате множество клеток $U_{цикл}$ цикла разобьется на два подмножества: множество клеток цикла, помеченных знаком + --- $U^+_{цикл}$, и множество клеток цикла, помеченных знаком - --- $U^-_{цикл}$.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$	**10**	**10-**	**0+**	**0**	**0**	**0**
$a_2 = 30$	**0**	**0+**	**10-**	**10**	**10**	**0**
$a_3 = 25$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**25**

Найдем $\theta = \min\limits_{(i,j)\in U^-_{цикл}} x_{ij}$ и выбираем одну ячейку, $(i_*, j_*) \in U^-_{цикл}$, где этот минимум достигается. В нашем случае $\theta = 10$ и $(i_*, j_*) = (1,2)$.

Переход к новому плану перевозок по правилу

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \theta,\ (i,j)\in U^+_{цикл},\ \bar{x}_{ij} = x_{ij} - \theta,\ (i,j)\in U^-_{цикл},\ \bar{x}_{ij} = x_{ij},\ (i,j)\in U \setminus U_{цикл}. \quad (3.1)$$

Новое множество базисных клеток строим по правилу

$$\bar{U}_Б = (U_Б \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0). \quad (3.2)$$

В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$

$a_1 = 20$	**10**	**0**	**10**	**0**	**0**	**0**
$a_2 = 30$	**0**	**10**	**0**	**10**	**10**	**0**
$a_3 = 25$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**25**

Здесь базисные клетки отмечены серым цветом.

Итерация 2

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценкам.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	**2**	**16**	**-5**	**28**	**27**	**0**	$u_1 = 0$
a_2	**-4**	**5**	**8**	**-8**	**-4**	**-13**	$u_2 = 13$
a_3	**-1**	**11**	**12**	**25**	**19**	**0**	$u_3 = 0$
	$v_1 = 2$	$v_2 = -8$	$v_3 = -5$	$v_4 = -21$	$v_5 = -17$	$v_6 = 0$	

Для небазисной клетки (2,6) оценка Δ_{26} = -13 является отрицательной. Полагаем (i_0, j_0) = (2,6).

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$	**10**	**0**	**10+**	**0**	**0**	**0-**
$a_2 = 30$	**0**	**10**	**0-**	**10**	**10**	**0+**
$a_3 = 25$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**25**

Найдем $\theta = \min\limits_{(i,j)\in U^-_{цикл}} x_{ij}$ и выбираем одну ячейку, (i_*, j_*) ∈ $U^-_{цикл}$, где этот минимум достигается. На данной итерации имеем Δ = 0 и (i_*, j_*) = (1,6).

Находим новый план перевозок по правилам (1) и соответствующее ему множество базисных клеток по правилу (2).
В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$	**10**	**0**	**10**	**0**	**0**	**0**
$a_2 = 30$	**0**	**10**	**0**	**10**	**10**	**0**
$a_3 = 25$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**25**

Итерация 3

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценкам.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	**2**	**16**	**-5**	**28**	**27**	**13**	$u_1 = -13$
a_2	**-4**	**5**	**8**	**-8**	**-4**	**0**	$u_2 = 0$
a_3	**-14**	**-2**	**-1**	**12**	**6**	**0**	$u_3 = 0$
	$v_1 = 15$	$v_2 = 5$	$v_3 = 8$	$v_4 = -8$	$v_5 = -4$	$v_6 = 0$	

Для небазисной клетки (3,1) оценка Δ_{31} = -14 является отрицательной. Полагаем $(i_0, j_0) = (3,1)$.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$	**10-**	**0**	**10+**	**0**	**0**	**0**
$a_2 = 30$	**0**	**10**	**0-**	**10**	**10**	**0+**
$a_3 = 25$	**0+**	**0**	**0**	**0**	**0**	**25+**

Найдем $\theta = \min\limits_{(i,j)\in U^-_{цикл}} x_{ij}$ и выбираем одну ячейку, $(i_*, j_*) \in U^-_{цикл}$, где этот минимум достигается. На данной итерации имеем $\theta = 0$ и $(i_*, j_*) = (2,3)$.

Находим новый план перевозок по правилам (3.1) и соответствующее ему множество базисных клеток по правилу (3.2).
В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$	**10**	**0**	**10**	**0**	**0**	**0**
$a_2 = 30$	**0**	**10**	**0**	**10**	**10**	**0**
$a_3 = 25$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**25**

Итерация 4

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценкам.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	**2**	**2**	**-5**	**14**	**13**	**-1**	$u_1 = 1$
a_2	**10**	**5**	**14**	**-8**	**-4**	**0**	$u_2 = 0$
a_3	**1**	**-2**	**13**	**12**	**6**	**0**	$u_3 = 0$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 5$	$v_3 = -6$	$v_4 = -8$	$v_5 = -4$	$v_6 = 0$	

Для небазисной клетки (3,2) оценка Δ_{32} = -2 является отрицательной. Полагаем $(i_0, j_0) = (3,2)$.

	b_1 = 10	b_2 = 10	b_3 = 10	b_4 = 10	b_5 = 10	b_6 = 25
a_1 = 20	**10** -	**0**	**10**	**0**	**0**	**0**
a_2 = 30	**0**	**10** -	**0**	**10**	**10**	**0** +
a_3 = 25	**0**	**0** +	**0**	**0**	**0**	**25** -

На данной итерации имеем $\theta = 0$ и $(i_*, j_*) = (2,2)$.

Находим новый план перевозок по правилам (3.1) и соответствующее ему множество базисных клеток по правилу (3.2).
В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже

	b_1 = 10	b_2 = 10	b_3 = 10	b_4 = 10	b_5 = 10	b_6 = 25
a_1 = 20	**10**	**0**	**10**	**0**	**0**	**0**
a_2 = 30	**0**	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**
a_3 = 25	**0**	**10**	**0**	**0**	**0**	**15**

Итерация 5

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценкам.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	**2**	**4**	**-5**	**14**	**13**	**-1**	$u_1 = 1$
a_2	**10**	**2**	**14**	**-8**	**-4**	**0**	$u_2 = 0$
a_3	**1**	**3**	**13**	**12**	**6**	**0**	$u_3 = 0$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 3$	$v_3 = -6$	$v_4 = -8$	$v_5 = -4$	$v_6 = 0$	

Для небазисной клетки (1,6) оценка Δ_{16} = -1 является отрицательной. Полагаем $(i_0, j_0) = (1,6)$.

	b_1 = 10	b_2 = 10	b_3 = 10	b_4 = 10	b_5 = 10	b_6 = 25
a_1 = 20	**10** -	**0**	**10**	**0**	**0**	**0** +
a_2 = 30	**0**	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**
a_3 = 25	**0** +	**10**	**0**	**0**	**0**	**15** -

На данной итерации имеем $\theta = 10$ и $(i_*, j_*) = (1,1)$.

Находим новый план перевозок по правилам (3.1) и соответствующее ему множество базисных клеток по правилу (3.2).
В результате получим новый базисный план перевозок, приведенный ниже

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$			**10**			**10**
$a_2 = 30$				**10**	**10**	**10**
$a_3 = 25$	**10**	**10**				**5**

Итерация 6

Рабочая матрица затрат с пересчитанными потенциалами и оценкам.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	
a_1	**1**	**5**	**-5**	**15**	**14**	**0**	$u_1 = 0$
a_2	**10**	**2**	**13**	**-8**	**-4**	**0**	$u_2 = 0$
a_3	**1**	**3**	**12**	**12**	**6**	**0**	$u_3 = 0$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 3$	$v_3 = -5$	$v_4 = -8$	$v_5 = -4$	$v_6 = 0$	

В приведенной выше таблице нет отрицательных оценок (план улучшить нельзя), следовательно, достигнуто оптимальное решение.

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 10$	$b_4 = 10$	$b_5 = 10$	$b_6 = 25$
$a_1 = 20$	**0**	**0**	**10**	**0**	**0**	**10**
$a_2 = 30$	**0**	**0**	**0**	**10**	**10**	**10**
$a_3 = 25$	**10**	**10**	**0**	**0**	**0**	**5**

Общие затраты на перевозку всей продукции, для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6} c_{ij} x_{ij} = 130.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Имеется m складов, содержащие некоторое количество единиц однотипной продукции a_i, $i = 1, \ldots, m$, имеется также n потребителей, нуждающихся в определенном количестве данной продукции $b_i = 1, \ldots, n$. При перевозке одной единицы продукции со склада i потребителю j возникают издержки c_{ij}. Величины c_{ij},

a_i, i = 1, ... , m, b_i, j = 1, ... , n, приведены в таблице. При перевозке x_{ij} единиц продукции со склада **i** потребителю **j** суммарные затраты на перевозку составляют x_{ij} c_{ij}.

Требуется найти такой план перевозок, при котором общие затраты на перевозку всей продукции, по всем потребителям, будут минимальны.

Задача 1. Решить транспортную задачу с данными из Таблицы (m = 4, n = 8):

	Потребители								Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	-3	6	7	12	6	-3	2	16	$a_1 = 20$
2	4	3	7	10	0	1	-3	7	$a_2 = 11$
3	19	3	2	7	3	7	8	15	$a_3 = 18$
4	1	4	-7	-3	9	13	17	22	$a_4 = 27$
Потребность в ед. продукции	$b_1 =$ 11	$b_2 =$ 4	$b_3 =$ 10	$b_4 =$ 12	$b_5 =$ 8	$b_6 =$ 9	$b_7 =$ 10	$b_8 =$ 4	

Ответ: x_{ij}, i = 1, ... , 4, j = 1, ... , 8. Компоненты оптимального плана перевозок приведены в таблице

	$b_1 = 11$	$b_2 = 4$	$b_3 = 10$	$b_4 = 12$	$b_5 = 8$	$b_6 = 9$	$b_7 = 10$	$b_8 = 4$	$b_9 = 8$
$a_1 = 20$	**11**	**0**	**0**	**0**	**0**	**9**	**0**	**0**	**0**
$a_2 = 11$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**10**	**1**	**0**
$a_3 = 18$	**0**	**4**	**0**	**0**	**8**	**0**	**0**	**3**	**3**
$a_3 = 27$	**0**	**0**	**10**	**12**	**0**	**0**	**0**	**0**	**5**

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8} c_{ij}x_{ij} = -108.$$

Задача 2. Решить транспортную задачу с данными из Таблицы 2, m = 4, n = 8.

Таблица 2
Издержки на перевозку единицы продукции со склада ***i*** потребителю ***j***

	Потребители								Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	5	6	7	8	

1	-3	10	70	-3	7	4	2	-20	15
2	3	5	8	8	0	1	7	-10	12
3	-15	1	0	0	13	5	4	5	18
4	1	-5	9	-3	-4	7	16	25	20
Потребность в ед. продукции	5	5	10	4	6	20	10	5	

Ответ: компоненты x_{ij}, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 8$, оптимального плана перевозок приведены в таблице

	$b_1 = 5$	$b_2 = 5$	$b_3 = 10$	$b_4 = 4$	$b_5 = 6$	$b_6 = 20$	$b_7 = 10$	$b_8 = 5$
$a_1 = 15$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**10**	**5**
$a_2 = 12$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**12**	**0**	**0**
$a_3 = 18$	**5**	**0**	**10**	**0**	**0**	**3**	**0**	**0**
$a_3 = 20$	**0**	**5**	**0**	**4**	**6**	**5**	**0**	**0**

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8} c_{ij}x_{ij} = -154.$$

Задача 3. Решить транспортную задачу с данными из Таблицы 3, $m = 4$, $n = 5$.

Таблица 3
Издержки на перевозку единицы продукции со склада ***i*** потребителю ***j***

	Потребители					Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	5	
1	3	0	3	1	6	53
2	2	4	10	5	7	20
3	-2	5	3	2	9	45
4	1	3	5	1	9	38
Потребность в ед. продукции	15	31	10	3	18	

Ответ: компоненты x_{ij}, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 6$, оптимального плана перевозок приведены в таблице

	$b_1=15$	$b_2=31$	$b_3=10$	$b_4=3$	$b_5=18$	$b_6=79$

a_1=53	**0**	**31**	**1**	**3**	**18**	**0**
a_2=20	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**20**
a_3=45	**15**	**0**	**9**	**0**	**0**	**21**
a_4=38	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**38**

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}x_{ij} = 111.$$

Задача 4. Решить транспортную задачу с данными из Таблицы 4, $m = 5$, $n = 4$.

Таблица 4
Издержки на перевозку единицы продукции со склада ***i*** потребителю ***j***

	Потребители				Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	
1	2	6	8	-3	13
2	3	2	12	4	5
3	7	2	5	7	7
4	9	2	14	9	9
5	8	7	8	8	10
Потребность в ед. продукции	20	5	6	11	

Ответ: компоненты x_{ij}, i = 1, ... , 5, j = 1, ... , 5, оптимального плана перевозок приведены в таблице

	b_1=20	b_2=5	b_3=6	b_4=11	b_5=2
a_1=13	**2**	**0**	**0**	**11**	**0**
a_2=5	**5**	**0**	**0**	**0**	**0**
a_3=**7**	**1**	**0**	**6**	**0**	**0**
a_4=9	**2**	**5**	**0**	**0**	**2**
a_5=10	**10**	**0**	**0**	**0**	**0**

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 131.$$

Задача 5. Решить транспортную задачу с данными из Таблицы 5, $m = 5$, $n = 4$.

Таблица 5
Издержки на перевозку единицы продукции со склада ***i*** потребителю ***j***

	Потребители				Запас ед. продукции
Склад №	1	2	3	4	
1	1	1	-1	-1	7
2	0	0	2	6	3
3	5	4	7	6	7
4	7	8	5	7	3
5	2	5	10	2	7
Потребность в ед. продукции	10	10	4	3	

Ответ: компоненты x_{ij}, $i = 1, \ldots, 5$, $j = 1, \ldots, 4$, оптимального плана перевозок приведены в таблице

	$b_1 = 10$	$b_2 = 10$	$b_3 = 4$	$b_4 = 3$
$a_1 = 7$	**3**	**0**	**1**	**3**
$a_2 = 3$	**0**	**3**	**0**	**0**
$a_3 = 7$	**0**	**7**	**0**	**0**
$a_4 = 3$	**0**	**0**	**3**	**0**
$a_5 = 7$	7	**0**	**0**	**0**

Общие затраты на перевозку всей продукции для оптимального плана составляют:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 56.$$

1.4. Корректировка решения задачи линейного программирования при изменении параметров задачи

ПРИМЕР 1.

Рассмотрим задачу линейного программирования (ЛП) вида

$$c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad x \geq 0, , \tag{4.1}$$

со следующими исходными данными

$$c = (\quad -5 \quad -2 \quad 3 \quad -4 \quad -6 \quad 0 \quad -1 \quad -5)', b = (\ 6 \quad 10 \quad -2 \ )' . , \tag{4.2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}, m = 3, \ n = 8.$$

Предположим, что для задачи ЛП с этими данными известен оптимальный базисный план

$$\begin{gathered} x^0 = \ (10.0 \quad 0 \quad 1.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0)\,, \\ J_B = \{j_1 = 1, \ j_2 = 3, \ j_3 = 5\} \subset J = \{1, 2, ..., 8\}\,, \end{gathered} \tag{4.3}$$

оптимальный двойственный план

$$u^{0\prime} = c_B{}' A_B^{-1} \ = \ (2.25 \quad -5.00 \quad 6.00)$$

и соответствующий ему коплан

$$\Delta' = \ (\Delta_j, j = 1, ..., 8) = u^{0\prime} A - c' = (\ 0 \quad 51.25 \quad 0 \quad 1.25 \quad 0 \quad 11.25 \quad 55.25 \quad 5.00) \tag{4.4}$$

Предположим, что исходные данные задачи изменились.

Отдельно рассмотрим следующие ситуации
А) изменился вектор стоимости c , все остальные данные не изменились,
Б) из основных ограничений задачи удалили одно ограничение,
В) изменился вектор ограничений b , все остальные данные не изменились,
Г) добавилось еще одно новое основное ограничение. Тредуется для новой задачи найти оптимальный план.

Пусть имеет место ситуация А). Очевидно, что в этом случае оптимальный базисный план старой задачи является допустимым базисным планом в новой задаче. Поэтому для построения решения новой задачи удобно воспользоваться симплекс-методом, начиная процесс решения с базисного плана (4.3).

Рассмотрим ситуацию Б). Пусть из основных ограничений задачи (4.1) удалили 3-е основное ограничения , т.е. данные для новой задачи имеют вид

$$c=(-5 \quad -2 \quad 3 \quad -4 \quad -6 \quad 0 \quad -1 \quad -5)', \bar{b}=(\,6 \quad 10\,)', \qquad (4.5)$$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{m}=2, \;\; n=8.$$

У вектора потенциалов $u^{0\prime}=(u_1^0=2.25, u_2^0=-5, u_3^0=6)$ 3-я компонента u_3^0 отлична от нулю. Подсчитаем вектор

$$z=A_B^{-1}e_3\mathrm{sign}(u_3^0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $e_3=e_m$ --- единичный вектор с единицей на m -ом месте.

Среди компонент вектора $z=(z_1=0, z_2=0, z_m=-1)$ есть оприцательные. Найдем шаги по правилу

\theta_i=\left\{ \begin{array}{c} \infty, \mbox{ если } z_i\geq 0;\\ -x^0_{j_i}/z_i,\mbox{ если } z_i< 0; \end{array}\right. \; i=1,2,...,m,

$$\theta_1=\theta_2=\infty, \;\; \theta_3=0.5,$$

$$\theta_0=\min_{i=1,2,3}\theta_i=\theta_s=\theta_3=0.5.$$

Строим новый план $\bar{x}=(\bar{x}_j, j\in J)$ по правилу

$$\bar{x}_j=x_j^0=0, j\in J_N=J\setminus J_B; \quad \bar{x}_{j_i}=x_{j_i}^0+\theta_0 z_i, \;\; i=1,2,...,m.$$

В результате получим план

$$\bar{x}=(\bar{x}_1=10, \bar{x}_2=0, \bar{x}_3=1.5, \bar{x}_4=0, \bar{x}_5=0, \bar{x}_6=0, \bar{x}_7=0, \bar{x}_8=0)$$

Строим новый базис $\bar{J}_B$ по правилу

$$\bar{J}_B = J_B^0 \setminus j_s = \{j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 5\} \setminus j_s = \{j_1 = 1, j_2 = 3\}.$$

Нетрудно проверить, что пара $(\bar{x}, \bar{J}_B)$, полученная в результате небольшой корректировки оптимального базисного плана старой задачи, является базисным планом новой задачи, т.е. задачи с данными (4.5).

Решаем новую задачу симплекс-методом, начиная процесс решения с этого базисного плана $(\bar{x}, \bar{J}_B)$.

Рассмотрим ситуацию Г), а именно, к основным ограничениям задачи (4.1) с данными (4.2) добавилось еще одно условие

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_6 - 3x_7 + x_8 \le 9.$$

Очевидно, что последнее условие эквивалентно следующим

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_6 - 3x_7 + x_8 + x_9 = 9, \quad x_9 \ge 0.$$

Для новой задачи

$$\bar{c}'x \to \max, \quad \bar{A}x = \bar{b}, \quad x \ge 0, , \tag{4.6}$$

исходные данные принимают вид

$$\bar{c} = (\;\; -5 \quad -2 \quad 3 \quad -4 \quad -6 \quad 0 \quad -1 \quad -5 \quad 0)', \bar{b} = (\,6 \quad 10 \quad -2 \quad 9\,) \tag{4.7}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & -1 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \; \bar{m} = 4, \;\; \bar{n} = 9.$$

Легко проверить, что для задачи ЛП (4.6) вектор

$$\bar{x} = (x^0, x_9) = (\,10.0 \quad 0 \quad 1.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad x_9)$$

не является даже допустимым планом при любом значении компоненты $x_9 \ge 0$. Поэтому для того, чтобы решить эту задачу ЛП симплекс-методом, нужно использовать первую фазу симплекс-метода для построения начального базисного плана.

Отметим, что вектор $y' = (2.25 \quad -5.00 \quad 6.00 \quad 0.00)$, построенный по оптимальному двойственному базисному плану $u^{0'} = (2.25 \quad -5.00 \quad 6.00)$, $J_B = \{1, \; 3, \; 5\}$ старой задачи ЛП задачи (4.1) с данными (4.2) является допустимым двойственным базисным планом (с базисом $\bar{J}_B = \{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$) в новой задаче ЛП (4.6). Поэтому решать задачу ЛП (4.6) эффективнее двойственным симплекс-методом, взяв в качестве начального двойственного базисного плана этот двойственный план.

Решим задачу ЛП (4.6) двойственным симплекс-методом, исходя из начального двойственного базисного плана $y' = (2.25 \quad -5.00 \quad 6.00 \quad 0.00)$, $J_B = \{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$. В результате получим оптимальный план задачи (4.6)

$$\bar{x}^0 = (\ 5.00 \quad 0 \qquad 0 \quad 4.75 \quad 4.00 \qquad 0 \quad 0.25 \quad 0 \qquad 0), \quad \bar{J}_B^0 = \{1,\ 4,\ 5,\ 7\} \tag{4.8}$$

и оптимальный двойственный план

$$\bar{u}^0 = (1.00 \quad -17.25 \quad 6.00 \ \ 12.25), \quad \bar{J}_B^0 = \{1,\ 4,\ 5, 7\}., \tag{4.9}$$

Проиллюстрируем теперь ситуацию В), когда меняется вектор условий b .

В качестве исходной рассмотрим задачу ЛП (4.6) с исходными данными (4.7) , для которой известны оптимальный базисный план (4.8) и оптимальный двойственный базисный план (4.9) .

Предположим, что исходные данные задачи изменились, а именно, вектор условий $\bar{b} = (\ 6 \quad 10 \quad -2 \quad 9)'$ заменили на $\bar{\bar{b}} = (6\ 10\ 3 \quad 9)'$ и требуется решить новую задачу ЛП

$$\bar{c}'x \to \max, \quad \bar{A}x = \bar{\bar{b}}, \quad x \geq 0,, \tag{4.10}$$

Легко проверить, что для задачи ЛП (4.10) вектор $\bar{x}^0$ (4.8) } не является даже допустимым планом. Поэтому для того, что решить эту задачу ЛП симплекс-методом нужно использовать первую фазу симплекс-метода для построения начального базисного плана.

Отметим, что оптимальный двойственный базисный план (см.(4.9))

$$\bar{u}^0 = (1.00 \quad -17.25 \quad 6.00 \ \ 12.25), \quad \bar{J}_B^0 = \{1,\ 4,\ 5, 7\},$$

старой задачи ЛП (4.7) является допустимым двойственным базисным планом в новой задаче ЛП (4.10) . Поэтому решать задачу ЛП (4.10) эффективнее двойственным симплекс-методом, взяв в качестве начального двойственного плана этот план.

Решим задачу ЛП (4.10) двойственным симплекс-методом, исходя из начального двойственного базисного плана (4.9) . В результате получим оптимальный план задачи (4.10)

$$\bar{x}^0 = (\ 5.0 \quad 0 \quad 0 \quad 4.6667 \quad 0 \quad 0.1111 \quad 0.3333 \quad 0 \quad 0), \quad \bar{J}^0_B = \{1,\ 4,\ 6, 7\},$$

и оптимальный двойственный план

$$\bar{u}^0 = (\ 1.00 \quad -5.75 \quad 0.25 \quad 0.75).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Задача 1.

Для задачи ЛП вида (4.1) с исходными данными

$$c = (\ 1 \quad 4 \quad -9 \quad 6 \quad -5 \quad 8 \quad 3 \quad -7 \quad 1), \quad b = (\ 14 \quad 23 \quad 6) \qquad (4.11)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 5 & 0 & -3 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & -2 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

известны оптимальный базисный план

$$x^0 = (\ 3.00 \quad 0 \quad 0 \quad 4.00 \quad 0 \quad 2.00 \quad 0 \quad 0 \quad 0), \quad J^0{}_Б = \{1,\ 4,\ 6\} \qquad (4.12)$$

и оптимальный двойственный базисный план

$$u^0 = (1\ \ 1\ \ 1), \quad J^0{}_Б = \{1,\ 4,\ 6\} \qquad (4.13)$$

Последовательно решить двойственным симплекс-методом задачи ЛП, каждая из которых получается из предыдущей добавлением нового ограничения.

В качестве исходной взять задачу (4.1) с данными (4.11) . Добавляемые ограничения имеют вид

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_6 + 3x_7 + x_8 \le 9, \qquad (4.14)$$

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 - x_8 \le 20, \qquad (4.15)$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3x_6 + 3x_7 + x_8 \le 14\ . \qquad (4.16)$$

Таким образом, первой решается задача (4.1) с данными (4.11), (4.14), исходя их известного начального двойственного плана (4.13).

Второй решается задача (4.1) с данными (4.14), (4.15). В качестве начального двойственного плана берется найденный оптимальный двойственный базисный план первой задачи.

Третьей решается задача (4.1) с данными (4.14) - (4.16), в качестве начального двойственного плана берется найденный оптимальный двойственный базисный план второй задачи.

Задача 2.

Для задачи ЛП вида (4.1) с исходными данными (4.11) известны оптимальный базисный план (4.13).

Используя известный оптимальный двойственный план (4.13) решить новую задачу ЛП, в которой вектор условий $b = (\,14 \quad 23 \quad 6)'$ заменен на новый вектор $\bar{b} = (14 \quad 22 \quad 7)'$.