Контрольная работа №1:Линейное программирование

Цель работы --- изучить и запрограммировать прямой симплекс-метод для решения общей задач линейного программирования в канонической форме и метод потенциалов для решения матричной транспортной задачи.

Для выполнения данной работы необходимо осуществить следующие шаги.

I) Освоить приемы сведения любой задачи линейного программирования к задаче линейного программирования в канонической форме.

Теоретический материал и примеры см. в конце данного пункты.

II) Изучить алгоритм симплекс-метода и запрограммированить этот метод.

Теоретический материал см. пункты 1.1-1.3 темы (модуля) №1.

Примеры, иллюстрируюшие процесс решения задач линейного программирования симплекс-методом (подробное описание всех итераций) приведены в разделе "Иллюстративные примеры к теме №1", подраздел №1.

Работу запрограммированного алгоритма следует проверить на приводимых там же задачах для самостоятельного решения.

Для одной конкретной задачи надо подробно описать 2-3 итерации (привести и описать вычисления, которые получаются в процессе работы программы). Номер задачи, которую надо описать, следует уточнить у преподавателяю

III) Изучить метод потенциалов для решения матричной транспортной задачи и запрограммировать этот метод.

Теоретический материал см. в пункте 1.7 темы (модуля) №1.

Примеры, иллюстрирующие процесс решения матричный транспортных задач (подробное описание всех итераций), приведены в разделе "Иллюстративные примеры к теме №1", подраздел №3.

Работу запрограммированного алгоритма следует проверить на приводимых там же задачах для самостоятельного решения. Процесс решения одной задачи надо описать. Номер этой задачи уточняется у преподавателя.

Сведение любой задачи к задаче в канонической форме.

Задача максимизации (минимизации) линейной функции на множестве, заданном с помощью конечного числа линейных ограничений-равенств и -неравенств, называется задачей линейного программирования (ЛП).

Пусть заданы числа

$$c_j,\ a_{ij},\ b_i,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}. \tag{1.1}$$

Общая задача линейного программирования в канонической форме, соответсвующая этим данным, имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i=\overline{1,m}; \tag{1.3}$$

$$x_j \geq 0, j=\overline{1,n}, \tag{1.4}$$

где $x_j, j=\overline{1,n},$ - искомые параметры.

Функция $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ называется целевой функцией, ограничения (1.3) называются основными, а ограничения (1.4) - прямыми.

Каноническая задача (1.2) - (1.4) представлена в покомпонентной форме записи. Удобнее использовать матрично-векторную запись.

По данным (1.1) сформируем следующие множества, векторы и матрицу

$I=\{1,2,\dots,m\}$, $J=\{1,2,\dots,n\}$ - множества индексов,

$c=c(J)=(c_j, j\in J)'$, $b=b(I)=(b_i, i\in I)'$;

$A=A(I,J)=\begin{pmatrix} a_{ij}, j\in J \\ i\in I \end{pmatrix}=(A_j, j\in J)$, $x=x(J)=(x_j, j\in J)$, где A_j - m-вектор.

$A'_j=(a_{ij}, i\in I)$ символ $'$ обозначает операцию транспонирования.

Запись $x\geq 0$ означает, что $x_j\geq 0, j \quad J$. Используя введенные обозначения, задачу (1.2) - (1.4) можно записать в виде

$$c'x\to\max, Ax=b, x\geq 0. \tag{1.5}$$

Задача (1.5) - задача линейного программирования в канонической форме (векторно-матричная запись).

Каноническая форма общей задачи ЛП характеризуется выполнением следующих условий

а) Целевая функция максимизируется,

б) Основные ограничения задаются условиями-равенствами,

в) На все переменные x_j, $j=\overline{1,n}$ есть прямые ограничения.

Известно, что задачу ЛП в любой форме записи можно свести к эквивалентной задачи ЛП в канонической форме. Покажем это на примере.

Рассмотрим задачу ЛП вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,m_1}; \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i=\overline{m_1+1,m_2}; \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,\ i=\overline{m_2+1,m}; \tag{1.9}$$

$$x_j\geq 0, j=\overline{n_0+1,n}, \tag{1.10}$$

где $1<m_1<m_2<m,\ 1<n_0<n.$

Для задачи (1.6) - (1.10) нарушаются все условия **а)**- **в)**. Сведем данную задачу к задаче ЛП в канонической форме.

1. Положим $\bar{c}_j := c_j, j = \overline{1,n}$. Тогда минимизация функции $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ эквивалентна максимизации функции $\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j$.

В результате получаем эквивалентную задачу вида

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \to \max; \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1, m_1}; \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{m_1+1, m_2}; \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = \overline{m_2+1, m}; \\
x_j \ge 0, j = \overline{n_0+1, n}.
\end{gathered} \tag{1.11}$$

Для данной задачи условие **а)** уже выполняется, но все еще нарущаются услоаи **б)** и **б)**.

2. Добьемся выполнения условия **б)**. Для этого введем новые перемнные

$$x_j, j = n+1, n+2, ..., n+(m_3 - m_1),$$

и ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{m_1+1, m_2};$$

заменим на эквивалентные

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+(i-m_1)} = b_i,\ x_{n+(i-m_1)} \ge 0,\ i = \overline{m_1+1, m_2};$$

и ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = \overline{m_2+1, m};$$

заменим на эквивалентные

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+(i-m_1)} = b_i,\ x_{n+(i-m_1)} \geq 0,\ i = \overline{m_2+1, m}.$$

Положим

$$\bar{c}_j = 0, j = n+1, n+2, ..., n+(m-m_1),$$

$$a_{ij} = 0, j \in \{n+1, n+2, ..., n+(m-m_1)\},\ i = \overline{1, m_1};$$

$$a_{ij} = 0, j \in \{n+1, n+2, ..., n+(m-m_1)\} \setminus (n+(i-m_1)),\ i = \overline{m_1+1, m};$$

$$a_{i\ n+(i-m_1))} = 1,\ i = \overline{m_1+1, m_2};\ a_{i\ n+(i-m_1))} = -1,\ i = \overline{m_2+1, m},$$

$$\bar{n} := n + (m - m_1).$$

Тогда задачу (1.11) можно записать в эквивалентном виде

$$\sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{c}_j x_j \to \max; \tag{1.12}$$

$$\sum_{j=1}^{\bar{n}} a_{ij}x_j = b_i,\ i = \overline{1, m}; \tag{1.13}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{n_0+1, \bar{n}}. \tag{1.14}$$

Для данной задачи условия **а)** и **б)** выполняются, но все еще нарущаются условие **в)**.

3. Добьемся выполнения условия **в)**. Для этого исключим переменные x_j, $j = \overline{1, n_0}$ из ограничений-равенств (1.13) и целевой функции (1.12) .

Покажем, как это можно сделать на примере переменной x_1

I) Если $\bar{c}_1 = 0$ и $a_{i1} = 0, i = \overline{1, m},$ то переменная x_1 уже исключена из задачи (1.12)-(1.14),

т.к. в ней все суммы $\sum_{j=1}^{\bar{n}}$ можно заменить на $\sum_{j=2}^{\bar{n}}$ и рассматривать вместо переменных x_j, $j = \overline{1, n}$, только переменные x_j, $j = \overline{2, n}$.

II) Если $\bar{c}_1 \neq 0$ и $a_{i1} = 0, i = \overline{1, m},$ то задача (1.12)-(1.14) не имеет решения,

т.к. ее целевая функция неограничена сверху на множестве допустимых планов.

III) Предположим, что найдется такой индекс, что .

$$a_{i_0 1} \neq 0.$$

Без ограничения общности предположим, что $i_0 = 1$, т.е. $a_{11} \neq 0$.

Тогда в силу первого ограничения в (1.13) выразим x_1 через остальные пременные x_j, $j = \overline{2, ..., n}$:

$$x_1 = b_1/a_{11} - \sum_{j=2}^{\bar{n}} a_{ij}x_j/a_{11}.$$

Подставим полученное выражение для x_1 в ограничения-равенства (1.13) при $i = 2, ..., m$ и в целевую функцию (1.12) и приведем подобные.

В результате получим эквивалентную задачу вида

$$\sum_{j=2}^{\bar{n}} \bar{\bar{c}}_j x_j \to \max; \tag{1.15}$$
$$\sum_{j=2}^{\bar{n}} \bar{a}_{ij}x_j = \bar{b}_i,\ i = \overline{2, m};$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{n_0 + 1, \bar{n}},$$

где

$$\bar{\bar{c}}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_1 a_{1j}/a_{11},\ \bar{a}_{ij} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}/a_{11},\ i = 2, ..., m; j = 2, ..., \bar{n}.$$

Задача (1.15) получилась из задачи (1.12)-(1.14) в результате исключений переменной x_1, для которой не было прямого ограничения, и i_0-го ограничения, в котором коэффициент $a_{i_0 1} \neq 0$.

В задаче (1.15) количество пpеременных x_j, не удовлетворяющих условию **в)**, уменьшилось на 1. Если $n_0 > 2$, т.е. если в задаче (1.15) остались переменные, не удовлетворяющие условию **в)**, то аналогичным образам исключаем из задачи (1.15) переменную x_2.

Таким образом, выше было показано, что любую задачу ЛП можно свести к эквивалентной задаче ЛП в канонической форме.

Поэтому без ограничения общности всегда можно считатью, что рассматриваемая задача уже записана в канонической форме, ибо в противном случае этого всегда можно добиться, применяя описанную выше процедуру.
