
Индивидуальная практическая работа №2: Линейно-квадратичные задачи оптимального управления

Цель работы --- Разработка и программная реализация алгоритма решения линейно-квадратичных задач оптимального управления методом сведения к задаче квадратичного программирования

Для выполнения данной работы необходимо осуществить следующие шаги.

I) Изучить алгоритм решения задачи квадратичного программирования и запрограммировать этот метод.

Теоретический материал см. пункт 2.2 темы (модуля) №2.

Примеры, иллюстрирующие процесс решения задач квадратичного программирования (подробное описание всех итераций) приведены в разделе "Иллюстративные примеры к теме № 2". Работу запрограммированного алгоритма следует проверить на приводимых там же задачах для самостоятельного решения.

II) Изучить алгоритм сведения линейно-квадратичные задачи оптимального управления к задаче квадратичного программирования и запрограммировать этот алгоритм.

Теоретический материал см. в теме (модуле) №4, подраздел "Задачи оптимального управления".

Примеры, иллюстрирующие работу метода сведения линейно-квадратичной задачи оптимального управления к задач квадратичного программирования (подробное описание всех итераций) приведены в разделе "Иллюстративные примеры к теме № 4" , в подразделе "Задачи оптимального управления". Работу запрограммированного метода следует проверить на приводимых тамже задачах для самостоятельного решения.

III) Решить одну конкретную линейно-квадратичную задачу оптимального управления (см. задачи ниже) методом сведения к задаче квадратичного программирования, используя программы, реализованные на шагах I) и II).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Решить задачу оптимального управления вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x'(t_*)Dx(t_*) + c'x(t_*) &\rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \quad x(t_0) = x^*, \quad Hx(t_*) = g, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in [t_0, t_*], \end{aligned} \tag{2.1}$$

со следующими данными

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \quad t_* = 6, \\ D &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 17 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 0.5 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ x^* &= \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad H = (1 \ 1 \ 1), \quad g = -6.5139. \end{aligned}$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.1](#).

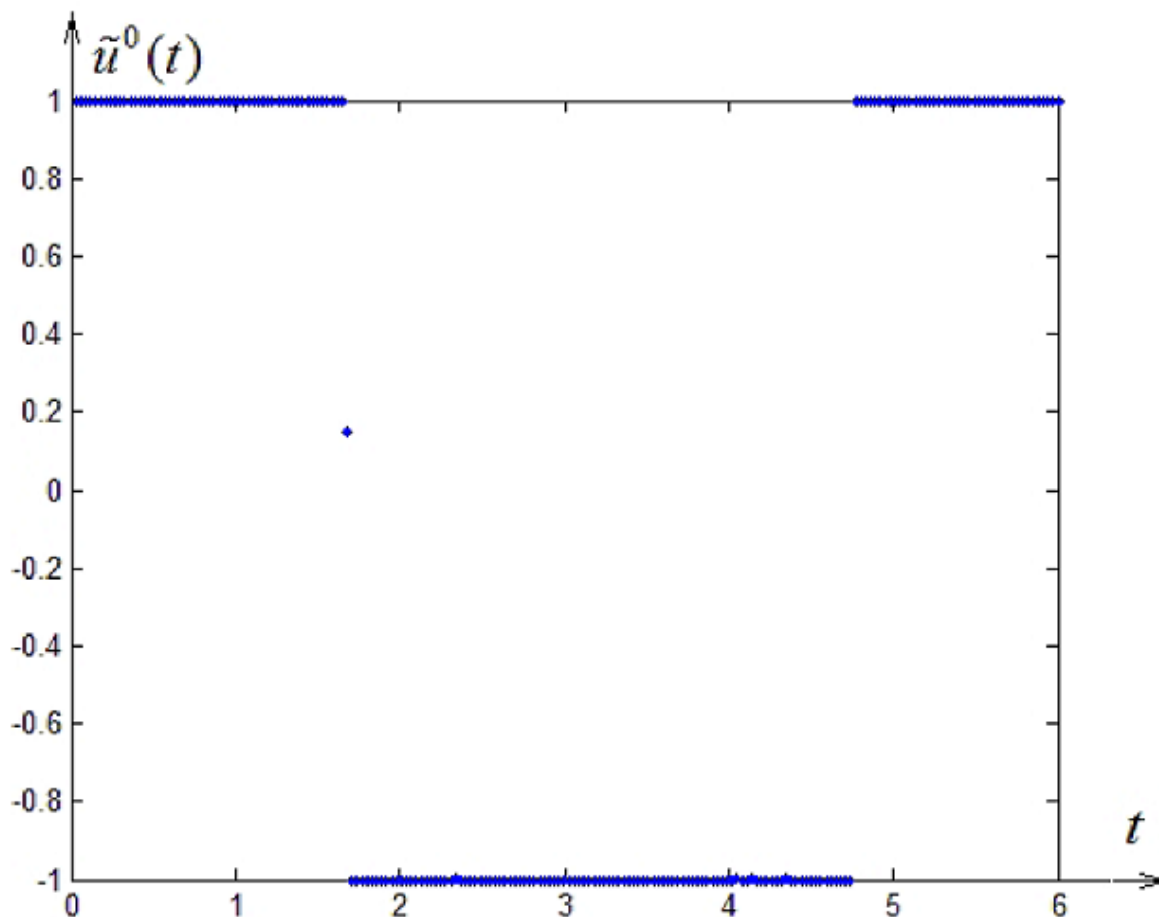


Рис.1.

Задание 2. Решить задачу оптимального управления вида [\(2.1\)](#) со следующими данными

$$t_0 = 0, t_* = 10,$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 17 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = 0.5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$x^* = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} -198.0 \\ -192.0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.2](#).

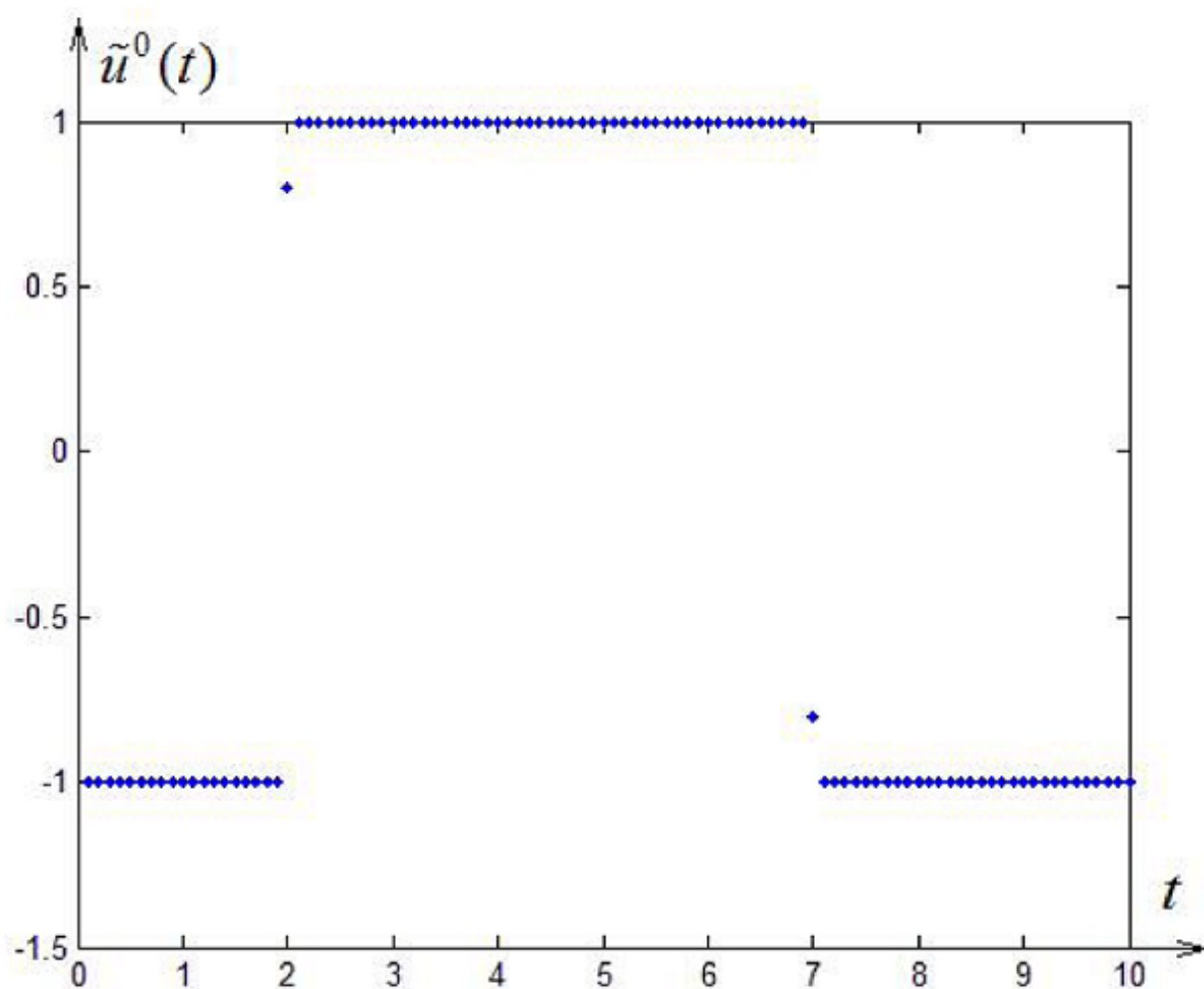


Рис.2.

Задание 3. Решить задачу оптимального управления вида [\(2.1\)](#) со следующими данными

$$n = 4, m = 2, t_0 = 0, t_* = 10,$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 5 & 10 \\ 10 & 26 & -5 & 19 \\ 5 & -5 & 18 & 0 \\ 10 & 19 & 0 & 18 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x^* = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -21.3333 \\ -35.3333 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.3](#).

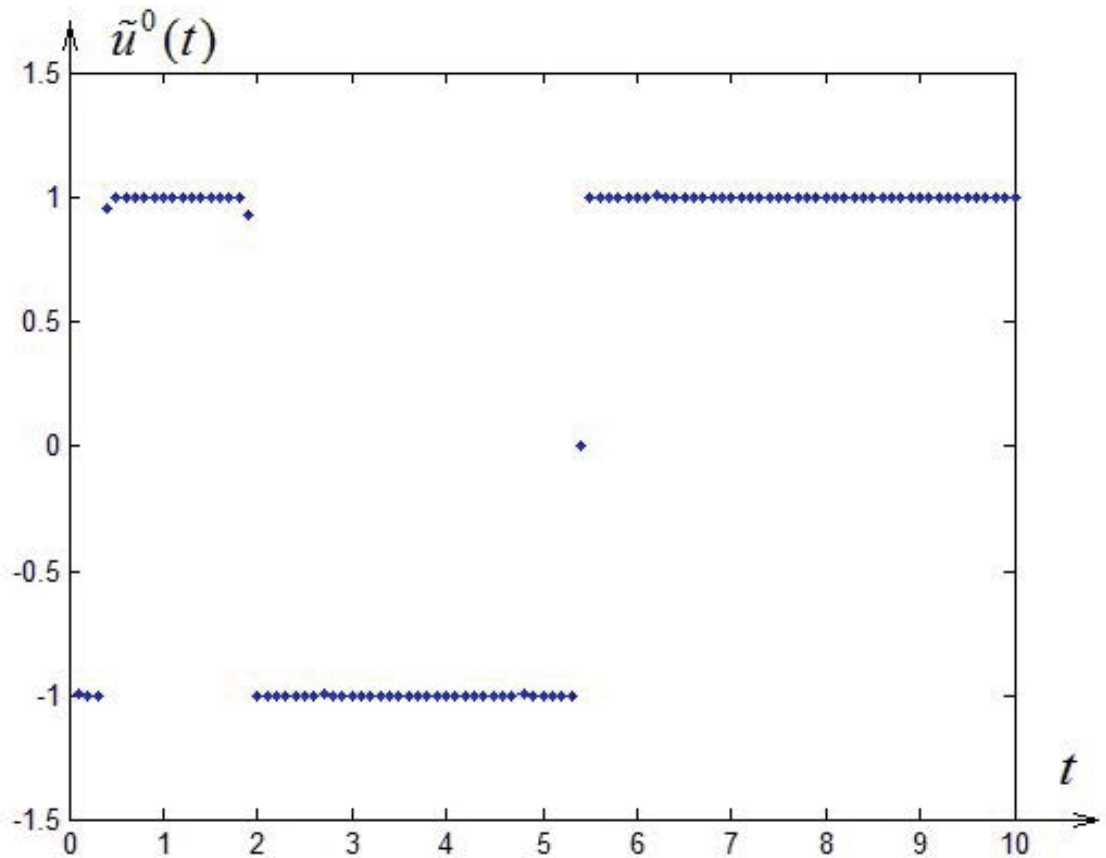


Рис.3.

Задание 4. Решить задачу оптимального управления вида [\(2.1\)](#) со следующими данными

$$n = 4, m = 2, t_0 = 0, t_* = 8,$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 18 & -6 \\ 1 & -1 & -6 & 6 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 894.3473 \\ 964.9185 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.4](#).

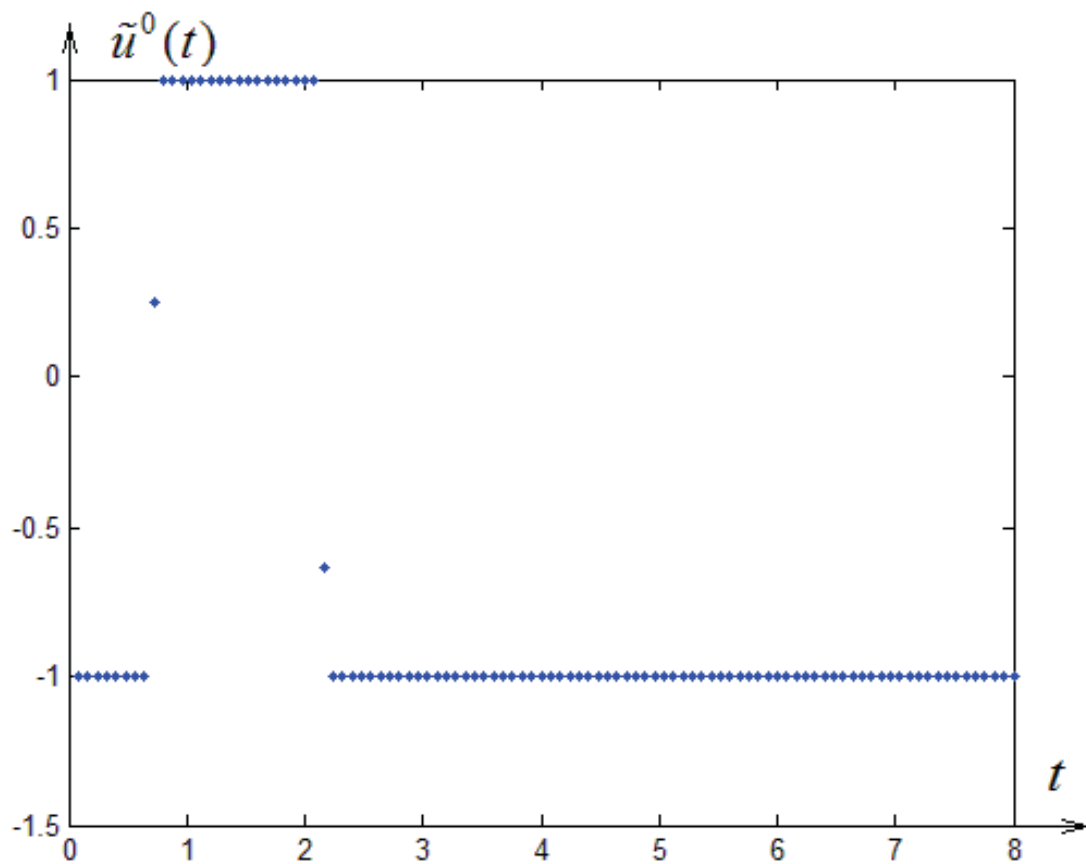


Рис.4.

Задание 5. Решить задачу оптимального управления вида [\(2.1\)](#) со следующими данными

$$n = 4, m = 2, t_0 = 0, t_* = 8,$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} -72.7564 \\ -207.8497 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.5](#).

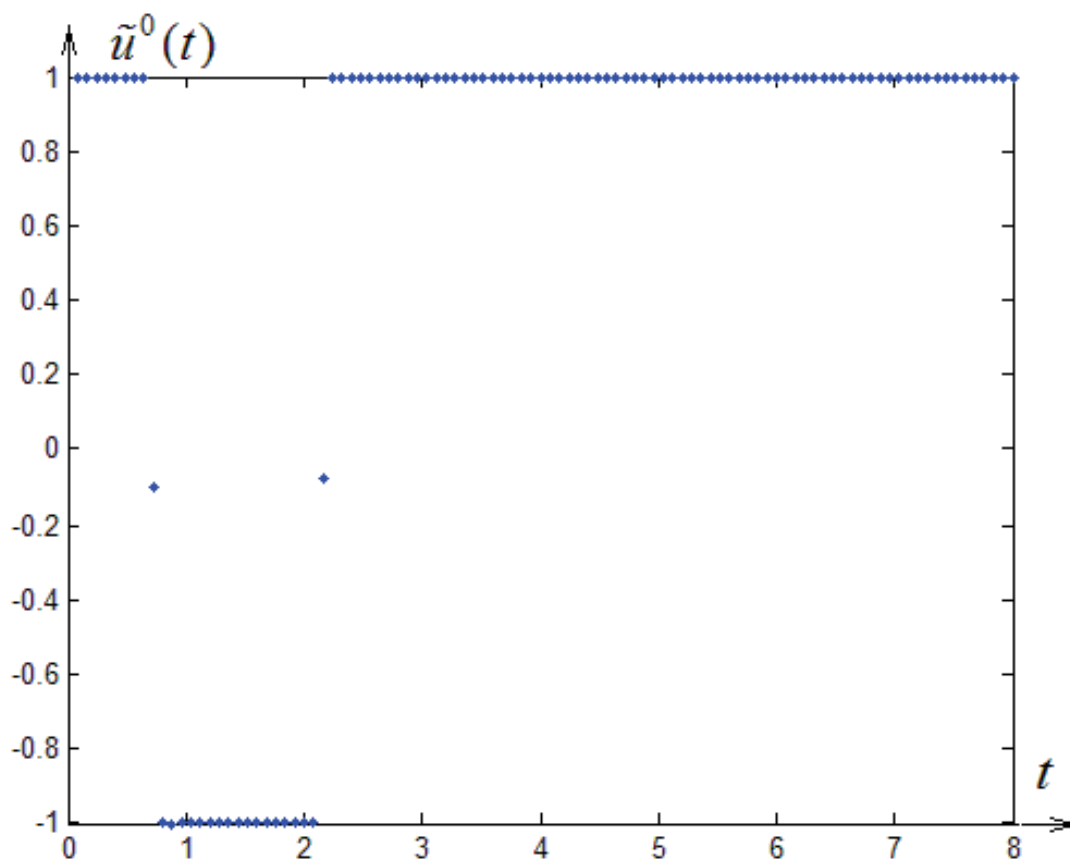


Рис.5.

Задание 6. Решить задачу оптимального управления вида

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \|x(t_*) - y^*\|^2 \rightarrow \min, \\
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \quad t \in [0, t_*]; \quad x(t_0) = x_0, \quad Hx(t_*) = g; \\
 |u(t)| &\leq 1, \quad t \in [0, t_*],
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

со следующими данными

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 0, \quad t_* = 5, \\
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
 H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 247.6481 \\ -248.6481 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.6](#).

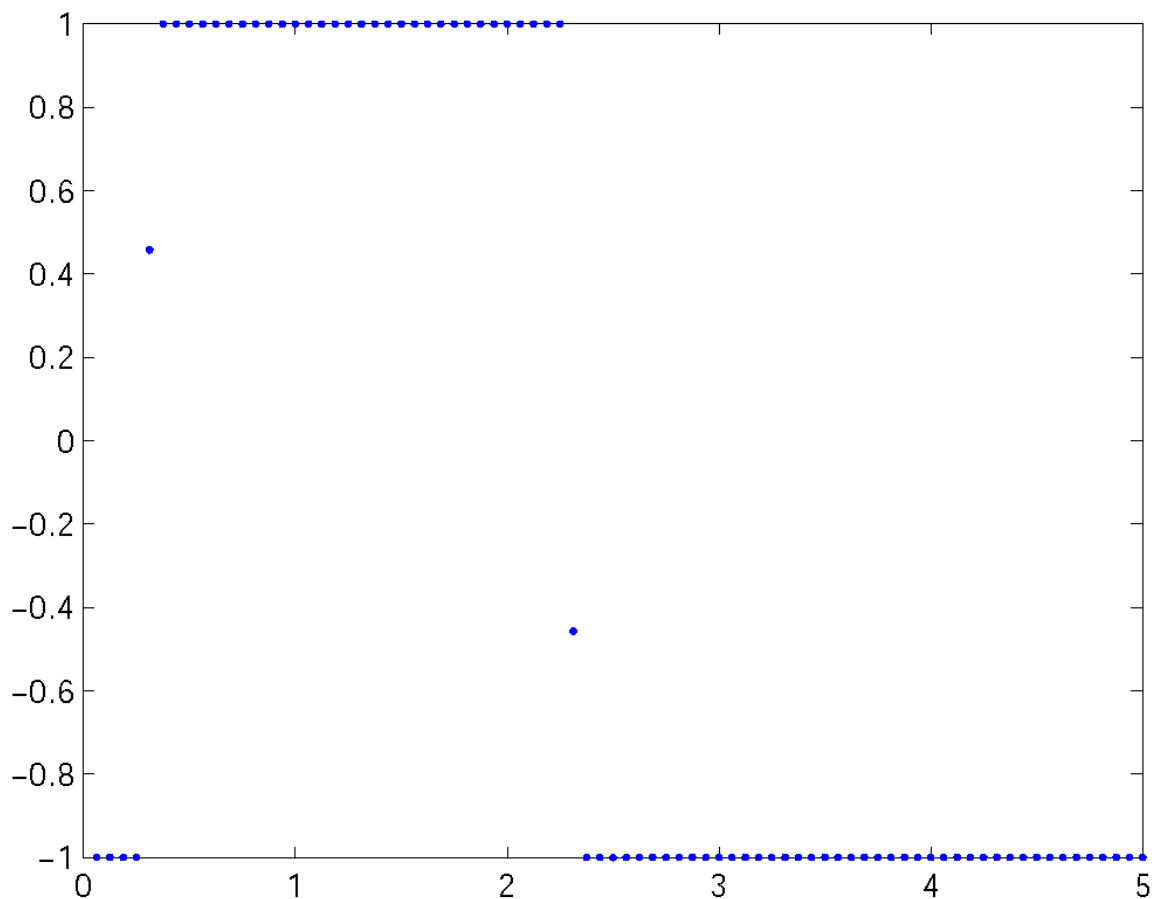


Рис.6.

Задание 7. Решить задачу оптимального управления вида (2.2) со следующими данными

$$t_0 = 0, \quad t_* = 4,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0.3455 \\ 1.6545 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на Рис.7.

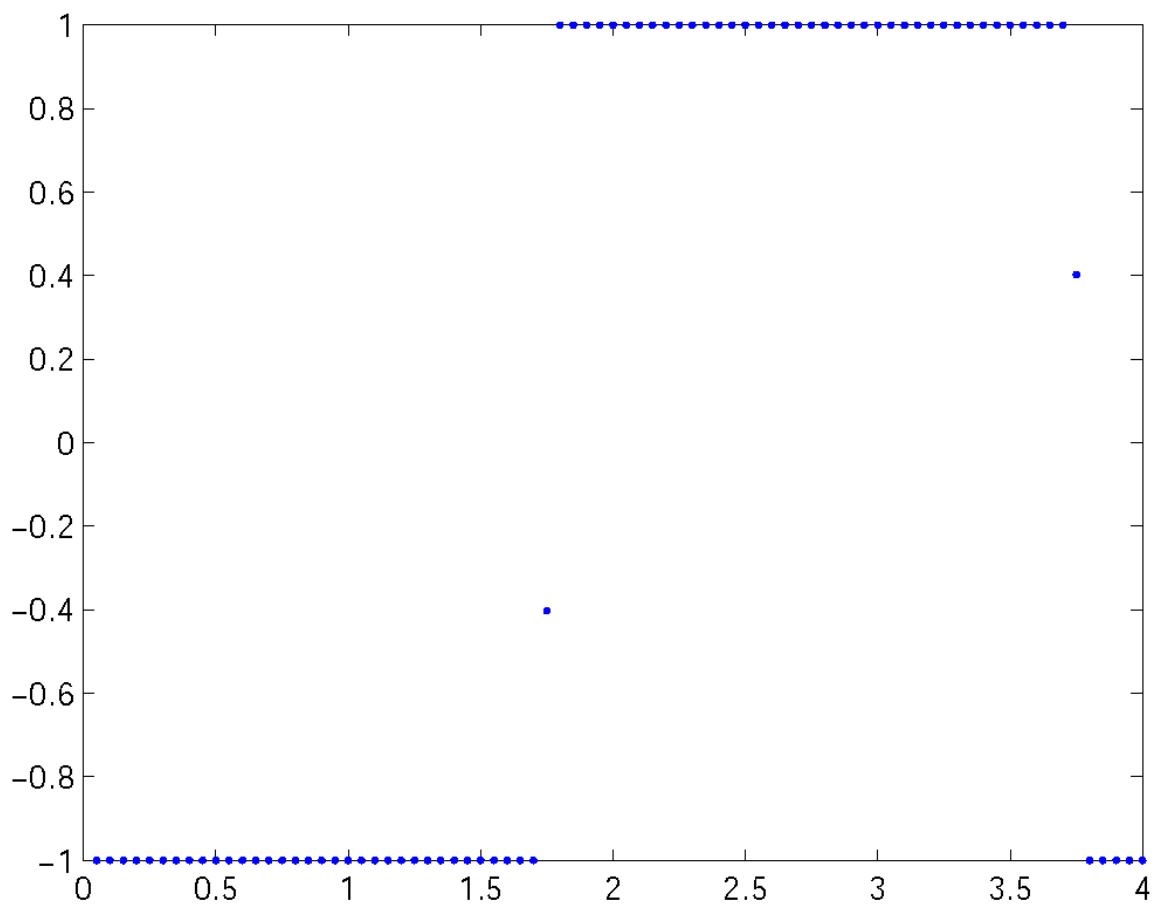


Рис.7.

Задание 8. Решить задачу оптимального управления вида (2.2) со следующими данными

$$t_0 = 0, t_* = 6,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} -43.7345 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на Рис.8.

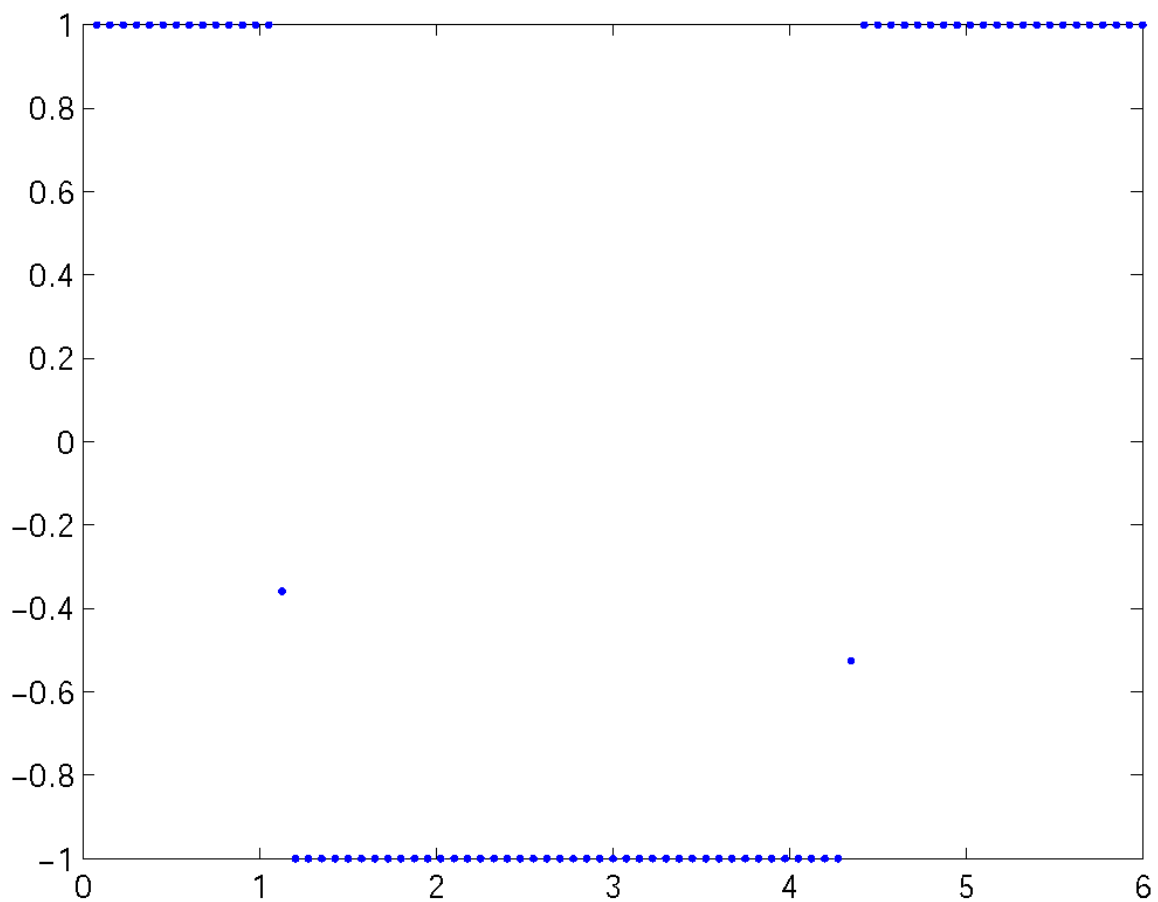


Рис.8.

Задание 9. Решить задачу оптимального управления вида (2.2) со следующими данными

$$t_0 = 0, t_* = 4,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на Рис.9 .

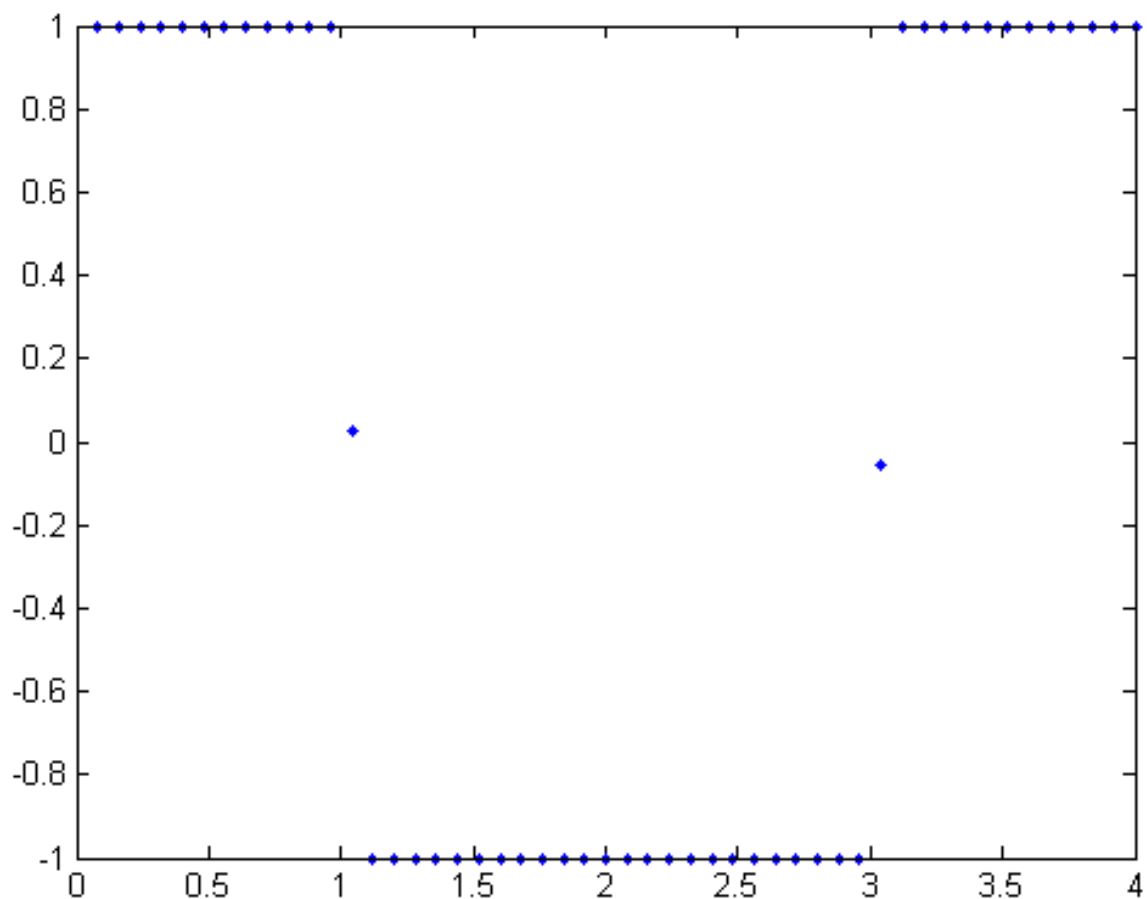


Рис.9.

Задание 10. Решить задачу оптимального управления вида (2.1) со следующими данными

$$t_0 = 0, t_* = 6,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 8.6667 \\ 33.6667 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.10](#).

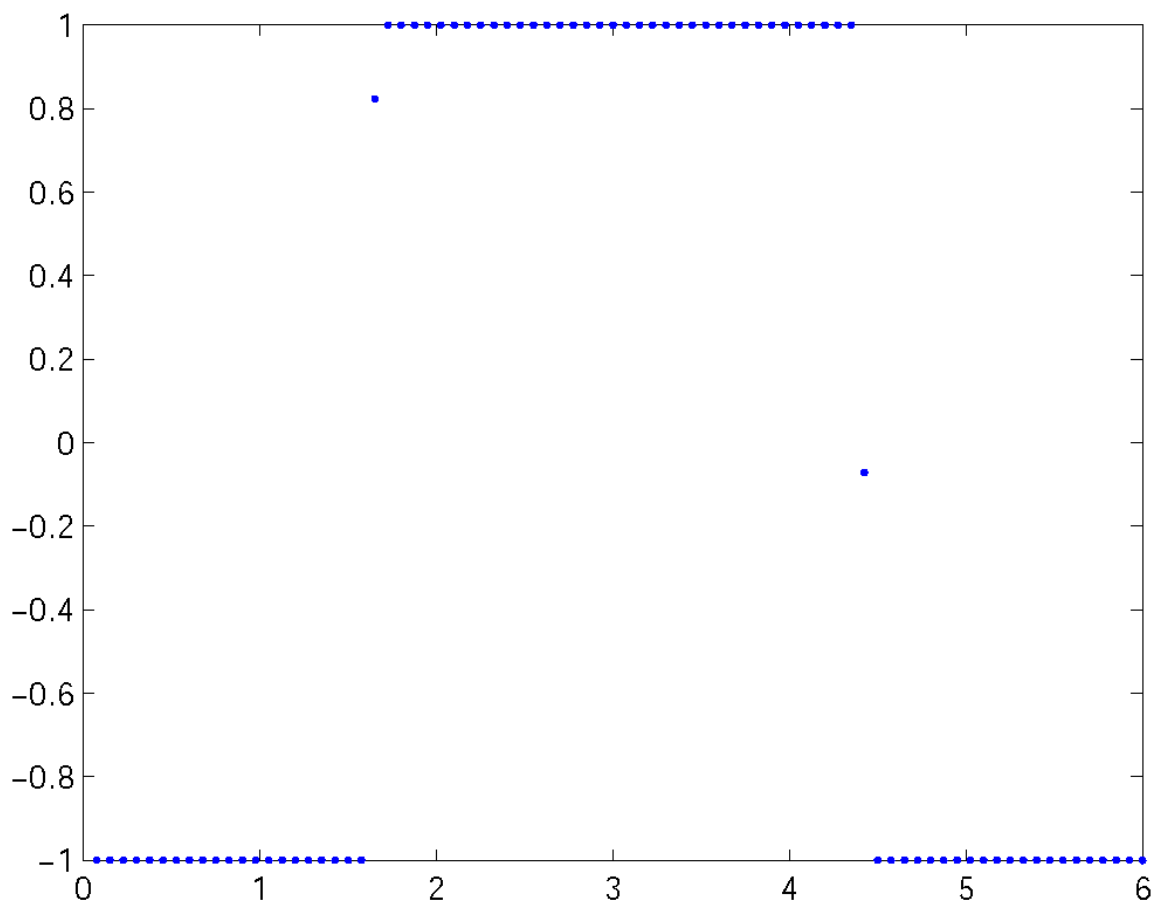


Рис.10.

Задание 11. Решить задачу оптимального управления вида [\(2.1\)](#) со следующими данными

$$t_0 = 0, \quad t_* = 8,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 27 & 0 & -27 & 9 \\ 0 & 9 & 0 & -9 \\ -27 & 0 & 45 & 0 \\ 9 & -9 & 0 & 18 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.11](#).

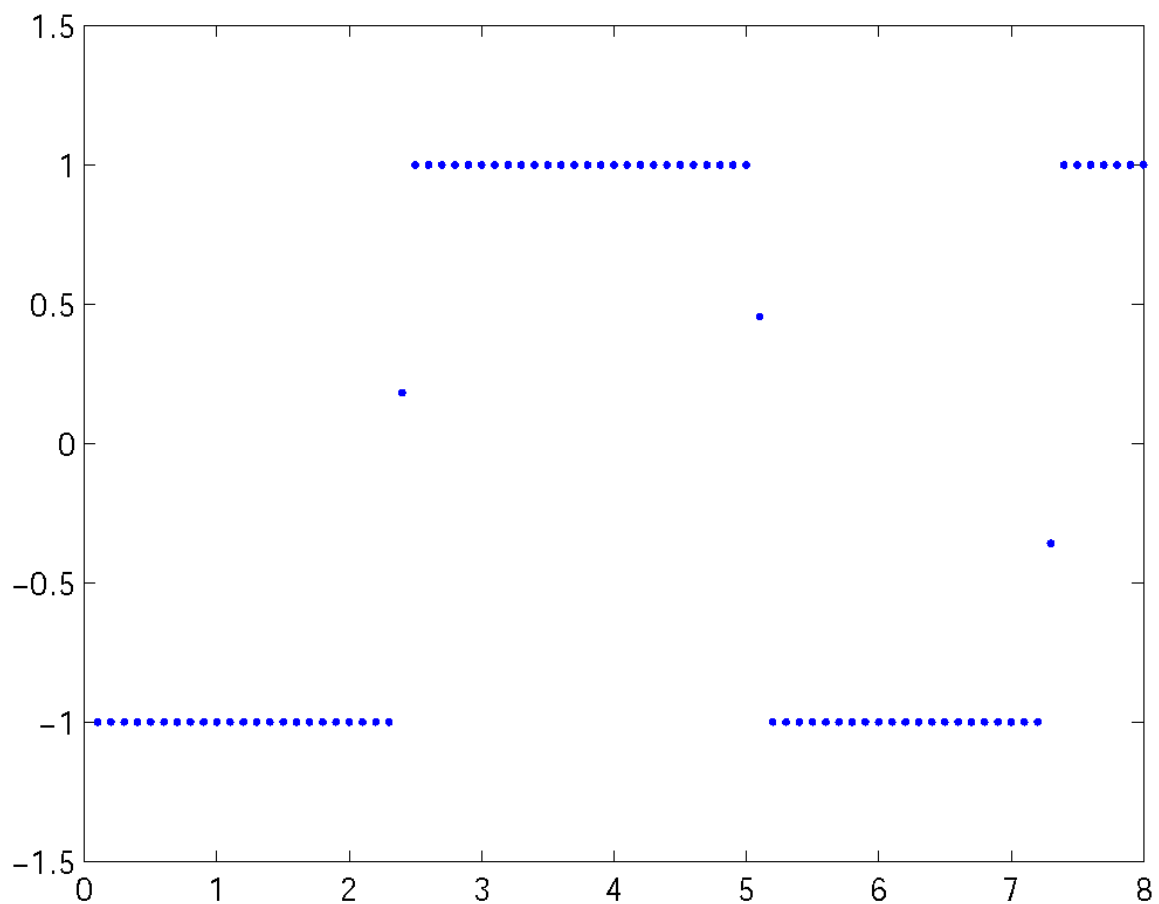


Рис.11.

Задание 12. Решить задачу оптимального управления вида [\(2.1\)](#) со следующими данными

$$t_0 = 0, \quad t_* = 14,$$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.12](#).

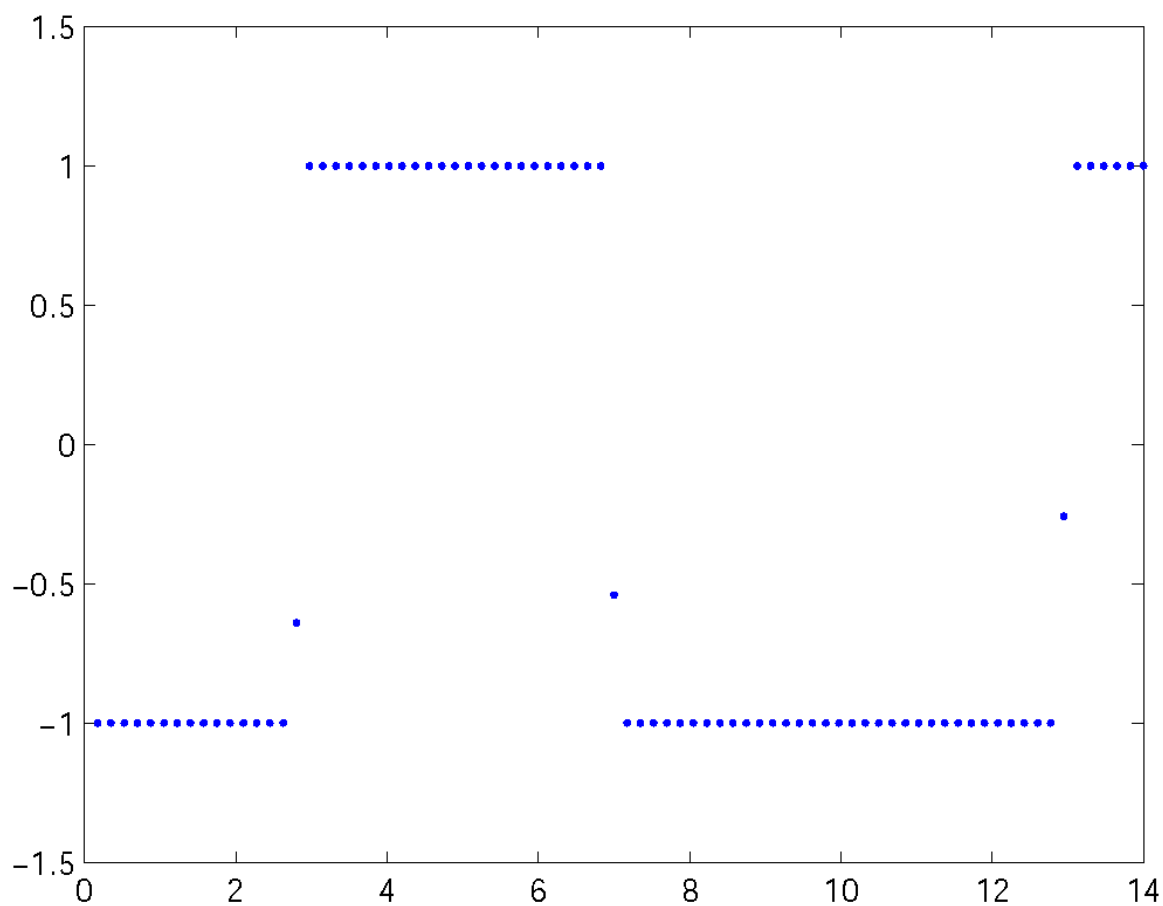


Рис.12.

Задание 13. Решить задачу оптимального управления вида (2.1) со следующими данными

$$t_0 = 0, \quad t_* = 6,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 604 \\ 202 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.13](#).

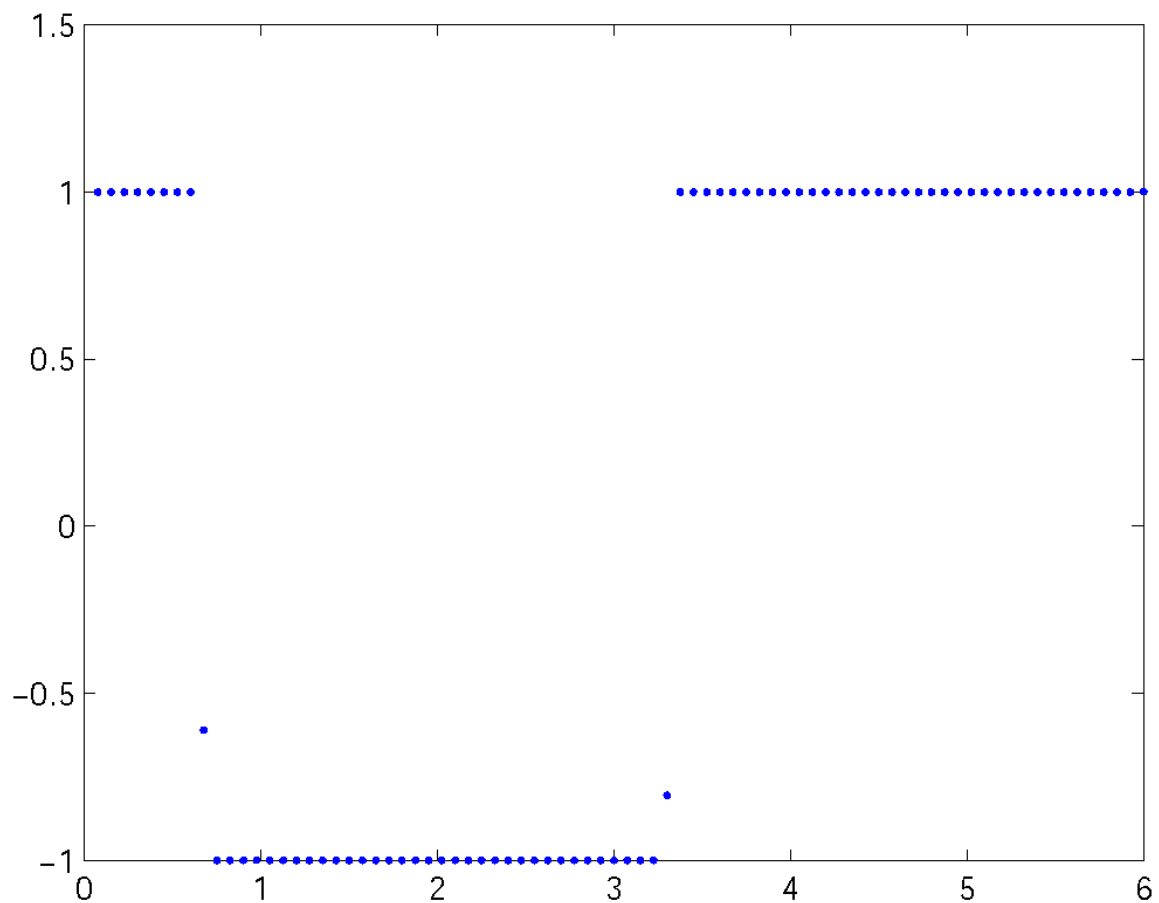


Рис.13.

Задание 14. Решить задачу оптимального управления вида [\(2.1\)](#) со следующими данными

$$t_0 = 0, \quad t_* = 6,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 70 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.14](#).

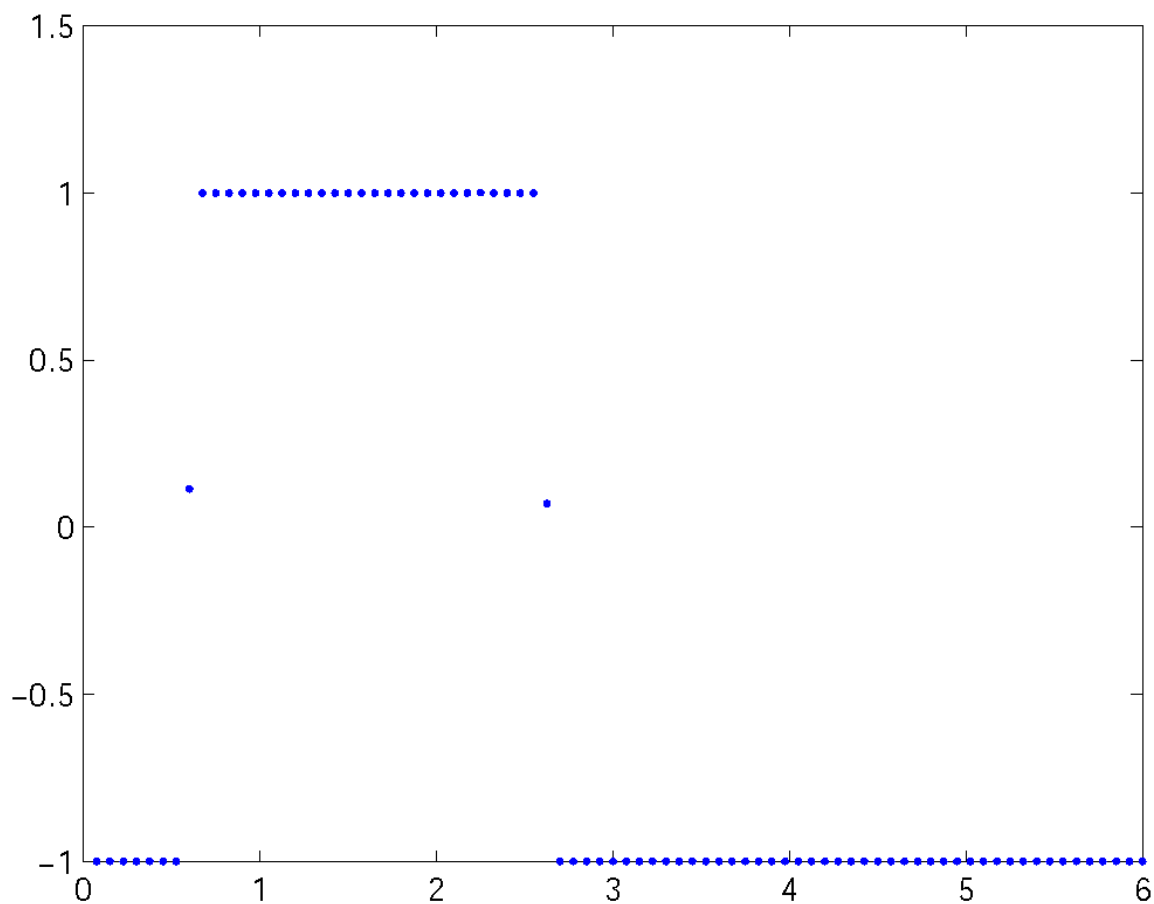


Рис.14.

Задание 15. Решить задачу оптимального управления вида [\(2.1\)](#) со следующими данными

$$t_0 = 0, \quad t_* = 6,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 195.0 \\ 65.0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, приведен на [Рис.15](#).

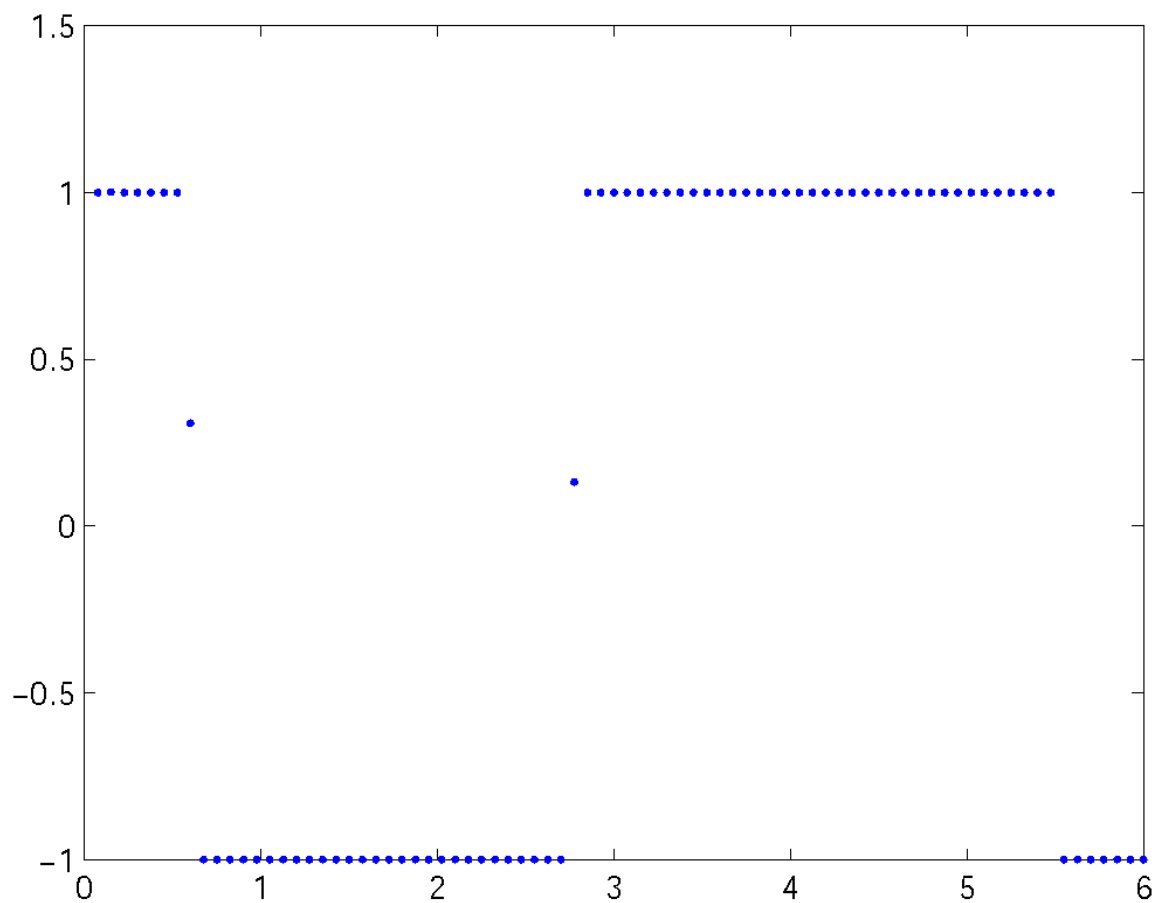


Рис.15.

