5.2 Задача о максимальном потоке

5.2.1. Связь задачи о максимальном потоке с задачей о потоке минимальной стоимости

Как отмечалось в предыдущем параграфе, математическая модель задачи о максимальном потоке имеет вид (12). Покажем, что задача (12) является частным случаем задачи о потоке минимальной стоимости.

Рассмотрим расширенную сеть $\overline{S} = \{I, \bar{U}\}$, которая получается из исходной сети $S = \{I, \bar{U}\}$ добавлением дуги (t, s) : $\overline{U} = U \bigcup (t, s)$.

Положим $a_i = 0, ; i \in I, c_{ij} = 0, \ (i, j) \in U$, $c_{ts} = -1, \ d_{ts} = \infty$ и рассмотрим задачу о потоке минимальной стоимости на сети $\overline{S} = \{I, \overline{U}\}$:

$$\sum_{(i,j)\in\overline{U}} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I; \tag{13}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \quad (i, j) \in \bar{U}.$$

Очевидно, что задача (13) эквивалентна задаче (14). Следовательно, для построения максимального потока можно воспользоваться методом потенциалов, применив его для решения задачи (13), которая эквивалентна задаче о максимальном потоке.

Метод потенциалов рассчитан на решение произвольной задачи вида (13), а у нас задача (13) имеет ряд специальных особенностей. Учёт этих особенностей позволяет разработать для её решения и другие методы. **Замечание.** Если $\nu^0 = x_{ts}^0 > 0$, то дуга $(t, s) \in \bar{U}_B^0$, т.е. принадлежит оптимальному базису. Следовательно, оптимальное дерево имеет следующую структуру

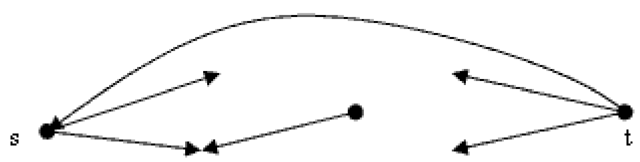

Рис. 4.1

Рассмотрим задачу, двойственную к (12). Задача, двойственная к (12), имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(i,j)\in U} d_{ij}\delta_{ij} \to \min_{u,\delta}, \\
&u_i - u_j + \delta_{ij} \geq 0, \quad (i,j)\in U, \\
&u_t - u_s \geq 1, \quad u_s = 0, \quad \delta_{ij} \geq 0, \quad (i,j)\in U.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Теоретически возможно рассматривать переменные δ_{ij} как некие «переменные-индексаторы». Расшифруем смысл этого названия. Если в оптимальном двойственном решении $\delta_{ij} > 0$, то дуга (i, j) является элементом множества дуг, образующих «узкое место» в сети, т.е. именно эти дуги ограничивают значение максимального потока. Следует заметить, что таких узких мест может быть несколько.

5.2.2 Максимальный поток и минимальный разрез

С понятием максимального потока тесно связано понятие разреза.

Рассмотрим любое множество узлов I_* обладающее свойством: $I_* \subset I, s \in I_*$, $t \notin I_*$. По нему построим множество дуг

$$\omega = (I_*) = \{(i,j)\in U : i \in I_*,\ j \notin I_*\}.$$

Совокупность дуг $\omega(I_*)$ называется *разрезом* сети S , порождённым множеством узлов I_*. Действительно, удаление дуг $\omega(I_*)$ из сети S разрывает все пути, ведущие из s в t . Сеть S } становится как бы разрезанной на две части: часть с узлом s и часть с узлом t и нет ни одного пути из s в t.

Число

$$\rho(\omega) = \sum_{(i,j)\in\omega(I_*)} d_{ij} \tag{15}$$

называется *пропускной способностью разреза* $\omega(I_*)$. Разрез с минимальной пропускной способностью называется *минимальным разрезом*.

Покажем, что каждому разрезу $\omega(I_*)$ соответствует двойственный план, на котором значение целевой функции двойственной задачи (3) равно пропускной способности данного разреза.

Действительно, положим

$$u_i = 0,\ i \in I_*;\ u_i = 1, i \in I \setminus I_*. \tag{16}$$

Числа δ_{ij}, $(i,j)\in U$, определим таким образом, чтобы при заданных числах (16) выполнялись ограничения задачи (14) и значение ее целевой функции было минимальным:

$$\delta _{ij} =0,\, \, \mbox{ if }\, \, u_{i} -u_{j} \ge 0;\, \, \delta _{ij} =-(u_{i} -u_{j}), \, \mbox{ if }\, \, u_{i} -u_{j} <0;\, \, (i,j)\in U. \tag{17}$$

Из соотношений (16) и (17) получаем

$$\delta_{ij} = 1,\ (i,j) \in \omega(I_*);\ \delta_{ij} = 0,\ (i,j) \in U \backslash \omega(I_*).$$

Следовательно,

$$\sum_{(i,j)\in U} \delta_{ij} d_{ij} = \sum_{(i,j)\in\omega(I_*)} d_{ij} = \rho(\omega(I_*)). \tag{18}$$

Из теории двойственности мы знаем, что значение прямой целевой функции на любом допустимом плане меньше значения двойственной целевой функции на любом двойственном допустимом плане. Отсюда с учётом (18) делаем вывод, что

$$\nu \le \rho(\omega(I_*))$$

для любого допустимого потока v и любого разреза $\omega(I_*)$. Покажем теперь, что существуют такие ν^0 и I_*^0, для которых $v^0 = \rho(\omega(I_*))$.

Действительно, выше мы отмечали, что задача о максимальном потоке эквивалентна специальной задаче о потоке минимальной стоимости (13). Предположим, что мы решим эту задачу методом потенциалов. В результате получим некоторый оптимальный поток

$$\nu^0 = x_{ts}^0,\quad x_{ij}^0,\quad (i,j) \in U,$$

и соответствующий ему оптимальный базис-дерево

$$\bar{U}_B \subset \overline{U} = U \bigcup (t,s).$$

Выше мы также отмечали, что $(t,s) \in \bar{U}_B$ и множество $\bar{U}_B$ имеет структуру, приведенную на рис. 4.1.

Убрав дугу (t,t) из $\bar{U}_B$, мы получаем две компоненты связности: содержащую узел

$$s \to \{\ I_*^0, U_*^0\ \}$$

и содержащую узел

$$t \to \{I \backslash I_*^0, (U \backslash (t,s)) U_*^0\}.$$

По дугам U_B подсчитаем потенциалы, согласно правилам

$$u_i^0 - u_j^0 = c_{ij}, \quad (i,j) \in U, \quad u_s^0 = 0. \tag{19}$$

В силу специфики данной сети из (19) получаем

$$u_i^0 = 0, \quad i \in I_*^0; \quad u_i^0 = 1, \quad i \in I \backslash I_*^0. \tag{20}$$

Положим

$$\delta _{ij}^{0} =0,\, \,\mbox{ if }\, \, u_{i}^{0} -u_{j}^{0} \ge 0;\, \, \delta _{ij}^{0} =-(u_{i}^{0} -u_{j}^{0}),\, \, \, \mbox{ if }\, u_{i}^{0} -u_{j}^{0} <0,\, \, (i,j)\in U. \tag{21}$$

Легко проверить, что построенная совокупность (20), (21) -- план задачи (14).

Из теории двойственности мы знаем, что этот план -- оптимальный двойственный план и имеет место равенство

$$\nu^0 = \sum_{(i,j) \in U} d_{ij} \delta_{ij}^0. \tag{22}$$

Из (22) с учетом (20), (21) получаем, что

$$\nu^0 = \sum_{(i,j) \in U} d_{ij} \delta_{ij}^0 = \sum_{\substack{(i,j) \in U, \\ i \in I_*^0, \, j \in I \backslash I_*^0}} d_{ij} = \rho(\omega(I_*^0)).$$

Таким образом, мы доказали теорему о максимальном потоке и минимальном разрезе, которая формулируется следующим образом.

Теорема. *Величина максимального потока в сети S равна пропускной способности минимального разреза на сети* S.

Значение теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе заключается в том, что максимальный поток в сети можно найти, вычисляя пропускные способности всех разрезов и выбирая среди них минимальный. Конечно, при решении задачи о максимальном потоке этот результат имеет небольшое практическое значение, так как мы не получаем никакой информации о самих величинах x_{ij} дуговых потоков. Однако данный результат важен с теоретической точки зрения и часто используется при разработке сложных потоковых алгоритмов и при проверке решения на оптимальность.

Основываясь на полученных результатах, можно дать следующую интерпретацию двойственной задачи (14): среди всех разрезов сети S найти разрез с минимальной пропускной способностью.

5.2.3 Метод Форда-Фалкерсона (построение максимального потока)

Опишем алгоритм решения задачи о минимальном потоке, известный в литературе как метод Форда--Фалкерсона. Для описания алгоритма надо ввести два понятия: пометки и увеличивающего пути. Пометка узла используется для указания как величины потока, так и источника потока, вызывающего изменение текущей величины потока по дуге, т.е. указывается узел, с помощью которого помечается данный узел.

Увеличивающий путь потока из s в t определяется как связная последовательность прямых и обратных дуг, по которым из s в t можно послать несколько единиц потока. Поток по каждой прямой дуге при этом увеличивается, не превышая её пропускной способности, а поток по каждой обратной дуге уменьшается, оставаясь при этом неотрицательным.

Алгоритм составим из следующих этапов.

Этап 1. Определим начальный поток следующим образом:

$$v = 0, \quad x_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U.$$

Этап 2. Найдем увеличивающий путь в сети S с заданным потоком. Если такой путь существует, то перейдем к этапу 3. В противном случае STOP: текущий поток является максимальным.

Этап 3. Увеличим поток, изменив при этом дуговые потоки. Используя новый поток, перейдем опять к этапу 2.

Опишем алгоритм построения увеличивающего пути. Считаем, что заданы дуговые потоки $x_{ij}, \ (i, j) \in U$.

Шаг 1. Полагаем $I_c = 1, \ , I_t = 1, \ L = \{s\}, g(s) = 0, i = s, p_s = 1$. Здесь I_c -- счётчик итераций, I_t -- счётчик меток, L -- множество помеченных узлов, $g(j)$ -- метка узла j, p_j -- вторая метка узла j .

Шаг 2. Рассмотрим непомеченный узел j }, для которого существует дуга $(i, j) \in U$ с $x_{ij} < d_{ij}$. Помечаем узел j , полагая $g(j) = i, \ I_t := I_t + 1, \ p_j = I_t$. Так поступаем с каждым непомеченным узлом j , для которого существует дуга $(i, j) \in U$ с $x_{ij} < d_{ij}$. Помеченные узлы добавляем ко множеству помеченных узлов L .

Шаг 3. Рассмотрим непомеченный узел j, для которого существует дуга $(j,i) \in U$ с $x_{ji} > 0$. Помечаем узел j, полагая $g(j) = -i,\ I_t := I_t + 1,\ p_j = I_t$. Так поступаем с каждым непомеченным узлом j, для которого существует дуга $(j,i) \in U$ с $x_{ji} > 0$. Помеченные узлы добавляем ко множеству помеченных узлов.

Шаг 4. Если узел t помечен, то STOP: увеличивающий путь найден. Переходим к алгоритму восстановления пути и увеличения потока. Если узел t не помечен, то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Положим $I_c := I_c + 1$. Найдём помеченный узел j_0 с меткой $p_{j_0} = I_c$.

Если такой узел найден, то полагаем $i := j_0$ и возвращаемся к шагу 2. Если такого узла найти не удалось, то не существует увеличивающего пути из s в t. STOP.

Опишем алгоритм восстановления пути и увеличения потока.

По условию узел t помечен. Пусть $q(t) = i_1$, следовательно, из узла i_1 попадаем в узел t по прямой дуге (i_1, t). Полагаем

$$\alpha_1 = d_{i_1 t} - x_{i_1 t}.$$

Рассмотрим метку узла i_1. Предположим, что $q(i_1) = i_2$. Полагаем

$$\alpha_2 := \min\{\alpha_1,\ d_{i_2 i_1} - x_{i_2 i_1}\}.$$

Если $q(i_1) = -i_2$, то полагаем

$$\alpha_2 := \min\{\alpha_1,\ x_{i_1 i_2}\}$$

(в последнем случае в увеличивающем пути дуга (i_1, i_2) является обратной). И так далее, пока ни получим на некотором шаге

$$q(i_m) = \pm s, \quad \alpha_m := \begin{cases} \min\{\alpha_{m-1}, \quad d_{s i_m} - x_{s i_m}\} & \text{if} \quad q(i_m) = s, \\ \min\{\alpha_{m-1}, \quad x_{i_m s}\} & \text{if} \quad q(i_m) = -s. \end{cases}$$

Таким образом, увеличивающий путь проходит через узлы $s,\ i_m,\ i_{m-1},\ \ldots,\ i_2,\ i_1,\ t.$

Изменяем дуговые потоки на дугах этого пути: дуговые потоки на прямых дугах увеличиваем на α_m, дуговые потоки на обратных дугах уменьшаем на α_m, поток ν увеличиваем на α_m. STOP.

Пример.

Рассмотрим сеть, приведенную на рис. 4.2. Пропускные способности дуг d_{ij} указаны на дугах «жирными» цифрами.

Пусть на данной сети имеется допустимый поток $x = (x_{ij}, (i,j) \in U)$ величины $v = 9$. Дуговые потоки x_{ij} указаны на дугах «нежирными» цифрами. Проверим, является ли данный поток максимальным, и если нет, то построим новый поток, для которого $\bar{\nu} > \nu = 9$. Для этого осуществим итерации метода Форда--Фалкерсона.

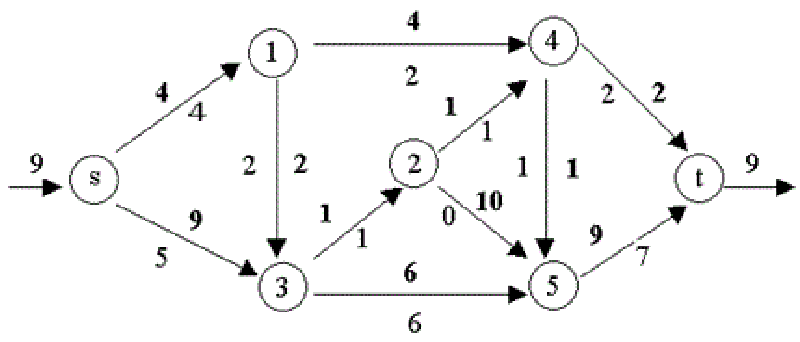

Рис. 4.2

Построение увеличивающего пути

Итерация 1

Шаг 1. Полагаем

$$I_c = 1,\ \ I_t = 1,\ \ L = \{s\},\quad g(s) = 0,\quad i = s,\quad p_s = 1.$$

Шаг 2. Из узла $i = s$ есть только одна дуга $(s, 3) \in U$, для которой $x_{s3} = 5 < 9 = d_{s3}$. Помечаем узел 3, полагая

$$I_t = 2,\ \ L = \{s,\ 3\},\quad g(3) = s,\quad p_3 = 2.$$

Шаг 3. Для узла $i = s$ нет ни одной дуги $(j,\ i) \in U$, для которой $x_{ji} > 0$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Поскольку $t \notin L$, то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1$, и, поскольку $p_3 = I_c$, то полагаем $j_0 = 3$.

Переходим к шагу 2 итерации 2, положив $i = j_0$.

Итерация 2

Шаг 2. Из узла $i = 3$ нет дуг $(i, j) \in U$, для которых $x_{ij} < d_{ij}$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Для узла $i = 3$ есть одна дуга $(1, 3) \in U$, для которой $x_{13} > 0$. Помечаем узел 1, полагая

$$I_t = 3, \quad L = \{ s, 3, 1 \}, \quad g(1) = -3, \quad p_1 = 3.$$

Шаг 4. Поскольку $t \notin L$, то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1$ =3 и находим узел $j_0 \in L$, для которого $p_{j_0} = I_c$. На данной итерации $j_0 = 1$. Переходим к шагу 2 итерации 3, полагая $i = j_0 = 1$.

Итерация 3

Шаги 2-3. С помощью узла $i = 1$ помечаем узел 4, полагаем

$$I_t = 4, \ L = \{ s, 3, 1, 4 \}, \ g(4) = 1, \ p_4 = 4.$$

Шаг 4. Узел $t \notin L$, переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1 = 4$ и находим узел $j_0 \in L$, для которого $p_{j_0} = I_c$. На данной итерации $j_0 = 4$. Переходим к шагу 2 итерации 4, полагая $i = j_0 = 4$.

Итерация 4

Шаги 2-3. С помощью узла $i = 4$ помечаем узел 2, полагая

$$I_t = 5, \ L = \{ s, 3, 1, 4, 2 \}, \ g(2) = -4, \ p_2 = 5.$$

Шаг 4. Узел $t \notin L$, переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1 = 5, \quad j_0 = 2$. Переходим к шагу 2 итерации 5, заменив i на $j_0 = 2$.

Итерация 5

Шаги 2-4. С помощью узла $i = 2$ помечаем узел 5, полагая

$$I_t = 6, \ L = \{ s, 3, 1, 4, 2, 5 \}, \ g(5) = 2, p_5 = 6.$$

Переходим к шагу 5.

Шаг 5. Полагаем $I_c := I_c + 1 = 6, \quad j_0 = 5$. Переходим к шагу 2 итерации 6, заменив i на $j_0 = 5$.

Итерация 6

Шаги 2-4. С помощью узла $i=5$ помечаем узел t, полагая $L=\{\, s,\ 3,\ 1,\ 4,\ 2,\ 5, t\,\}$, $g(t)=5$. Узел $t\in L$. STOP -- увеличивающий путь построен. Значит, имеющийся поток можно увеличить.

Переходим к алгоритму восстановления пути и увеличения потока. Применяя **алгоритм восстановления пути и увеличения потока**, получаем

$$\begin{array}{ll} q(t)=5, & \alpha_1=d_{5t}-x_{5t}=2, \\ q(5)=2, & \alpha_2=\min\{\,\alpha_1,\ 10\,\}=2, \\ q(2)=-4, & \alpha_3=\min\{\,\alpha_2,\ 1\,\}=1, \\ q(4)=1, & \alpha_4=\min\{\,\alpha_3,\ 2\,\}=1, \\ q(1)=-3, & \alpha_5=\min\{\,\alpha_4,\ 2\,\}=1, \\ q(3)=s, & \alpha_6=\min\{\,\alpha_5,\ 1\,\}=1. \end{array}$$

Увеличиваем поток вдоль построенного увеличивающего пути

$$U_n=\{\,(s,\ 3),(1,\ 3),(1,\ 4),(2,\ 4),(2,\ 5),(5,\ t)\,\},$$

изменяя дуговые потоки на дугах $(i,j)\in U$ по правилу

$$\bar{x}_{s3}=x_{s3}+\alpha_6=6, \bar{x}_{13}=x_{13}-\alpha_6=1, \bar{x}_{14}=x_{14}+\alpha_6=3,$$

$$\bar{x}_{24}=x_{24}-\alpha_6=0, \bar{x}_{25}=x_{25}+\alpha_6=1, \bar{x}_{5t}=x_{5t}+\alpha_6=8,$$

$$\bar{x}_{ij}=x_{ij}, (i,j)\in U\setminus U_n, \quad \bar{\nu}=\nu+\alpha_6.$$

Сеть S с новым потоком $\bar{x}$ приведена на рис. 4.3.

Поток $\bar{x}$ является максимальным. Действительно, применив к сети S с потоком $\bar{x}$ алгоритм построения увеличивающего пути, мы можем пометить только узлы $L=\{\, s,\ 3,\ 1,\ 4,\,\}$. После чего на шаге 5 не удается найти узел j_0, для которого $p_{j_0}=I_c$.

Легко проверить, что множество узлов L задают разрез

$$\omega(L)=\{\,(3,\ 2),(3,\ 6),(4,\ 5),(2,\ t)\,\},$$

пропускная способность которого равна $\rho(\omega(L)) = 1 + 6 + 1 + 2 = 10 = \bar{\nu}$.

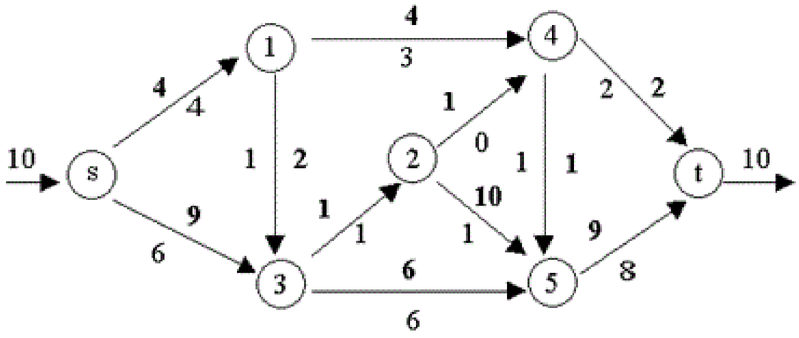

Рис. 4.3

Согласно теореме, $\bar{x}, \bar{\nu}$ -- максимальный поток, $\omega(L)$ -- минимальный разрез.