5.3 Задача о назначениях

5.3.1. Постановка задачи

Имеется n видов работ и n исполнителей, каждый из которых может выполнять любую работу. При назначении j -го работника на i -ю работу затраты предприятия равны c_{ij} . Требуется на каждую работу назначить по исполнителю таким образом, чтобы общие расходы предприятия были минимальными. Математическая модель данной задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}; \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}; \tag{23}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}.$$

Здесь $x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если на } i\text{ - ую работу не назначается } j\text{ - ый работник,} \\ 1, \text{если на } i\text{ - ую работу назначается } j\text{ - ый работник.} \end{cases}$

Задача (23) -- частный случай транспортной задачи в матричной форме. Дополнительное требование целочисленности не является существенным (в данной задаче!), так как ранее мы отмечали, что если в транспортной задаче параметры a_i, b_i, d_{ij} -- целые, то существует целочисленное решение задачи (23) и это решение можно построить с помощью классического метода потенциалов. Следовательно, для решения задачи (23) можно использовать классический метод потенциалов. Отметим, однако, что на каждой итерации метода потенциалов мы будем иметь вырожденный базисный план.

Действительно, в задаче (23) каждая компонента плана может принимать только критические значения 0 или 1, и, следовательно, согласно определению, любой допустимый план будет «полностью» вырожденным.

Можно заменить условия

$$0 \le x_{ij} \le 1,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n} \tag{24}$$

на условия

$$0 \le x_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}. \tag{25}$$

Но и в этом случае каждый базисный план будет вырожденным. Действительно, если мы начнём решение с целочисленного плана, то и на всех последующих итерациях у нас будет целочисленный план. С учётом этого заключаем, что на каждом плане только n компонент могут быть отличны от 0, а остальные равны 0. Базис состоит из $2n-1$ элементов. Следовательно, среди базисных компонент будет $n-1$ нулевых. Значит, и в случае использования ограничений (25) каждый базисный план будет вырожденным.

Хорошо известно, что вырожденность отрицательно сказывается на эффективности метода потенциалов (симплекс-метода) и при вырожденности велика вероятность зацикливания. В силу отмеченных причин, нельзя ожидать, что метод потенциалов "в чистом виде" будет эффективен для решения задачи (23). Следовательно, нужны другие методы, учитывающие ее специфику. Рассмотрим один из таких методов, получивший название "венгерский метод", так как в нем существенно используются результаты венгерского математика Эгервари.

5.3.2 Венгерский метод

По параметрам задачи (23) составим $(n \times n)$ -матрицу стоимостей $C=(c_{ij},\ j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,n})$. Предположим, что каждый элемент i -й строки складывается с действительным числом γ_i , а каждый элемент j -го столбца складывается с действительным числом δ_j . В результате такого преобразования матрицы C будет получена новая матрица стоимостей D с коэффициентами

$$d_{ij}=c_{ij}+\gamma_i+\delta_j,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}. \tag{26}$$

Из (23), (26) получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_i x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_j x_{ij}=$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{-} \sum_{j=1}^{n}\delta_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} =$$

$$\sum_{i}\sum_{j} d_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i - \sum_{j=1}^{n}\delta_j = \sum_{i}\sum_{j} d_{ij}x_{ij} + const.$$

Отсюда следует, что при ограничениях задачи о назначениях минимизация функции $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ эквивалентна минимизации функции $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$ (здесь $\gamma_i,\ \delta_i$ -- любые действительные числа). Это свойство задачи (23) и составляет основу излагаемого ниже алгоритма.

Общая схема метода следующая:

1. Из элементов каждой строки и каждого столбца матрицы стоимостей вычитаются их наименьшие элементы.
2. Ведётся поиск допустимого плана задачи (23), единичным элементам которого соответствуют нулевые элементы модифицированной матрицы стоимостей, т.е. строится «нулевое» назначение.
3. Если такой допустимый план существует, то он является оптимальным планом назначений. Если такого плана не существует, то матрица стоимостей модифицируется ещё раз с целью получить в ней большее число нулевых элементов.

Прокомментируем кратко эти три шага алгоритма.

Шаг 1. *Редукция строк и столбцов.* Цель данного шага состоит в получении максимально возможного числа нулей в матрице стоимостей. Для этого можно последовательно из всех элементов каждой строки вычесть по минимальному элементу, затем в полученной матрице из каждого столбца вычесть по минимальному элементу, найденному среди элементов данного столбца. Заменить исходную матрицу стоимостей на новую.

Шаг 2. *Определение назначений.* Если после выполнения процедуры редукции в каждой строке и в каждом столбце матрицы стоимостей можно выбрать по одному нулевому элементу так, что соответствующее этим элементам решение будет допустимым планом, то данное назначение будет оптимальным. Действительно, стоимость построенного назначения равна нулю. Поскольку все элементы текущей модифицированной матрицы стоимостей неотрицательные, то стоимость любого другого допустимого назначения будет больше либо равной нулю. Отсюда заключаем, что построенное «ненулевое» назначение является оптимальным. Если назначений нулевой стоимости для редуцированной матрицы найти нельзя, то данная матрица стоимостей подлежит дальнейшей модификации (см. шаг 3).

Шаг 3. *Модификация редуцированной матрицы.* Эта процедура нацелена на получение новых нулей в матрице стоимостей. Из имеющейся матрицы стоимостей вычеркнем *минимально возможное* число строк и столбцов, содержащих нулевые элементы. Среди невычеркнутых элементов матрицы найдём минимальный элемент. Ясно, что он положительный. Пусть он равен $\alpha > 0$.

Если значение α вычесть из всех (вычеркнутых и невычеркнутых) элементов старой редуцированной матрицы, то среди вычеркнутых элементов могут появиться отрицательные (причём минимальные из них равны $-\alpha$ и стоят на месте старых нулей), а среди невычеркнутых элементов не будет отрицательных, но появится хотя бы один нулевой элемент.

Чтобы избавится от отрицательных элементов в вычеркнутых элементах, поступим следующим образом: к элементам каждой вычеркнутой строки и к элементам каждого вычеркнутого столбца добавим по числу α .

Отметим, что в результате последней процедуры величина α будет прибавляться дважды к вычеркнутым элементам, стоящим на пересечении вычеркнутых строк и столбцов.

Кроме того, можно показать, что:

1) как и раньше, все отрицательные элементы будут преобразованы в нулевые или положительные элементы;

2) полученная матрица является редуцированной матрицей по отношению к исходной матрице стоимостей C , т.е. она может быть получена из C в результате преобразования $c_{ij} \to d_{ij} = c_{ij} + \gamma_i + \delta_j$, где $\gamma_i,\ \delta_j$ -- некоторые действительные числа;

3) в результате выполнения данной процедуры новая редуцированная матрица стала содержать больше нулей, расположенных вне строк и столбцов, соответствующих ненулевым элементам текущего неоптимального плана (построенного на шаге 2). Отметим, что в общем случае общее число нулей новой редуцированной матрицы может и уменьшиться!

Таким образом, при реализации венгерского метода надо осуществить две основные процедуры -- шаг 2 и шаг 3.

Опишем эти процедуры более детально.

Процедура, используемая на шаге 2.

На основе текущей матрицы стоимостей $C = (c_{ij},\ i = \overline{1,n},\quad j = \overline{1,n})$ сформируем сеть $S = \{I, U\}$ со множеством узлов $I = \{s,t\} \bigcup N \bigcup N_*$, где $N = \{\ 1,\ 2,\ ...,\ n\ \}$, $N_* = \{\, n+1,\ n+2,\ ...,\ 2n\,\}$ и множеством дуг $U = U_1 \bigcup U_0 \bigcup U_*$, где $U_1 = \{\,(s,i), i \in N\,\}, U_* = \{(i,t), i \in N_*\}, U_0 = \{(i,j), i \in N,\ j \in N_* : c_{i\,j-n} = 0\}$.

На сети $S = \{I, U\}$ с пропускными способностями дуг

$$d_{ij} = 1,\ (i,j) \in U_1 \bigcup U_*; \quad d_{ij} = \infty,\ (i,j) \in U_0, \tag{27}$$

решим задачу о максимальном потоке из узла s ; в узел t ;. Для решения данной задачи можно использовать метод Форда--Фалкерсона [Метод Форда-Фалкерсона (построение максимального потока)]

Пусть

$$v^0, y^0_{ij}, \quad (i,j) \in U, \tag{28}$$

-- максимальный поток в сети S ; и I_*, $I_* \subset I$, $s \in I_*$, $t \notin I_*$ -- множество узлов, помеченных на последней итерации метода Форда--Фалкерсона.

Если $v^0 = n$, то исходная задача о назначениях решена. Оптимальный план назначений

$$x^0 = (x^0_{ij}, \ i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}),$$

строится по правилу

$$x^0_{ij} = 1, \text{ если } (i, j+n) \in U_0 \text{ и } y^0_{ij+n} = 1; \quad x^0_{ij} = 0 \text{ в противном случае,} \tag{29}$$

$$i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Алгоритм прекращает свою работу.

Если $v^0 < n$, то в текущей матрице стоимостей нельзя осуществить полное ``нулевое'' назначение. Переходим к операциям шага 3.

Процедура, используемая на шаге 3.

Пусть $C = (c_{ij}, \ i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n})$ -- текущая матрица стоимостей; $v^0, y^0_{ij}, \quad (i,j) \in U$ -- максимальный поток и $I_* \subset I$ -- множество помеченных узлов, построенных на шаге 2. Положим

$$N^{(1)} = \{i \in N : i \in I_*\}, \quad N^{(2)} = \{i \in N : i+n \in I_*\}.$$

Используя результаты из [Метод Форда-Фалкерсона (построение максимального потока)], нетрудно показать, что по построению выполняются следующие свойства:

а) если $(i, j+n) \in U_0$ и $i \in N^{(1)}$, то $j \in N^{(2)}$;

б) если $(i, j+n) \in U_0$ и $y^0_{i\,j+n} > 0$, то $i \in N^{(1)}$, $j \in N^{(2)}$ либо $i \notin N^{(1)}$, $j \notin N^{(2)}$;

в) если $v^0 < n$, то $N^{(1)} \neq \emptyset, \quad N^{(2)} \neq N.$

Найдем число

$$\alpha = \min_{\substack{i \in N^{(1)}, \\ j \in N \setminus N^{(2)}}} c_{ij}. \tag{30}$$

Из свойств «а» -- «в» и правил построения множества U_0 следует, что

$$\alpha > 0.$$

Изменим матрицу стоимостей следующим образом. От всех элементов строк с номерами $i \in N^{(1)}$ отнимем число α . Ко всем элементам столбцов с номерами $j \in N^{(2)}$ прибавим число α . В результате получим новую матрицу стоимостей $\bar{C} = (\bar{c}_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$ с коэффициентами:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij}, \text{ если } i \in N^{(1)},\ \ j \in N^{(2)} \text{ либо } i \notin N^{(1)},\ \ j \notin N^{(2)};$$

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \alpha,\ \text{if } i \in N^{(1)}, j \notin N^{(2)}; \tag{31}$$

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \alpha,\ \text{if } i \notin N^{(1)}, j \in N^{(2)}.$$

Используя новую матрицу стоимостей $\bar{C}$, переходим к шагу 2.

Конечность алгоритма.

Из соотношений (31) следует, что матрица $\bar{C}$, построенная на шаге 3, обладает свойствами:

1) $$\bar{c}_{ij} \geq 0,\ \ i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,n};$$

2) матрица $\bar{C}$ является редуцированной матрицей по отношению к матрице ;

3) $$\bar{c}_{ij} = c_{ij} = 0, \text{if } \ y^0_{i\, j+n} > 0,\ \ \ (i, j+n) \in U_0;$$

4) найдется такой элемент (i_*, j_*) , что $\bar{c}_{i_* j_*} = 0,\ c_{i_* j_*} = \alpha > 0,\ \ i_* \in N^{(1)},\ \ j_* \notin N^{(2)}$.

Из 3-го и 4-го свойств следует, что при каждом последующем использовании процедуры шага 2 либо увеличивается множество помеченных узлов I_* , либо величина максимального потока по дугам с нулевой стоимостью увеличивается хотя бы на 1. Поскольку $I_* \subset I,\ \ |I| = 2n+2,\ \ v^0 \leq n$, то очевидно, что через конечное число повторений шага 2 мы придем к ситуации, когда будет найден максимальный поток (28) с $v^0 = n$. Согласно алгоритму, это означает, что исходная задача решена. Оптимальный план назначений строится по правилам (29).

Замечания: 1. Из свойств матрицы $\bar{C}$ следует, что при решении задачи о максимальном потоке на шаге 2 текущей итерации в качестве начального допустимого потока можно брать оптимальный поток, полученный на шаге 2 предыдущей итерации.

2. На шаге 2 алгоритма используется метод Форда--Фалкерсона для нахождения максимального потока в сети S , построенной по текущей матрице стоимостей. Сеть S имеет специальную структуру. Учет этой специфики позволяет разработать упрощенные табличные приемы реализации метода Форда--Фалкерсона, позволяющие сократить объем вычислений.

Пример.
Начальная матрица стоимостей имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. После просмотра строк и соответствующих преобразований получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

После просмотра столбцов и соответствующих преобразований получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Используя последнюю матрицу, сформируем сеть S, приведенную на рис. 4.4.

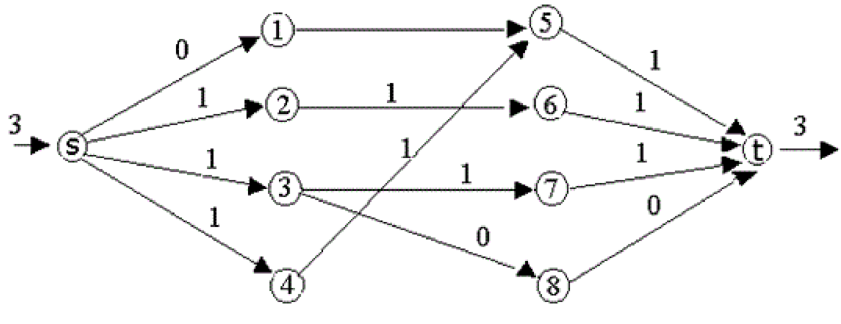

Рис. 4.4

На сети S с пропускными способностями (27) решим задачу о максимальном потоке. Максимальный поток (28) приведен на дугах сети S на рис. 4.4. Множество помеченных узлов I_* состоит из узлов $I_* = \{s, 1, 4, 5\}$. Поскольку v^{0} =3, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Построим множество $N^{(1)} = \{ 1, \ 4 \}$ 8 $N^{(2)} = \{ 1 \}$. Подсчитаем число α (30) для нашего примера

$$\alpha = \min \{ \ c_{1j}, \ \ j = \overline{2,4}, \ \ c_{4j}, \ j = \overline{2,4} \ \} = \min \{ 8, \ 2, \ 5, \ 11, \ 4, \ 15 \} = 2.$$

Используя $\alpha, \ N^{(1)}, \ N^{(2)}$, построим новую матрицу стоимостей $\bar{C}$ по правилам (31). Матрица $\bar{C}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Переходим к шагу 2 с новой матрицей $\bar{C}$.

Шаг 2. Сеть S , соответствующая $\bar{C}$, приведена на рис. 4.5.

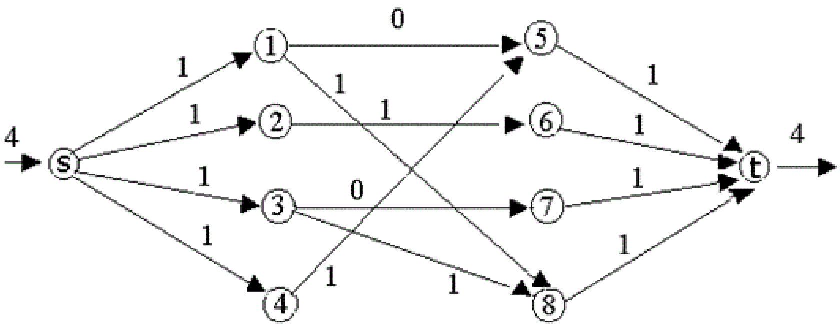

Рис. 4.5

На этом же рисунке приведен и максимальный поток. Величина этого потока равна $v^0 = 4 = n$.

Используя правила (29) и найденный максимальный поток, определим оптимальное назначение:

$$x^0_{13} = 1, \ \ x^0_{22} = 1, \ \ \ x^0_{34} = 1, \ \ \ x^0_{41} = 1,$$

$$x^0_{ij} = 0, \ \ i = \overline{1,n}, \ \ \ j = \overline{1,n}; \ \ (i,j) \in \{ (1, \ 3), \ \ (2, \ \ 2), (3, \ 4), (4, 1) \ \}.$$

Таким образом, 3-й работник назначается на 1-ю работу, 2-й работник -- на 2-ю работу, 4-й работник -- на 3-ю работу и 1-й работник назначается на 4-ю работу.