Тема 3. Задача о потоке минимальной стоимости

3.2. Базисный поток

Введем необходимые понятия из теории сетей.

Дугу (i, j) без ориентации назовем ребром с граничными узлами i, j и будем обозначать следующим образом $\{i, j\}$.

Узел сети называется *висячим*, если он граничный узел для единственного (висячего) ребра.

Последовательность различных ребер

$$\{i_1, i_2\},\ \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{k-1}, i_k\}, \tag{2.3}$$

в которой соседние ребра имеют общие граничные узлы, называется (простой) *цепью*, соединяющей узлы i_1 и i_k.

Если в последовательности узлов $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ этой цепи нет одинаковых, то цепь будем называть элементарной (простой).

Выберем направление движения вдоль цепи. Если это направление совпадает с направлением $i \to j$ дуги (i, j), соответствующей ребру $\{i, j\}$, то дуга (i, j) называется *прямой*. Дуга с противоположным направлением называется *обратной*.

Сеть S называется *связной*, если любые два ее узла можно соединить цепью.

В дальнейшем будем предполагать, что сеть S связная, ибо в противном случае исходная транспортная задача (2.2) распадается на две независимые транспортные задачи меньшей размерности.

Цепь (2.3) с совпадающими узлами i_1 и i_k называется *циклом*.

Лемма 2 *Связанная цепь $S = \{I, U\}$ без циклов либо содержит висячее ребро, либо* $|I| = 1, |U| = 0$

Лемма 3 *Пусть сеть $S = \{I, U\}$ связная. Удаление висячего ребра вместе с висячим узлом или ребра из цикла не нарушает связности сети.*

Определение 9 *Связная сеть $S = \{I, U\}$ называется деревом, если $|I| = |U| + 1$.*

Лемма 4 *Связная сеть S является деревом тогда и только тогда, когда она не содержит циклов.*

Лемма 5 *Каждая пара узлов дерева связана единственной цепью.*

Определение 10 *Для сети $S = \{I, U\}$ сеть $S^* = \{I, U^*\}$, где $U^* \subset U$, называется частичной сетью.*

Определение 11 *Частичная сеть, являющаяся деревом, называется деревом сети.*

Лемма 6 *Пусть* $S^* = \{I, U^*\}$ *— дерево сети. При любой дуге* $(i, j) \in U \backslash U^*$ *частичная сеть* $S_1 = \{I, U^* \cup (i, j)\}$ *содержит ровно один цикл.*

Перейдем к основному вопросу пункта. В симплекс-методе в качестве базиса используется полная система линейно независимых векторов из множества векторов $A_j \in \mathbb{R}^m, j \in J = \{1, ..., n\}$

Напомним: в симплекс-методе, при условии, что *rank A* = *m*, множество $J_в \subset J, |J_в| = m$ является базисным, если $\det A_в \neq 0, A_в = (A_j, j \in J_в)$, т.е. векторы условий $A_j, j \in J_в$, образуют полную систему линейно независимых векторов в системе векторов $A_j, j \in J$. По определению это означает следующее:

1. уравнение $\sum\limits_{j \in J_В} A_j x_j = 0$ имеет только нулевое решение $x_j = 0, j \in J_в$,

2. при $\forall j_0 \in J \setminus J_в$ система $\sum\limits_{j \in J_В \cup j_0} A_j x_j = 0$ имеет ненулевое решение $x_j \not\equiv 0,\ j \in J_в \cup j_0$.

При определении базисного множества $J_в$ первым способом (т.е. с помощью условия $\det A_в \neq 0$) мы обязательно должны предположить, что *rank A* = *m*. При определении базиса вторым способом (т.е. через полную систему линейно независимых векторов) нам не надо предполагать, что *rank A* = *m*. При использовании этого способа может быть, что *rank A* < *m*. Последний случай реализуется в транспортной задаче.

Конечно, можно перейти к эквивалентной задаче с $\bar{A}x = \bar{b}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{\bar{m} \times n}, \bar{m} < m, rank\bar{A} = \bar{m}$. Но для транспортной задачи этот путь нецелесообразен, так как нарушается специальная структура матрицы *A*. Поэтому в транспортной задаче при введении базиса воспользуемся вторым способом определения базиса.

Определение 12 *Множество дуг* $U_в \subset U$ *сети S = {I, U} называется полным, если система*

$$\sum_{j \in I_i^+(U_В)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_В)} x_{ji} = 0,\ \ i \in I; \qquad (2.4)$$

имеет только нулевое решение $x_{ij} = 0,\ \ j \in U_в$, *а для любой дуги* $(i_0, j_0) \in U \setminus U_в$ *система*

$$\sum_{j \in I_i^+(U_В \cup (i_0, j_0))} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_В \cup (i_0, j_0))} x_{ji} = 0,\ i \in I, \qquad (2.5)$$

имеет ненулевое решение $x_{ij} \not\equiv 0,\ (i, j) \in U_в \cup (i_0, j_0)$.

Введем необходимые понятия.

Совокупность $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$, для которой в любом узле *i* ∈ *I* выполняются условия баланса (2.1) назовем псевдопотоком.

Лемма 7 *Сеть с нулевыми интенсивностями узлов ($a_i = 0$, $i \in I$) допускает бесконечное число псевдопотоков, если в ней имеется цикл.*

Доказательство. Положим $x_{ij} = 0$, если ребро $\{i, j\}$ не входит в цикл. В цикле выберем направление обхода по некоторой дуге (i_0, j_0), и положим $x_{ij} = \theta$, если (i, j) — прямая дуга цикла, $x_{ij} = -\theta$, если (i, j) обратная дуга цикла. При любом θ построенная совокупность удовлетворяет системе (2.1) с $a_i = 0, \ i \in I$.

Псевдопоток, построенный при доказательстве леммы 7, называется (i_0, j_0) - циркуляцией со значением θ.

Теорема 14 *(Критерий полноты множества дуг). В сети $S = \{I, U\}$ множество $U_{\text{в}} \subset U$, является полным тогда и только тогда, когда $S_{\text{в}} = \{I, U_{\text{в}}\}$ — дерево сети.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $S_{\text{в}}$ — дерево. Покажем, что система (2.4) имеет только нулевое решение. В сети $S_{\text{в}}$ найдем висячий узел (он существует в силу леммы 2) и соответствующее висячее ребро. Из условия баланса (2.4) следует, что псевдопоток по этому ребру может быть только **нулевым.** Удалим этот висячий узел и соответсвующее ребро и рассмотрим оставшуюся сеть, которая согласно **лемме 3** будет опять связной и не содержать циклов. Поступим с ней как с исходной. Через $|I| - 1$ шагов убеждаемся, что псевдопоток на сети $S_{\text{в}}$ может быть только нулевым.

Если к $S_{\text{в}}$ добавить дугу $(i_0, j_0) \in U \setminus U_{\text{в}}$, то согласно **лемме 6** в сети $S_2 = \{I, U_{\text{в}} \cup (i_0, j_0)\}$ будет цикл, содержащий дугу (i, j). Из **леммы 7** следует, что существует ненулевое решение системы (2.5). Следовательно, согласно определению, множество дуг $U_{\text{в}}$ — полная система.

Необходимость. Пусть $U_{\text{в}}$ — полная система множества дуг сети $S = \{I, U\}$. Совокупность $S_{\text{в}} = \{I, U_{\text{в}}\}$ не может содержать циклов, ибо в противном случае, согласно **лемме 7**, система (2.4) имела бы ненулевое решение.

Сеть $S_{\text{в}}$ связная, ибо в противном случае существовала бы такая дуга $(i_0, j_0) \in U \setminus U_{\text{в}}$, что сеть $S_2 = \{I, U_{\text{в}} \cup (i_0, j_0)\}$ не содержит циклов и следовательно для нее система (2.5) может иметь только нулевое решение, что противоречит полноте $U_{\text{в}}$. Значит, $S_{\text{в}}$ — связная сеть без циклов. Следовательно, она является деревом.

Определение 13 *Поток $x = \{x_{ij}, (i, j) \in U\}$ называется базисным с базисом $U_{\text{в}} \subset U$, если $x_{ij} = 0, (i, j) \in U_{\text{н}}, U_{\text{н}} = U \backslash U_{\text{в}}$ и $U_{\text{в}}$ — полное множество дуг сети $S = \{I, U\}$. Множество $U_{\text{в}}$ называется множество базисных дуг, множество $U_{\text{н}} = U \setminus U_{\text{в}}$ — множеством небазисных дуг. Дуговые потоки $x_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{в}}$ назовем базисными дуговыми потоками, а дуговые потоки $x_{ij}, \ (i, j) \in U_{\text{н}}$ — небазисными дуговыми потоками.*

Определение 14 *Базисный поток $\{x, U_{\text{в}}\}$ называется невырожденным, если*

$$x_{ij} > 0, \ (i, j) \in U_{\text{в}}.$$