Тема 6 Линейное программирование и теория игр

6.3 Эквивалентность матричной игры и задачи линейного программирования

Сформулируем основную теорему теории игр.

Сформулируем основную теорему теории игр.

Теорема 1. *Каждая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях, т.е. существуют такие смешанные стратегии* x^0 *и* y^0 *первого и второго игроков соответственно, что при любых смешанных стратегиях* x, y *имеют место неравенства и равенства:*

$$M(x, y^0) \le M(x^0, y^0) \le M(x^0, y),$$

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} M\,(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M\,(x, y) = M(x^0, y^0),$$

где

$$X = \left\{ x \in R^m : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \ge 0, i = \overline{1, m} \right\}, Y = \left\{ y \in R^n : \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \ge 0, j = \overline{1, n} \right\}$$

---*множества смешанных стратегий игроков соответственно* P_1 и P_2 .

Пусть задана матрица A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Согласно определению, задача игрока P_1 заключается в том, чтобы найти такое максимальное число v и вектор $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in X$, что

$$M(x^0, y) \ge v \text{ для } \forall y \in Y \,. \qquad (5)$$

Рассмотрим ограничения (5) подробнее:

$$x^{0\prime}Ay \geq v, \forall y \in Y. \tag{6}$$

Покажем, что неравенства (6) эквивалентны условиям

$$x^{0\prime}Ae_j \geq v,\ \ j = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Отметим, что в (6) мы имеем континуум ограничений, так как неравенства должны выполняться для $\forall y \in Y$; в (7) мы имеем только n ограничений. Действительно, очевидно, что из (6) следует (7), так как $e_j \in Y, j = \overline{1, n}$. Покажем, что из (7) следует (6).

Пусть (7) имеет место. Рассмотрим $\forall y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Y$. Правую и левую части каждого *j*-го неравенства (7) умножим на $y_j \geq 0$ и просуммируем все неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} x^{0\prime}Ay_je_j \geq \sum_{j=1}^{n} y_jv. \tag{8}$$

Учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ и $y = \sum_{j=1}^{n} y_je_j$, из (8) получаем (6). Эквивалентность (6) и (7) доказана.

Таким образом, мы пришли к тому, что задача игрока P_1 состоит в поиске таких чисел v и вектора x^0 , которые являются решением следующей задачи:

$$v \to \max_{x,v}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq v,\ \ j = \overline{1, n}; \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_i = 1,\ \ x_i \geq 0,\ \ i = \overline{1, m}.$$

Задача (9) является задачей линейного программирования.

Аналогично, рассуждая за второго игрока P_2 , мы приходим к тому, что его задача состоит в нахождении такого минимального числа v и вектора $y^0 \in Y$, при которых

$$M(x, y^0) \leq v, \forall x \in X. \tag{10}$$

Можно показать, что (10) эквивалентно условиям $e_j' A y^0 \leq 0,\ i = \overline{1, m}$. Следовательно, задача игрока P_2 состоит в нахождении таких числа v и вектора y^0 , которые являются решением следующей задачи:

$$v \to \min_{v,y};$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v,\ \ i = \overline{1, m}; \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ \ y_j \geq 0,\ \ j = \overline{1, n}.$$

Задача (11) является задачей линейного программирования.

Легко проверить, что задачи (9) и (11) составляют пару двойственных задач! Следовательно, не нужно решать каждую из этих задач отдельно. Из теории двойственности следует, что достаточно решить, например, симплекс-методом одну из этих задач и по оптимальному плану решенной задачи легко восстановить оптимальный план второй задачи.

Таким образом, мы показали, что верна следующая теорема.

Теорема 2. *Каждая матричная игра с платежной матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij},\ j = \overline{1, n} \\ i = \overline{1, m} \end{pmatrix}$$

эквивалентна паре двойственных задач (9) и (11).

Рассмотрим теперь обратную задачу. Попытаемся представить данную задачу линейного программирования в форме матричной игры. Каждой паре двойственных задач линейного программирования можно поставить в соответствие матричную игру, цена и оптимальные стратегии которой позволяют вычислить оптимальные прямой и двойственный планы (если они существуют!).

Подчеркнем, что в то время как матричные игры всегда имеют оптимальные стратегии (т.е. имеют решение), задачи линейного программирования могут и не иметь решений.

Рассмотрим пару двойственных задач:

$$\begin{aligned} & c'x \to \max, \\ & Ax \le b, x \ge 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} & b'y \to \min, \\ & A'y \ge c, y \ge 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $A \in R^{m \times n}$. Построим игру с платежной матрицей

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & & -b \\ -A' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{pmatrix} \in R^{(n+m+1)\times(n+m+1)}. \tag{14}$$

Отметим, что матрица Π является кососимметричной, следовательно, если рассматривать матричную игру с платежной матрицей Π , то стратегии (оптимальные) первого и второго игроков должны совпадать! Справедлива

Теорема 3. *Пара двойственных задач (12) и (13) имеет решение тогда и только тогда, когда игра с платежной матрицей (14) имеет такую оптимальную стратегию}*

$$u^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_{n+m}^*, u_{n+m+1}^*),$$

что $u_{n+m+1}^* > 0$. *При этом*

$$y_i^0 = \frac{u_i^*}{u_{n+m+1}^*},\ i = \overline{1,m}; \qquad x_j^0 = \frac{u_{m+j}^*}{u_{n+m+1}^*},\ j = \overline{1,n}.$$

Из теоремы 3 следует, что решение пары двойственных задач линейного программирования может быть сведено к вычислению оптимальных стратегий (которые совпадают!) симметричной игры с платежной матрицей Π (14).

Таким образом, в этом параграфе мы показали, что существует тесная связь между задачами линейного программирования и матричными играми. Наличие этой связи, с одной стороны, позволяет привлечь к исследованию матричных игр методы, применяемые в линейном программировании, с другой стороны, делает возможным использование идей и методов теории игр для разработки новых алгоритмов решения задач линейного программирования.