3.7. Первая фаза метода потенциалов

Для построения начального базисного потока $\{x, U_{\text{в}}\}$ поступаем следующим образом. К сети $S = \{I, U\}$ добавляем искусственный узел *n* + 1 с интенсивностью

$$a_{n+1} = \sum_{i \in I} a_i = 0$$

Отметим, что условие

$$\sum_{i \in I} a_i = 0$$

является необходимым условием для существования потока на сети $S = \{I, U\}$.

Ко множеству дуг *U* добавим *n* искусственных дуг вида:

$(i, n + 1)$, если i — источник или нейтральный узел ($a_i \geq 0$), $i \in I$;
$(n + 1, i)$, если i — сток ($a_i < 0$), $i \in I$.

Множество добавленных искусственных дуг обозначим через $U_{\text{и}}$. Рассмотрим расширенную сеть $\bar{S} = \{\bar{I}, \bar{U}\}$, $\bar{I} = I \cup \{n + 1\}$, $\bar{U} = U \cup U_{\text{и}}$. В расширенной сети $\bar{S} = \{\bar{I}, \bar{U}\}$ множество искусственных дуг $U_{\text{и}}$ является базисным. Определим соответствующий ему базисный поток по правилу:
дуговые потоки вдоль базисных (искусственных) дуг положим равными абсолютным значениям интенсивностей узлов $i \in I$ исходной сети, которым эти дуги инцидентны, остальные дуговые потоки положим равными $x_{ij} = 0, (i, j) \in \bar{U} \setminus U_{\text{и}} = U$. На расширенной сети $\bar{S} = \{\bar{I}, \bar{U}\}$ рассмотрим следующую задачу о потоке минимальной стоимости

$$\sum_{(i,j) \in U_{\text{и}}} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j \in I_i^+(\bar{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\bar{U})} x_{ji} = a_i, \ i \in \bar{I} \tag{2.17}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ (i, j) \in \bar{U}.$$

Задача (2.17) и есть задача первой фазы.
Для задачи первой фазы начальный базисный поток уже построен. Целевая функция

ограничена снизу:

$$\sum_{(i,j)\in U_{\text{и}}} x_{ij} \geq 0$$

Следовательно, задача первой фазы имеет решение. Это решение можно найти методом потенциалов.

Пусть $x^* = \{x^*_{ij}, (i,j) \in U \cup U_{\text{и}}\}$ оптимальный базисный поток для задачи первой фазы с базисом $U^*_{\text{в}} \subset U \cup U_{\text{и}}$. Проанализируем полученное решение.

1. Если $x^*_{ij} \not\equiv 0, (i,j) \in U_{\text{и}}$, то исходная задача не имеет решения.

2. Пусть $x^*_{ij} \equiv 0, (i,j) \in U_{\text{и}}$, и базисное множество дуг $U^*_{\text{в}}$ содержит единственную искусственную дугу. Удалив эту дугу из $U^*_{\text{в}}$, получим базисное множество $U_{\text{в}}$ и соответствующий базисный поток $x = \{x^*_{ij}, (i,j) \in U\}$ для исходной сети. Процесс решения задачи (2.2) продолжаем стандартным методом потенциалов (вторая фаза), исходя из построенного начального базисного потока.

3. Пусть $x^*_{ij} \equiv 0, (i,j) \in U_{\text{и}}$, но базисное множество дуг $U_{\text{в}}$ содержит более одной искусственной дуги. Тогда среди небазисных дуг $(i,j) \in U \backslash U^*_{\text{в}}$ всегда найдется такая дуга (i_*, j_*), что цикл, построенный из базисных дуг $U_{\text{в}}$ и дуги (i_*, j_*) содержит две искусственных дуги (предполагается, что сеть *S* = {*I, U*} − связная). Одну из этих искусственных дуг выводим из множества базисных дуг и вместо нее вводим дугу (i_*, j_*). Через конечное число шагов получаем базис, содержащий только одну искусственную дугу, т. е. приходим к случаю 2).

Важное свойство. Если все интенсивности $a_i, i \in I$ — целые числа, и стоимости потоков ограничены снизу, то среди оптимальных потоков существует целочисленный поток.