3.3. Формула приращения стоимости потока

Пусть $\{x, U_{\text{в}}\}$ — базисный поток, x — поток, $U_{\text{в}} \subset U$ — множество базисных дуг. Рассмотрим другой (необязательно базисный поток) $\overline{x} = x + \Delta x.$ Найдем формулу для приращения

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\overline{x}_{ij} - \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\Delta x_{ij} \qquad (2.6)$$

стоимости потока.

Каждому узлу $i \in I$ сети $S = \{I, U\}$ применим число u_i (потенциал узла), так чтобы совокупность u_i, $i \in I$, удовлетворяла системе уравнений

$$0 = u_i - u_j - c_{ij}, \qquad (i, j) \in U_{\text{в}}., \qquad (2.7)$$

Покажем, что искомые числа существуют. Выберем любой узел $i_1 \in I$, положим $u_{i_1} = 0$. Согласно **лемме 5** каждый узел $i \in I$ можно соединить с i_1 единственной цепью $\{i_1, i_2, \ldots, i_s, i\}$ из дуг дерева $S_{\text{в}} = \{I, U_{\text{в}}\}$. Рассматривая уравнение (2.7) вдоль (от i_1 до i) дуг этой цепи, определим потенциал u_i узла i по рекуррентным правилам: например, зная u_{i_k}, находим $u_{i_{k+1}}$ следующим образом

$$u_{i_{k+1}} = \begin{cases} u_{i_k} - c_{i_k i_{k+1}}, & \text{если } (i_k, i_{k+1}) \text{ — прямая дуга,} \\ u_{i_k} + c_{i_{k+1} i_k}, & \text{если } (i_{k+1}, i_k) \text{ — обратная дуга,} \end{cases}$$

Имея потенциалы узлов, найдем оценки небазисных дуг по правилу

$$\Delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij}, \quad (i, j) \in U_{\text{н}}. \qquad (2.8)$$

Так как по предположению x и $\overline{x}$ — потоки, то

$$\sum_{j\in I_i^+} \Delta x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} \Delta x_{ij} = 0, \quad i \in I. \qquad (2.9)$$

Умножим обе части равенств (2.7) , (2.8) на соответствующие Δx_{ij} просуммируем по $(i, j) \in U$. В результате получим

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\Delta x_{ij} = -\sum_{(i,j)\in U_{\text{н}}} \Delta_{ij}\Delta x_{ij} + \sum_{(i,j)\in U} (u_i - u_j)\Delta x_{ij} =$$

$$= -\sum_{(i,j)\in U_{\text{н}}} \Delta_{ij}\Delta x_{ij} + \underbrace{\sum_{i\in I} u_i\Big(\sum_{j\in I_i^+} \Delta x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} \Delta x_{ij}\Big)}_{= 0 \text{ в силу } (2.9)} = -\sum_{(i,j)\in U_{\text{н}}} \Delta_{ij}\Delta x_{ij}.$$

Таким образом, мы получили следующую формулу приращения:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\Delta x_{ij} = -\sum_{(i,j)\in U_{\text{н}}} \Delta_{ij}\Delta x_{ij}. \tag{2.10}$$