Иллюстративные примеры к теме № 2 "Задачи квадратичного программирования"

ПРИМЕР 1.

Решить задачу квадратичного программирования вида

$$c'x+\frac{1}{2}x'Dx \to \min, \quad Ax=b,\ x\geq 0, \qquad (4.1)$$

Со следующими исходными данными

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ n=8,\ m=3,,$$

$$B=\begin{pmatrix} 1, & 1, -1, 0, 3, & 4, -2, & 1 \\ 2, & 6, & 0, 0, & 1, -5, & 0, -1 \\ -1, 2, & 0, 0, -1, & 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}, \qquad d=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}'$$

$$D=B'B=\begin{pmatrix} 6 & 11 & -1 & 0 & 6 & -7 & -3 & -2 \\ 11 & 41 & -1 & 0 & 7 & -24 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -3 & 0 & 11 & 6 & -7 & 1 \\ -7 & -24 & -4 & 0 & 6 & 42 & -7 & 10 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -7 & -7 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 10 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$c'=-d'B=(\,-10\ \ -31\ \ 7\ \ 0\ \ -21\ \ -16\ \ 11\ \ -7)$$

И заданным правильным опорным планом

$$x^{нач}=(0\ \ 0\ \ 6\ \ 4\ \ 5\ \ 0\ \ 0\ \ 0),\quad J_{оп}=\{j_1=3,\ j_2=4,\ j_3=5\},\quad J_*=\{3,\ 4,\ 5\},$$

Итерация 1

Шаг 1. Используя заданный план $x^{нач}$, вычисляем вектор

$$\overline{c}(x^{нач})=Dx^{нач}+c=(14\ \ -2\ \ -2\ \ 0\ \ 16\ \ -10\ \ -12\ \ -8)'$$

По опорному множеству индексов $J_{оп}=\{3,\ 4,\ 5\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{c}_{on}(x^{нач}) = (-2 \quad 0 \quad 16).$$

Находим вектор потенциалов

$$u' = -\overline{c}_{on}(x^{нач})' A_{on}^{-1} = (\,0 \quad \text{-}16 \quad 2)$$

И вектор оценок

$$\Delta = u' A + \overline{c}(x^{нач}) = (\,0 \quad \text{-}42 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad \text{-}40), \qquad j_0 = 2$$

Шаг 2. Проверяем критерий оптимальности:

$$\Delta_j \geq 0, j \in J \setminus J_*. \tag{4.2}$$

В данном случае условия оптимальности не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \backslash J_*$ для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 2$. Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 2$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\ j \in J)$, $J = \{1,\ 2,...,8\}$. изменения плана. Компоненты l_j, $j \in J_н = J \backslash J_* = \{1,\ 2,\ ,6,\ 7,\ 8\}$, определим по правилу. Положим

$$l_j = 0, j \in J_H \setminus j_0, \quad l_{j_0} = 1. \tag{4.3}$$

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_3,\ l_4,\ l_4)$ сформируем матрицу H и вектор bb

$$H = \begin{pmatrix} D_* & A_*' \\ A_* & O \end{pmatrix}, \quad bb = \begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$где\ D_* = \begin{pmatrix} d_{ij}, j \in J_* \\ i \in J_* \end{pmatrix}, D(J_*, j_0) = \begin{pmatrix} d_{ij_0} \\ i \in J_* \end{pmatrix}, A_* = (A_j, j \in J_*),$$

Получим

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad bb = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1}bb = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Первые $|J_*|$ компонент которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_3,\ l_4,\ l_4)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$$l = (\ 0 \quad 1 \quad -4 \quad -2 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j,\ j \in J_* \cup j_0$ по правилам

$$\theta_j = \begin{cases} \infty, & \text{если } l_j \ge 0,\ j \in J_*; \\ -x_j / l_j, & \text{если } l_j < 0,\ j \in J_*; \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\theta_{j_0} = \theta_\delta = \begin{cases} \infty, \text{ если } \delta = 0; \\ |\Delta_{j_0}| \backslash \delta, \text{ если } \delta > 0; \end{cases} \text{ где } \delta = l'Dl = D'_{*j_0} l_* + A'_{j_0} y + d_{j_0 j_0}. \tag{4.6}$$

И найдем $\theta_0 = min\ \theta_j,\ j \in J_* \cup j_0$ и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$ на котором $\theta_0 = \theta_j$. На данной итерации имеем

$$\theta_3 = 1.5000\ ,\ \theta_4 = 2.0000, \quad \theta_5 = 1.6667,\ \theta_\delta = \theta_{j_0} = 0.8400,$$
$$\theta_0 = \min\{\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_{j_0}\} = \theta_{j_0} = 0.8400,\ \ j_* = j_0.$$

Шаг 5. Строим новый план

$$\bar{x} = x^{нач} + \theta_0 l = (0 \quad 0.8400 \quad 2.6400 \quad 2.3200 \quad 2.4800 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$. На данной итерации реализовался случай а): $j_* = j_0$ поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ строим по правилу

$$\bar{J}_{on} = J_{on},\ \ \bar{J}_* = J_* \cup j_0, \tag{4.7}$$

В результате чего получаем множества

$$\bar{J}_{on} = \{3,\ 4,\ 5\}, \quad \bar{J}_* = \{3,\ 4,\ 5,\ 2\}.$$

Переходим к следующей итерации, исходя их нового правильного опорного плана

$$x := \bar{x} = (0 \quad 0.8400 \quad 2.6400 \quad 2.3200 \quad 2.4800 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$
$$J_{on} := \bar{J}_{on} = \{3,\ 4,\ 5\}, \quad J_* := \bar{J}_* = \{3,\ 4,\ 5,\ 2\}.$$

Итерация 2

Шаг 1. Используя заданный план x , вычисляем вектор

$$\bar{c}(x) = Dx + c = (11.4800\ 18.1600\ \ 1.3600 \quad 0\ \ 4.2400 -31.8400\ -1.0800\ -9.6800)$$

По опорному множеству индексов J_{on} $\{3, 4, 5\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_{on}(x) = (1.3600 \quad 0 \quad 4.2400)'.$$

Находим вектор потенциалов

$$u' = -\bar{c}_{on}(x\ )' A_{on}^{-1} = (0\ -4.2400\ -1.3600)$$

И вектор оценок

$$\Delta = u' A + \bar{c}(x\ ) = (\ 5.8800\ -0.0000 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ -30.3200\ \ 5.8800 -18.1600).$$

Проверяем условия оптимальности (4.2).

В данном случае эти условия не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \backslash J_*$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 6$ Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 6$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\ j \in J)$, $J = \{1, 2,...,8\}$ изменения плана. Компоненты l_j, $j \in J_н = J \backslash J_* = \{1, 6, 7, 8\}$ определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_3, l_4, l_5, l_2)$ сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 11 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 41 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad bb = \begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \\ -24 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \ ,$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1}bb = \begin{pmatrix} -5.8400 \\ -5.9200 \\ -1.8800 \\ 0.9600 \\ 0 \\ -9.5600 \\ 5.1600 \end{pmatrix}$$

Первые $|J_*|$ компонент, которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_3, l_4, l_5, l_2)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$$l = (0 \ \ 0.9600 \ -5.8400 \ -5.9200 \ -1.8800 \ \ 1.0000 \quad 0 \quad 0)$$

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j, j \in J_* \cup j_0$ по правилам (4.5), (4.6), найдем $\theta_0 = min\ \theta_j, j \in J_* \cup j_0$ и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$ на котором $\theta_0 = \theta_j$. На данной итерации имеем

$$\theta_2 = \infty,\ \ \theta_3 = 0.4521\ ,\ \theta_4 = 0.3919\ ,\ \ \ \theta_5 = 1.3191,\ \theta_\delta = \theta_{j_0} = 0.5954,$$
$$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_{j_0}\} = \theta_4 = 0.3919, \quad j_* = 4 = j_s,\ \ s = 2.$$

Шаг 5. Строим новый план

$$\bar{x} = x + \theta_0 l = (0 \ \ 1.2162 \ \ 0.3514 \quad 0 \ \ 1.7432 \ \ 0.3919 \quad 0 \quad 0)$$

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ На данной итерации реализовался случай c): $j_* = j_s \in J_{on}$ и существует такой индекс $j_+ \in J_* \backslash J_{on}$ что $e_s' A_{on}^{-1} A_{j_+} \neq 0;$ где $j_+ = 2$ Поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ строим по правилу

$$\bar{J}_{on} = (J_{on} \setminus j_*) \cup j_+,\ \ \bar{J}_* = J_* \setminus j_*, \tag{4.8}$$

В результате чего получаем множества

$$\bar{J}_{on} = \{2, 3,\ 5\}, \quad \bar{J}_* = \{2, 3,\ 5\}.$$

Вычисляем новое значение оценки $\bar{\Delta}_{j_0} = \Delta_{j_0} + \theta_0 \delta :$:

$$\bar{\Delta}_{j_0} = \bar{\Delta}_6 = \Delta_6 + \theta_0 l' D l = -10.3649$$

Идем на шаг 3 с новыми значениями

$$x := \bar{x} = (0 \ \ 1.2162 \ \ 0.3514 \quad 0 \ \ 1.7432 \ \ 0.3919 \quad 0 \quad 0),$$
$$J_{on} := \bar{J}_{on} = \{2, 3,\ 5\},\ \ J_* := \bar{J}_* = \{2, 3,\ 5\},\ \ \Delta_{j_0} := \bar{\Delta}_{j_0} = -10.3649 \quad \text{и} \ \ j_0 = 6.$$

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j, j \in J)$, $J = \{1, 2, ..., 8\}$ изменения плана для новых множеств $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$. Компоненты $l = (l_j, j \in J_н = J \backslash J_*)$, $J = \{1, 4, 6, 7, 8\}$ определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_2, l_3, l_5)$. формируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4) . В результате получаем

$$H = \begin{pmatrix} 41 & -1 & 7 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad bb = \begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -4 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1} bb = \begin{pmatrix} -2.0000 \\ 6.0000 \\ 7.0000 \\ 74.0000 \\ -51.0000 \\ 17.0000 \end{pmatrix}$$

Первые $|J_*|$ компонент, которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_2, l_3, l_5)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$$l = (\ 0,\ -2.0000,\ 6.0000,\ 0,\ 7.0000,\ 1.0000,\ 0,\ 0)$$

Шаг 4. Подсчитаем шаги θ_j, $j \in J_* \cup j_0$ по правилам (4.5), (4.6), найдем $\theta_0 = min\ \theta_j$, $j \in J_* \cup j_0$ и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$ на котором $\theta_0 = \theta_j$. На данной итерации имеем

$$\theta_2 = 0.6081,\ \theta_3 = \infty\ ,\quad \theta_5 = \infty,\ \theta_\delta = \theta_{j_0} = 0.0212,$$
$$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_{j_0}\} = \theta_{j_0} = 0.0212, \quad j_* = j_0 = 6.$$

Шаг 5. Строим новый план

$$\bar{x} = x + \theta_0 l = (0\ \ 1.1738\ \ 0.4785\qquad 0\ \ 1.8916\ \ 0.4131\qquad 0\qquad 0)$$

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ На данной итерации реализовался случай а): $j_* = j_0$ поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ строим по правилу (4.7). В результате чего получаем множества

$$\bar{J}_{on} = \{2, 3,\ 5\}, \quad \bar{J}_* = \{2, 3,\ 5,\ 6\}.$$

Переходим к следующей итерации, исходя из нового правильного опорного плана

$$x := \bar{x} = (0 \;\; 1.1738 \;\; 0.4785 \qquad 0 \;\; 1.8916 \;\; 0.4131 \qquad 0 \qquad 0),$$

$$J_{on} := \bar{J}_{on} = \{2,3,\; 5\}, \;\; J_* := \bar{J}_* = \{2,3,\; 5,\; 6\}.$$

Итерация 3

Шаг 1. Используя заданный план x , вычисляем вектор

$$\bar{c}(x) = Dx \;\; + c = (\; 10.8916 \;\; 19.9755 \;\; -1.0225 \qquad 0 \;\; 9.0675 - 17.3865 \;\; -4.1759 \;\; -4.9775)$$

По опорному множеству индексов $J_{on} = \{2, 3, 5\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; \bar{c}_{on}(x) = (19.9755 \;\; -1.0225 \;\; 9.0675)'.$$

Находим вектор потенциалов

$$u' = -\bar{c}_{on}(x\;)' A_{on}^{-1} = (1.5685 \quad -9.0675 \quad 1.0225)$$

и оценок

$$\Delta = u' A + \bar{c}(x\;) = (\; 4.4151 \qquad 0 \qquad 0 \quad 1.5685 \qquad 0 \quad -0.0000 \quad 1.2781 \;\; -27.8180),$$

Проверяем условия оптимальности (4.2).

В данном случае эти условия не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \backslash J_*$ для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 8$. Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 8$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\; j \in J)$, $J = \{1, 2, ..., 8\}$ изменения плана. Компоненты $l_j, j \in J_н = J \backslash J_*)$, $J = \{1, 4, 7, 8\}$ определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_2, l_3, l_5, l_6)$. сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H = \begin{pmatrix} 41 & -1 & 7 & -24 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 11 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -24 & -4 & 6 & 42 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad bb = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 10 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1}bb = \begin{pmatrix} 0.2444 \\ -2.2331 \\ -2.1053 \\ 0.6278 \\ -4.0419 \\ 9.9816 \\ -0.3272 \end{pmatrix}$$

Первые $|J_*|$ компонент, которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_2, l_3, l_5, l_6)$. . Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$$l = (0 \;\; 0.2444 \;\; -2.2331 \qquad 0 \;\; -2.1053 \;\; 0.6278 \qquad 0 \;\; 1.0000)$$

Шаг 4. Подсчитаем шаги θ_j, $j \in J_* \cup j_0$ по правилам (4.5), (4.6), найдем $\theta_0 = min\ \theta_j$, $j \in J_* \cup j_0$ и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$ на котором $\theta_0 = \theta_j$. На данной итерации имеем

$$\theta_2 = \infty,\ \theta_3 = 0.2143\ ,\ \theta_5 = 0.3919\ ,\quad \theta_6 = \infty,\ \theta_\delta = \theta_{j_0} = 0.6825,$$
$$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_6, \theta_{j_0}\} = \theta_3 = 0.2143, \quad j_* = j_s = 3, \quad s = 2.$$

Шаг 5. Строим новый план

$$\bar{x} = x + \theta_0 l = (\ 0 \;\; 1.2262 \;\; 0.0000 \qquad 0 \;\; 1.4405 \;\; 0.5476 \qquad 0 \;\; 0.2143)$$

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ На данной итерации реализовался случай с): $j_* = j_s \in J_{on}$ и существует такой индекс $j_+ \in J_* \backslash J_{on}$ что $e_s' A_{on}^{-1} A_{j_+} \neq 0;$ где $j_+ = 6$. Поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ строим по правилу (4.8). В результате чего получаем множества

$$\bar{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\}, \quad \bar{J}_* = \{2, 5,\ 6\}.$$

Вычисляем новое значение оценки $\bar{\Delta}_{j_0} = \Delta_{j_0} + \theta_0 \delta$:

$$\bar{\Delta}_{j_0} = \bar{\Delta}_8 := \Delta_8 + \theta_0 l' D l = -19.0833$$

Идем на шаг 3 с новыми значениями

$$x := \bar{x} = (\ 0 \;\; 1.2262 \;\; 0.0000 \qquad 0 \;\; 1.4405 \;\; 0.5476 \qquad 0 \;\; 0.2143),$$
$$J_{on} := \bar{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\}, \quad J_* := \bar{J}_* = \{2, 5,\ 6\}, \quad \Delta_{j_0} := \bar{\Delta}_{j_0} = -19.0833 \text{ и } j_0 = 8.$$

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j, j \in J)$, $J = \{1, 2, ..., 8\}$ изменения плана для новых множеств $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$. Компоненты $l = (l_j, j \in J_н = J \backslash J_*)$, $J = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_2, l_5, l_6)$ сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H=\begin{pmatrix} 41 & 7 & -24 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 11 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -24 & 6 & 42 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad bb=\begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix}=-H^{-1}bb=\begin{pmatrix} -0.5000 \\ 0.5000 \\ 1.0000 \\ -37.1667 \\ -9.0000 \\ 36.3333 \end{pmatrix}$$

Первые $|J_*|$ компонент, которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_2, l_5, l_6)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$$l=(0, -0.5, 0,\ 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 0,\ 1.0)$$

Шаг 4. Подсчитаем шаги θ_j, $j \in J_* \cup j_0$ по правилам (4.5), (4.6) , найдем $\theta_0 = min\ \theta_j$, $j \in J_* \cup j_0$ и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$ на котором $\theta_0 = \theta_j$. На данной итерации имеем

$$\theta_2 = 0.\ 24524, \quad \theta_5 = \infty, \quad \theta_6 = \infty,\ \theta_8 = \theta_{j_0} = \ 0.1759,$$
$$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_5, \theta_6, \theta_{j_0}\} = \theta_{j_0} = \ 0.1759, \ j_* = j_0.$$

Шаг 5. Строим новый план

$$\bar{x} = x + \theta_0 l = (\ 0\ \ 1.1382\ \ 0.0000 \qquad 0\ \ 1.5284\ \ 0.7235 \qquad 0\ \ 0.3902)$$

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ На данной итерации реализовался случай а): $j_* = j_0$ поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ строим по правилу (4.7), в результате чего получаем множества

$$\bar{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\}, \quad \bar{J}_* = \{2, 5,\ 6, 8\}.$$

Переходим к следующей итерации, исходя их нового правильного опорного плана

$$x := \bar{x} = (\ 0\ \ 1.1382\ \ 0.0000 \qquad 0\ \ 1.5284\ \ 0.7235 \qquad 0\ \ 0.3902)$$
$$J_{on} := \bar{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\}, \quad J_* := \bar{J}_* = \{2, 5,\ 6, 8\}.$$

Итерация 4

Шаг 1. Используя заданный план x , вычисляем вектор

$$\bar{c}(x) = Dx + c = (\ 5.8464\ \ 7.8326\ -2.0077\ \ \ \ 0\ \ 8.5115\ \ 0.1413\ -5.1536\ -0.4808)$$

По опорному множеству индексов $J_{on} = \{2, 5, 6\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \bar{c}_{on}(x) = (\ 7.8326\ \ 8.5115\ \ 0.1413)'.$$

Находим вектор потенциалов

$$u' = -\bar{c}_{on}(x\ )' A_{on}^{-1} = (\ -5.8346\ \ -8.5115\ \ \ 7.3428)$$

и оценок

$$\Delta = u' A + \bar{c}(x\ ) = (\ -1.1569\ -0.0000\ \ 5.3351\ -5.8346\ \ \ \ 0\ \ \ \ 0\ -5.4931\ \ 0.0000),$$

Проверяем условия оптимальности (4.2). В данном случае эти условия не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \backslash J_*$ для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 1$ Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 1$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\ j \in J)$, $J = \{1, 2, \ldots, 8\}$ изменения плана. Компоненты $l = (l_j, j \in J_н = J \backslash J_*)$, $J = \{1, 3, 4, 7\}$ определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_2, l_5, l_6, l_8)$. сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H = \begin{pmatrix} 41 & 7 & -24 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 11 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -24 & 6 & 42 & 10 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 10 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ bb = \begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -7 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1} bb = \begin{pmatrix} -0.2650 \\ -0.5684 \\ 0.0300 \\ 0.1966 \\ 0.8589 \\ 1.7304 \\ -0.4395 \end{pmatrix}$$

первые $|J_*|$ компонент, которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_2, l_5, l_6, l_8)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$$l = (\ 1.0000\ \ -0.2650\ \ \ \ 0\ \ \ \ 0\ \ -0.5684\ \ 0.0300\ \ \ \ 0\ \ 0.1966)$$

Шаг 4. Подсчитаем шаги $\theta_j,\ j \in J_* \cup j_0$ по правилам (4.5), (4.6), найдем $\theta_0 = min\ \theta_j,\ j \in J_* \cup j_0$ и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$ на котором $\theta_0 = \theta_j$. На данной итерации имеем

$$\theta_2 = 4.2957,\quad \theta_5 = 2.6892,\quad \theta_6 = \infty,\ \theta_8 = \infty,\ \theta_\delta = \theta_{j_0} = \ 0.9467,$$
$$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_5, \theta_6, \theta_8\ , \theta_{j_0}\} = \theta_{j_0} = \ 0.9467,\quad j_* = j_0\ .$$

Шаг 5. Строим новый план

$$\bar{x} = x + \theta_0 l = (\ 0.9467\ \ 0.8874\ \ 0.0000\ \ \ \ 0\ \ 0.9904\ \ 0.7519\ \ \ \ 0\ \ 0.5763)$$

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ На данной итерации реализовался случай а): $j_* = j_0$ поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ строим по правилу (4.7), в результате чего получаем множества

$$\bar{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\},\quad \bar{J}_* = \{1, 2, 5,\ 6,\ 8\}.$$

Переходим к следующей итерации, исходя их нового правильного опорного плана

$$x := \bar{x} = (\ 0.9467\ \ 0.8874\ \ 0.0000\ \ \ \ 0\ \ 0.9904\ \ 0.7519\ \ \ \ 0\ \ 0.5763),,$$
$$J_{on} := \bar{J}_{on} = \{2, 5,\ 6\},\quad J_* := \bar{J}_* = \{1, 2, 5,\ 6,\ 8\}.$$

Итерация 5

Шаг 1. Используя заданный план x , вычисляем вектор

$$\bar{c}(x) = Dx\ + c = (\ 4.9681\ \ \ 2.9559\ \ \ \text{-}1.3889\ \ \ \ 0\ \ \ 6.8734\ \ \ \text{-}0.6410\ \ \ \text{-}4.6119\ \ \ \text{-}1.3177)$$

По опорному множеству индексов $J_{on} = \{2, 5, 6\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \bar{c}_{on}(x) = (\ 2.9559\ \ \ 6.8734\ \ \ \text{-}0.6410)'.$$

Находим вектор потенциалов

$$u' = -\bar{c}_{on}(x\ )' A_{on}^{-1} = (\text{-}5.0215\ \ \ \text{-}6.8734\ \ \ 6.9268)$$

и оценок

$$\Delta = u' A + \bar{c}(x\ ) = (\ \text{-}0.0000\ \ \ \text{-}0.0000\ \ \ 5.5379\ \ \ \text{-}5.0215\ \ \ \ 0\ \ \ \ 0\ \ \ \text{-}6.5707\ \ \ 0.0000)\,.$$

Проверяем условия оптимальности (4.2). В данном случае эти условия не выполняются. Зафиксируем индекс $j_0 \in J \backslash J_*$ для которого $\Delta_{j_0} < 0$: $j_0 = 4$ Идем на шаг 3, используя индекс $j_0 = 4$.

Шаг 3. Построим направления $l = (l_j,\ j \in J)$, $J = \{1, 2,...,8\}$ изменения плана. Компоненты $l = (l_j, j \in J_н = J \backslash J_*)$, $J = \{3, 4, 7\}$ определим по правилу (4.3).

Для нахождения оставшихся компонент $l(J_*) = (l_1, l_2, l_5, l_6, l_8)$. сформируем матрицу H и вектор bb по правилам (4.4). В результате получаем

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 6 & -7 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 41 & 7 & -24 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 11 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -24 & 6 & 42 & 10 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 10 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad bb = \begin{pmatrix} D(J_*, j_0) \\ A_{j_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. ,$$

Найдем вектор

$$\begin{pmatrix} l(J_*) \\ \Delta y \end{pmatrix} = -H^{-1} bb = \begin{pmatrix} -0.7028 \\ 0.1816 \\ -0.2626 \\ -0.0118 \\ 0.2044 \\ 4.1649 \\ 5.7008 \\ -5.7452 \end{pmatrix}$$

первые $|J_*|$ компонент, которого задают искомый вектор $l(J_*) = (l_1, l_2, l_5, l_6, l_8)$. Таким образом, шаг 3 завершается построением вектора

$$l = (\ -0.7028 \quad 0.1816 \quad 0 \quad 1.0000 \quad -0.2626 \quad -0.0118 \quad 0 \quad 0.2044)$$

Шаг 4. Подсчитаем шаги θ_j, $j \in J_* \cup j_0$ по правилам (4.5), (4.6) , найдем $\theta_0 = min\ \theta_j$, $j \in J_* \cup j_0$ и индекс $j_* \in J_* \cup j_0$ на котором $\theta_0 = \theta_j$. На данной итерации имеем

$$\theta_1 = 1.3469,\ \theta_2 = \infty,\quad \theta_5 = 3.7714,\quad \theta_6 = 63.5221,\ \theta_8 = \infty, \theta_\delta = \theta_{j_0} = \quad 1.2057,$$
$$\theta_0 = \min\{\theta_2, \theta_5, \theta_6, \theta_8\ , \theta_{j_0}\} = \theta_{j_0} = 1.2057,\quad j_0 = j_*\ .$$

Шаг 5. Строим новый план

$$\bar{x} = x + \theta_0 l = (\ 0.0993 \quad 1.1064 \quad 0.0000 \quad 1.2057 \quad 0.6738 \quad 0.7376 \quad 0 \quad 0.8227)$$

Шаг 6. Строим новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ На данной итерации реализовался случай а): $j_* = j_0$ поэтому новые множества $\bar{J}_{on}$ и $\bar{J}_*$ строим по правилу (4.7), в результате чего получаем множества

$$\bar{J}_{on} = \{2, 5, 6\}, \quad \bar{J}_* = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}.$$

Переходим к следующей итерации, исходя их нового правильного опорного плана

$$x := \bar{x} = (\ 0.0993 \quad 1.1064 \quad 0.0000 \quad 1.2057 \quad 0.6738 \quad 0.7376 \quad 0 \quad 0.8227),$$
$$J_{on} := \bar{J}_{on} = \{2, 5, 6\}, \quad J_* := \bar{J}_* = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}.$$

Итерация 6

Шаг 1. Используя заданный план x , вычисляем вектор

$$\bar{c}(x) = Dx + c = (\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

По опорному множеству индексов $J_{on} = \{2, 5, 6\}$ строим матрицу и вектор

$$A_{on} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_{on}(x) = (0 \quad 0 \quad 0)'.$$

Находим вектор потенциалов

$$u' = -\bar{c}_{on}(x)' A_{on}^{-1} = (0 \ \ 0 \ \ 0)$$

и оценок

$$\Delta = u' A + \bar{c}(x) = (\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

В данном случае условия оптимальности (4.2) выполняются. Алгоритм останавливает свою работу. Задача решена.

Ответ:

Оптимальный план

$$x^0 = (\ 0.0993 \quad 1.1064 \quad 0.0000 \quad 1.2057 \quad 0.6738 \quad 0.7376 \quad 0 \quad 0.8227)$$

Оптимальное значение целевой функции

$$c' x^0 + 0.5 x^{0\prime} D x^0 = -33.5000.$$

Замечание. В данной задаче имеется множество оптимальных планов!

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить задачу квадратичного программирования вида (4.1) с заданными исходными данными и заданным начальным правильным опорным планом.

Задача 1.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 & 4 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = B'B, \quad c' = -d'B,$$

$$x^{нач} = (0.7273 \quad 1.2727 \quad 3.0000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

$$J_{оп} = \{1, 2, 3\}, \; J_* = \{1, 2, 3\}.$$

Ответ:

Оптимальный план

$$x^0 = (0.7921 \quad 1.2576 \quad 1.3811 \quad 1.1526 \quad 0.1258 \quad 0.5634 \quad 0.0713 \quad 0.4592)$$

Оптимальное значение целевой функции: -108.5000

Задача 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 4 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 5 & 2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = B'B, \quad c' = (-13 \;\; -217 \;\; 0 \;\; -117 \;\; -27 \;\; -71 \;\; 18 \;\; -99),$$

$$x^{нач} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 1), \quad J_{оп} = \{2, 5, 8\}, \; J_* = \{2, 5, 8\}.$$

Ответ:

Оптимальный план

$$x^0 = (0.2977 \quad 1.0404 \quad 5.3680 \quad 0.00 \quad -0.0 \quad 1.3007 \quad 0.7599 \quad 2.1990)$$

Оптимальное значение целевой функции: -263

Задача 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & -5 & -10 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}, ,$$

$$c' = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad -2 \quad 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{нач} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 1), \quad J_{оп} = \{2,5,8\}, \; J_* = \{2,5,8\}.$$

Ответ: Задача не имеет решения, т.к. целевая функция не ограничена снизу на множестве планов

Задача 4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & -5 & -10 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$c' = (1 \quad -3 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad -2 \quad 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 0 & 3 & -1 & 13 & 0 & 1 \\ 10 & 45 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 29 & -3 & 15 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 21 & -5 & 0 & -1 \\ 13 & 20 & 0 & 15 & -5 & 61 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 5 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

$$x^{нач} = (3 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0), \quad J_{оп} = \{1, \; 4, \; 5\}, \; J_* = \{1, \; 4, \; 5\}.$$

Ответ:

Оптимальный план

$$x^0 = (\ 2.1844 \quad 0.2713 \quad 0.2101 \quad 3.1017 \quad 2.8843 \quad -0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.1812)$$

Оптимальное значение целевой функции: 309.5489

Задача 5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$c' = (\ 1 \quad -3 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad -2 \quad 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{нач} = (4 \quad 0 \quad 5 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0), \quad J_{оп} = \{1, \quad 3, \quad 4\}, \; J_* = \{1, \quad 3, \quad 4\}.$$

Ответ:

Оптимальный план

$$x^0 = (\ 0.0000 \quad 0.6667 \quad 0.0000 \quad 4.6667 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 1.6667 \quad 0.0000)$$

Оптимальное значение целевой функции: 8.6667