Иллюстративные примеры к теме № 3"Задачи выпуклого программирования"

ПРИМЕР 1.

Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^3 \to \min,$$

$$x_1^2 + x_3^2 \le 2,$$

$$x_3 \le x_2,$$

$$x_1 \ge 1.$$

Требуется проверить, будет ли вектор $x^* = (x_1^* = 1,\ x_2^* = 1,\ x_3^* = 1)$ оптимальным планом в этой задаче.

Решение. Перепишем задачу в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^3 \to \min,$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 2 \le 0,$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 - x_2 \le 0, \qquad (3.1)$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 1 \le 0.$$

Прежде все проверим, будет ли вектор x^* допустимым планом в данной задаче. Для этого проверяем, выполняются ли следующие соотношения

$$g_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (x_1^*)^2 + (x_3^*)^2 - 2 \le 0,$$

$$g_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = x_3^* - x_2^* \le 0,$$

$$g_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = -x_1^* + 1 \le 0.$$

Легко проверить, что эти соотношения выполняются, причем они выполняются как равенства. Следовательно, вектор x^* является допустимым планом задачи (3.1) и на нем все ограничения задачи являются активными.

Проверим, удовлетворяют ли ограничения задачи условию Слейтера. В данной задаче условие Слейтера выполняется, т. к. существует вектор, например, $\bar{x} = (1.1,\ 1,\ 0)$ такой что

$$g_1(\bar{x}) = 1.21 - 2 < 0, \;\; g_2(\bar{x}) = -1 < 0, \;\; g_3(\bar{x}) = -0.21 < 0.$$

Следовательно, вектор x^* будет оптимальным планом задачи (3.1) тогда и только тогда, когда существуют такие числа $\lambda_1, \; \lambda_2, \; \lambda_3$, что выполняются следующие соотношения

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2(x^*)}{\partial x} + \lambda_3 \frac{\partial g_3(x^*)}{\partial x} = 0, \tag{3.2}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \;\; \lambda_2 \geq 0, \;\; \lambda_3 \geq 0. \tag{3.3}$$

Подсчитаем

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1^* - 2x_2^* \\ -2x_1^* + 2x_2^* \\ 3(x_3^*)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1^* \\ 0 \\ 2x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial g_2(x^*)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\partial g_3(x^*)}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения (3.2) принимают вид

$$0 + 2\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 - \lambda_3 = 0,$$

$$0 + 0 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 = 0.$$

$$3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 = 0.$$

Данная система имеет единственное решение

$$\lambda_1 = -3/2, \;\; \lambda_2 = 0, \;\; \lambda_3 = -3.$$

Однако это решение не удовлетворяет соотношениям (3.3) .

Следовательно, вектор x^* не является оптимальным планов в задаче (3.1) .

ПРИМЕР 2.

Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2 \to \min, \\ g_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 - 2 \leq 0, \\ g_2(x_1, x_2, x_3) = -x_2 + 1 \leq 0, \\ g_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 10 \leq 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Требуется проверить, будет ли вектор $x^* = (x_1^* = 1,\ x_2^* = 1,\ x_3^* = 1)$ оптимальным планом в этой задаче.

Проверим, будет ли вектор x^* допустимым планом в данной задаче. Для этого проверяем, выполняются ли следующие соотношения

$$g_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (x_1^* - 2)^2 + (x_3^* - 2)^2 - 2 \le 0,$$

$$g_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = -x_2^* + 1 \le 0,$$

$$g_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = x_1^* + x_2^* + x_3^* - 10 \le 0.$$

Легко проверить, что эти соотношения выполняются, причем из них первые два выполняются как равенства, теретье --- как строгое неравенство. Следовательно, вектор x^* является допустимым планом задачи (3.4) и на нем первые два ограничения задачи являются активными.

Проверим, удовлетворяют ли ограничения задачи (3.4) условию Слейтера. В данной задаче условие Слейтера выполняется, т. к. существует вектор, например, $\bar{x} = (2,\ 2,\ 2)$ такой что

$$g_1(\bar{x}) = -2 < 0, \quad g_2(\bar{x}) = -1 < 0, \quad g_3(\bar{x}) = -4 < 0.$$

Следовательно, вектор x^* будет оптимальным планом задачи (3.4) тогда и только тогда, когда существуют такие числа λ_1, λ_2, что выполняются следующие соотношения

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2(x^*)}{\partial x} = 0, \tag{3.5}$$

$$\lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0. \tag{3.6}$$

Подсчитаем

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1^* + 2x_2^* \\ 2x_1^* + 2x_2^* \\ 4x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2(x_1^* - 2) \\ 0 \\ 2(x_3^* - 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{\partial g_2(x^*)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения (3.5) принимают вид

$$4 - 2\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = 0,$$

$$4 + 0 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$4 - 2\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 = 0.$$

Данная система имеет единственное решение

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4.$$

Это решение удовлетворяет соотношениям (3.6) .

Следовательно, вектор x^* является оптимальным планов в задаче (3.4).

В примерах 1 и 2 были рассмотрены задачи выпуклого программирования небольшой размерности (в этих примерах размерность n вектора x равна 3). Поэтому проверить оптимальность заданного допустимого плана x^* в ручную было нетрудно.

В случае, когда размерность задачи большая (размерность n вектора x^* и число ограничений m большие) проверить заданный план x^* на оптимальность в ручную трудно. Ниже, в примере 3, показано, как для выпуклых задач большой размерности можно проверить заданный план на оптимальность и, в случае его неоптимальности, постоить новый план с лучшим значением целевой функции. Для этой цели используется условие оптимальности в прямой форме. Проверка этого условия осуществляется с помощью решения специальной задачи линейного программировония симплекс-методом.

ПРИМЕР 3.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f(x) \to min, \; g_i \leq 0, \; i \in I=\{1,...,5\}, \; x \geq 0, \qquad (3.7)$$

где функции $f(x)$, $g_i(x) \leq 0$, $i=1,..,5$, заданы в виде

$$f(x) = 0.5x'\,B(0)\,'B(0)x + c(0)'x,$$

$$g_i := 0.5x'\,B(i)'\,B(i)x + c(i)'x + \alpha(i), \; i = 1,...,5, \; x \in R^8, \qquad (3.8)$$

$$B(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 0 & -2.5000 & -2.0000 \\ 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 & 0 & 0.5000 & -0.5000 & -0.5000 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0.5000 & 1.0000 & 2.5000 & 4.0000 \end{pmatrix}$$

$$B(2) = \begin{pmatrix} 1.0000 & 2.0000 & -1.5000 & 3.0000 & -2.5000 & 0 & -1.0000 & -0.5000 \\ -1.5000 & -0.5000 & -1.0000 & 2.5000 & 3.5000 & 3.0000 & -1.5000 & -0.5000 \\ 1.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.5000 & 1.5000 & 3.0000 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(3) = \begin{pmatrix} 0.7500 & 0.5000 & -1.0000 & 0.2500 & 0.2500 & 0 & 0.2500 & 0.7500 \\ -1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.7500 & 0.7500 & 0.5000 & 1.0000 & -0.7500 \\ 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & 0.7500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & -0.2500 \end{pmatrix}$$

$$B(4) = \begin{pmatrix} 1.5000 & -1.5000 & -1.5000 & 2.0000 & 1.5000 & 0 & 0.5000 & -1.5000 \\ -0.5000 & -2.5000 & -0.5000 & -1.0000 & -2.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 2.0000 \\ -2.5000 & 1.0000 & -2.0000 & -1.5000 & -2.5000 & 0.5000 & 2.5000 & -2.5000 \end{pmatrix}$$

$$B(5) = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.25000 & -0.5000 & 1.2500 & 1.2500 & -0.5000 & 0.2500 & -0.7500 \\ -1.0000 & -0.7500 & -0.7500 & 0.5000 & -0.2500 & 1.2500 & 0.2500 & -0.5000 \\ 0 & 0.7500 & 0.5000 & -0.5000 & -1.0000 & 1.0000 & -1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c(0) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \\ c(1) &= \begin{pmatrix} 0 & 60 & 80 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \\ c(2) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \\ c(3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ c(4) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \\ c(5) &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 & 0 & 4 & -2 & 60 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

a(1) = -51.7500, a(2) = -436.7500, a(3) = -33.7813

a(4) = -303.3750, a(5) = -41.7500

Требуется прверить, будет ли вектор

$x^* = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 0)$

оптимальным планов в данной задаче. В случае неоптимальности плана x^* пострить новый план с лучшим значением целевой функции.

Решение. Для вектора x^* множества индексов $J_0(x^*) := \{j \in J = \{1, ..., 8\} : x_j^* = 0\}$, $I_0(x^*) := \{i \in I : g_i(x^*) = 0\}$, имеют вид

$$J_0(x^*) = \{2,\ 3,\ 8\}, \quad I_0(x^*) = \{1,\ 3,\ 5\}$$

поскольку

$f(x^*) = 369.5000$, $g_i(x^*) = 0$, $i \in I_0(x^*) = \{1, 3, 5\}$, $g_i(x^*) < 0$, $i \in \{2, 4\}$,

Подсчитаем вкторы

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = (\quad 50 \quad 120 \quad -1 \quad 194 \quad 10 \quad 136 \quad 34 \quad 97\ )'$$
$$\frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x} = (\ 3.0000 \quad 63.0000 \quad 86.0000 \quad 22.5000 \quad 12.0000 \quad 3.7500 \quad 28.0000 \quad -0.7500\ )'$$
$$\frac{\partial g_3(x^*)}{\partial x} = (\ 0.4375 \quad 4.0000 \quad 85.5000 \quad 8.8125 \quad 7.1875 \quad 10.3750 \quad 0.1875 \quad -3.3125\ )'$$
$$\frac{\partial g_5(x^*)}{\partial x} = (\ 2.0000 \quad -3.5000 \quad -0.3750 \quad 11.6250 \quad 16.0000 \quad -6.8750 \quad 65.2500 \quad -7.3750\ )'$$

$d_* = (-1,0,3,-1,-1,-1,0,0)'$, $\qquad d^* = (1,1,1,1,1,1,1,1)'$.

Используя эти векторы, сформируем и решим следующую задачу линейного программирования

$$\frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} l \to min$$
$$\frac{\partial g_i'(x^*)}{\partial x} l \le 0, i\epsilon I_0(x^*) = \{1,3,5\},$$
$$d_* \le l \le d^*$$

Эта задача имеет решение

$l^0 = (-1.0000, 0.0000, 0.3136, -1.0000, -1.0000, 0.0000, 0.0000)$,

на котором значение целевой функции равно

$$\frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} l^0 = -390.3136 < 0.$$

Следовательно, вектор x^* не является оптимальным планом в задаче (3.7), (3.8).
Этот план можно заменить на новый план с лучшим значением целевой функции.
Новый план строим в виде

$x(t) = x^* + t(l^0 + \alpha\Delta x)$, $\Delta x = \bar{x} - x^*$.

Здесь $\bar{x}$ - такой допустимый план задачи (3.7), (3.8), что имеют место строгие неравенства $g_i(\bar{x}) < 0,\ i=1,...,5$. В данном примере в качестве $\bar{x}$ можно взять вектор

$\bar{x} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$.

Число $a > 0$ подберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} l^0 + \alpha \frac{\partial f'(x^*)}{\partial x} \Delta x < 0.$$

Число $t > 0$ подберем так, чтобы выполнялись неравенства

$f(x(t)) < f(x^*)$, $g_i(x(t)) \le 0,\ i = 1,..,5,\ x(t) \ge 0.$

Положим $t = 0.5$, $a = 1$.

Тогда

$x(t) = (0.0000\ 0.0000\ 0.1568\ 0.5000\ 1.5000\ 0.5000\ 0.0000\ 0.0000)$

$f(x(t)) = 18.7182 < f(x^*) = 369.5000$

$g_1(x(t)) = -34.2350$, $g_2(x(t)) = -386.1373 < 0$,

$g_3(x(t)) = -17.6890 <$, $g_4(x(t)) = -282.5222$, $g_5(x(t)) = -32.6918 < 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу (3.7), в которой функции имеют вид (3.8) со следующими значениями данных

$$B(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 0 & -2.5000 & -2.0000 \\ 0.5000 & 0.5000 & -0.5000 & 0 & 0.5000 & -0.5000 & -0.5000 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 & 0 & 0.5000 & 1.0000 & 2.5000 & 4.0000 \end{pmatrix}$$

$$B(2) = \begin{pmatrix} 1.0000 & 2.0000 & -1.5000 & 3.0000 & -2.5000 & 0 & -1.0000 & -0.5000 \\ -1.5000 & -0.5000 & -1.0000 & 2.5000 & 3.5000 & 3.0000 & -1.5000 & -0.5000 \\ 1.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 1.0000 & 2.5000 & 1.5000 & 3.0000 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(3) = \begin{pmatrix} 0.7500 & 0.5000 & -1.0000 & 0.2500 & 0.2500 & 0 & 0.2500 & 0.7500 \\ -1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.7500 & 0.7500 & 0.5000 & 1.0000 & -0.7500 \\ 0.5000 & -0.2500 & 0.5000 & 0.7500 & 0.5000 & 1.2500 & -0.7500 & -0.2500 \end{pmatrix}$$

$$B(4) = \begin{pmatrix} 1.5000 & -1.5000 & -1.5000 & 2.0000 & 1.5000 & 0 & 0.5000 & -1.5000 \\ -0.5000 & -2.5000 & -0.5000 & -1.0000 & -2.5000 & 2.5000 & 1.0000 & 2.0000 \\ -2.5000 & 1.0000 & -2.0000 & -1.5000 & -2.5000 & 0.5000 & 2.5000 & -2.5000 \end{pmatrix}$$

$$B(5) = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.25000 & -0.5000 & 1.2500 & 1.2500 & -0.5000 & 0.2500 & -0.7500 \\ -1.0000 & -0.7500 & -0.7500 & 0.5000 & -0.2500 & 1.2500 & 0.2500 & -0.5000 \\ 0 & 0.7500 & 0.5000 & -0.5000 & -1.0000 & 1.0000 & -1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c(0) &= (\ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -2\ \ 0\ \ -2\ \ -3\ ), \\ c(1) &= (\ 0\ \ 60\ \ 80\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 40\ \ 0\ ), \\ c(2) &= (\ 2\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ ), \\ c(3) &= (\ 0\ \ 0\ \ 80\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ), \\ c(4) &= (\ 0\ \ -2\ \ 1\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ -2\ \ 1\ ), \\ c(5) &= (\ -4\ \ -2\ \ 6\ \ 0\ \ 4\ \ -2\ \ 60\ \ 2\ ), \end{aligned}$$

$a(1) = -687.1250$, $a(2) = -666.6250$, $a(3) = -349.5938$

$a(4) = -254.6250,\ a(5) = -45.1563$

Требуется проверить, является ли план

$x^* = (0\ 8\ 2\ 1\ 0\ 4\ 0\ 0)$

оптимальным в этой задаче.

В случае его неоптимальности построить новый план с лучшим значением целевой функции.

В качестве вектора $\bar{x}$, удовлетворяющего соотношениям $\bar{x} \geq 0,\ g_i(\bar{x}) < 0,\ i=1,..,5$, можно взять вектор $\bar{x} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$.