3.5. Достаточное условие существования потока с неограниченной снизу стоимостью

Предположим, что имеет место неравенство:

$$\Delta_{i_0 j_0} > 0, \quad (i_0, j_0) \in U_{\text{н}}$$

и все дуги в цикле сети $S_1 = \{I, U_{\text{в}} \cup (i_0, j_0)\}$ имеют то же направление, что и дуга (i_0, j_0), т. е. являются прямыми. Из доказательства критерия оптимальности следует, что в этом случае имеют место неравенства

$$\Delta x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U.$$

Следовательно, при любом $\theta \geq 0$ совокупность $\overline{x} = x + \Delta x$ будет потоком на сети *S* и

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}\overline{x}_{ij} - \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} = -\Delta_{i_0 j_0}\theta < 0$$

Следовательно, целевая функция (стоимость потока $\overline{x}$) неограниченно убывает при $\theta \to \infty$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 16 *Если существует дуга* $(i_0, j_0) \in U_{\text{н}}$ *такая, что* $\Delta_{i_0 j_0} > 0$ *и все дуги цикла сети* $S_1 = \{I, U_{\text{в}} \cup (i_0, j_0)\}$ *являются прямыми, то существует поток со сколь угодно малой стоимостью (т. е. задача (2.2) не имеет решения).*