3 Задача о потоке минимальной стоимости (Сетевая транспортная задача)

Транспортными задачами линейного программирования называются математические модели разнообразных прикладных задач по оптимизации перевозок. К ним сводятся многочисленные задачи, имеющие другую физическую природу. В данном параграфе для решения транспортных задач в сетевой и матричной формах строится метод потенциалов как реализация прямого симплекс-метода, детально учитывающая специфику новых задач.

3.1. Сеть. Поток. Сетевая транспортная задача

Рассмотрим множество $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ элементов, которое называется узлами.

Предположим, что некоторые пары узлов $i \in I, j \in I$ упорядочены. Такую пару обозначим символом (i, j) и назовем дугой с началом i и концом j.

Множество дуг, определенных на множестве $I \times I$, обозначим через U:

$$U \subset \{(i, j) : \ i \in I, j \in I\}$$

Определение 7 *Совокупность $S = \{I, U\}$ называется (ориентированной) сетью.*

На рисунке узлы будут обозначаться точками, дуги (i, j) — линиями со стрелкой из i в j.

Каждому узлу i припишем число a_i — интенсивность узла. При $a_i > 0$ узел i будем называть узлом производства (источником); при $a_i < 0$ узел i будем называть узлом потребления (стоком); при $a_i = 0$ узел i — транзитный узел (нейтральный).

При изображении сети на рисунке возле узла i указывается величина $|a_i|$ со стрелкой: стрелка, входящая в узел, указывает на узел производства, а стрелка, выходящая из узла, — на узел потребления.

Каждой дуге $(i, j) \in U$ припишем неотрицательное число x_{ij} — дуговой поток (поток по дуге (i, j)). Обозначим через

$$I_i^+ = I_i^+(U) = \{j \in I : \ \exists (i, j) \in U\}$$
$$I_i^- = I_i^-(U) = \{j \in I : \ \exists (j, i) \in U\}$$

множество узлов, которые соединены с узлом i дугами из U, начинающимися в i (это узлы I_i^+) или оканчивающимися в i (это узлы I_i^-).

Говорят, что в узле i выполнено условие баланса, если имеет место равенство

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i \qquad (2.1)$$

т.е. количество (продукта) потока, поступающее в узел i и произведенного в нем, равно количеству (продукта) потока, выходящего из узла i и потребленного в нем.

Определение 8 *Совокупность* $x = \{x_{ij};\ (i, j) \in U\}$ *дуговых потоков называется потоком на сети* $S = \{I, U\}$*, если она удовлетворяет условиям баланса (2.1) в каждом узле* $i \in I$ и $x_{ij} \geq 0,\ (i, j) \in U$.

Число $\sum\limits_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}$, где c_{ij}, $(i, j) \in U$, — заданные числа, называется стоимостью потока x.

Сетевая транспортная задача (транспортная задача в сетевой форме), именуемая также задачей о потоке минимальной стоимости, состоит в поиске оптимального потока $x^0 = \{x^0_{ij};\ (i,j) \in U\}$ (потока минимальной стоимости), который доставляет решение задаче

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{2.2}$$

$$\sum_{i\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{i\in I_j^-} x_{ji} = a_i,\ \ i \in I;\ \ x_{ij} \geq 0,\ \ (i,j) \in U.$$

Целевая функция задачи (2.2) и все функции ограничений линейны относительно переменных x_{ij}, $(i, j) \in U$, следовательно, задача (2.2) является задачей линейного программирования. Но задача (2.2) — специальная задача линейного программирования: при ее сведении к канонической форме получается большая матрица условий, которая состоит из ±1 и большого количества нулей. Поэтому сводить задачу (2.2) к общей задаче линейного программирования в канонической форме и решать ее симплекс-методом не целесообразно. Мы предложим другой метод — метод потенциалов, который являясь методом симплексного типа, максимально учитывает специфику задачи.

Задачу (2.2) можно записать в виде

$$\vec{c}' x \to \max,$$
$$Ax = b,\ \ x \geq 0,$$

где

$$x = (x_{ij},\ (i,j) \in U),\ \bar{c} = -(c_{ij},\ (i,j) \in U),\ b = (b_i = a_i,\ i \in I),\ A \in \mathbb{R}^{n\times|U|},$$
$$A = (A_{ij}, (i,j) \in U),\ A_{ij} \in \mathbb{R}^n,\ n = |I|,$$
$$n = |I|,\ A_{ij} = (a_{ij}(k),\ k \in I),\ a_{ij}(i) = 1,\ a_{ij}(j) = -1,\ \ a_{ij}(k) = 0,\ k \in I\backslash\{i,j\}.$$