Тема 2 Динамическое программирование

2.2 Задача распределения ресурсов

2.2.1. Постановка задачи

Имеется сырье в объеме *c* и *n* технологических процессов. Если количество *x* сырья используется в *i*-м технологическом процессе, то получается прибыль $f_i(x)$. Как распределить сырье между процессами, чтобы получить максимальную прибыль? Пусть x_i -- количество сырья, выделяемое на *i*-й процесс. Тогда математическая модель сформулированной задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max, \sum_{i=1}^{n} x_i = c, x_i \geq 0, i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Специфика задачи нелинейного программирования (1) состоит в том, что его целевая функция и функция ограничений *сепарабельны*, т.е. представимы в виде суммы функций одной переменной. Решим задачу (1) методом динамического программирования.

2.2.2 Алгоритм решения

Осуществим первый этап - инвариантное погружение в семейство задач. Для задачи (1) этот этап состоит в рассмотрении совокупности задач распределения ресурсов в объеме *y* между *k* технологическими процессами:

$$P(k,y): \qquad \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \max, \sum_{i=1}^{k} x_i = y, x_i \geq 0, i = \overline{1,k}, \qquad (2)$$

где $0 \leq y \leq c,\ 0 \leq k \leq n,$ -- параметры семейства.

При $y = c$ и $k = n$ получим исходную задачу.

Оптимальное значение целевой функции задачи (2) назовем *функцией Беллмана* $B_k(y)$:

(3)

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), \sum_{i=1}^{k} x_i = y, x_i \geq 0, i = \overline{1,k}.$$

Перейдем ко второму этапу -- составлению уравнения Беллмана на основе принципа оптимальности. Сущность этого принципа для задачи (1) выражается приводимыми ниже рассуждениями.

Отметим, что при составлении уравнения Беллмана проверяется правильность инвариантного погружения. С другой стороны, способ погружения сказывается на виде уравнения.

В задаче (2) с *k* процессами и запасом сырья *y* выделим *k*-му процессу сырье в количестве *z* , $0 \leq z \leq y$. При этом размер прибыли от *k*-го процесса будет равен $f_k(z)$.

На оставшиеся процессы с номерами $1, 2, \ldots, k-1$ остается сырья в количестве $y - z$. Из принципа оптимальности следует, что это сырье $y - z$ между процессами $1, 2, \ldots, k-1$ нужно распределять оптимальным образом, ибо в противном случае при заданном количестве сырья *z* для *k*-го процесса можно получить большую прибыль, если сырье в объеме $y - z$ разделить между процессами $1, 2, \ldots, k-1$ оптимальным образом.

Согласно определению (3), размер максимальной прибыли от распределения $y - z$ единиц ресурса между процессами $1, 2, \ldots, k-1$ равен $B_{k-1}(y-z)$.

Таким образом, если запас сырья равен *y* , то при выделении *k*-му процессу *z* единиц ресурса от всех *k* процессов получаем прибыль

$$f_k(z) + B_{k-1}(y-z). \tag{4}$$

Изменяя количество *z* в пределах $0 \leq z \leq y$, находим значение $x_k^0(y)$ -- оптимальное количество сырья на *k*-й процесс, при котором общая прибыль (4) максимальна:

$$f_k(x_k^0(y)) + B_{k-1}(y - x_k^0(y)) = \max_z \, [f_k(z) + B_{k-1}(y-z)], 0 \leq z \leq y. \tag{5}$$

С другой стороны, согласно (3), максимальная прибыль от *k* процессов при количестве сырья *y* равна $B_k(y)$. Учитывая это, получаем

$$B_k(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_k(z) + B_{k-1}(y-z)], k = \overline{1,n}, 0 \leq y \leq c. \tag{6}$$

Параллельно с функцией $B_k(y)$ можно строить функцию $x_k^0(y), \ \ 0 \leq y \leq c$, где $x_k^0(y)$ -- значение параметра $z \in [0, y]$, на котором достигается максимум в правой части выражения (6).

Уравнение (6) называется *уравнением Беллмана*.

Поскольку уравнение (6) рекуррентно относительно аргумента *k* функции $B_k(y)$, то для его решения необходимо задать начальное условие. Это условие можно получить из (3), если положить *k =1*:

$$B_1(y) = \max f_1(x_1), x_1 = y, x_1 \geq 0.$$

Таким образом, начальное условие для уравнения Беллмана (6) имеет вид

$$B_1(y) = f_1(y). \tag{7}$$

Рассмотрим третий этап -- поиск решения уравнения Беллмана (6), (7) и построение по нему решения исходной задачи.

Начальное условие у нас задано -- это условие (7). В уравнении (6) положим *k= 2*:

$$B_2(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_2(z) + B_1(y-z)] = \max_{0 \leq z \leq y} [f_2(z) + f_1(y-z)]. \tag{8}$$

В этом выражении под знаком максимума стоят известные функции. Поэтому формула (8) позволяет вычислить $B_2(y)$ максимизацией известной функции одной переменной.

Положим далее в (6) *k=3*:

$$B_3(y) = \max_{0 \leq z \leq y} [f_3(z) + B_2(y-z)].$$

Функция $f_3(y)$ задана, функция $B_2(y)$ определена выше, следовательно, под знаком максимума стоит известная функция и мы можем теперь определить функцию $B_3(y)$ максимизацией известной функции одной переменной \textit{z}. И так далее. В результате будут построены функции $B_1(y), \ \ldots, \ B_n(y), \quad 0 \leq y \leq c.$ Согласно (3), число $B_n(c)$ -- максимальная прибыль для исходной задачи (1).

Чтобы найти оптимальное распределение сырья по технологическим процессам, обратимся к выражению (5) и совершим *обратный ход решения уравнения Беллмана*.

Положим в (5) *k=n* , *y=c* и, согласно (5), найдем число $x_n^0(c),$ которое, по определению, равно оптимальному количеству сырья, выделяемому на процесс *n*, если объем сырья на все *n* процессов равен *c*. Таким образом, компонента x_n^0 оптимального плана $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ исходной задачи (1) определена: $x_n^0 = x_n^0(c).$

Если *n*-му процессу выделили x_n^0 единиц сырья, то на остальные *n-1* процессов осталось $c - x_n^0$ единиц.

Положим в (5) $k = n-1, \ y = c - x_n^0$ и найдем $x_{n-1}^0(c - x_n^0).$ По определению $x_{n-1}^0(c - x_n^0)$ равно оптимальному количеству сырья, которое дается *n-1*-му процессу при условии, что $c - x_n^0$ единиц сырья надо разделить оптимальным образом между первыми *n-1* процессами. Таким образом, получаем $x_{n-1}^0 = x_{n-1}^0(c - x_n^0).$

Продолжив процесс решения, найдем компоненты $x_{n-2}^0, \ \ldots, \ x_1^0$ решения исходной задачи (1). Проанализируем результат.

Достоинства метода:

1. Исходная задача (1) максимизации по *n* переменным свелась к *(n-1)* задачам (6) максимизации по одной переменной, причем результат -- глобально оптимальный план.

2. В процессе решения не использовались аналитические свойства элементов задачи, исходные функции могли быть заданы таблично, графически, алгоритмически и т.д.

3. По результатам вычислений $B_k(y)$ легко построить решение задачи (1) при варьированных значениях параметров *c* и *n*, что позволяет провести анализ чувствительности решений задачи (1) к изменениям указанных параметров.

Недостатки метода

Основным недостатком метода является *«проклятие размерности»*. Суть этого недостатка состоит в том, что при решении уравнения Беллмана (6) приходится запоминать функции $B_k(y)$. В рассмотренной выше задаче с распределением сырья одного вида ими оказались функции одного аргумента. В общем случае количество аргументов равно количеству видов сырья. Табулирование функций многих переменных (*n>2*) требует очень много места в оперативной памяти, что затрудняет реализацию метода.

Существуют способы борьбы с «проклятием размерности», но эти способы годятся не для всех задач.

Пример. Рассмотрим пример с данными из табл. 2.1.

Таблица 2.1

$c = 5, n = 3$

x	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0	0	1	2	4	7
$f_3(x)$	0	2	2	3	3	5

Определим функции Беллмана по правилу: $B_1(y) = f_1(y)$,

$$B_2(y) = \max_{0\le z\le y} [f_2(z) + B_1(y-z)], B_3(y) = \max_{0\le z\le y} [f_3(z) + B_2(y-z)],\ 0 \le y \le c = 5.$$

Например,

$$B_2(4) = \max_{0\le z\le 4}(f_2(z) + B_1(4-z)) =$$

$$= \{f_2(0) + B_1(4), f_2(1) + B_1(3), f_2(2) + B_1(2),$$

$$f_2(3) + B_1(1),\ f_2(4) + B_1(0)\} = 4.$$

Значения функций Беллмана представим в табл. 2.2, где в каждой клетке наряду со значением функции Беллмана $B_k(y)$ в скобках укажем значение $x_k^0(y)$, на котором достигает максимума правая часть уравнения (6).

Таблица 2.2

y	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	1	2	3	4	5
$B_2(y)$	1(0)	2(0)	3(0)	4(0,4)	7(5)
$B_3(y)$	2(1)	3(1)	4(1)	5(1)	7(0)

Из табл. 2.2 видно, что максимальная прибыль в рассматриваемой задаче равна $B_3(5) = 7$. Найдем оптимальное распределение ресурсов. Поскольку $x_3^0(5) = 0$, то третьему технологическому процессу назначаются ресурсы в объеме $x_3^0 = 0$. На остальные процессы 1 и 2 остается ресурсов 5-0=5. Прибыль от реализации процессов 1, 2 при объеме ресурсов 5 равна $B_2(5) = 7$ и $x_2^0(5) = 5$. Значит, второму процессу назначается ресурс в объеме 5: $x_2^0 = 5$. На первый процесс остается ресурса в объеме 5 -- 5 = 0. Следовательно, $x_1^0 = 0$.

Получили оптимальный план

$$(x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 5,\ x_3^0 = 0).$$

Изменим теперь в задаче одно условие: положим теперь *c*=4. Согласно таблице, имеем: $B_3(4) = 5$ -- это максимальная прибыль, $x_3^0(4) = 1$. Следовательно, на первый и второй процессы остается ресурса в объеме 4-1=3. Далее по табл. 2.2 находим $B_2(3) = 3$ и $x_2^0(3) = 0$. На первый процесс остается ресурса в объеме 3 -- 0 = 3.

Оптимальный план распределения ресурсов

$$(x_1^0 = 3,\ x_2^0 = 0,\ x_3^0 = 1).$$