

## Тема 9. ПЛАНИРОВАНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Планирование модельных экспериментов преследует две основные цели:

- сокращение общего объема испытаний при соблюдении требований к достоверности и точности их результатов;
- повышение информативности каждого из экспериментов в отдельности.

Поиск плана эксперимента производится в так называемом факторном пространстве.

**Факторное пространство** – это множество внешних и внутренних параметров модели, значения которых исследователь может контролировать в ходе подготовки и проведения модельного эксперимента.

Поскольку факторы могут носить как количественный, так и качественный характер (например, отражать некоторую стратегию управления), значения факторов обычно называют уровнями. Если при проведении эксперимента исследователь может изменять уровни факторов, эксперимент называется активным, в противном случае – пассивным.

Введем еще несколько терминов, используемых в теории планирования эксперимента.

Каждый из факторов имеет верхний и нижний уровни, расположенные симметрично относительно некоторого нулевого уровня. Точка в факторном пространстве, соответствующая нулевым уровням всех факторов, называется центром плана.

**Интервалом варьирования фактора** называется некоторое число  $J$ , прибавление которого к нулевому уровню дает верхний уровень, а вычитание – нижний.

Как правило, план эксперимента строится относительно одного (основного) выходного скалярного параметра  $Y$ , который называется наблюдаемой переменной. Если моделирование используется как инструмент принятия решения, то в роли наблюдаемой переменной выступает показатель эффективности.

При этом предполагается, что значение наблюдаемой переменной, полученное в ходе эксперимента, складывается из двух составляющих:

$$y = f(x) + e(x),$$

где  $f(x)$  – функция отклика (неслучайная функция факторов);

$e(x)$  – ошибка эксперимента (случайная величина) ;

$x$  – точка в факторном пространстве (определенное сочетание уровней факторов);

Очевидно, что  $y$  является случайной переменной, так как зависит от случайной величины  $e(x)$ .

Дисперсия  $D_y$  наблюдаемой переменной, которая характеризует точность измерений, равна дисперсии ошибки опыта:  $D_y = D_e$ .

$D_y$  называют дисперсией воспроизводимости эксперимента. Она характеризует качество эксперимента. Эксперимент называется идеальным при  $D_y = 0$ .

Существует два основных варианта постановки задачи планирования имитационного эксперимента:

Из всех допустимых выбрать такой план, который позволили бы получить задачи планирования имитационного эксперимента:

1. Из всех допустимых выбрать такой план, который позволил бы получить наиболее достоверное значение функции отклика  $f(x)$  при фиксированном числе опытов.
2. Выбрать такой допустимый план, при котором статистическая оценка функции отклика может быть получена с заданной точностью при минимальном объеме испытаний.

Решение задачи планирования в первой постановке называется стратегическим планирование эксперимента, во второй – тактическим планирование.

### **9.1. Стратегическое планирование имитационного эксперимента.**

Итак, цель методов стратегического планирования имитационных экспериментов получение максимального объема информации об исследуемой системе в каждом эксперименте (наблюдении). Другими словами, стратегическое планирование позволяет ответить на вопрос, при каком сочетании уровней внешних и внутренних факторов может быть получена наиболее полная и достоверная информация о поведении системы.

При стратегическом планировании эксперимента должны быть решены две основные задачи:

- Идентификация факторов;
- Выбор уровней факторов.

Под идентификацией факторов понимается их ранжирование по степени влияния

на значение наблюдаемой переменной (показателя эффективности).

По итогам идентификации целесообразно разделить все факторы на две группы – первичные и вторичные. Первичные – это те факторы, в исследовании влияния которых экспериментатор заинтересован непосредственно. Вторичные – факторы, которые не являются предметом исследования, но влиянием которых нельзя пренебречь.

Выбор уровней факторов производится с учетом двух противоречивых требований:

- Уровни фактора должны перекрывать (заполнять) весь возможный диапазон его изменения;
- Общее количество уровней по всем факторам не должно приводить к чрезмерному объему моделирования.

Отыскание компромиссного решения, удовлетворяющего этим требованиям, и является задачей стратегического планирования эксперимента.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ).

Общее число различных комбинаций уровней в ПФЭ для  $k$  факторов можно вычислить так:  $N = I_1 * I_2 * \dots * I_k$ ,

где  $I_i$  – число уровней  $i$ -го фактора.

Если число уровней для всех факторов одинаково, то  $N = L^k$  ( $L$  – число уровней).

Недостаток ПФЭ – большие временные затраты на подготовку и проведение.

Например, если в модели отражены 4 фактора, влияющие на значение выбранного показателя эффективности, каждый из которых имеет 3 возможных уровня (значения), то план проведения ПФЭ будет включать 81 эксперимент ( $N=3^4$ ). Если при этом каждый из них длится хотя бы одну минуту (с учетом времени на изменение значений факторов), то на однократную реализацию ПФЭ потребуется более часа.

Поэтому использование ПФЭ целесообразно только в том случае, если в ходе имитационного эксперимента исследуется взаимное влияние всех факторов, фигурирующих в модели.

Если такие взаимодействия считают отсутствующими или их эффектом пренебрегают, проводят частичный факторный эксперимент (ЧФЭ).

Известны и применяются на практике различные варианты построения планов ЧФЭ. Мы рассмотрим только некоторые из них.

1. Рандомизированный план – предполагает выбор сочетания уровней для каждого прогона случайным образом.
2. Латинский план («латинский квадрат») - используется в том случае, когда проводится эксперимент с одним первичным фактором и несколькими вторичными. Суть такого планирования состоит в следующем. Если первичный фактор  $A$  имеет  $I$  уровней, то для каждого вторичного фактора также выбирается  $I$  уровней. Выбор комбинации уровней факторов выполняется на основе специальной процедуры, которую мы рассмотрим на примере.

Пусть в эксперименте используется первичный фактор  $A$  и два вторичных фактора –  $B$  и  $C$ ; число уровней факторов  $I$  равно 4.

Соответствующий план можно представить в виде квадратной матрицы размером  $I \times I (4 \times 4)$  относительно уровней фактора  $A$ . При этом матрица строится таким образом, чтобы в каждой строке и в каждом столбце данный уровень фактора  $A$  встречался только один раз (табл. 9.1):

Таблица 9.1. Пример латинского плана

Значение фактора В	Значение фактора С			
	С1	С2	С3	С4
В1	А1	А2	А3	А4
В2	А2	А3	А4	А1
В3	А3	А2	А1	А4
В4	А4	А1	А2	А3

В результате имеем план, требующий  $4 \times 4 = 16$  прогонов, в отличие от ПФЭ, для которого нужно  $4^3 = 64$  прогона.

### 3. Эксперимент с изменением факторов по одному.

Суть его состоит в том, что один из факторов «пробегаёт» все  $I$  уровней, а остальные  $n - 1$  факторов поддерживаются постоянными. Такой план обеспечивает исследование эффектов каждого фактора в отдельности. Он требует всего  $N = I_1 + I_2 + \dots + I_n$  прогонов ( $I_i$  – число уровней  $i$  – го фактора).

Для рассмотренного выше примера (3 фактора, имеющие по 4 уровня)  $N = 4 + 4 + 4 = 12$ .

Ещё раз подчеркнем, что такой план применим (как и любой ЧФЭ) только при отсутствии взаимодействия между факторами.

### 4. Дробный факторный эксперимент.

Каждый фактор имеет два уровня – нижний и верхний, поэтому общее число вариантов эксперимента  $N = 2^k$ ,  $k$  – число факторов. Матрицы планов для  $k = 2$  и  $k = 3$  приведены ниже.

Планы, построенные по такому принципу, обладают определенными свойствами (симметричности, нормированности, ортогональности и ротатбельности), обеспечивающими повышение качества проводимых экспериментов.

Таблица 9.2 Матрица плана дробного факторного эксперимента для  $k=2$

Номер эксперимента	Значение факторов	
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

Таблица 9.3 Матрица плана дробного факторного эксперимента для  $k=3$

Номер эксперимента	Значение факторов		
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	1	1

## 9.2.Тактическое планирование эксперимента.

Совокупность методов установления необходимого объема испытаний относят к тактическому планированию экспериментов.

Поскольку точность оценок наблюдаемой переменной характеризуется её дисперсией, то основу тактического планирования эксперимента составляют так называемые методы понижения дисперсии.

Поскольку имитационное моделирование представляет собой статистический эксперимент, то при его проведении необходимо не только получить достоверный результат, но и обеспечить его «измерение» с заданной точностью. Т.е. необходимо выбрать такой объем испытаний, при котором доверительный интервал при заданном значении доверительной вероятности не превышал требуемый.

В общем случае объем испытаний (величина выборки), необходимый для получения оценок наблюдаемой переменной с заданной точностью, зависит от следующих факторов:

- Вида распределения наблюдаемой переменной  $y$  (напомним, что при статистическом эксперименте она является случайной величиной);
- Коррелированности между собой элементов выборки;
- Наличия и длительности переходного режима функционирования моделируемой системы.

Если исследователь не обладает перечисленной информацией, то у него имеется единственный способ повышения точности оценок истинного значения наблюдаемой переменной – многократное повторение прогонов модели для каждого сочетания уровней факторов, выбранного на этапе стратегического планирования эксперимента. Такой подход получил название «формирование простой случайной выборки» (сокращенно - ПСВ). Другими словами, при использовании ПСВ каждый «пункт» стратегического плана просто выполняется повторно определенное число раз, и затем полученные результаты усредняются (вычисляются математическое ожидание и дисперсия наблюдаемой переменной). При таком подходе общее число прогонов модели, необходимое для достижения цели моделирования, равно произведению  $N_c \cdot x \cdot N_t$  ( $N_c$  - число сочетаний уровней факторов по стратегическому плану;  $N_t$  – число прогонов модели для каждого сочетания, вычисленное при тактическом планировании).

Поэтому даже при использовании ПСВ до начала испытаний необходимо определить тот минимальный объем выборки, который обеспечит требуемую точность результатов.

Рассмотрим несколько основных вариантов вычисления необходимого объема испытаний (величину  $N_t$ ).

1. Если случайные значения наблюдаемой переменной не коррелированы и их распределение не изменяется от прогона к прогону, то выборочное среднее можно считать нормально распределенным.

В этом случае число прогонов  $N_t$ , необходимое для того, чтобы истинное среднее  $y$  лежало в интервале  $y \pm b$  с вероятностью  $(1 - \alpha)$ , определяется следующим образом:

$$N_t = (Z^2 \cdot D_y) / b^2$$

где  $Z$  – значение нормированного нормального распределения, которое определяется по справочной таблице при заданном уровне значимости  $\alpha/2$ ;

$D_y$  – дисперсия;

$b$  – доверительный интервал.

Если требуемое значение дисперсии  $D_y$  до начала эксперимента неизвестно, целесообразно выполнить пробную серию из  $L$  прогонов и вычислить на её основе выборочную дисперсию  $D$ .

2. Если наблюдаемая переменная – вектор, то оценку необходимого числа прогонов выполняют отдельно для каждой компоненты вектора. Наибольшее и полученных значений  $M$  принимают в качестве числа прогонов  $N_t$ .

Основной недостаток методов планирования, основанных на использовании простой случайной выборки – медленная сходимость выборочных средних к истинным средним с ростом объема выборки  $N_t$  (пропорционально значению  $N_t^{1/2}$ ). Это приводит к необходимости использования методов уменьшения ошибок, не требующих увеличения  $N_t$ . Такие методы называются методами понижения дисперсии и делятся на три группы:

- Активные (предусматривают формирование выборки специальным образом);
- Пассивные (применяются после того, как выборка уже сформирована);
- Косвенные (в которых для получения оценок наблюдаемой переменной используются значения некоторых величин).

Активных методов понижения дисперсии известно достаточно много. Выбор конкретного метода определяется, как правило, спецификой модели и целями эксперимента. Рассмотрим те из них, которые направлены на снижение влияния переходного периода. Выбор объясняется тем, что наличие и длительность переходного режима оказывает существенное влияние на качество результатов моделирования (в смысле точности). Вместе с тем, большинство ИМ используется для изучения функционирования системы в установившемся режиме.

Существует три основных метода уменьшения ошибок, обусловленных наличием переходного периода:

1. Значительное увеличение длительности прогона.
2. Исключение и рассмотрения переходного периода
3. Инициализация модели при некоторых специально выбранных начальных условиях.

На практике снижения влияния переходного периода обычно добиваются одним из следующих способов:

- Методом повторений
- Методом подинтервалов
- Методом циклов

#### Метод повторения

При использовании этого метода каждое наблюдение получается при помощи отдельного прогона модели, причем все прогоны начинаются при одних и тех же начальных условиях, но используются различные последовательности случайных чисел

Преимуществом метода является статистическая независимость получаемых наблюдений. Недостаток состоит в том, что наблюдения могут оказаться сильно смещенными под влиянием начальных условий.

#### Метод подинтервалов

Данный метод основан на разбиении каждого прогона модели на равные промежутки времени. Начало каждого интервала совпадает с началом очередного этапа наблюдений.

Достоинство метода состоит в том, что влияние переходных условий со временем уменьшается и наблюдение точнее отражает поведение системы в стационарном режиме. Недостаток в том, что значения наблюдаемых переменных, полученных в начале очередного интервала, зависят от конечных условий предыдущего интервала (т.е. между интервалами существует автокорреляция).

#### Метод циклов

При использовании метода циклов влияние автокорреляции уменьшается за счет выбора интервалов таким образом, чтобы в их начальных точках условия были одинаковыми. Например, в качестве таких условий можно рассматривать длину очереди заявок на обслуживание. В этом случае удобно выбрать начало очередного интервала совпадающим с моментом, когда длина очереди становится равной нулю. Недостатком метода является меньшее по сравнению с методом подинтервалов число получаемых наблюдений.

**Пассивные методы** влияют на подготовку и проведение эксперимента, но реализуются на этапе обработки и анализа результатов моделирования. Их довольно много; рассмотрим наиболее простой и распространенный – метод стратифицированной выборки.

Суть метода состоит в следующем.

Выборка разделяется на части, называемые слоями (стратами). При этом необходимо, чтобы значения элементов выборки как можно меньше различались внутри одного слоя и как можно больше – между различными слоями. Внутри каждого слоя производят случайный отбор элементов и вычисляют среднее значение слоя  $y_i$ . Полученные оценки используют для вычисления математического ожидания по выборке в целом:

$$y = (\sum N_i y_i) / N$$

где  $N$ ,  $N_i$  – объем всей выборки и  $i$ -го слоя соответственно. Если считать, что оценки  $y_i$  независимы, то дисперсия по выборке и в целом равна:

$$D_y = (\sum N_i D_i) / N$$

где  $D_{y_i}$  – дисперсия для  $i$ -го слоя.

При удачном выборе слоев величины  $D_i$  будут малы, а значит, и выборочная дисперсия  $D_y$  будет предпочтительнее, чем для оценки, полученной методами простой случайной выборки.

Косвенные методы понижения дисперсии основаны на том, что зачастую некоторые из выходных характеристик можно получить (вычислить) легче, чем другие. Их использование предполагает не только весьма глубокое знание сущности процессов, протекающих в системе, но и наличие формального описания взаимной зависимости параметров модели.

