Тема 6 Линейное программирование и теория игр

Как и линейное программирование, теория игр является одной из областей современной математики. Если при исследовании общей задачи линейного программирования мы определяем способ эффективного использования или распределения ограниченных ресурсов для достижения желаемых целей, то в теории игр нас интересует стратегия, с помощью которой достигается выигрыш, максимально возможный в данной игре.

В то время, когда закладывались основы теории игр, замечательное соответствие между линейным программированием и теорией игр не было известно. Связь между ними впервые была установлена фон Нейононом и Данцигом. В данной главе мы установим эквивалентность общей задачи линейного программирования с произвольной игрой двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом стратегий.

6.1 Постановка задачи

Основное содержание теории игр состоит в изучении следующей проблемы: если *n* партнеров $P_1, P_2, ..., P_n$ играют в данную игру *Г*, то как должен вести партию *i*-й игрок для достижения наиболее благоприятного для себя исхода?

Здесь под термином *игра* понимается совокупность предварительно оговоренных правил и условий игры, а термин *партия* связан с частной возможной реализацией этих правил. В дальнейшем предполагается, что в конце каждой партии игры каждый игрок P_i получает сумму денег v_i , называемую *выигрышем* этого игрока, и стремится максимизировать сумму получаемых им денег.

В большинстве салонных игр общая сумма денег, теряемых проигравшими игроками, равна сумме денег, получаемых выигравшими партнерами. В этом случае для каждой партии

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = 0.$$

Число v_i может быть любого знака, при этом: $v_i > 0$ соответствует выигрышу, $v_i < 0;$ соответствует проигрышу, $v_i = 0$ соответствует нейтральному исходу.

Игры, в которых алгебраическая сумма выигрышей равна нулю, называются *играми с нулевой суммой*.

Игры также классифицируются по числу игроков и числу возможных ходов. Далее игры можно подразделять на *кооперативные* и *некооперативные*. В кооперативных играх партнеры могут образовывать коалиции и играть как команды, тогда как в некооперативных играх каждого игрока интересует лишь его собственный результат.

Игры двух партнеров являются, очевидно, некооперативными.

Мы будем рассматривать только игры двух партнеров с нулевой суммой и конечным числом возможных ходов. Такие игры называются *прямоугольными* или *матричными*, поскольку они задаются платежной матрицей (или матрицей выигрышей):

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij},\ j = \overline{1,n} \\ i = \overline{1,m} \end{pmatrix}.$$

Первый игрок имеет возможность сделать m выборов (m чистых стратегий), а второй -- n выборов (n чистых стратегий). Если первый игрок выбирает i-ю чистую стратегию, а второй -- j-ю, то выигрыш первого (проигрыш второго) равен a_{ij} , сумма выигрышей обоих игроков равна нулю.

Задача теории игр заключается в выборе принципов поведения игроков в каждой конкретной ситуации.

Решение игры -- это выбор линии поведения игроков, обеспечивающих состояние равновесия, т.е. состояние, к которому стремился бы каждый разумный игрок, сознавая, что отступление от этой линии может только уменьшить его выигрыш.

В большинстве конкретных ситуаций невозможно указать такие чистые стратегии игроков, которые обеспечивали бы ситуацию равновесия независимо от поведения противников. Однако теория игр позволяет выработать такую линию поведения, придерживаясь которой в каждой партии каждый игрок может обеспечить ситуацию равновесия в среднем (для многих партий) независимо от поведения противника.

Если один из противников не будет в процессе последовательного повторения партий придерживаться правил оптимального выбора стратегий, то средний выигрыш другого противника может увеличиться.