Тема 5 Потоки в сетях

Популярность сетевых оптимизационных моделей, которые обычно являются частными случаями моделей ЛП, можно объяснить прежде всего следующими причинами.

Часто они относятся к задачам распределения продукции. Следовательно, модели этого класса имеют экономический смысл для многих промышленных фирм и предприятий. Кроме того, математическая структура сетей идентична структуре других оптимизационных моделей, на первый взгляд не имеющих с ними ничего общего. Однако указанные две причины не могут служить основанием для выделения сетевых моделей в качестве предмета специального изучения.

Важнейшей причиной, обуславливающей целесообразность такого выделения, являются особенности математических характеристик сетевых моделей. Используя эти особенности, можно существенно повысить эффективность процесса отыскания оптимальных решений задач, которые удаётся описать на "сетевом языке". В реальных примерах сетевые модели часто содержат тысячи переменных и сотни ограничений. В связи с этим применение эффективных методов становится не только выгодным, но просто необходимым.

Наконец, исследуя сети, можно убедиться, что разнообразные, на первый взгляд, совершенно непохожие оптимизационные модели допускают применение общего метода, что, несомненно, обеспечивает существенные преимущества.

5.1 Примеры задач, которые имеют сетевую форму

5.1.1. Классическая транспортная задача (в матричной форме)

Имеется n пунктов производства некоторого (одного) продукта. Обозначим через a_i объём производства продукта в i пункте производства, $i=\overline{1,n}$. Имеется m пунктов потребления этого продукта. Обозначим через b_j объём потребления продукта в j -м пункте потребления, $j=\overline{1,m}$. Перевозка единицы продукции из i -го пункта производства в j -й пункт потребления стоит $c_{ij},\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m}.$ Требуется составить такой план перевозок продукта от пунктов производства в пункты потребления, чтобы:

1) вывести весь продукт из каждого пункта производства;
2) удовлетворить спрос каждого пункта потребления;
3) минимизировать общую стоимость перевозок.

Обозначим через x_{ij} объём продукта, перевозимый из i -го пункта производства в j -й пункт потребления. Математическая модель задачи состоит в следующем: найти такой план перевозок $x=(x_{ij},\ i=\overline{1,n}\ ,\ j=\overline{1,m})$, чтобы

(1)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i=\overline{1,n}; \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Иногда в условия задачи добавляют ещё одно требование: объём перевозки продукта из i -го пункта производства в j -й пункт потребления не должен превышать заданного числа $d_{ij} > 0$. В этом случае ограничение (3) заменяется ограничением

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,m}. \tag{3'}$$

Задача (1) -- (3) и метод её решения (метод потенциалов) были рассмотрены в курсе "Методы оптимизации и управления".

Метод решения задачи (1), (2), (3') легко получить из метода решения задачи (1) -- (3), зная правила симплекс-метода для задачи ЛП с двухсторонними ограничениями на переменные.

5.1.2 Сетевая модель транспортной задачи (задача о потоке минимальной стоимости)

Большое значение имеет обобщение классической транспортной задачи путём включения в неё случаев, когда некоторые пункты являются транзитными.

Имеется n пунктов $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, которые связаны между собой системой дорог, которую удобно представлять в виде набора пар

$$(i,j) \in \ U \subset \{\, (i,j)\,,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}\}.$$

Если пара $(i,j) \in U$, то это означает, что есть дорога из i в j. (Но это ещё не означает, что есть дорога из j в i . Для существования такой дороги надо, чтобы существовала дуга $(j,i) \in U$!)

Все пункты $i \in I$ делятся на непересекающиеся три группы:

$$I = I_+ \bigcup I_- \bigcup I_0,$$

где I_+ -- пункты производства; обозначим через $a_i > 0$ объёмы производства в этих пунктах;

I_- -- пункты потребления; обозначим через $a_i < 0$ объёмы потребления в этих пунктах;

I_0 -- транзитные пункты, для них $a_i = 0$.

Числа $a_i, \ i \in I$, называются интенсивностями узлов $i \in I$.

Обозначим через $c_{ij}, \ (i,j) \in U$, стоимость перевозки единицы продукции по дороге (i,j) из i в j.

Требуется так организовать перевозки от пунктов производства к пунктам потребления, чтобы:

1) для каждого пункта соблюдалось условие баланса:

-- для пункта производства -- сумма произведённого продукта плюс сумма введённого продукта равны сумме вывезенного продукта; -- для пункта потребления -- сумма ввезенного продукта равна потреблённому продукту плюс сумма вывезенного продукта;

-- для транзитного пункта -- сумма ввезённого продукта равна сумме вывезенного продукта;

2) суммарная стоимость всех перевозок была минимальна.

Обозначим через x_{ij} объём перевозки по дуге (i,j) . Тогда математическая модель задачи имеет вид

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{4}$$

$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I, \tag{5}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in U. \tag{6}$$

К сформулированной выше задаче можно добавить ещё одно условие: объём перевозки по дороге (i,j) не должен превышать числа d_{ij}. Тогда ограничение (6) заменяется на ограничение

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i,j) \in U. \tag{6'}$$

Задача (4), (5), (6') называется задачей о потоке минимальной стоимости с ограничениями на пропускные способности дуг. Методы решения задачи (4) -- (6) рассмотрены в [Задача о потоке минимальной стоимости].

5.1.3 Многопродуктовая транспортная задача

В задачах, описанных в пп.~1, 2, речь шла о перевозках одного вида продукта из пунктов производства в пункты потребления. Можно рассматривать аналогичные задачи, в которых речь идёт о нескольких видах продуктов.

Рассмотрим двухпродуктовую задачу.

Пусть есть пункты $i \in I$, связанные сетью дорог $(i, j) \in U$. Каждая дорога $(i, j) \in U$ имеет ограниченную пропускную способность d_{ij}, $(i, j) \in U$.

Для каждого пункта $i \in I$ заданы два числа a_i, b_i :

a_i -- интенсивность узла (пункта) i по первому продукту (если $a_i > 0$, то первый продукт производится в i ; если $a_i < 0$, то первый продукт потребляется в i ; если $a_i = 0$, то пункт i -- транзитный по первому продукту);

b_i -- интенсивность узла (пункта) i по второму продукту (если $b_i > 0$, то второй продукт производится в i ; если $b_i < 0$, , то второй продукт потребляется в i , если $b_i = 0$, то i -- транзитный пункт по второму продукту).

Заданы числа c_{ij}, f_{ij} -- стоимость перевозки единицы продукции первого и второго видов по дуге $(i, j) \in U$. Требуется найти план перевозок продукции первого и второго вида, такой, что:

1) для каждого узла выполняются условия баланса по продукции первого и второго видов;

2) суммарный объём перевозок продукции первого и второго видов по дуге (i, j) не превосходит её пропускной способности d_{ij} ;

3) суммарная стоимость перевозок продукции двух видов минимальная.

Обозначим через x_{ij} и y_{ij} объёмы перевозок первого и второго видов продукции по дуге (i, j) . Математическая модель двухпродуктовой транспортной задачи имеет вид

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in U} f_{ij}y_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I,$$

$$\sum_{j\in I_i^+} y_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} C_{ji} = b_i, \quad i \in I;$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad y_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} + y_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i,j) \in U.$$

Последнее ограничение кажется малосущественным, однако именно оно значительно усложняет решение последней задачи по сравнению с аналогичной однопродуктовой задачей (4), (5), (6'). Методы решения двухпродуктовой транспортной задачи описаны в [3].

5.1.4 Задача о построении дерева кратчайших путей из заданного узла s

Эта задача подробно описана в [Кратчайшие пути]. Там же отмечалось, что она -- частный случай задачи (4) -- (6) с интенсивностями узлов, заданными следующим образом:

$$a_s = n - 1, \quad a_i = -1, \quad i \in I \backslash s\}.$$

Методов решения задачи о построении дерева кратчайших путей описаны также [Кратчайшие пути]. .

5.1.5 Задача о расчёте минимального времени выполнения комплекса работ (задача о критическом пути из s в t)

Математическая модель этой задачи описана [Динамическое программирование]. Там же показано, что эта задача -- частный случай задачи (4) -- (6), когда min заменяем на max и

$$a_s = 1, \quad a_t = -1, \quad a_i = 0, \quad i \in I \backslash \{s, t\}.$$

Методы решения данной задачи изложены также в [Динамическое программирование].

5.1.6 Задача о назначениях

Задачу о назначениях можно кратко сформули-ровать следующим образом. Задано n

работ, каждую из которых может выполнить любой из n исполнителей. Стоимость выполнения работы i исполнителем j равна c_{ij}. Нужно распределить исполнителей по работам, т.е. назначить по одному исполнителю на каждую работу таким образом, чтобы минимизировать общие затраты.

Построим математическую модель данной задачи. Определим переменную

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если на работу } i \text{ назначается исполнитель } j; \\ 0 & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; i=\overline{1,n}; \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; j=\overline{1,n}; \tag{8}$$

$$0 \le x_{ij} \le 1, \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,n}; \tag{9}$$

$$x_{ij} \text{ - целое, } i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Очевидно, что задача (7) -- (9) -- частный случай транспортной задачи (1), (2), (3'), когда

$$a_i = 1, \;\; i=\overline{1,n}; \; b_j = 1, \;\; j=\overline{1,m}; \quad n=m; \;\; d_{ij}=1, \; i=\overline{1,n}, \; j=\overline{1,m}.$$

Нетрудно показать, что задача (1), (2), (3') обладает следующим свойством: она имеет целочисленное решение, если $a_i, \; i=\overline{1,n}; b_j, \; j=\overline{1,m}$ -- целые числа.

Следовательно, и задача (7) -- (10) -- частный случай задачи (1), (2), (3') -- имеет целочисленное решение. Значит, для решения задачи (7) -- (10) можно использовать метод потенциалов, отбросив условия целочисленности. Отметим, что задача (7) -- (10) -- специальная транспортная задача и для её решения можно разработать другие методы, отличные от метода потенциалов, учитывающие специфику этой задачи. Один из таких методов будет рассмотрен в далее.

5.1.7 Задача коммивояжёра

Эта задача относится к следующей ситуации: коммивояжёр собирается посетить каждый из n городов по одному разу, выехав из первого города и вернувшись в него же. Ни один город коммивояжёр не должен посещать дважды. Расстояние между городами i и j равно c_{ij} (если между городами i и j нет дороги, то полагаем $c_{ij} = \infty$). Надо найти кратчайший маршрут коммивояжёра.

Математическая модель этой задачи отображает также ситуацию совершенно иного характера.

Имеется n сортов мороженого, которое изготавливается на одном и том же оборудовании. Пусть c_{ij} означает затраты времени на очистку и подготовку оборудования, когда сорт j изготавливается после сорта i . Предполагается, что заданная последовательность производства повторяется каждый день, т.е. оборудование после последнего сорта мороженого опять настраивается на производство первого сорта. Требуется найти такую последовательность производства, при которой затраты на переналадку были бы минимальными.

Обозначим

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из города } i \text{ идём в город } j, \\ 0 & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Математическая модель задачи коммивояжёра совпадает с задачей (7) -- (10) плюс ещё одно дополнительное требование

$$\text{совокупность дуг } U_*(x) = \{\,(i,j) \in U,\ x_{ij} = 1\} \text{ образует один цикл.} \tag{11}$$

Замечание. В (11) слово «цикл» можно было бы заменить словом «контур», поскольку с учетом ограничений (8) -- (10) легко показать, что все циклы, образованные совокупностью дуг $U_*(x)$, являются контурами.

Дополнительное ограничение (11) является существенным. Решив задачи (7) -- (9) (без дополнительного условия (11)), мы можем получить такой оптимальный план x^0 , для которого множество $U(x^0)$ состоит из двух и более циклов, что недопустимо в исходной задаче о коммивояжёре.

Отметим, что ограничение (11) существенно усложняет решение задачи о коммивояжёре. К настоящему времени разработано много методов решения задачи о коммивояжере. Некоторые из них будут описаны ниже.

5.1.8 Задача о максимальном потоке

Пусть задана некоторая ориентированная сеть $S = \{I, U\}$. На каждой дуге $(i, j) \in U$ задано число $d_{ij} \geq 0$ --пропускная способность дуги $(i, j) \in U$. В сети S выделены два узла $s \in I$ и $t \in I$, $s \neq t$; s --- источник, t --- сток. Требуется найти максимальный поток из узла s в узел t по дугам сети S при условии, что величина x_{ij} дугового потока по дуге $(i, j) \in U$ положительна и не превышает числа d_{ij} --- пропускной способности дуги (i, j) .

Математическая модель данной задачи имеет вид

$$
\begin{gathered}
v \to \max_{v,x}, \\
\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = \begin{cases} \nu & \text{if} \quad i = s, \\ 0 & \text{if} \quad i \in I \setminus \{s, t\}, \\ -\nu & \text{if} \quad i = t, \end{cases} \\
0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad (i, j) \in U.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Свойства задачи (12) и методы ее решения описаны в следующем параграфе.