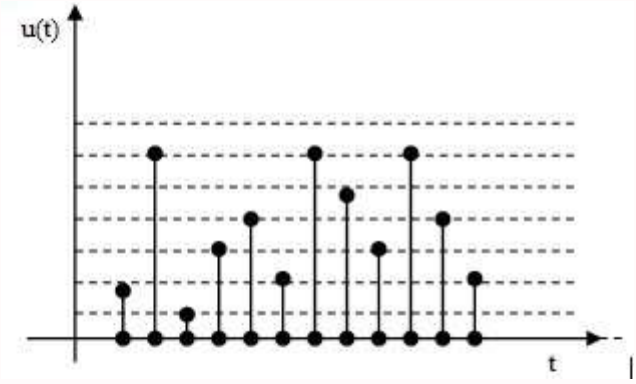
Тема 7. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

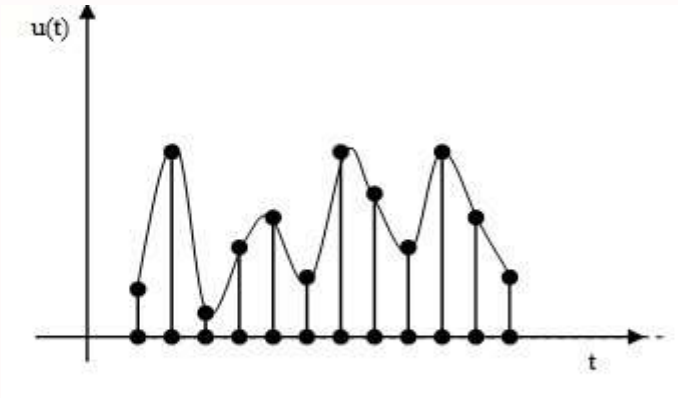
7.1. Типы случайных процессов

Случайным называется процесс u(t), мгновенные значения которого являются случайными величинами.

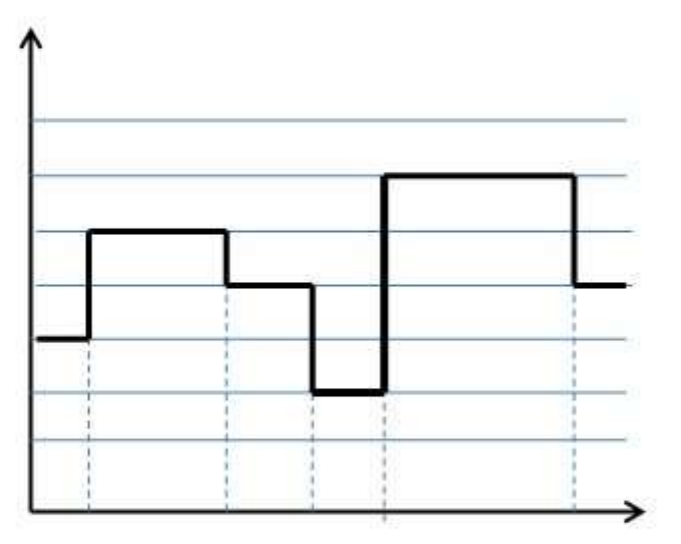
- Дискретная случайная последовательность (дискретный процесс с дискретным временем).



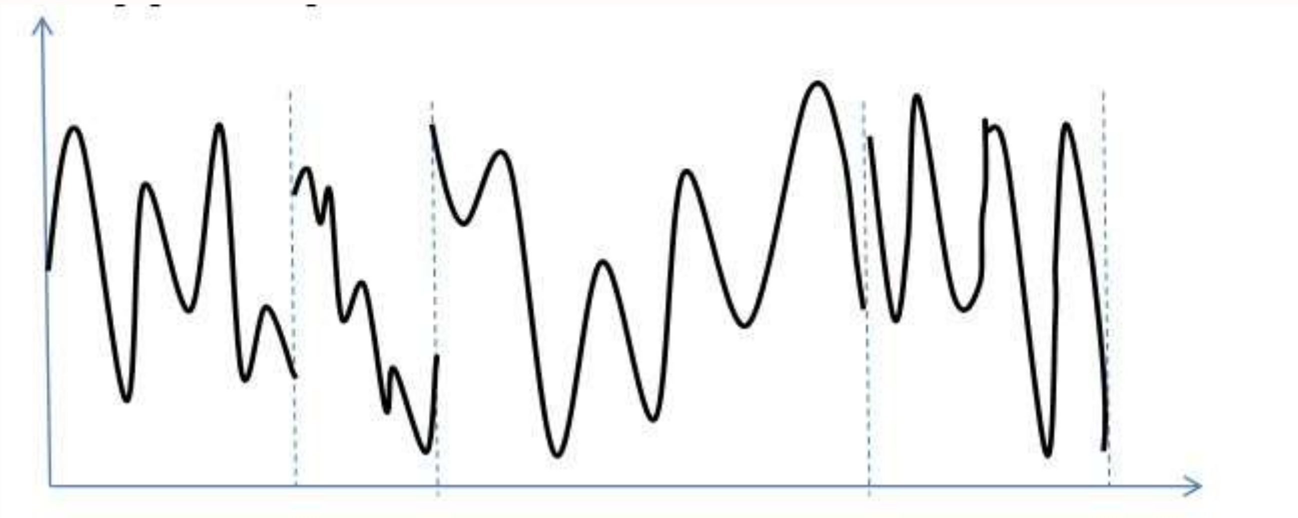
- Случайная последовательность (непрерывный процесс с дискретным временем .



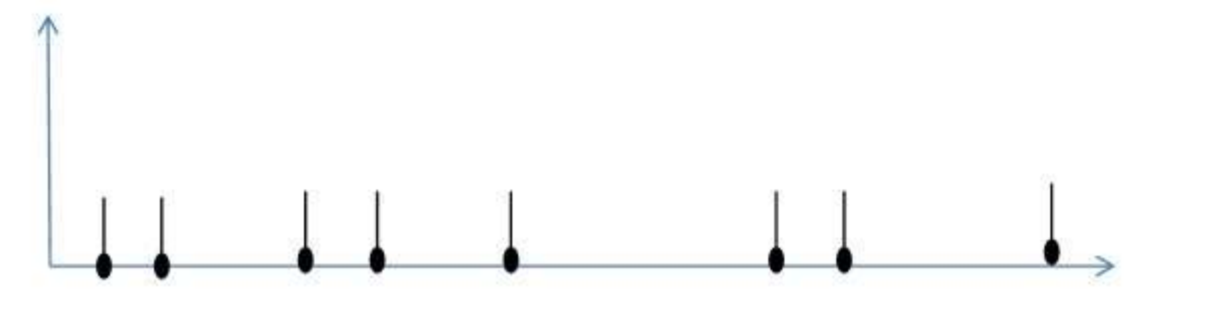
- Дискретный (разрывный) процесс с непрерывным временем.



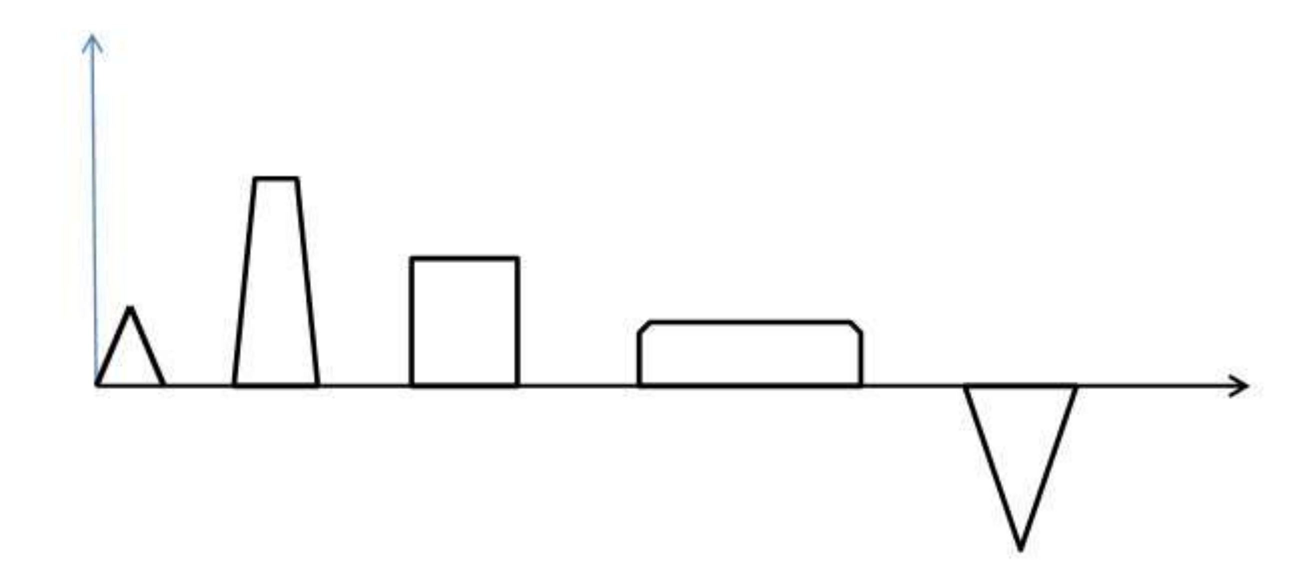
- Непревывнозначеый случайный процесс – непрерывен во времени, но могут быть разрывы (скачки – разрывы первого рода). Если скачков нет – непрерывный процесс.



- Случайный точечный процесс(поток) – потоки событий. Например, простейший поток, поток Пальма.

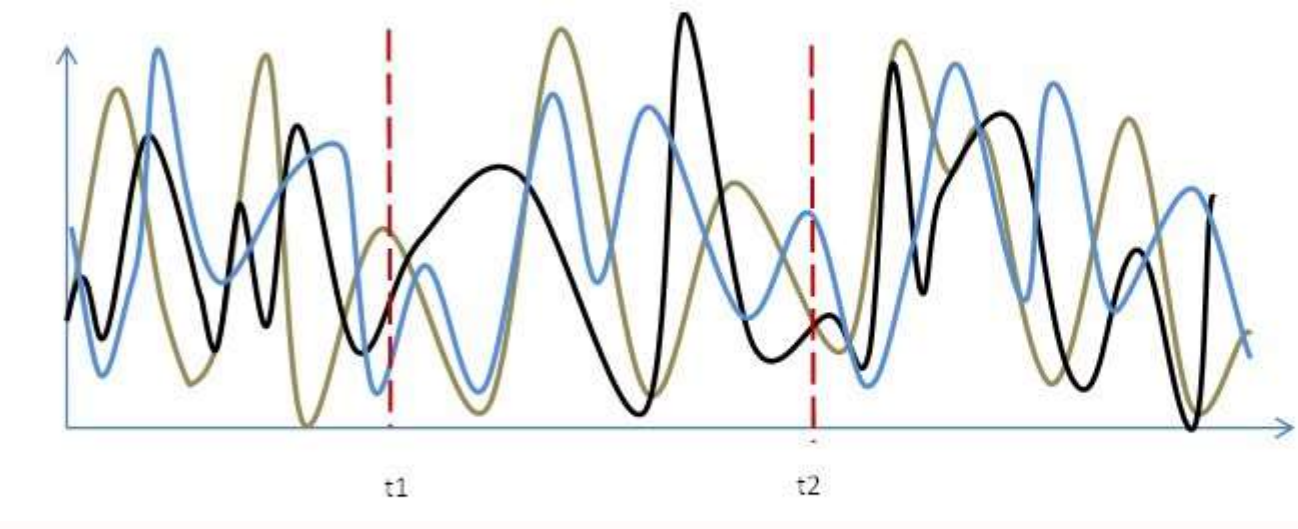


- Импульсные случайные процессы.



7.2. Описание случайных процессов

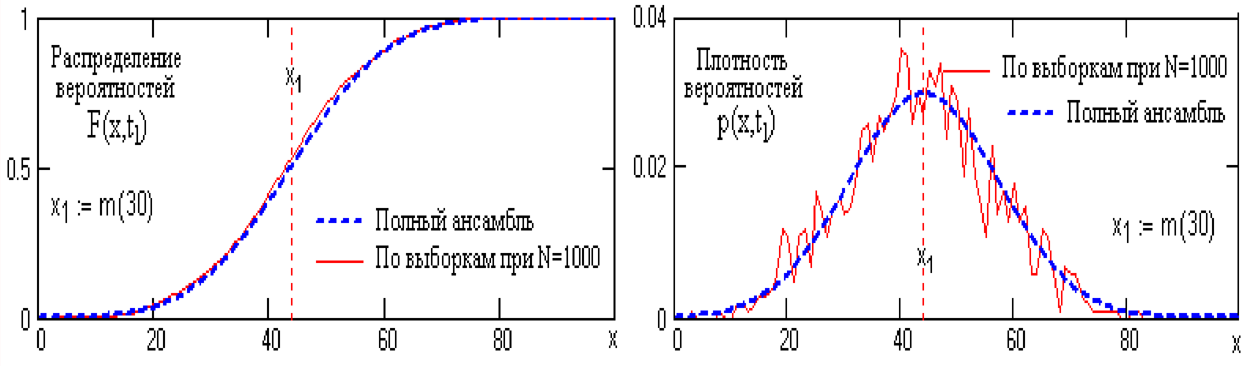
7.2.1. Функция распределения и плотность вероятности.



$$P(X_1 < x_1) = F(x_1, t_1)$$
$$f(x_1, t_1) = \partial F(x_1, t_1) / \partial x_1$$

Двумерная функция распределения:

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2)$$
$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = \partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2) / \partial x_1 \partial x_2$$



7.2.2. Моментные функции случайных процессов.

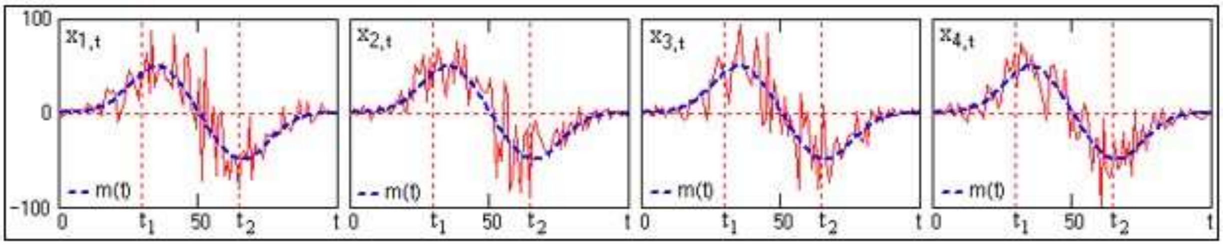
Рассмотрим ансамбль реализаций случайного процесса в момент времени t_1. Определим числовые характеристики случайной величины X_1, представляющей собой значения случайного процесса в момент времени t_1.

<u>Начальный момент</u>

$$\alpha_k[u(t_1)] = M[u^k(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^k f(x_1,t_1)dx_1 .$$

.

Для k=1 – математическое ожидание.

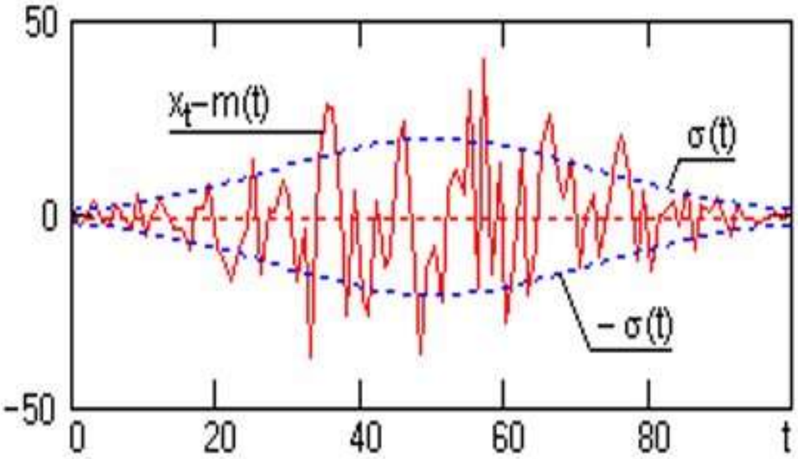


<u>Центральный момент</u>

$$\mu_k[u(t_1)] = M[((u(t_1) - m(t_1))^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_1)^k f(x_1,t_1)dx_1$$

Дисперсия случайного процесса представляет собой второй центральный момент:

$$\mu_k[u(t_1)] = M[((u(t_1) - m(t_1))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty}(x_1 - m_1)^2 f(x_1,t_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f(x_1,t_1) - m^2(t_1)$$



Моментной функцией случайного процесса u(t) называется неслучайная функция $\alpha_k(t)$ ***или*** $\mu_k(t)$ ***аргумента t, которые при значении t равны моментам (начальным или центральным) соответствующих сечений случайного процесса.***

Смешанный начальный момент второго порядка определим для двух сечений случайного процесса:

$$\alpha_{ks}[u^k(t_1)u^s(t_2)] = M[u^k(t_1)u^s(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^k x_2^s f(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

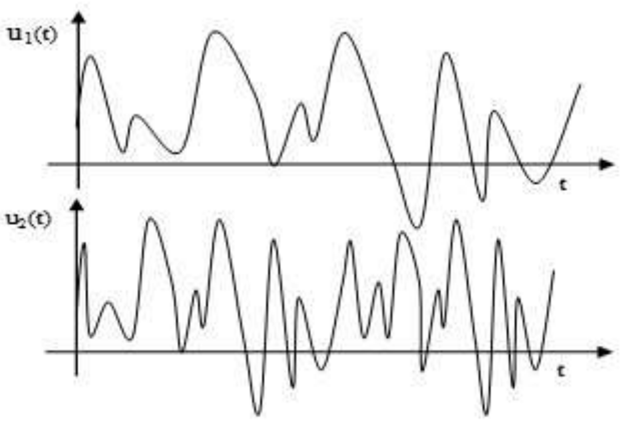
Смешанный центральный момент

$$\mu_{ks}[u^k(t_1)u^s(t_2)] = M[(u(t_1) - m(t_1))^k(u(t_2) - m(t_2))^s] =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1 - m_1)^k(x_2 = m_2)^s f(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

Начальные и центральные смешанные моменты могут быть определены и для большего числа сечений случайного процесса:

$$\alpha_{k...s}[u^k(t_1)..u^s(t_n)] = M[u^k(t_1)..u^s(t_n)] =$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(n)\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^k \cdot \ldots \cdot x_{n2}^s f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)dx_1..dx_n$$
$$\mu_{k...s}[u^k(t_1)..u^s(t_n)] = M[((u(t_1)-m(t_1))^k \ldots (u(t_n)-m(t_n))^s] =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(n)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_1)^s \ldots (x_n-m_n)^s f(x_1 \ldots x_n,t_1..t_n)dx_1..dx_n$$

1.**Корреляционные функции.**



$$k_u(t_1,t_2) = M[(X_1 - m(t_1))\cdot(X_2 - m(t_2))] = M[X_1 \cdot X_2] - m(t_1)m(t_2).$$

Корреляционной функцией случайного процесса u(t) называется неслучайная функция $k_u(t_1,t_2)$ двух аргументов t_1 и t_2, которая при паре значений t_1 и t_2 равна ковариации соответствующих сечений случайного процесса.

Свойства.

1.$k_u(t_1,t_1)=D_u(t_1)$.

2.$k_u(t_1,t_2) = k_u(t_2,t_1)$.

Нормированная корреляционная функция

$$r_u(t_1,t_2) = \frac{k_u(t_1,t_2)}{\sigma_u(t_1)\sigma_u(t_2)}.$$

Свойства нормированной корреляционной функции.

$r_u(t_1,t_1) = 1$.

$r_u(t_1,t_2) = r_u(t_2,t_1)$.

$|r_u(t_1,t_1)| \le 1$.

Расчетные формулы:

$$k_u(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2))f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2,$$

$$k_u(t_1,t_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2 f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 - m(t_1)m(t_2).$$

Пример. $y(t) = x\cdot e^{-t}, X : N(m,\sigma).$

$m_y(t)=M[X\cdot e^{-t}]=e^{-t}\cdot m$.

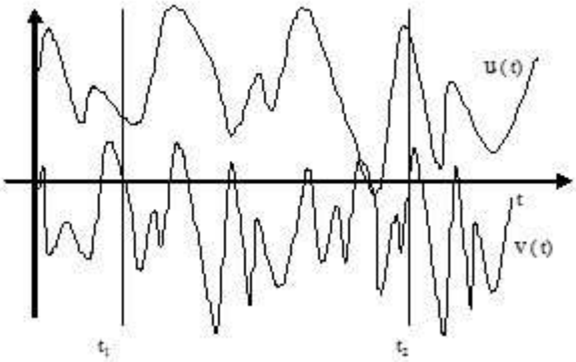
$D_y(t)=D[X\cdot e^{-t}]=e^{-2t}\sigma^2.$

$$e^{-(t_1+t_2)}M[X^2]-e^{-(t_1+t_2)}m^2=e^{-(t_1+t_2)}\sigma^2.$$

$$r_y(t_1,t_2)=\frac{e^{-(t_1+t_2)}\sigma^2}{e^{-t_1}\sigma\cdot e^{-t_2}\sigma}=1.$$

Взаимная корреляционная функция.

Пусть имеется два случайных процесса u(t) и v(t). Взаимосвязь значений случайных процессов в моменты времени t_1 и t_2 определим так:

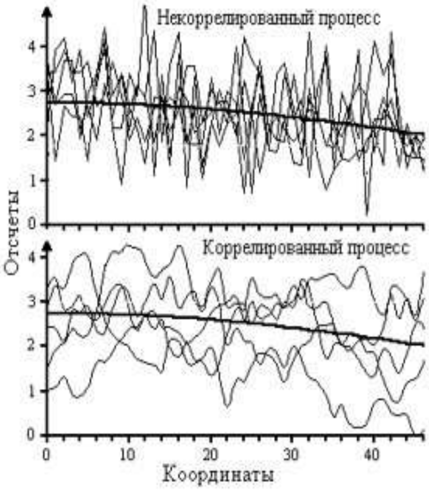


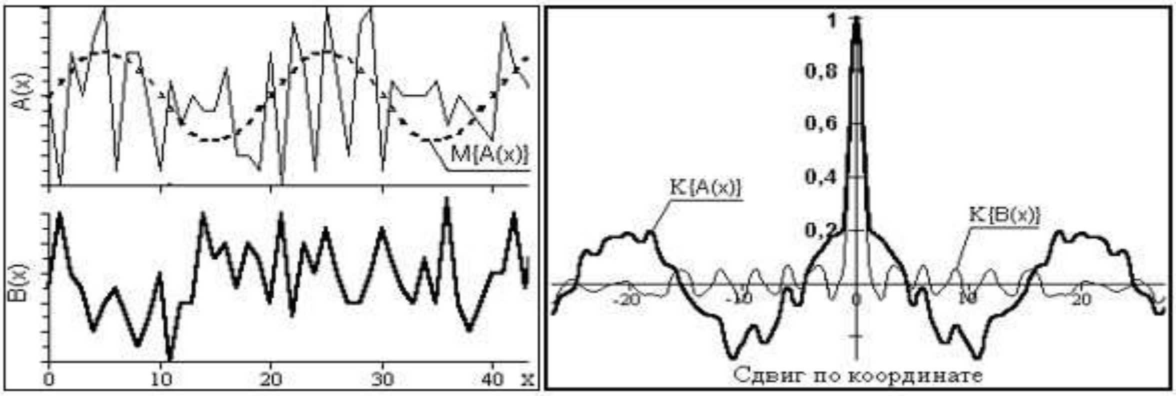
$$k_{uv}(t_1,t_2)=M[(u(t_1)-m_u(t_1))\cdot(v(t_2)-m_v(t_2))]=$$
$$M[u(t_1)\cdot v(t_2)]-m_u(t_1)\cdot m_v(t_2).$$

Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов u(t) и v(t) называется неслучайная функция двух аргументов t_1 и t_2, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна ковариации двух сечений случайных процессов u(t) и v(t).

Свойства.

1. $k_{uv}(t_1,t_2)\neq k_{uv}(t_2,t_1).$
2. $k_{uv}(t_1,t_2)=k_{vu}(t_2,t_1).$
3. $U=V\Rightarrow k_{uu}(t_1,t_2)=k_u(t_1,t_2).$
4. $r_{uv}=\dfrac{k_{uv}(t_1,t_2)}{\sigma_u(t_1)\cdot\sigma_v(t_2)}.$





7.3. Стационарные и нестационарные процессы.

Случайный процесс называется стационарным в *узком* смысле, если конечномерные функции распределения вероятностей любого порядка инварианты относительно сдвигов во времени:

$$F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots t_n) = F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1+\Delta t,\ldots t_n+\Delta t).$$

Стационарный процесс в широком смысле требует совпадения только двумерных характеристик:

$$F_1(x_1,t) = F_1(x_1;t+\Delta t) = F(x)$$

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2) = F_2(x_1,x_2;t_1+\Delta t,\dots t_2+\Delta t) = F_2(x_1,x_2;\tau).$$

$$m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = m = const.$$

$$D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = D = const.$$

$$k_u(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2 - m^2 = k_u(\tau).$$

Свойства:

$$1.k_u(\tau) = k_u(-\tau).$$
$$2.k_u(0) = D_u.$$
$$3.|k_u(\tau)| \le k_u(0).$$

Нормированная корреляционная функция и ее свойства:

$$1.r_u(\tau) = r_u(-\tau).$$
$$2.r_u(0) = 1.$$
$$3.|r_u(\tau)| \le 1.$$

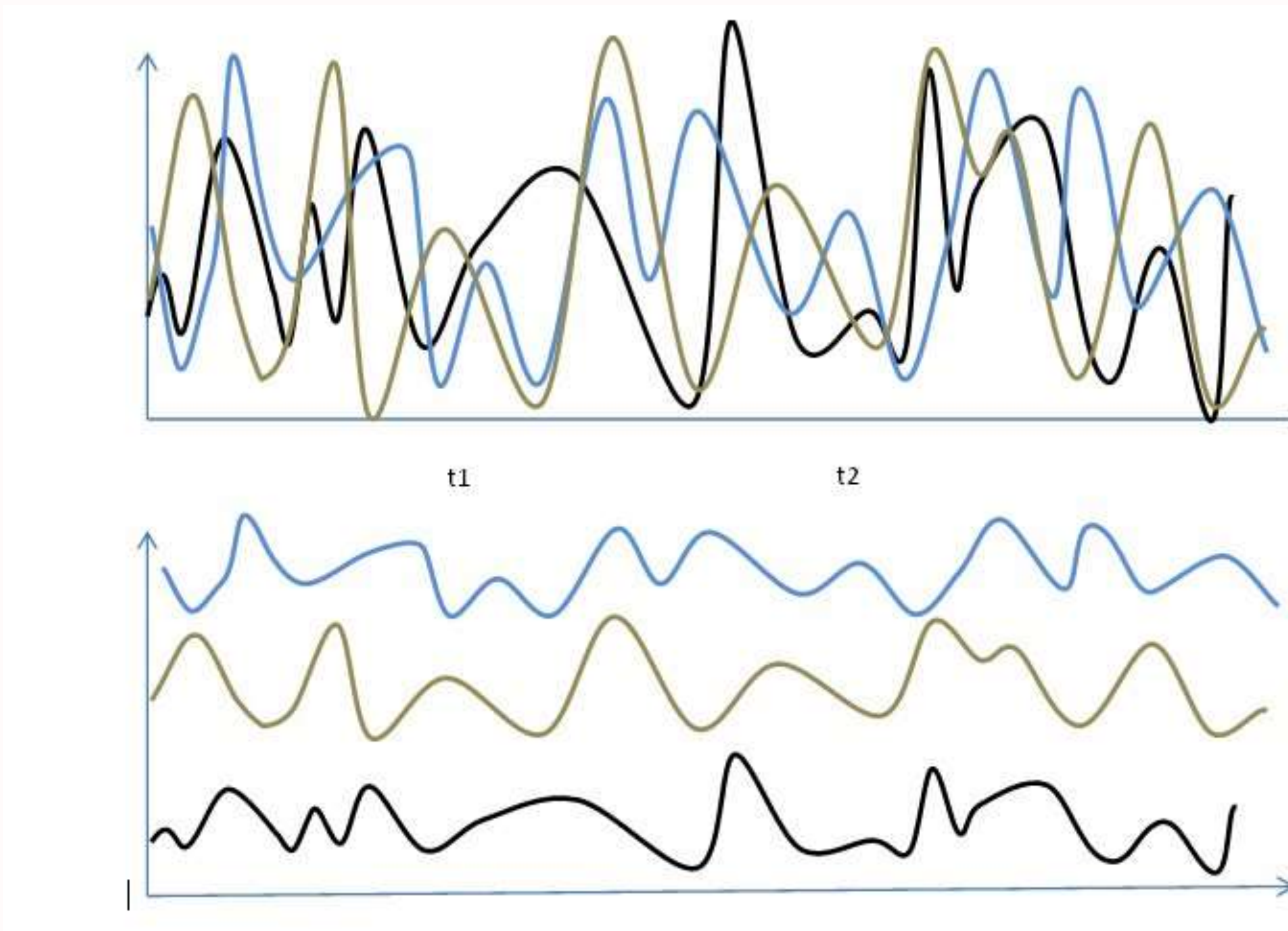
Нормированная корреляционная функция убывающая.

1.**Эргодическе и неэргодическе случайные процессы.**

Свойство эргодичности состоит в том, что *любая реализация эргодического случайного процесса достаточной продолжительности является представительной.*

Расчетные формулы для определения характеристик случайного процесса усреднением по времени:

Расчетные формулы	условия применения
$m_u = M[u(t)] = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)dt$	$\lim\limits_{\tau\to\infty} k_u(\tau) = 0$
$D_u = D[u(t)] = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (u(t)-m_u)^2 dt$	$\lim\limits_{\tau\to\infty} k_y(\tau) = 0; Y(t) = [u(t)]^2$
$k_u(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (u(t)-m_u)(u(t+\tau)-m_u)$	$\lim\limits_{\tau\to\infty} k_z(\tau) = 0; z(t,\upsilon) = u(t)\cdot u(t+\upsilon$



Пример случайного процесса, неэргодичного по математическому ожиданию:

$u(t)=x(t)+V$, где:

$x(t)$ – стационарный случайный процесс;

V – независимая случайная величина.

$m_u(t)=m_x+m_v$. $k_u(\tau)=k_x(\tau)+D_v$.

$$\lim_{\tau\to\infty} k_u(\tau)=D_v$$

7.4. Преобразование случайных процессов

7.4.1. Сложение случайных процессов.

- сложение двух случайных функций: $z(t)=x(t)+y(t)$.

  $M[z(t)]=m_x(t)+m_y(t)$;
  $k_z(t_1,t_2)=M[(x(t_1)+y(t_1)—m_x(t_1)—m_y(t_1))\cdot (x(t_2)+y(t_2)—m_x(t_2)—m_y(t_2))]=$

$=M[((x(t_1)—m_x(t_1))+(y(t_1)—m_y(t_1)))\cdot((x(t_2)—m_x(t_2))+(y(t_2)—m_y(t_2)))]=$

$=M[\{(x(t_1)—m_x(t_1))\times (x(t_2)—m_x(t_2))\}+\{(x(t_1)—m_x(t_1))\times (y(t_2)—m_y(t_2))\}+$
$+\{(y(t_1)—m_y(t_1))\times (x(t_2)—m_x(t_2))\}+\{(y(t_1)—m_y(t_1))\times(y(t_2)—m_y(t_2))\}]=$

$=M[(x(t_1)—m_x(t_1))\times (x(t_2)—m_x(t_2))]+M[(x(t_1)—m_x(t_1))\times (y(t_2)—m_y(t_2))]+$
$+M[(y(t_1)—m_y(t_1))\times (x(t_2)—m_x(t_2))]+M[(y(t_1)—m_y(t_1))\times(y(t_2)—m_y(t_2))]=$

$k_x(t_1,t_2)+k_{xy}(t_1,t_2)+k_{yx}(t_1,t_2)+k_y(t_1,t_2)$.
Если процессы не коррелированны, то $k_z(t_1,t_2)= k_x(t_1,t_2) +k_y(t_1,t_2)$.

- <u>сложение случайной функции с неслучайной:</u> $z(t)=x(t)+c(t)$.
  $M[z(t)]=m_x(t)+c(t)$;

  $k_z(t_1,t_2)=k_x(t_1,t_2)$.

- <u>сложение случайной функции с некоррелированной случайной величиной:</u> $z(t)=x(t)+Y$.

  $M[z(t)]=m_x(t)+m_y$;
  $k_z(t_1,t_2)=k_x(t_1,t_2)+D[Y]$

7.4.2. Линейное преобразование случайных процессов.

Преобразование называется линейным, если оно обладает следующими свойствами:
$Z=L(cX)=cL(X)$.
$Z=L(X+Y)=L(X)+L(Y)$.

$$m_z(t) = M[z(t)] = M[L(x(t)] = L(m_x(t)).$$
$$k_z(t_1,t_2) = M[(z(t_1) - m_z(t_1)) \cdot (z(t_2) - m_z(t_2))] =$$
$$= M[L_{t_1}(x(t_1) - m_x(t_1)) \cdot L_{t_2}(x(t_2) - m_x(t_2))] =$$
$$= L_{t_1}L_{t_2}M[(x(t_1) - m_x(t_1)) \cdot (x(t_2) - m_x(t_2))] = L_{t_1}L_{t_2}k_x(t_1,t_2).$$

Определение взаимной корреляционной функции:

$$k_{zx}(t_1,t_2) = M[(z(t_1) - m_z(t_1)) \cdot (x(t_2) - m_x(t_2))] =$$
$$= M[L_{t_1}(x(t_1) - m_x(t_1)) \cdot (x(t_2) - m_x(t_2))] =$$
$$= L_{t_1}M[(x(t_1) - m_x(t_1)) \cdot (x(t_2) - m_x(t_2))] = L_{t_1}k_x(t_1,t_2).$$

Пример. $z(t)=c(t)\cdot x(t)$, *где* $c(t)$ *– неслучайная функция.*
$m_z(t)=c(t)\cdot m_x(t)$;
$k_z(t_1,t_2)=c(t_1)\cdot c(t_2)\cdot k_x(t_1,t_2)$.

7.4.3. Преобразование стационарных процессов.

- Сумма двух стационарных случайных процессов с характеристиками m_x, m_y, $k_x(\tau)$, $k_y(\tau)$ является стационарной, т.к.

$$m_z = m_x + m_y;$$
$$D_z = D_x + D_y + 2k_{xy}(0);$$
$$k_z(\tau) = k_{xx}(\tau) + k_{yy}(\tau) + k_{xy}(\tau) + k_{yx}(\tau).$$

- сумма стационарного процесса и неслучайной функции – нестационарный по математическому ожиданию, т.к.

$$m_z(t) = m_x + c(t);$$
$$k_z(\tau) = k_{xx}(\tau).$$

- Произведение стационарного случайного процесса на неслучайную функцию – нестационарный случайный процесс.

$$m_z(t) = c(t) \cdot m_x;$$
$$D_z(t) = c^2(t) D_x;$$
$$k_z(\tau) = c(t) \cdot c(t+\tau) k_{xx}(\tau).$$

- производная стационарного случайного процесса стационарна:

$$m_z = 0;$$
$$k_z(\tau) = \frac{d^2 k_x(t_2 - t_1)}{dt_1 dt_2} = -\frac{d^2 k_x(\tau)}{d^2 \tau}.$$

- Интеграл от стационарного случайного процесса – нестационарный процесс:

$$m_z(t) = m_x \cdot t.$$
$$k_z(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} k_x(u_1 - u_2) du_1 du_2.$$

7.5. Спектральное представление СП

7.4.4. Финитное преобразование Фурье случайных функций.

$u_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} V_{u,k}(\omega_i) \exp(j\omega_i t)$, (7.12)

$V_{u,k}(\omega_i) = (1/T) \int_0^T u_k(t) \exp(-j\omega_i t)\, dt$, (7.13)

или, в односторонней тригонометрической форме:

$u_k(t) = A_{u,k}(0) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (A_{u,k}(\omega_i) \cos(\omega_i t) + B_{u,k}(\omega_i) \sin(\omega_i t))$, (7.12')

$A_{u,k}(\omega_i) = (1/T) \int_0^T u_k(t) \cos(\omega_i t)\, dt$, (7.13')

$B_{u,k}(\omega_i) = (1/T) \int_0^T u_k(t) \sin(\omega_i t)\, dt$. (7.13'')

где $\omega_i = i \cdot \Delta\omega$ - частоты спектра,

$\Delta\omega = 2\pi/T$ - шаг по частоте.

Выражения (7.13) обычно называют *спектральными характеристиками реализаций*.

$$M\{U(t)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} M\{V_u(\omega_i)\} \exp(j\omega_i t) = 0, \quad (7.14)$$

С учетом вышеизложенного, под спектрами случайных процессов (или спектральной плотностью при интегральном преобразовании Фурье) повсеместно понимается не преобразования Фурье собственно случайных функций, а преобразования Фурье функций мощности случайных процессов, поскольку функции мощности не зависят от соотношения фаз спектральных составляющих процессов.

7.5.Спектры мощности случайных функций

$$W_T = \int_0^T [u^2(t)/T]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [|U_T(f)|^2/T]\,df,$$

где U(f) – спектральная плотность единичной реализации u(t).

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} [\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |U_T(f)|^2]\,df,$$

$$W(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |U_T(f)|^2. \quad (7.15)$$

7.5.1 Теорема Винера-Хинчина.

$$K(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \exp(j\omega\tau)\,d\omega.$$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-j\omega\tau)\,d\tau.$$

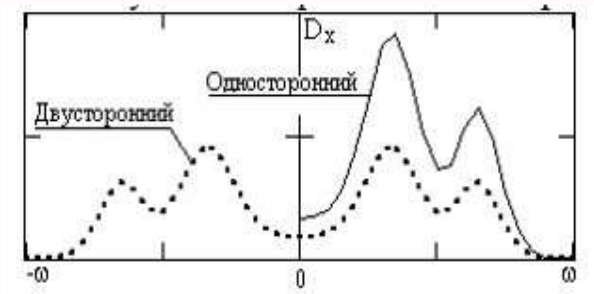
Функции W(ω) и R(τ) являются вещественными и четными, а

соответственно в тригонометрической форме:

$$K(\tau) = 2\int_0^{\infty} W(f)\cos(2\pi f\tau)\,df, \quad W(f) = 2\int_0^{\infty} K(\tau)\cos(2\pi f\tau)\,d\tau.$$

$K(\tau=0) = \sigma^2 = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)\, d\omega,$

т.е. дисперсия стационарного случайного процесса равна сумме дисперсий всех случайных гармоник ее спектрального разложения.



Ширина спектра сигнала — величина, характеризующая часть спектра сигнала, содержащего спектральные составляющие, суммарная мощность которых составляет заданную часть полной мощности сигнала.

7.5.2. Дискретизация сигналов во времени

Частоты дискретизации $F_д = 1/T_д$

Базисная функция $\varphi_i(t)$.

Теореме Котельникова: любую непрерывную функцию со спектром, ограниченным полосой частот от нуля до $F_в$, можно однозначно определить последовательностью ее мгновенных значений, взятых через интервалы $T_д \le 1/2\,F_в$ по формуле

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_Д) \frac{\sin 2\pi F_в (t - iT_Д)}{2\pi F_в (t - iT_Д)},$$

$$\varphi_i(t) = \frac{\sin 2\pi F_в (t - iT_Д)}{2\pi F_в (t - iT_Д)}, \; i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

База сигнала

$n \approx T/\Delta t = 2F_в T,$

7.6. Марковские случайные процессы.

*Процесс, протекающий в физической системе, называется **Марковским** (или процессом без последействия), если он обладает следующими свойствами:* ***для любого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в***

будущем ($t>t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

Марковский случайный процесс с дискретным состоянием и дискретным временем обычно называют *марковской цепью*.

Для такого процесса время целесообразно рассматривать как последовательность шагов 1, 2, …, k, …. В этом случае процесс описывается последовательностью состояний S(0), S(1), …, S(k), …

Событие $\{S(k)=s_i\}$={сразу после k-го шага система находится в состоянии s_i} является случайным событием. Последовательность таких событий образуют марковскую цепь.

Пусть $p_i(k)=P\{S(k)=s_i\}$ – вероятность состояния цепи Маркова.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(k)=1.$$

Распределение вероятностей в начале процесса, т.е. $p_i(0)$, i=1, …, n называется *начальным распределением вероятностей* марковской цепи.

Переходные вероятности

$P\{S(k)=s_j/S(k-1)=s_i\}=p_{ij}(k)$.

Марковская цепь называется *однородной*, если

$P\{S(k)=s_j/S(k-1)=s_i\}=p_{ij}$.

Переходные вероятности однородной марковской цепи p_{ij} образует квадратную матрицу:

$$\|P_{ij}\|=\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}$$

Сумма переходных вероятностей в любой строке матрицы равна единице:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, (i = 1, \ldots, n).$$

Такую матрицу называют *стохастической*.

Вероятности состояния системы:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^{n} p_j(k-1) p_{ji}$$

Марковский случайный процесс с дискретным состояниями и непрерывным временем называют *непрерывной цепью Маркова*.

плотность вероятности перехода λ_{ij}, -- предел отношения вероятности перехода из состояния s_i в состояние s_j за малый промежуток времени Δt, примыкающий к моменту t, к длине этого промежутка

Для описания марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем удобно пользоваться *размеченным* графом состояний, в котором дуги помечаются интенсивностями λ_{ij}.

Потоком вероятности перехода из состояния s_i в состояние s_j называется величина $\lambda_{ij} \cdot p_i(t)$.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

Уравнения Колмогорова:

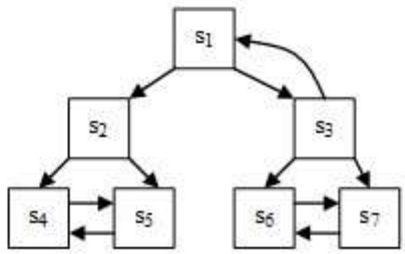
$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} p_j(t) - p_i(t) \sum \lambda_{ij.}$$

Проавило: *производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другие.*

Финальные (или предельные) вероятности состояний

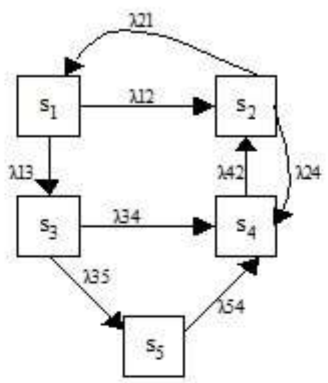
$$p_i = \lim_{t \to \infty} p_i(t),$$

. Состояние s_i называется *существенным*, если нет другого состояния s_j, такого, что перейдя однажды каким-то способом из s_i в s_j, система уже не в состоянии вернуться в s_i.



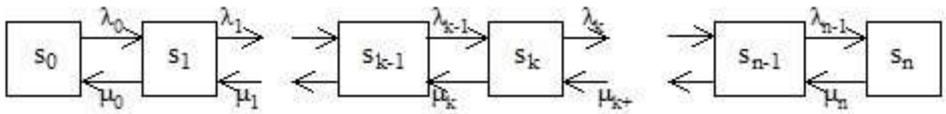
Финальные вероятности (если они существуют) могут быть получены решением *системы линейных алгебраических уравнений*

Правило: *<u>для каждого состояния системы суммарный выходящий поток вероятности равен суммарному входящему потоку</u>*.



$$\begin{cases} (\lambda_{12}+\lambda_{13})p_1 = \lambda_{21}p_2; \\ (\lambda_{21}+\lambda_{24})p_2 = \lambda_{12}p_1+\lambda_{42}p_4; \\ (\lambda_{34}+\lambda_{35})p_3 = \lambda_{13}p_1; \\ \lambda_{42}p_4 = \lambda_{24}p_2+\lambda_{34}p_3+\lambda_{54}p_5; \\ \lambda_{54}p_5 = \lambda_{35}p_3; \end{cases}$$

К уравнениям необходимо добавить условие нормировки: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$



На практике часто приходится встречаться с системами, граф состояний которой имеет вид (схема гибели и размножения):

λ-интенсивности размножения;

μ – интенсивности гибели.

Для схемы гибели и размножения финальные вероятности имеют вид:

$$p_i = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0; p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0;$$

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} p_0;$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_0 \mu_1} + \ldots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}\right)^{-1}.$$