4.1. Задачи нелинейного программирования

ПРИМЕР 1.

Применяя необходимые и достаточные условия оптимальности, решить задачу на безусловный экстремум:

$$f(x) = x_1 x_2 + 50 / x_1 + 20 / x_2 \rightarrow min$$

Решение. Согласно необходимому условию оптимальности первого порядка на оптимальном плане должны выполняться условия стационарности $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$, т.е.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = x_2 - 50/x_1^2 = 0, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_1 - 20/x_2^2 = 0.$$

Данная система имеет единственное решение

$$x^0 := (x_1^0 = 5, x_2^0 = 2)$$

Следовательно, вектор x^0 единственный вектор, удовлетворяющий необходимому условию оптимальности первого порядка, и только он может быть (но может и не быть) решением нашей задачи.
Проверим выполнение условий оптимальности второго порядка на векторе x^0. Для этого подсчитаем матрицу вторых производных функции $f(x)$

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x^0))}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x^0))}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x^0))}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x^0))}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100/(x_1^0)^3 & 1 \\ 1 & 40/(x_2^0)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица $\begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ является строго положительно определенной. Следовательно, на векторе x^0 выполняется достаточное условие второго порядка локальной оптимальности. Значит, вектор x^0 является точкой **локального** минимума рассматриваемой функции.
Отметим, что вектор x^0 не является точкой **глобального** минимума рассматриваемой функции.
Ответ: вектор $x^0 = (x_1^0 = 5, x_2^0 = 2)$ точка **локального** минимума рассматриваемой функции.

ПРИМЕР 2.

Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана $x^0 = (x_1^0 = 6, x_2^0 = 14, x_3^0 = 0)$ в задаче

$$f(x) = \frac{x_1 - x_2 - x_3}{2x_1 + x_3 + 1} \rightarrow min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решение. Перепишем ограничения задачи в виде

$$\begin{cases} g_1(x) := -x_1 + x_2 + 3x_3 - 8 = 0, \\ g_2(x) := 2x_1 - x_2 - x_3 + 2 = 0, \\ g_3(x) := -x_1 \leq 0, \\ g_4(x) := -x_2 \leq 0, \\ g_5(x) := -x_3 \leq 0, \end{cases}$$

Ограничения задачи заданы двумя условиями-равенствами и тремя условиями-неравенствами.
Подсчитаем

$$\begin{aligned} &g_1(x^0) := -6 + 14 + 0 - 8 = 0, \\ &g_2(x^0) := 12 - 14 - 0 + 2 = 0, \\ &g_3(x^0) := -6 < 0, \\ &g_4(x^0) := -14 < 0, \\ &g_5(x^0) := 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, вектор x^0 является допустимым планом нашей задачи. Из ограничений-неравенств только последнее ограничения является активным:

$$I_\alpha(x^0) = \{i \epsilon \{3,4,5\} : g_i(x^0) = 0\} = \{5\}.$$

Подсчитаем

$$\frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{\partial g_2(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\partial g_5(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы являются линейно независимыми, следовательно, план x^0 является обыкновенным.
Согласно условиям оптимальности первого порядка для оптимальности плана x^0 в данной задаче необходимо, чтобы существовали такие числа

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0, \lambda_5 \geq 0,$$

такие, что имеет место равенство

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0 \tag{4.1}$$

Подсчитаем

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{(2x_1+x_3+1)-(x_1-x_2-x_3)^2}{(2x_1+x_3+1)^2} \\ \\ \frac{-(2x_1+x_3+1)}{(2x_1+x_3+1)^2} \\ \\ \frac{-(2x_1+x_3+1)-(x_1-x_2-x_3)}{(2x_1+x_3+1)^2} \end{pmatrix}, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{29}{(13)^2} \\ \\ \frac{-1}{13} \\ \\ \frac{-5}{13^2} \end{pmatrix}$$

Условие (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{29}{(13)^2} - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ &\frac{-1}{13} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ &\frac{-5}{13^2} + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_5 = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Система (4.2) имеет единственное решение

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{5} \lambda_i \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0$$

Следовательно, вектор x^0 удовлетворяет необходимому условию оптимальности первого порядка с вектором множителей Лагранжа

$$\lambda^0 = (\lambda_1 = -0.0178, \lambda_2 = -0.0947, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0.0118).$$

Чтобы проверить достаточное условие второго порядка для локальной оптимальности вектора надо показать, что

$$l' \frac{\partial^2 L(x^0, \lambda^0)}{\partial x^2} l > 0 \quad \text{для любого } l \in K \setminus 0 \tag{4.3}$$

где $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{5} g_i(x), K = \{l \epsilon ||^3 : l' \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} = 0, i = 1,2,5\}.$
В нашем примере множество K состоит только из одного вектора $l = (0,0,0)'$, следовательно, условие (4.3) можно считать выполненным.

Ответ: вектор $x^0 = (x_1^0 = 6, x_2^0 = 14, x_3^0 = 0)$ является локально оптимальным планом данной задачи.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для планов $x^0 = (0,1)$ и $x^{00} = (1,1)$ в задаче

$$f(x) = exp(x_1 - x_2) - x_1 - x_2 \to min,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 2. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана *x⁰ = (3, 9)* в задаче

$$f(x) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 \to min$$

при ограничениях

$$x_1^2 + (x_2 - 9)^2 \le 9$$

Задача 3. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана *x⁰ = (6√10/5, 2√10/5)* в задаче

$$f(x) = 3x_1 + x_2 \to extr$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 x_2 \ge 2, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16. \end{cases}$$

Задача 4. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана *x⁰ = (0,1,0)* в задаче

$$f(x) = 3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \to min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \le 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 5. Проверить выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности для плана *x⁰ = (3;4)* в задаче

$$f(x) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 5)^2 \to min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_2 - x_2 + 1 \le 0, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 0. \end{cases}$$

4.2. Задачи оптимального управления

ПРИМЕР 1.

Решить следующую задачу оптимального управления:

найти функцию управления $u(t), t \in [0,5]$, такую, что $|u(t)| \le 1, t \in [0,5]$, и соотвествующая траектория $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ динамической системы

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_2(t) + u(t),$$

с начальным условием $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1,\ x_3(0) = 3$ в терминальный момент времени $t = 5$ удовлетворяет условиям

$$x_1(5) + x_3(5) = 0;\ x_1(5) - x_2(5) = 0$$

и функция

$$\frac{1}{2}(x_1^2(5) + x_2^2(5) + x_3^2(5)) + x_2(5)$$

принимает минимальное значение.

Данную задачу можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}x'(t_*)Dx(t_*) + c'x(t_*) \to \min, \tag{4.4}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),\ \ x(t_0) = x^*, Hx(t_*) = g,$$

$$|u(t)| \le 1, t \in [t_0, t_*],$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)),\ t_0 = 0,\ t_* = 5,$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0.3916 \\ -0.3916 \end{pmatrix},$$

Для решения этой задачи будем использовать метод сведения к задаче нелинейного программирования, описанный в [Нелинейное программирование и Задачи оптимального управления],

Для этого выберем параметр $N > 0,$ напрмер, $N = 30$, и

разобьем отрезок управления $[t_0, t_*]$ точками

$$t_j = t_0 + jh = jh, i = 1, ..., N,\ \ h = (t_* - t_0)/(N) = 1/7,$$

на N отрезков $[t_{j-1}, t_j], j = 1, ..., N.$

Построим векторы $B_0 \in \mathbb{R}^3,\ B_j \in \mathbb{R}^3,\ j = 1, ..., N,$ и матрицу $B \in \mathbb{R}^{3\times N}$, осуществив следующие построения.

A) Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w}(t) = Aw(t),\ \ w(t_0) = x_*, t \in [t_0, t_*], \tag{4.5}$$

и найдем вектор $w(t_*)$.

Численную процедуру интегрирования можно осуществить с помощью любого пакета прикладных программ, например, Matlab.

В данном примере вектор $w(t_*)$ имеет следующее значение $w(t_*) = (2.2015, 2.5931, -1.8099)'$.

B) Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + b,\ \ y(t_0) = 0, t \in [t_0, t_1] = [0, 1/7], \tag{4.6}$$

и найдем вектор $y(t_1) \in \mathbb{R}^3$.

В данном примере вектор $y(t_1)$ имеет следующее значение $y(t_1) = (0.0007, 0.0139, 0.1659)'$.

C) Используя найденный вектор $y(t_1)$, проинтегрируем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}(t) = Az(t),\ \ z(t_1) = y(t_1),\ \ t \in [t_1, t_N], \tag{4.7}$$

и найдем значения $z(t_j),\ j = 1, ..., N,$ решения данной системы в точках $t_j,\ j = 1, ..., N.$

Численную процедуру интегрирования систем (4.6) и (4.7) также можно осуществить с помощью любого пакета прикладных программ, например, Matlab.

D) Положим

$$B_0 = w(t_*),\quad B_j = z(t_{N-j+1}),\ \ j = 1, ..., N,\ \ B = (B_j, j = 1, ..., N).$$

Для данного примера столбцы матрицы B имеют вид

$$(B_j, j=1,\dots,15) = \begin{pmatrix} -0.0978 & -0.0856 & -0.0710 & -0.0544 & -0.0362 & -0.0169 & 0.0029 & 0.0227 & 0.0420 & 0.0602 & 0.0770 & 0.0918 & 0.1042 & 0.114 \\ -0.1630 & -0.1664 & -0.1651 & -0.1592 & -0.1490 & -0.1346 & -0.1165 & -0.0951 & -0.0712 & -0.0452 & -0.0180 & 0.0097 & 0.0371 & 0.063 \\ 0.0338 & 0.0063 & -0.0214 & -0.0485 & -0.0743 & -0.0979 & -0.1189 & -0.1366 & -0.1505 & -0.1602 & -0.1655 & -0.1662 & -0.1623 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$$(B_j, j=15,\dots,30) = \begin{pmatrix} 0.1249 & 0.1258 & 0.1237 & 0.1188 & 0.1112 & 0.1014 & 0.0897 & 0.0766 & 0.0628 & 0.0488 & 0.0352 & 0.0229 & 0.0126 & 0.0049 & 0.000 \\ 0.1104 & 0.1295 & 0.1451 & 0.1566 & 0.1638 & 0.1665 & 0.1645 & 0.1580 & 0.1471 & 0.1321 & 0.1135 & 0.0917 & 0.0674 & 0.0412 & 0.013 \\ 0.1246 & -0.1046 & -0.0816 & -0.0564 & -0.0297 & -0.0021 & 0.0256 & 0.0525 & 0.0780 & 0.1013 & 0.1218 & 0.1389 & 0.1522 & 0.1613 & 0.16 \end{pmatrix}$$

Введем вектор искомых параметров $U = (u_j, j = 1, \dots, N)$. Тогда терминальное состояние $x(t_*)$ нашей динамической системы может быть апроксимировано следующим образом

$$x(t_*) = B_0 + BU.$$

С учетом этой аппроксимации наша задача оптимального управления может быть заменена следующей:

найти вектор параметров $U = (u_j, j = 1, \dots, N)$, такой что

$$\frac{1}{2}(B_0 + BU)'D(B_0 + BU) + c'(B_0 + BU) \to \min, \tag{4.8}$$

$$H(B_0 + BU) = g, -1 \le u_j \le 1, j = 1, \dots, N.$$

Задача (4.8) - это задача квадратичного программирования, которая может быть записана в виде

$$\frac{1}{2}U'\bar{D}U + \bar{c}'U \to \min_U,$$

$$\bar{A}U = \bar{b},\ -1 \le u_j \le 1, j = 1, \dots, N,$$

где $U = (u_j, j = 1, \dots, N)$ - вектор искомых параметров,

$$\bar{D} = B'DB \in \mathbb{R}^{N\times N}, \bar{A} = HB \in \mathbb{R}^{2\times N}, \bar{c} = B'(c + DB_0) \in \mathbb{R}^N, \bar{b} = g - HB_0 \in \mathbb{R}^N$$

- исходные данные задачи квадратичного программирования.

Решим задачу квадратичного программирвания методом, описанным в [Задача квадратичного программирования], см. также [Решение задач квадратичного программирования]

В результате получим следуюшие оптимальные значения искомых параметров $U^0 = (u_j^0, j = 1, \dots, N)$

$$(u_j^0, j=1,\dots,15) = (1.0\ \ 1.0\ 1.0\ \ 1.0\ \ 1.0\ -0.5789\ -1.0\ -1.0\ -1.0\ -1.0\ -1.0\ -1.0\ -1.0\ -1.00\ -1.0\ )$$

$$(u_j^0, j=16,\dots,30) = (-1.0 -1.0 -1.0 -1.0\ -1.0\ -1.0\ -1.0\ -1.0\ -1.0 -1.0\ -0.9825\ \ 1.0\ \ 1.00\ \ 1.0\ \ 1.0)$$

Приближенное решение исходной задачи оптимального управления строим по правилу

$$\tilde{u}^0(t) = u_j^0,\ t \in [t_{j-1}, t_j],\ j = 1, \dots., N.$$

График функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, (при $N = 200$) приведен на Рисунке 4.1.

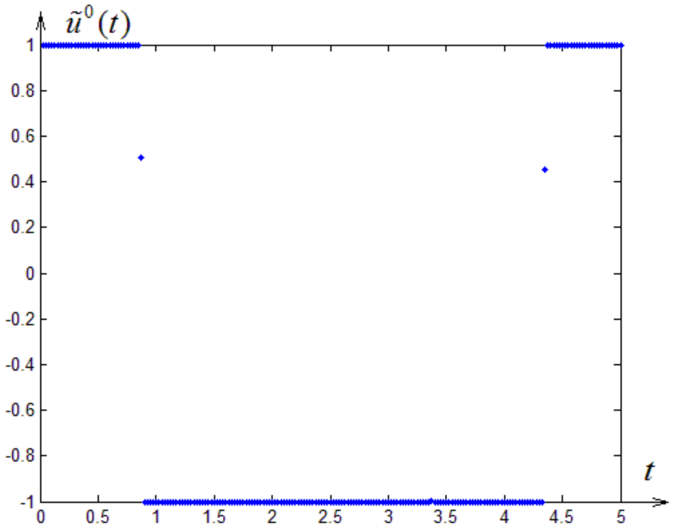

Рисунок 4.1

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Задача 1.

Решить задачу оптимального управления вида (4.4) со следующими данными

$$t_0 = 0,\ t_* = 6,$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 17 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = 0.5 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, g = -6.5139.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, (при $N = 200$) приведен на Рисунке 4.2.

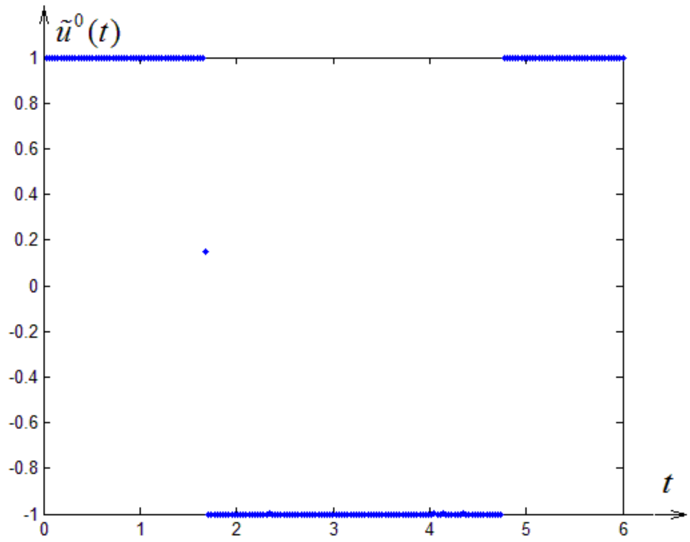

Рисунок 4.2

Задача 2.

Решить задачу оптимального управления вида (4.4) со следующими данными

$$t_0 = 0,\ t_* = 10,$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 17 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = 0.5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x^* = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} -198.0 \\ -192.0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: график функции $\tilde{u}^0(t), t \in [t_0, t_*]$, (при $N = 200$) приведен на Рисунке 4.3.

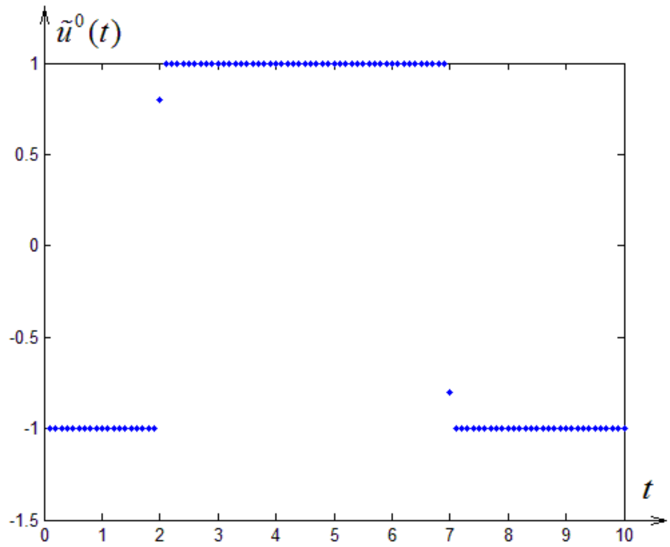

Рисунок 4.3