Тема 3. Задача о потоке минимальной стоимости

3.6. Итерация

Рассмотрим последний случай, когда соотношения (2.11) нарушаются, т. е. имеет место неравенство (2.14), но в цикле сети $S_1 = \{I, U_в \cup (i_0, j_0)\}$ не все дуги прямые. Ясно, что в этом случае на поток *x* можно накладывать только циркуляцию с конечным значением θ, чтобы $\overline{x}$ было потоком.

Поскольку с увеличением θ стоимость потока $\overline{x}$ уменьшается, то мы заинтересованы выбрать максимальное значение $\theta \geq 0$, при котором совокупность $\overline{x}$ является потоком.

Из формулы

$$\overline{x}_{ij} = x_{ij} + \Delta x_{ij} = x_{ij} - \theta,$$

которая верна для обратных дуг цикла, следует, что максимально допустимое значение параметра θ равно

$$\theta_0 = \theta_{i_* j_*} = x_{i_* j_*} = \min x_{ij}, \quad (i, j) \in U^-_{\text{cycle}}.$$

где U^-_{cycle} – обратные дуги цикла сети $S_1 = \{I, U_в \cup (i_0, j_0)\}$.

Поток x заменим на поток $\overline{x}$, что согласно описанным действиям сводится к следующему: потоки на прямых дугах цикла сети S_1 увеличиваем на θ_0, потоки на обратных дугах цикла сети S_1 уменьшаем на величину θ_0. Потоки на остальных дугах оставляем без изменения. При этом стоимость потока уменьшается на величину $\theta_0 \Delta_{i_0 j_0}$. Очевидно, что $\theta_0 > 0$, если *x* — невырожденный базисный поток.

Покажем, что поток $\overline{x}$ является базисным. Для построения нового базисного множества удалим дугу $(i_*, j_*) \in U_в$ из $U_в$ (по построению $\overline{x}_{i_* j_*} = 0$), дугу $(i_0, j_0) \in U_н$, (где $\overline{x}_{i_0 j_0} = \theta_0$) добавляем ко множеству $U_в$. Покажем, что сеть $\overline{S}_в = \{I, \overline{U}_в\}$, где $\overline{U}_в = (U_в \backslash (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0)$ - дерево. Действительно, сеть $S_1 = \{I, U_в \cup (i_0, j_0)\}$ содержит единственный цикл, кроме того $|I| = |U_в| + 1$. По построению, дуга $(i_*, j_*) \in U_в$, $(i_*, j_*) \neq (i_0, j_0)$ и (i_*, j_*) принадлежит циклу. Следовательно, удаление дуги (i_*, j_*) разрушает цикл, но не разрушает связности сети, и мы приходим к сети $\overline{S}_в = \{I, \overline{U}_в\}$, $\overline{U}_в = (U_в \backslash (i_0, j_0)) \cup (i_*, j_*)$, которая является связной и $|I| = |U_в| + 1$. По определению, $\overline{S}_в$ — дерево. Следовательно, $\{\overline{x}, \overline{U}_в\}$ — базисный поток.

Переход $\{x, U_в\} \to \{\overline{x}, \overline{U}_в\}$ называется итерацией метода потенциалов. Метод потенциалов для невырожденных транспортных задач (все базисные потоки — невырожденные) является конечным.