Тема 4 Кратчайшие пути

4.2 Кратчайшие пути между всеми парами вершин (задача о многополюсной кратчайшей цепи)

4.2.1. Обоснование метода решения с помощью динамического программирования

Рассмотрим задачу нахождения кратчайших путей между всеми парами узлов сети $S=\{I,U\}$.

Пусть $I=\{1,2,...,n\}$ -- множество узлов сети S, $c_{ij}\geq 0$ -- длина дуги $(i,j)\in U$. Считаем, что $c_{ij}=\infty$, если $(i,j)\notin U$, и дуги из U являются ориентированными. Если одна из дуг (или несколько дуг) является неориентированной, то считаем, что в сети есть ориентированные дуги (i,j) и (j,i) с одинаковой длиной $c_{ij}=c_{ji}$.

Для решения поставленной задачи будем использовать алгоритм, разработанный Флойдом. Для обоснования алгоритма воспользуемся методом динамического программирования.

1-й этап Осуществим инвариантное погружение исходной задачи в семейство (состоящее из n задач) аналогичных задач. Каждая j -я задача, где $j=1,2,...,n$, данного семейства формулируется следующим образом: для каждой пары узлов $i,\ k\in I$ найти путь минимальной длины, промежуточные узлы которого могут принадлежать только множеству узлов $\{1,2,...,j\}$.

Обозначим через d_{ik}^{j} длину минимального пути из i в k при условии, что промежуточными могут быть только узлы из $\{1,2,...,j\}$. По построению d_{ik}^{j} -- это функция Беллмана.

2-й этап. Составим уравнение Беллмана для функции Беллмана. С этой целью для пары узлов $i,\ k\in I$ рассмотрим все пути, которые могут проходить через узлы $\{1,2,...,j+1\}$. Все такие пути можно разбить на две группы:

а) пути, не содержащие узел $j+1$;

б) пути, содержащие узел $j+1$.

Найдём длину минимального пути в группе «а». Согласно определению функции Беллмана, длина такого пути равна d_{ik}^{j}.

Теперь найдём длину минимального пути в группе «б». Ясно, что длина такого пути равна $d_{ij+1}^{j}+d_{j+1k}^{j}$. Значит, длина минимального пути из i в k с промежуточными узлами, принадлежащими множеству $\{1,2,...,j+1\}$, равна $\min\left\{d_{ik}^{j},d_{ij+1}^{j}+d_{j+1k}^{j}\right\}$.

Следовательно, согласно определению функции Беллмана, имеем

$$d_{ik}^{j+1} = \min\{d_{ik}^{j}, d_{i\ j+1}^{j} + d_{j+1\ k}^{j}\},\ \forall i,\quad k \in I. \tag{18}$$

Уравнение (18) -- это уравнение Беллмана. Из него, в частности, следует, что

$$d_{j+1\ k}^{j+1} = d_{j+1\ k}^{j},\quad d_{i\ j+1}^{j+1} = d_{i\ j+1}^{j},\ \forall i,\ k \in I.$$

Кроме того, очевидно, что

$$d_{ii}^{j} = 0 \text{ при } \forall i \in I, \forall j = \overline{1,n}\ .$$

Зададим начальные условия для уравнения Беллмана:

$$d_{ii}^{0} = 0,\ i = \overline{1,n};\quad d_{ik}^{0} = c_{ik},\quad i = \overline{1,n};\quad k = \overline{1,n};\quad i \neq k. \tag{19}$$

Напомним, что равенство $c_{ik} = \infty$ означает, что в сети $S = \{I, U\}$ нет дуги (i,k) .

3-й этап. Решим уравнение Беллмана (прямой ход) и по нему восстановим решение исходной задачи (обратный ход). Уравнение (18) имеет явно выраженный динамический характер (динамика идёт по $j = 1, 2, ..., n$). Для построения и запоминания функции Беллмана удобно использовать матричный метод, который позволит нам запоминать длины кратчайших путей и восстановить дуги, входящие в эти пути.

4.2.2 Алгоритм Флойда

На каждой итерации алгоритма строятся две $(n \times n)$ -матрицы: D и R . Матрица D называется *матрицей длин кратчайших путей* и содержит текущие оценки длин кратчайших путей, т.е. на j -й итерации имеем

$$D^{j} = (d_{ik}^{j},\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n}).$$

Алгоритм начинает работу при $D^{0} = (d_{ik}^{0},\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n})$, где числа d_{ik}^{0} определены согласно (19). Для построения D^{1} используется *трёхместная операция* (18) при $j = 1$, и т.д.

Матрица R называется *матрицей маршрутов* и служит для нахождения промежуточных узлов (если такие имеются) кратчайших путей. На j -й итерации она определяется как $R^{j} = (r_{ik}^{j},\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n})$, где r_{ik}^{j} -- первый промежуточный узел кратчайшего пути из i в k , получаемого на j -й итерации.

Алгоритм начинает работу при $R^0 = (r_{ik}^0,\ k = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n})$, где $r_{ik}^0 = k$. На j -й итерации элемент r_{ik}^j получается по следующим правилам:

$$r_{ik}^j = \left\{ \begin{array}{ll} r_{ij}^{j-1}, & \text{if } d_{ij}^{j-1} > d_{ij}^{j-1} + d_{jk}^{j-1}, \\ r_{ik}^{j-1} & \text{otherwise.} \end{array} \right. \tag{20}$$

} После построения D^0 и R^0 нужно последовательно построить матрицы $D^j, R^j, j = 1, 2, ..., n$, используя правила пересчёта (18), (20).

Опишем подробнее реализацию трёхместной операции (18) на j -й итерации, используя матрицы D^{j-1} и R^{j-1} , полученные на $(j-1)$ -й итерации.

Шаг 1. Вычеркнем элементы j -й строки и j -го столбца матрицы D^{j-1} . Назовём элементы j -й строки и j -го столбца базисными элементами (базисной строкой и столбцом соответственно).

Шаг 2. Для каждого элемента (i,k) , $i \neq j,\ k \neq j$, матрицы расстояний (начиная с первого и не принадлежащего ни базисной строке, ни базисному столбцу) сравним числа d_{ik}^{j-1} и сумму соответствующих элементов базового столбца и базовой строки $d_{ij}^{j-1} + d_{jk}^{j-1}$. Если $d_{ij}^{j-1} + d_{jk}^{j-1} \geq d_{ik}^{j-1}$, то полагаем $d_{ik}^j = d_{ik}^{j-1}$ и выбираем новые значения для переменных i и k . Если $d_{ij}^{j-1} + d_{jk}^{j-1} < d_{ik}^{j-1}$, то полагаем

$$d_{ik}^j = d_{ij}^{j-1} + d_{jk}^{j-1}$$

и переходим к новым переменным i и k . При этом параллельно изменяем элементы матрицы R^{j-1} на элементы матрицы R^j согласно правилам (20). Для элементов базисной строки и базисного столбца полагаем

$$d_{ij}^j = d_{ij}^{j-1},\ \ i = \overline{1,n};\ \ d_{jk}^j = d_{jk}^{j-1},\ \ k = \overline{1,n},$$

т.е. они не меняются.

Анализируя соотношения (18), можно разработать правила, упрощающие пересчёт матриц $D^{j-1} \to D^j$.

Ясно, что если $d_{ij}^{j-1} = \infty$ (т.е. i -й элемент базисного столбца равен ∞), то все элементы i -й строки остаются прежними и не пересчитываются:

$$d_{ik}^j = d_{ik}^{j-1},\ \ k = \overline{1,n}.$$

Аналогично, если $d_{kj}^{j-1} = \infty$ (т.е. k -й элемент базисной строки равен ∞), то все элементы k -го столба остаются прежними и не пересчитываются:

$$d_{ik}^j = d_{ik}^{j-1},\ \ i = \overline{1,n}.$$

При реализации пересчёта $D^{j-1} \to D^j$ удобно из таблицы вычёркивать строки и столбцы, не подлежащие пересчёту.

Пусть матрицы D^j и R^j найдены. При j переходим к новой $(j+1)$ -й итерации. При $j=n$ STOP. Матрица D^n состоит из длин минимальных путей. Матрица R^n используется для восстановления минимального пути.

Опишем процедуру восстановления кратчайшего пути.

Предположим, нас интересует минимальный путь из i_0 в j_0 . Длина этого пути равна $d^n_{i_0 j_0}$. Для восстановления пути из i_0 в j_0 рассмотрим элементы матрицы R^n :

1. Найдём элементы $r^n_{i_0 j_0}$. Пусть $i_1 := r^n_{i_0 j_0}$, значит, i_1 -- первый промежуточный узел кратчайшего пути из i_0 в j_0 .

2. Найдём элемент $r^n_{i_1 j_0}$. Пусть $r^n_{i_1 j_0} = i_2$, следовательно, i_2 -- первый промежуточный узел кратчайшего пути из i_1 в j_0 ; i_2 -- второй промежуточный узел кратчайшего пути из i_0 в j_0 и т.д., пока для некоторого i_s ни получим $r^n_{i_s j_0} = j_0$. Таким образом, минимальный путь из i_0 в j_0 последовательно проходит через узлы $i_0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_s,\ j_0$.

Пример.

Крупное учреждение планирует разработать систему внутренней доставки почты, основанную на использовании линии пневматической связи, для распределения корреспонденции между 8 отделами. Некоторые отделы будут только отсылать корреспонденцию в другие отделы, не имея при этом возможности получать почту. Все остальные отделы могут получать и отправлять почту. Расположение линий пневматической связи изображено на рис. 3.6.

Каждому отделу соответствует узел, каждая дуга -- это линия связи. Числа на дугах -- расстояния между отделами.

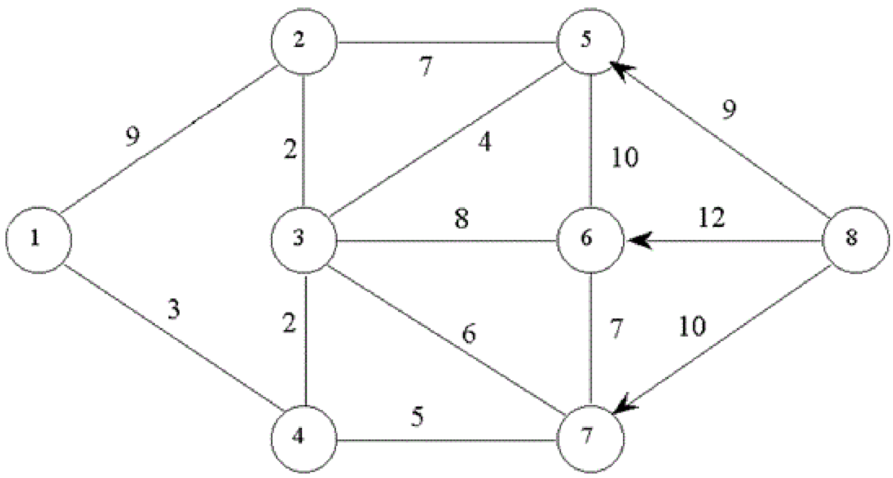

Рис. 3.6

Для того чтобы каждый отдел при пересылке почты в другой отдел смог бы определить оптимальный путь, необходимо заготовить таблицу, указывающую кратчайший путь между каждой парой отделов. Для построения такой таблицы воспользуемся алгоритмом Флойда.

Согласно алгоритму, начальные матрицы кратчайших путей и маршрутов имеют вид

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 9 & 0 & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 0 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 7 & 4 & \infty & 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & 10 & 0 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 5 & \infty & 7 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Итерация 1. $j = 1$ -- базовый элемент. Из матрицы D^0 вычёркиваем 1-й столбец и 1-ю строку. Кроме того, столбцы 3, 5, 6, 7, 8 и строки 3, 5, 6, 7, 8 также можно вычеркнуть, так как в базовой строке и в базовом столбце на соответствующих местах стоят ∞ . Следовательно, рабочая матрица имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 9 & 3 \\ 2 & 9 & 0 & \infty \\ 4 & 3 & \infty & 0 \end{array}$$

базовая строка

базовый столбец

Диагональные элементы матрицы D^0 можно не рассматривать. Значит, необходимо исследовать две оценки d_{24}^0 и d_{42}^0 . Применение трёхместной операции даёт следующие результаты:

$$d_{24}^1 = \min\ \{d_{24}^0, d_{21}^0 + d_{11}^0\} \quad = \min \quad \{\ \infty, 9 + 3\ \} = 12,$$

$$d_{42}^1 = \min \ \{d_{42}^0,\ d_{41}^0 + d_{12}^0\} = \min \ \{\infty,\ 3+9\} = 12.$$

Новые оценки лучше старых: $d_{24}^1 < d_{24}^0$, $d_{42}^1 < d_{42}^0$, поэтому полагаем $r_{24}^1 = 1$, $r_{42}^1 = 1$. Все остальные элементы матриц D^1 и R^1 остаются прежними.

Выпишем матрицы D^1 и R^1

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 9 & 0 & 2 & 12 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 3 & 12 & 2 & 0 & \infty & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 7 & 4 & \infty & 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & 10 & 0 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 5 & \infty & 7 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Итерация 2. Определим узел $j = 2$ как базовый и выделим в D^1 вторую строку и второй столбец -- это базовые строка и столбец. Кроме того, можно вычеркнуть столбцы 6, 7, 8 и строки 6, 7, 8, так как в базовых строке и столбце на соответствующих местах стоят ∞ . «Рабочая» матрица D_p^1 имеет вид

$$D_p^1 = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 9 & \infty & 3 & \infty \\ 2 & 9 & 0 & 2 & 12 & 7 \\ 3 & \infty & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 12 & 2 & 0 & \infty \\ 5 & \infty & 7 & 4 & \infty & 0 \end{array}.$$

Применяем трёхместную операцию к элементам матрицы D_p^1 (диагональные элементы не пересчитываем):

$$d_{13}^2 = \min\left\{ d_{13}^1,\ d_{12}^1 + d_{23}^1\right\} = \min\{\infty,\ 9+2\} = 11 < d_{13}^1,$$

$$d_{14}^2 = \min\left\{ d_{14}^1,\ d_{12}^1 + d_{24}^1 \right\} = \min\{3,\ 9+12\} = 3 < d_{14}^1,$$

$$d_{15}^2 = \min\left\{ d_{15}^1,\ d_{12}^1 + d_{25}^1 \right\} = \min\{\infty,\ 9+7\} = 16 < d_{15}^1,$$

$$d_{31}^2 = \min\left\{ d_{31}^1,\ d_{32}^1 + d_{23}^1 \right\} = \min\{\infty,\ 9+2\} = 11 < d_{31}^1,$$

$$d_{34}^2 = \min\{2,\ 12+2\} = 2 = d_{34}^1,$$

$$d_{35}^2 = \min\{4,\ 2+7\} = 4 = d_{35}^1,$$

$$d_{41}^2 = \min\{3,\ \infty+12\} = 3 = d_{41}^1,$$

$$d_{43}^2 = \min\{2,\ 12+0\} = 2 = d_{43}^1,$$

$$d_{45}^2 = \min\{\infty,\ 12+7\} = 19 < d_{45}^1,$$

$$d_{51}^2 = \min\{\infty,\ 9+7\} = 16 < d_{51}^1,$$

$$d_{53}^2 = \min\{4,\ 7+2\} = 4 = d_{53}^1,$$

$$d_{54}^2 = \min\{\infty,\ 7+12\} = 2 < d_{54}^1.$$

Остальные $d_{ik}^2 = d_{ik}^1$! Следовательно, полагаем $r_{13}^2 = r_{15}^2 = r_{31}^2 = r_{45}^2 = r_{51}^2 = r_{54}^2 = 2$ и все остальные r_{ik}^2 не меняем: $r_{ik}^2 = r_{ik}^1$. Запишем матрицы D^2 и R^2:

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 11 & 3 & 16 & \infty & \infty & \infty \\ 9 & 0 & 2 & 12 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 2 & 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 3 & 12 & 2 & 0 & 19 & \infty & 5 & \infty \\ 16 & 7 & 4 & 19 & 0 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & \infty & 10 & 0 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 5 & \infty & 7 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Выполняя аналогичные операции на итерациях 3, 4, 5, 6, 7, 8, мы получим матрицы $D^i, R^i,\ i = \overline{3,8}$. Матрицы D^8 и R^8 приведены ниже:

$$D^8 = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 3 & 9 & 13 & 8 & \infty \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 6 & 10 & 8 & \infty \\ 5 & 2 & 0 & 2 & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 6 & 10 & 5 & \infty \\ 9 & 6 & 4 & 6 & 0 & 10 & 10 & \infty \\ 13 & 10 & 8 & 10 & 10 & 0 & 7 & \infty \\ 8 & 8 & 6 & 5 & 10 & 7 & 0 & \infty \\ 18 & 15 & 13 & 15 & 9 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix}, R^8 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 6 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Для иллюстрации результатов, содержащихся в матрицах D^8 , R^8 , рассмотрим кратчайший путь из узла 1 в узел 5. Длина этого пути равна $d_{15}^8 = 9$.

Для того чтобы найти сам путь из 1 в 5, обратимся к матрице R^8 . Поскольку r_{15}^8 равно 4, то узел 4 является первым промежуточным узлом пути из 1 в 5. Затем, для того чтобы найти узел, следующий за узлом 4 в пути, ведущем в 5, определяем значение r_{45}^8 . Данное значение равно 3. Значит, за узлом 4 следует узел 3. Далее находим $r_{35}^8 = 5$. Следовательно, кратчайший путь из 1 в 5 проходит через узлы $1 \to 4 \to 3 \to 5$.