6.2 Матричные игры. Смешанные стратегии

Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, каждая компонента которого указывает относительную частоту (вероятность), с которой соответствующая чистая стратегия используется в игре, называется *смешанной стратегией* первого игрока.

Вектор $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ -- смешанная стратегия второго игрока. Ясно, что

$$x_i \geq 0, i = 1, m; y_j \geq 0, j = 1, n; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Чистая стратегия может быть определена как смешанная стратегия, в которой все компоненты, кроме одной, равны нулю.

В дальнейшем будем обозначать чистые стратегии обоих игроков в виде единичных векторов

$$e_i = \left(\overbrace{\underbrace{0, 0, ..., 0, 1}_{i}, 0...0}^{m} \right), e_j = \left(\overbrace{\underbrace{0, 0, ..., 0, 1}_{j}, 0...0}^{n} \right).$$

Оптимальная стратегия игрока -- это стратегия, обеспечивающая ему максимально возможный *гарантированный средний* выигрыш. (При этом предупреждается, что игра ведется без обмана и подглядывания).

Рассмотрим матричную игру, определяемую матрицей выигрышей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если первый партнер P_1 выбирает любую чистую стратегию i , то он уверен, что выиграет по крайней мере $\min\limits_{j} a_{ij}$. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то мы имеем:

$$\min_j a_{1j} = 0, ; \min_j a_{2j} = 1, \quad \min_j a_{3j} = -1.$$

Поскольку игрок P_1 может выбирать любые \textit{i}, то естественно предполагать, что он выберет ту стратегию \textit{i}, при которой его гарантированный выигрыш максимальный. Следовательно, при использовании чистой стратегии игрок P_1 может выиграть не менее

$$\max_i \ \min_j a_{ij} =: g_1.$$

Число g_1 -- гарантированный выигрыш игрока P_1 при использовании только чистых стратегий. В нашем примере

$$g_1 = 1 = a_{22} = 1.$$

Если второй игрок P_2 выбирает стратегию j , то наихудшее, что с ним может случиться, -- это проигрыш в размере $\max_i a_{ij}$. Игрок P_2 может выбирать ту чистую стратегию j , при которой его проигрыш минимален. При выборе этой стратегии игрок P_2 гарантирует, что игрок P_1 не сможет выиграть больше чем

$$g_2 := \min_j \ \max_i a_{ij}.$$

Для нашей матрицы $g_2 := \min_j \ \max_i a_{ij} = 3$.

Отметим, что всегда

$$\min_{y \in Y} \ \max_{x \in X} f(x, y) \geq \max_{x \in X} \ \min_{y \in Y} f(x, y), \quad \Longrightarrow \quad g_2 \geq g_1.$$

Таким образом, в нашем примере при выборе только чистых стратегий игрок P_1 может гарантировать, что он выиграет не менее 1 (а хотел бы выиграть с гарантией больше!); игрок P_2 может гарантировать, что он не проиграет более 3 (а хотел бы проиграть с гарантией меньше!).

Если бы имело место равенство

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v, \tag{1}$$

то P_1 может быть уверен, что выиграет не менее v , а игрок P_2 может добиться того, что гарантированно не проиграет больше чем v .

Матричная игра, для которой имеет место равенство (1), наилучшим образом разыгрывается партнерами P_1 и P_2 , избирающими соответствующие чистые стратегии. Поскольку при любом отклонении игрока P_1 от этой стратегии его гарантированный выигрыш не увеличивается (а возможно, и уменьшится) и поскольку при каждом отклонении партнера P_2 от своей чистой стратегии он не уменьшит своего проигрыша (а возможно, увеличит его), указанные чистые стратегии естественно назвать оптимальными чистыми стратегиями.

Следующая матричная игра является одной из тех игр, которые имеют оптимальные чистые стратегии:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 3.$$

Поскольку не все матричные игры могут оптимально разыгрываться при помощи чистых стратегий, необходимо ввести понятие оптимальной смешанной стратегии.

Если игрок P_1 при длительном процессе игры выбирает смешанную стратегию $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, т.е. с вероятностью x_i выбирает i -ю чистую стратегию, а игрок P_2 при длительном процессе игры выбирает смешанную стратегию $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, т.е. с вероятностью y_j выбирает j -ю стратегию, то математическое ожидание (средний выигрыш) выигрыша игрока P_1 равно

$$M(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = x' Ay. \tag{2}$$

Соответственно выигрыш игрока P_2 при этом равен $-M(x, y)$, т.е. его проигрыш равен $M(x, y)$.

Функция $M(x, y)$ называется *функцией платежей*.

Говорят, что *игра имеет решение в смешанных стратегиях*, если существуют такие стратегии x^* , y^* и число v , что при любых смешанных стратегиях x, y выполняется соотношение

$$M(x, y^*) \le v \le M(x^*, y). \tag{3}$$

Полагая в (3) $x = x^*, y = y^*$, получим

(4)

$$v = M(x^*, y^*).$$

Число ν называется *ценой игры*.

Неравенство (3) означает, что если игрок P_1 будет использовать смешанную стратегию x^* (при длительном процессе игры), то его гарантированный выигрыш равен v , так как при любом y имеем

$$v \le M(x^*, y).$$

Для игрока P_2 соотношение (3) означает, что если игрок P_2 будет придерживаться стратегии y^* , то не проиграет больше чем v , так как при каждом выборе смешанной стратегии x игроком P_1 имеем

$$M(x, y^*) \le v.$$

Стратегии x^* , y^* , удовлетворяющие (3), называются *оптимальными стратегиями.*

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Игрок P_1 выбирает одну из двух сторон монеты. Игрок P_2 , не зная выбора первого игрока, также выбирает одну из сторон монеты. После того, как оба игрока произвели свой выбор, игрок P_2 платит 1 дол. игроку P_1 , если выбранные стороны совпали, и -1 дол. -- в противном случае, т.е. в противном случае игрок P_1 платит игроку P_2 1 дол. (т.е. игрок P_1 играет на максимум, а игрок P_2 -- на минимум).

Запишем матрицу платежей

	Выбор P_2		
	Орел	Решка	
Выбор P_1: орёл	1	-1	$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Выбор P_1: решка	-1	1	

Если бы игроки использовали только чистые стратегии (т.е. играли бы только один раз или играли много раз, но использовали один и тот же выбранный заранее фиксированный ход), то игрок P_1 мог бы гарантировать себе выигрыш в размере

$$g_1 = \max_i \min_j a_{ij} = -1,$$

а игрок P_2 мог бы гарантировать, что не проиграет более чем

$$g_2 = \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Но первый игрок хотел бы выиграть больше, а второй проиграть меньше.

Предположим теперь, что игрокам разрешается использовать смешанные стратегии, т.е. предполагается, что игра повторяется много раз и каждый из игроков должен определить, с какой частотой (вероятностью) он будет выбирать «орла» и с какой частотой «решку», так, чтобы «улучшить» свой гарантированный результат: для игрока P_1 это означает увеличить свой гарантированный выигрыш, а для P_2 это означает уменьшить свой гарантированный проигрыш.

Очевидно, что в данной простой игре оптимальными смешанными стратегиями будут

$$x^* = \left(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}\right), y^* = \left(y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}\right).$$

Игрок P_1 с вероятностью $\frac{1}{2}$ выбирает «орла», с вероятностью $\frac{1}{2}$ -- «решку». Игрок P_2 поступает аналогично. При этом, используя стратегии x^*, y^* в длинном процессе игры, игрок P_1 гарантирует себе выигрыш (средний) $v = 0$ (это больше чем $g_1 = -1$!), а игрок P_2 гарантирует себе, что не проиграет больше чем $v = 0$ (это меньше, чем было раньше $g_2 = 1$!).

Пример 2. Игра "в жулика". Эта игра является примером игры, которая на первый взгляд кажется беспроигрышной для каждого игрока, т.е. имеет цену $v = 0$, но на самом деле это не так.}

Каждому из двух партнеров выдается по тузу бубен и треф. P_1 получает также бубновую двойку, а P_2 -- трефовую. При первом ходе P_1 выбирает и откладывает одну из своих карт, и P_2 , не знающий выбора карты партнером P_1 , также откладывает одну свою карту.

Если были отложены карты одной масти, выигрывает игрок P_1 , в противном случае выигравшим считается игрок P_2 . Размер выигрыша определяется картой, отложенной победителем (тузу приписывается 1 очко, двойке -- 2 очка). Если отложены две двойки, выигрыш равен нулю. Матрица выигрышей этой игры имеет вид

	♦	♣	2♣
♦	1	-1	-2
♣	-1	1	1
2♦	2	-1	0

Поскольку каждый элемент третьей строки не меньше соответствующего элемента первой строки, то игроку P_1 не имеет смысла использовать первую стратегию. Следовательно, можно считать, что $x_1 = 0$. В этом случае говорят, что третья стратегия доминирует над первой. После исключения первой строки матрица выигрышей имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как элементы второго столбца меньше либо равны элементам третьего столбца, то игроку P_2 нет необходимости использовать третью стратегию, следовательно, $y_3 = 0$. Из матрицы удалим третий столбец. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Исследование данной матрицы показывает, что она не имеет седловой точки, следовательно, данная игра не имеет решения в чистых стратегиях.

Рассмотрим смешанные стратегии. Пусть P_1 с вероятностью s выбирает вторую стратегию, тогда с вероятностью $(1-s)$ он выбирает третью стратегию и его смешанная стратегия имеет вид

$$x = (x_1 = 0,\ x_2 = s,\ x_3 = (1-s)).$$

Аналогично для P_2 : пусть он с вероятностью p выбирает первую стратегию, тогда он с вероятностью $(1-p)$ выбирает вторую стратегию. Его смешанная стратегия имеет вид

$$y = (y_1 = p, y_2 = (1-p), y_3 = 0).$$

При этом цена игры равна $M(x, y) = (-3s+2)p + (2s-1)(1-p) = \bar{M}(s, p)$.

Надо найти такие s^*, p^* , $0 \le s^* \le 1$, $0 \le p^* \le 1$, что

$$\bar{M}(s, p^*) \le \bar{M}(s^*, p^*) \le \bar{M}(s^*, p).$$

Нетрудно проверить, что в нашем примере $s^* = \frac{3}{5}$, $p^* = \frac{2}{5}$, значит, $x^0 = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $y^0 = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ и $M(x^0, y^0) = \frac{1}{5}$.

Следовательно, эта игра выгодна для игрока P_1 . Иными словами, если P_1 избирает свою оптимальную стратегию x^0 , а серия игр достаточно длинна, то ему гарантирован, независимо от стратегии y , применяемой игроком P_2 , выигрыш не менее чем $M(x^0, y^0) = v^0 = \frac{1}{5}$.

Аналогично, если P_2 избирает свою оптимальную стратегию y^0 , то при длительной игре он может быть застрахован от проигрыша, большего, чем v^0 . (Если он отступит от своей стратегии y^0 , то может проиграть больше).

Если оба игрока изберут свои оптимальные стратегии, то можно предсказать вероятный исход игры.

Определение. Игра называется *симметричной*, если соответствующая ей матрица выигрышей является кососимметричной, т.е. $a_{ij} = -a_{ji}$.

Утверждение. Цена симметричной игры равна $v = 0$, и оптимальные стратегии обоих игроков совпадают.

Доказательство. Запишем функцию выигрыша для P_1 (проигрыша для P_2):

$$M(x, y) = x' A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j.$$

Легко проверить, что в случае кососимметричной матрицы A и $x = y$ имеем $M(x, x) = x' A x = 0$. Обозначим через x^0, y^0 оптимальные стратегии игроков P_1 и P_2 соответственно. Имеем

$$\max_x \min_y x' A y = \min_y x^{0\prime} A y = v.$$

Если P_2 использует любую свою стратегию y , то $x^{0\prime} A y \geq v$. Но при $y = x^0$ мы знаем, что $x^{0\prime} A x^0 = 0$, следовательно, $0 \geq v$.

Аналогично для игрока P_1 :

$$\min_y \max_x x' A y = \max_x x' A y^0 = v.$$

Если P_1 использует каждую свою стратегию x , то $x' A y^0 \leq v$.

Для $x = y^0$ получаем $y^{0\prime} A y^0 = 0$. Следовательно, $0 \leq v$.

Из полученных неравенств следует, что $v = 0$, следовательно, цена игры равна нулю и игроки имеют одинаковые смешанные стратегии. Что и требовалось доказать.

Выше мы рассматривали два небольших примера и специальную (симметричную) игру и смогли найти решения или описать свойства решений. А как поступить в общем случае? Каждая ли матричная игра имеет решение? И если имеет, то как его найти? Ответы на эти вопросы дадим в следующем параграфе.