5.4 Задача коммивояжера

5.4.1. Постановка задачи

ММатематическая модель задачи коммивояжера

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min(c_{ii}=\infty), \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ \ i=\overline{1,n} \text{ (отъезд из города } i \text{)}, \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ \ j=\overline{1,n} \text{ (прибытие в город } j \text{)}, \tag{34}$$

$$0 \le x_{ij} \le 1,\ \ i=\overline{1,n};\ \ j=\overline{1,n}, \tag{35}$$

$$\text{множество } U_* = \{(i,j):\ \ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,n}; x_{ij}=1\} \text{ -- есть единственный цикл.} \tag{36}$$

Условие (36) отличает задачу коммивояжера от задачи о назначениях. Если отбросим (36), т.е. будем рассматривать задачу (32) -- (34), то получим задачу о назначениях. Равенство $x_{ij}=1$ означает, что коммивояжер из города i идёт в город j , равенство $x_{ij}=0$ означает, что дуга (i,j) не включается в маршрут коммивояжера. Существует много методов решения задачи (32)} -- (36). Мы рассмотрим два метода, являющихся различными модификациями метода ветвей и границ.

5.4.2 Первая модификация (метод исключения подциклов)

Эта модификация в наименьшей степени отличается от метода ветвей и границ, рассмотренного нами ранее. В начале итерации t известны верхняя граница (оценка) r_0^t оптимального значения целевой функции и соответствующий ей маршрут. Можно принять r_0^1 равным достаточно большому числу, скажем, сумме $(c_{12}+c_{23}+\ldots+c_{n1})$, соответствующей маршруту $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n \to 1$.

Кроме того, имеется основной список, содержащий ряд задач о назначениях. Все задачи о назначениях имеют вид (32) -- (35), но отличаются друг от друга тем, что в них различные величины c_{ij} равны ∞. Равенство $c_{ij}=\infty$ означает, что дуга (i,j) исключается из маршрута.

На первой итерации основной список состоит из одной (исходной) задачи (32) -- (35).

На итерации t выполняются следующие шаги.

Шаг 1. Прекратим вычисления, если основной список пуст: зафиксированный маршрут является оптимальным. В противном случае выберем одну задачу, вычеркнув её из основного списка.

Шаг 2. Решим выбранную задачу о назначениях. Если оптимальное значение целевой функции (которое может быть равно ∞ , что означает, что её ограничения несовместны!) больше или равно r_0^t , то оценку не меняем: $r_0^{t+1} = r_0^t$ и возвращаемся к шагу 1. В противном случае, т.е. если значение целевой функции задачи о назначениях меньше r_0^t , перейдём к шагу 3.

Шаг 3. Если полученное оптимальное решение выбранной задачи о назначениях является одним циклом, то зафиксируем это решение и положим r_0^{t+1} равным оптимальному значению целевой функции рассматриваемой задачи о назначениях. Перейдем к шагу 1. В противном случае, т.е. если решение задачи о назначениях образует несколько подциклов, перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Остановимся в полученном оптимальном решении задачи о назначениях на подцикле, содержащем минимальное количество дуг. Каждой дуге (i, j) из выбранного подцикла поставим в соответствие задачу о назначениях, внеся её в основной список и приняв соответствующее значение $c_{ij} = \infty$, а все остальные коэффициенты оставим теми же, что и в задаче, выбранной на шаге 1. Примем $r_0^{t+1} = r_0^t$ и вернемся к шагу 1.

Пример 1.
Рассмотрим задачу коммивояжера со следующей матрицей маршрутов:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	10	25	25	10
2	1	∞	10	15	2
3	8	9	∞	20	10
4	14	10	24	∞	15
5	10	8	25	27	∞

Дерево, соответствующее данному примеру приведено на рис. 4.6.

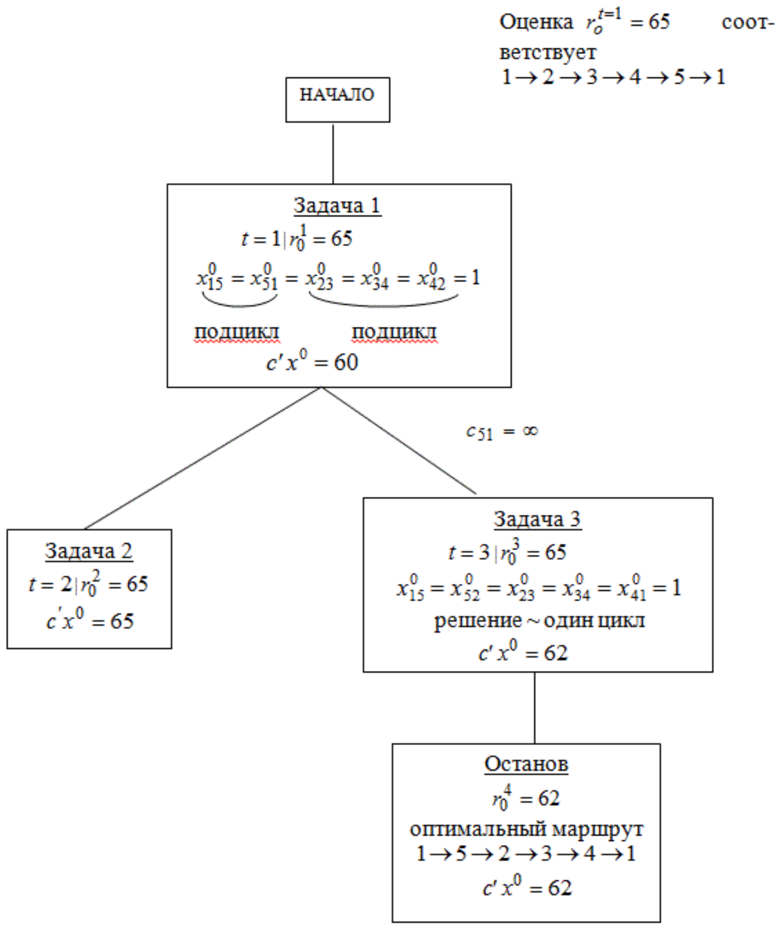

Рис. 4.6

5.4.4 Вторая модификация (метод задания маршрутов)

Изложенный выше метод позволяет ограничить число просматриваемых вершин дерева в методе ветвей и границ, что достигается за счёт вычисления эффективной нижней оценки (границы) целевой функции для любого цикла, порождаемого каждой задачей. Но для получения этой оценки приходится находить оптимальное решение задачи о назначениях.

Покажем теперь, как можно вычислять оценки более простым способом. Однако цена, которую приходится платить за такое упрощение, определяется тем, что в новом алгоритме нужно исследовать большее число ветвей соответствующего дерева.

В начале каждой итерации t известна верхняя оценка r_0^t оптимального значения целевой функции. Значение r_0^t на первой итерации можно определить по тем же правилам, что и в предыдущем алгоритме. Кроме того, имеется основной список задач, в которых некоторое подмножество значений c_{ij} изменено и принято равным ∞ , а некоторое подмножество x_{kp} принято равным 1. Среди значений $x_{kp} = 1$ отсутствуют наборы, образующие подциклы. Отметим, что равенство $c_{ij} = \infty$ означает, что дуга (i,j) исключается из маршрута, а равенство $x_{kp} = 1$ означает, что дуга (k, p) обязательно включается в маршрут.

На первой итерации основной список включает две задачи: в одной из них значение выбранного (выбираем произвольно) c_{ij} изменено на ∞ (это означает, что маршрут $i \to j$ запрещён), в другой -- соответствующая переменная $x_{ij} = 1$ (это означает, что маршрут $i \to j$ задан), а $c_{ji} = \infty$ (полагая $c_{ji} = \infty$, запрещают маршрут $j \to i$, предотвращая образование подцикла $i \to j \to i$).

Рассмотрим любую задачу из основного списка и попытаемся вычислить для неё нижнюю оценку оптимального значения целевой функции для любого цикла, содержащего заданное подмножество дуг с $x_{ij} = 1$. Существует много способов вычисления таких оценок. В целом, чем больше нижняя оценка, тем меньшее число ветвей приходится исследовать.

Приведём один простой, но достаточно эффективный способ вычисления нижних границ. В основе этого способа лежат те же идеи, что использовались нами при обосновании венгерского метода решения задачи о назначениях. Прежде всего будем считать, что из матрицы $C = (c_{ij},\ \ i = \overline{1,n};\ \ j = \overline{1,n})$, соответствующей рассматриваемой задаче, вычеркнуты строки k и столбцы p, если задано, что $x_{kp} = 1$. Ясно, что указанная оценка должна быть, по крайней мере, равной сумме c_{ij} при заданных $x_{ij} = 1$, плюс сумма наименьших c_{ij} в каждой из невычеркнутых строк.

Эту оценку можно (и должно) ещё увеличить. Для этого вычитается минимальный коэффициент c_{ij} в каждой невычеркнутой строке из всех оставшихся c_{ij} этой строки. Далее к полученной выше оценке добавляется сумма минимальных чисел, найденных в каждом невычеркнутом столбце среди «уменьшенных» расстояний.

Пример 2, иллюстрирующий эту процедуру, приведен в таблицах на рис. 4.7.

$x_{23} = 1,\ c_{23} = 10$

min по строкам ↓

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
1	∞	10		25	10	10
2						
3	8	∞		20	10	8
4	14	10		∞	15	10
5	10	8		27	∞	8

Матрица уменьшенных расстояний

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
1	∞	0		15	0	
2						
3	0	∞		12	2	
4	4	0		∞	5	
5	2	0		19	∞	
	0	0		12	0	← min по столбцам

Оценка равна $c_{23}+(10+8+10+8)+(0+0+12+0) = 58$.

Рис. 4.7

Ясно, что самую «хорошую» нижнюю оценку мы бы получили, если бы решили до конца задачу о назначениях, соответствующую невычеркнутой части таблицы (вычеркнутая часть соответствует закреплённой части маршрута). Однако такая оценка потребовала бы значительных вычислительных затрат. На итерации t выполняются следующие шаги.

Шаг 1. Прекратить вычисления, если основной список пуст: зафиксированный цикл является оптимальным маршрутом. В противном случае выбрать одну задачу и вычеркнуть её из основного списка. Перейти к шагу 2.

Шаг 2. Определить нижнюю оценку целевой функции для любого цикла, порождённого выбранной задачей. Если нижняя оценка больше или равна r_0^t, то положить $r_0^{t+1} = r_0^t$ и перейти к шагу 1. В противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если зафиксированные переменные $x_{ij} = 1$ в выбранной задаче образуют один цикл, то зафиксируем его; положим r_0^{t+1} равным длине полученного цикла; вернёмся к шагу 1. В противном случае (т.е. если дуги с $x_{ij} = 1$ не образуют цикла) перейдём к шагу 4.

Шаг 4. Попытаемся найти такую дугу (i_0, j_0):

1) которая до текущего момента не принадлежала множеству дуг с фиксированными значениями $x_{ij} = 1$;

2) для которой текущее $c_{i_0 j_0} < \infty$;

3) во множестве дуг с фиксированными значениями нет дуг вида $(i, j_0), \quad (i_0, j);$

4) добавление дуги (i_0, j_0) ко множеству дуг (i, j) с $x_{ij} = 1$ не образует подцикла, т.е. цикла с количеством дуг меньше, чем n.

Если удаётся найти такую дугу (i_0, j_0), то в основной список вносим две новые задачи. Каждая из этих задач идентична задаче, выбранной на шаге 1, за исключением лишь того, что в одну из них надо внести изменение, положив $c_{i_0 j_0} = \infty$, в другую -- условие $x_{i_0 j_0} = 1$ и изменение $c_{j_0 i_0} = \infty$. Положим $r_0^{t+1} = r_0^t$ и вернёмся к шагу 1.

Если дугу (i_0, j_0) с указанными свойствами найти не удалось, то ничего не вносим в список и переходим к шагу 1.

Отметим два существенных отличия данного варианта алгоритма ветвей и границ от предыдущего. В данном варианте на шаге 2 вычисляется нижняя оценка для выбранной задачи, но *не отыскивается* её оптимальное решение. Кроме того, на шаге 4 в основной список могут вноситься *две задачи* или не добавляется *ни одной*, если не существует переменной $x_{i_0 j_0}$, удовлетворяющей указанным условиям 1 -- 4. В предыдущей модификации на шаге 4 образуется от 2 до $n/2$ новых задач, вносимых в основной список.

Пример 3. Рассмотрим задачу коммивояжера с той же матрицей расстояний, что и в примере 1, т.е. с матрицей

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	∞	10	25	25	10
2	1	∞	10	15	2
3	8	9	∞	20	10
4	14	10	24	∞	15
5	10	8	25	27	∞

Ход решения данной задачи с помощью второй модификации отражен на рис. 4.8.

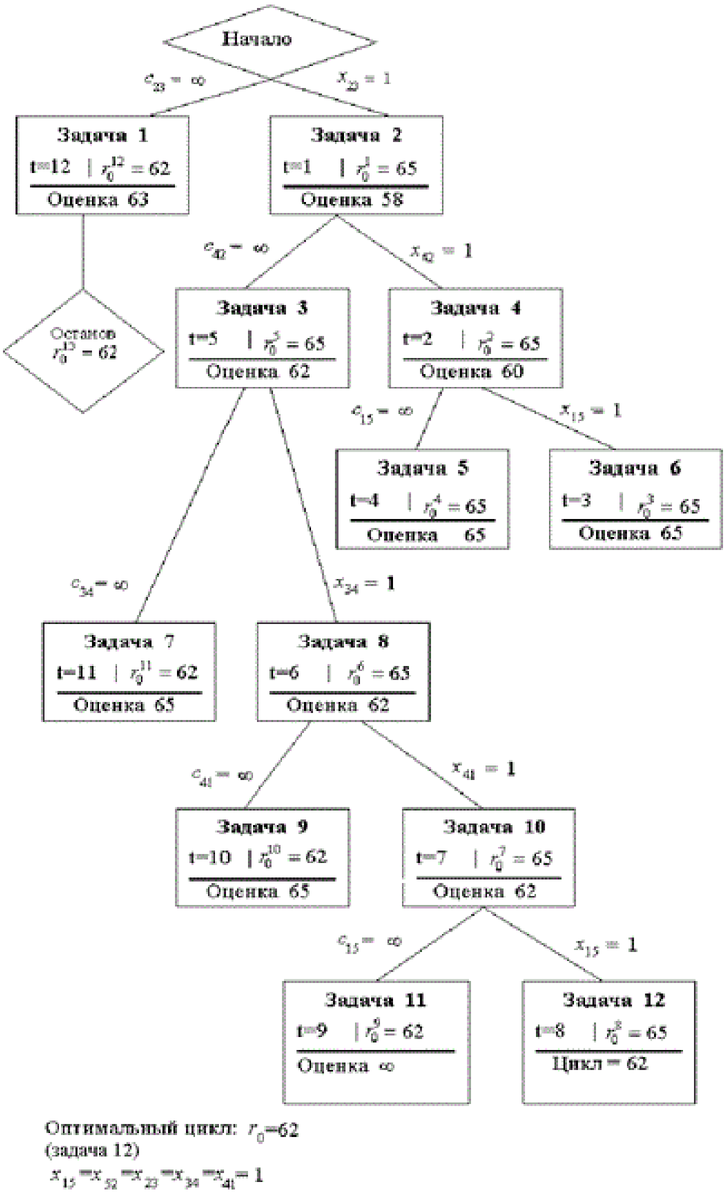
Начало
$c_{23}=\infty$
$x_{23}=1$
Задача 1
t=12 | $r_0^{12}=62$
Оценка 63
Задача 2
t=1 | $r_0^{1}=65$
Оценка 58
Останов
$r_0^{12}=62$
$c_{42}=\infty$
$x_{42}=1$
Задача 3
t=5 | $r_0^{5}=65$
Оценка 62
Задача 4
t=2 | $r_0^{2}=65$
Оценка 60
$c_{15}=\infty$
$x_{15}=1$
Задача 5
t=4 | $r_0^{4}=65$
Оценка 65
Задача 6
t=3 | $r_0^{3}=65$
Оценка 65
$c_{34}=\infty$
$x_{34}=1$
Задача 7
t=11 | $r_0^{11}=62$
Оценка 65
Задача 8
t=6 | $r_0^{6}=65$
Оценка 62
$c_{41}=\infty$
$x_{41}=1$
Задача 9
t=10 | $r_0^{10}=62$
Оценка 65
Задача 10
t=7 | $r_0^{7}=65$
Оценка 62
$c_{15}=\infty$
$x_{15}=1$
Задача 11
t=9 | $r_0^{9}=62$
Оценка ∞
Задача 12
t=8 | $r_0^{8}=65$
Цикл = 62
Оптимальный цикл: r_0=62
(задача 12)
$x_{15}=x_{52}=x_{23}=x_{34}=x_{41}=1$

Рис. 4.8