

Тема 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Под математическим моделированием понимают способ исследования различных процессов путем изучения явлений, имеющих различное физическое содержание, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями. При изучении любого процесса методом математического моделирования необходимо в первую очередь построить его математическое описание, или, как мы далее будем говорить, *математическую модель*. В простейших случаях, математическая модель позволяет для данного процесса-оригинала подобрать на основании известных аналогий удобные физические процессы-модели, а также установить соотношения подобия, связывающие их параметры, без которых трудно использовать результаты моделирования для изучения процесса-оригинала. В более сложных случаях, когда для моделирования создаются специальные моделирующие установки (стенды) или используются вычислительные машины, математическая модель необходима для определения структуры и параметров стенда или построения моделирующего алгоритма.

2.1. Понятие математической модели

Математическая модель, описывает *формализованный* процесс функционирования системы и в состоянии охватить только основные, характерные его закономерности.

Процесс функционирования любой системы будем рассматривать как последовательную смену ее состояний в некотором интервале времени (t_0, t_1) . Состояния системы в каждый момент времени t из упомянутого интервала характеризуются набором величин z_1, z_2, \dots, z_n . Процесс функционирования системы рассматриваем как последовательную смену состояний, и $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$ являются функциями времени t . В дальнейшем будем называть их *характеристиками состояний* системы.

Под математической моделью реальной системы будем понимать совокупность соотношений (например, формул, уравнений, неравенств, логических условий, операторов и т. д.), определяющих характеристики состояний системы (а через них и выходные сигналы) в зависимости от параметров системы, входных сигналов, начальных условий и времени.

Однако при исследовании реальных систем не всегда удастся построить математические модели в виде явных функций или уравнений.

Перейдем к некоторым общим замечаниям, связанным с понятием математической модели.

1. Однозначность определения характеристик состояний системы и выходных сигналов через параметры системы, входные сигналы и начальные условия. Это требование выполняется для так называемых детерминированных моделей, представляющих собой совокупность неслучайных соотношений. Если при этом начальные условия и входные сигналы не случайны, то модель оказывается *вполне детерминированной*. На практике нередко приходится рассматривать *случайные* процессы функционирования различных систем. Характеристики состояний системы для таких процессов оказываются случайными функциями времени. Будем говорить, что при помощи математической модели *однозначно* определяются *распределения вероятностей* для характеристик состояний системы, если заданы распределения вероятностей для начальных условий, параметров системы и возмущений, действующих на ее элементы, а также для входных сигналов.
2. Выбор совокупности параметров, характеризующих исследуемую систему. Реальные процессы, если их рассматривать во всех деталях, весьма сложны. Учет большого количества второстепенных деталей оказывается практически нецелесообразным. В большинстве случаев при решении прикладных задач

достаточно учитывать лишь основные стороны исследуемого процесса. Поэтому обычно при построении математической модели процесса ограничиваются сравнительно небольшим количеством параметров. В таких условиях, естественно, об однозначности определения набора параметров, характеризующих систему, не может быть и речи.

3. Определение совокупности начальных условий. На этапе формализации процесса, когда контуры математической модели еще недостаточно выяснены, определить перечень начальных условий не представляется возможным. Когда же математическая модель построена, перечень начальных условий может быть определен однозначно. Естественно, что перечень начальных условий зависит от того, какие выбраны характеристики состояний системы.

Математическая модель может появиться только как следствие четкого формального описания рассматриваемого процесса с требуемой степенью приближения к действительности, только в результате *формализации* процесса.

2.2. Формализация процессов функционирования сложных систем

Математическая модель является результатом *формализации* процесса, т. е. построения четкого формального (математического) описания процесса с необходимой степенью приближения к действительности.

Модель объекта моделирования, т. е. системы S , можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих в общем случае следующие подмножества:

- совокупность **входных воздействий** на систему $x \in X, i=1, \dots, n_x$;
- совокупность **воздействий внешней среды** $v_i \in V, i=1, \dots, n_v$;
- совокупность **внутренних (собственных) параметров** системы $h_i \in H, i=1, \dots, n_h$;
- совокупность **выходных характеристик** системы $y_i \in Y, i=1, \dots, n_y$;

Причем в перечисленных подмножествах можно выделить управляемые и неуправляемые переменные.

Совокупность зависимостей выходных характеристик системы от времени $y_j(t)$ для всех видов $j=1, \dots, n_y$ называется **выходной траекторией** $\vec{y}(t)$. Зависимость называется **законом функционирования системы S** и обозначается F_S .

Весьма важным для описания и исследования системы S является понятие **алгоритма функционирования A_S** , под которым понимается метод получения выходных характеристик с учетом входных воздействий $x(t)$, воздействий внешней среды $v(t)$ и собственных параметров системы $h(t)$. Очевидно, что один и тот же закон функционирования F_S системы S может быть реализован различными способами, т. е. с помощью множества различных алгоритмов функционирования A_S .

Очевидно, что детерминированная модель является частным случаем стохастической модели.

Приведенные математические соотношения представляют собой математические схемы общего вида и позволяют описать широкий класс систем. Однако в практике моделирования на первоначальных этапах исследования системы рациональнее использовать **типовые математические схемы**:

дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания и т. д.

При построении математических моделей процессов функционирования систем можно выделить следующие основные подходы: непрерывно–детерминированный (например, дифференциальные уравнения); дискретно–детерминированный (конечные автоматы); дискретно-стохастический (вероятностные автоматы); непрерывно-стохастический (системы массового обслуживания); обобщенный или универсальный (агрегативные системы).

Математические схемы, рассматриваемые в последующих параграфах данной главы, должны помочь оперировать различными подходами в практической работе при моделировании конкретных систем.

2.3. Математические схемы

2.3.1. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)

Обычно в таких математических моделях в качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, служит время t . Тогда математическое соотношение для детерминированных систем в общем виде будет

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}, t), \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0,$$

где:

$$\vec{y}' = \frac{d\vec{y}}{dt}, \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ и } \vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \text{ -- } n\text{-мерные векторы,}$$

$\vec{f}(\vec{y}, t)$ -- вектор-функция, которая определена на некотором $(n+1)$ –мерном множестве (\vec{y}, t) и является непрерывной.

Так как математические схемы такого вида отражают динамику изучаемой системы, т. е. ее поведение во времени, то они называются **D-схемами** (англ. dynamic).

Использование *D-схем* позволяет формализовать процесс функционирования непрерывно–детерминированных систем S и оценить их основные характеристики, применяя аналитический или имитационный подход, реализованный в виде соответствующего языка для моделирования непрерывных систем или использующий аналоговые и гибридные средства вычислительной техники.

2.3.2. Дискретно-детерминированные модели (f-схемы)

Особенности дискретно–детерминированного подхода на этапе формализации процесса функционирования систем может быть рассмотрен на примере использования в качестве математического аппарата теории автоматов. На основе этой теории система представляется в виде автомата, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени.

Абстрактно конечный автомат (англ. finite automata) можно представить как математическую схему (**F-схему**), характеризующуюся шестью элементами:

- конечным множеством X входных сигналов (входным алфавитом);

- конечным множеством Y выходных сигналов (выходным алфавитом);
- конечным множеством Z внутренних состояний (внутренним алфавитом или алфавитом состояний);
- начальным состоянием $z_0, z_0 \in Z$;
- функцией переходов $\varphi(z, x)$;
- функцией выходов $\psi(z, x)$.

Автомат, задаваемый F -схемой, принято обозначать:

$$F = \langle Z, X, Y, \varphi, \psi, z_0 \rangle.$$

Абстрактный конечный автомат имеет один входной и один выходной каналы. В каждый момент $t=0, 1, 2, \dots$ дискретного времени F -автомат находится в определенном состоянии $z(t)$ из множества Z состояний автомата, причем в начальный момент времени $i=0$ он всегда находится в начальном состоянии $z(0)=z_0$. В момент t , будучи в состоянии $z(t)$, автомат способен воспринять на входном канале сигнал $x(t) \in X$ и выдать на выходном канале сигнал $y(t) = \psi[z(t), x(t)]$, переходя в состояние $z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)]$, $z(t) \in Z$, $y(t) \in Y$. Другими словами, если на вход конечного автомата, установленного в начальное состояние z_0 , подавать в некоторой последовательности буквы входного алфавита $x(0), x(1), x(2), \dots$, т. е. входное слово, то на выходе автомата будут последовательно появляться буквы выходного алфавита $y(0), y(1), y(2), \dots$, образуя выходное слово.

Сказанное выше можно описать следующими уравнениями: для F -автомата первого рода, называемого также автоматом Мили,

$$z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)], y(t) = \psi[z(t), x(t)], t=0, 1, 2, \dots; \quad (2.1)$$

для F -автомата второго рода

$$z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)], y(t) = \psi[z(t), x(t-1)], t=0, 1, 2, \dots; \quad (2.2)$$

Автомат второго рода, для которого $y(t) = \psi[z(t)]$, $t=0, 1, 2, \dots$, т. е. функция выходов не зависит от входной переменной $x \{t\}$, называется автоматом Мура.

По числу состояний различают конечные автоматы с памятью и без памяти. Автоматы с памятью имеют более одного состояния, а автоматы без памяти (комбинационные или логические схемы) обладают лишь одним состоянием.

По характеру отсчета дискретного времени конечные автоматы делятся на *синхронные* и *асинхронные*. В синхронных F -автоматах моменты времени, в которые автомат «считывает» входные сигналы, определяются принудительно синхронизирующими сигналами. Реакция автомата на каждое значение входного сигнала заканчивается за один такт, длительность которого определяется интервалом между соседними синхронизирующими сигналами. Асинхронный F -автомат считывает входной сигнал непрерывно и поэтому, реагируя на достаточно длинный входной сигнал постоянной величины x , он может, несколько раз изменять состояние, выдавая соответствующее число выходных сигналов, пока не перейдет в устойчивое, которое уже не может быть изменено данным входным.

2.3.3. Дискретно-стохастические модели (Р-схемы)

Рассмотрим особенности построения математических схем при дискретно-стохастическом подходе к формализации процесса функционирования исследуемой

системы S. Поскольку сущность дискретизации времени при этом подходе остается аналогичной рассмотренным конечным автоматам, то влияние фактора стохастичности проследим также на разновидности таких автоматов, а именно на вероятностных (стохастических) автоматах. В общем виде *вероятностный автомат* (англ. probabilistic automat) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически.

Вероятностный автомат может быть описан либо таблицей переходов, либо матрицей переходов Р-автомата и начальным распределением вероятностей. Математический аппарат, используемый при исследовании Р-автоматов, является аппарат марковских цепей.

2.3.4. Непрерывно-стохастические модели (q-схемы)

Особенности непрерывно-стохастического подхода рассмотрим на примере использования в качестве типовых математических схем *систем массового обслуживания*, (англ. queueing system), которые будем называть *Q-схемами*. Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания.

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например: потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удаленных терминалов и т. д. При этом характерным для работы таких объектов является случайное появление заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени, т. е. стохастический характер процесса их функционирования. Остановимся на основных понятиях массового обслуживания, необходимых для использования *Q-схем* как при аналитическом, так и при имитационном подходе.

Работа любой системы массового обслуживания состоит в выполнении поступающего на ее вход потока заявок. Заявки поступают в некоторые, в общем случае случайные, моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то время, также случайное, после чего канал освобождается для обслуживания следующей заявки. Предмет теории массового обслуживания – установление зависимостей между характером потока заявок, производительностью отдельного канала обслуживания, числом каналов и эффективностью обслуживания.

Случайный процесс, протекающий в СМО состоит в том, что система в случайные моменты времени переходит из одного состояния в другое. СМО представляет собой физическую систему дискретного типа, а переход системы из одного состояния в другое происходит скачком. В любой момент времени система пребывает в одном из возможных состояний и очевидно, что для любого t справедливо:

$$\sum_i p_i(t) = 1$$

Случайные процессы со счетным множеством состояний бывают двух типов: с дискретным или непрерывным временем.

С дискретным временем: переходы из состояния в состояние могут происходить только в строго определенные, разделенные конечными интервалами моменты времени $t_1, t_2 \dots$.

С непрерывным временем: переход системы из состояния в состояние возможен в любой момент времени.

Случайные процессы, протекающие в СМО как правило являются процессами с непрерывным временем. Граф перехода системы из состояния в состояние может быть проиллюстрирован рис. 2.1.

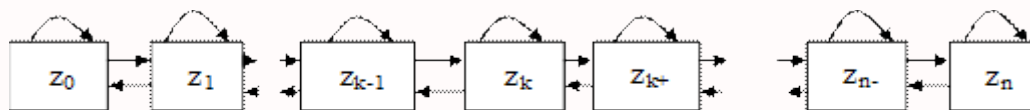


Рис. 2.1

2.3.5. Обобщенные модели (А-схемы)

Наиболее известным общим подходом к формальному описанию процессов функционирования систем является подход, предложенный Н.П.Бусленко. Этот подход позволяет описывать поведение непрерывных и дискретных, детерминированных и стохастических, т.е. по сравнению с рассмотренными является обобщенным (универсальным) и базируется на понятии агрегируемой системы, представляющей собой формальную схему общего вида, которую принято называть А-схемой.

Анализ существующих средств моделирования показывает, что комплексное решение проблем, возникающих в процессе создания и реализации модели, возможно только в том случае, когда моделирующие системы имеют в своей основе единую формальную математическую схему. Такая схема должна выполнять следующие функции:

- являться адекватным математическим описанием объекта моделирования;
- служить основой для построения алгоритмов и программ, реализующих модель;
- позволять в упрощенном варианте проводить аналитические исследования.

В качестве элемента А-схемы выступает агрегат. Связь между агрегатами (внутри системы S и внешней средой E) осуществляется оператором R . Агрегат может разбиваться на агрегаты следующего уровня.

Любой агрегат характеризуется следующими множествами:

- моментами времени T ;
- входными сигналами X ;
- выходными сигналами Y ;
- состояниями на каждый момент времени $Z(t)$.

Переход агрегата из состояния в состояние происходит за малый интервал времени δt $z(t_2) \neq z(t_1)$. Изменение состояния определяется скачком δz . Агрегат из состояния в состояние переходит в зависимости от собственных (внутренних) параметров $h(t)$ и входных сигналов $x(t)$.

В начальный момент времени агрегат находится в состоянии $z(t_0)=z_0$, которое задается законом $L(z(t_0))$.

Процесс функционирования агрегата в случае воздействия сигнала x_n описывается случайным оператором V . Пусть в момент времени t_n поступил сигнал x_n . Состояние агрегата определится так:

$$Z(t_n+0)=V(t_n, z(t_n), x_n).$$

Если в течение времени (t_n, t_{n+1}) не пришло ни одного входного сигнала, то агрегат может перейти в другое состояние за счет изменения внутреннего состояния в соответствии со случайным оператором U :

$$z(t)=U(t, t_n, z(t_n+0)).$$

Совокупность случайных операторов V и U рассматривается как оператор перехода автомата в новые состояния. При этом процесс функционирования агрегата состоит из скачков состояний δz в моменты поступления новых сигналов x и изменений состояний агрегата между этими моментами. Моменты скачков δz называются особыми состояниями А-схемы. Для описания скачков в особые моменты используется оператор W , представляющий собой частный случай оператора U :

$$z(t_\delta)=W(t_\delta, z(t_\delta)).$$

В множестве состояний агрегата выделяется подмножество $Z^{(Y)}$, которое является подмножеством выдачи выходного сигнала:

$$Y=G(t_\delta, z(t_\delta)).$$

Таким образом, под агрегатом будем понимать объект, определяемый упорядоченной совокупностью рассмотренных множеств T , X , Y , Z , $Z^{(Y)}$, H и случайных операторов V , U , W , G .

Последовательность входных сигналов, расположенных в порядке поступления их на вход А-схемы называют входным сообщением, а последовательных выходных – выходным сообщением.

Существует класс больших систем, которые ввиду их сложности не могут быть формализованы в виде математических схем одиночных агрегатов, поэтому их формализуют некоторой конструкцией из отдельных агрегатов. Для описания системы в целом, необходимо иметь описание как отдельных агрегатов, так и связей между ними.

Для построения формального понятия А-схемы необходимо выбрать способы математического описания взаимодействия между агрегатами. Для этого вводится ряд предположений о закономерностях функционирования А-схем, которые согласуются с опытом исследования реальных сложных систем:

- взаимодействие между А-схемой и внешней средой E , а также между отдельными агрегатами внутри системы осуществляется при передаче сигналов, причем взаимные влияния, имеющие место вне механизма передачи сигналов не учитываются;
- для описания сигнала достаточно некоторого конечного набора характеристик;
- элементарные сигналы мгновенно передаются в А-схеме независимо друг от друга по элементарным каналам;
- ко входному контакту любого элемента А-схемы подключается не более чем один элементарный канал, к выходному контакту – любое конечное число элементарных каналов.

Взаимодействие А-схемы с внешней средой рассматривается как обмен сигналами между внешней средой и элементами А-схемы. В связи с этим внешнюю среду можно представить в виде фиктивного элемента А-схемы.

Таким образом, использование обобщенной типовой математической схемы моделирования А-схемы в принципе не отличается от использования рассмотренных ранее D, F, P, Q-схем. Для частного случая результаты могут быть получены аналитическим методом. В более сложных случаях прибегают к имитационному методу.

Представление объекта моделирования в виде А-схемы может являться тем фундаментом, на котором базируется построение имитационной системы и ее внешнего и внутреннего математического обеспечения. Стандартная форма представления исследуемого объекта в виде А-схемы приводит к унификации не только алгоритмов имитации, но и к возможности применять стандартные методы обработки и анализа результатов моделирования.