1.3 Метод Гомори (метод отсечений) для полностью целочисленных задач

1.3.1. Интуитивное обоснование метода

Отметим ещё одну особенность задач ЦЛП, которая отличает её от соответствующей задачи ЛП. Рассмотрим задачу:

$$c'x \to \max$$
$$Ax = b, \tag{32}$$

$$x_j \text{ -- целое}, \; j \in J, \tag{33}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $rank\ A = m < n, J = \{1, 2, ..., n\}$.

Если мы рассмотрим задачу ЛП (32) , то увидим, что среди оптимальных планов задачи (32) всегда существует базисный план, т. е. план, у которого не более чем \textit{m }компонент, отличных от нуля.

Рассмотрим теперь задачу ЦЛП (32), (33) с *m* основными ограничениями. В общем случае оптимальный план задачи (32), (33) будет содержать более чем *m* компонент, отличных от нуля. Это сразу же наводит на мысль о том, что если мы хотим получить решение целочисленной задачи (32), (33) как решение некоторой «непрерывной» задачи ЛП, то эта «непрерывная» задача должна содержать более чем *m* основных ограничений, т.е. мы должны к задаче (32) добавить еще некоторые основные ограничения.

Необходимость введения новых ограничений в задачу (32) для получения решения задачи (32), (33) можно объяснить и с другой позиции.

Рассмотрим множество допустимых планов X задачи (32) (см. рис. 1.3). Понятно, что множеством допустимых планов X_{in} задачи (32), (33) будут все «целые» точки, принадлежащие X .

Рассмотрим ещё одно множество X_b , называемое *выпуклой оболочкой* точек X_{in} . Согласно определению, X_b -- это **наименьшее выпуклое** множество, содержащее все точки X_{in} (см. рис. 1.3). Справедливы включения

$$X_{in} \subset X_b \subset X \tag{33}$$

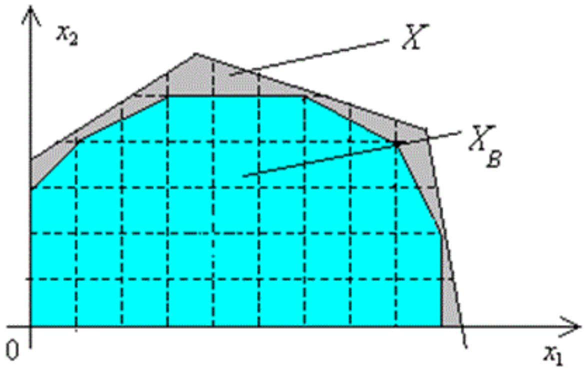

Рис. 1.3

Множество X_b , так же как и множество X , является «непрерывным». Легко видеть, что все угловые точки множества X_b -- целые точки. Отсюда, учитывая свойства симплекс-метода и включения (33), заключаем, что среди решений задачи ЛП

$$c'x \to \max, \ x \in X_b \tag{35}$$

обязательно есть целочисленное решение и это решение будет решением задачи (32), (33).

Мы видим, что множество X_b получилось из X путём «отсечения» лишних кусков, не содержащих целых точек. При этом важно, что мы не отсекли ни одной целой точки!

На рисунке для $\mathbb{R}^2$ построить множество X_b просто. При большом *n* сделать это заранее перед решением задачи невозможно. Кроме того, нам не надо всё «чистое» множество X_b . Нам важно «высечь» только часть этого множества в окрестности оптимальной точки.

На этих идеях отсечений и основан метод Гомори. Суть метода состоит в том, что на каждом шаге метода к ограничениям соответствующей задачи ЛП добавляется новое ограничение - отсекающая плоскость. Эта плоскость (это ограничение) должна обладать следующими свойствами:

1. отсекать имеющееся в наличии нецелочисленное решение задачи ЛП;
2. не отсекать ни одного целочисленного плана исходной задачи ЦЛП;
3. отсечения должны строится таким образом, чтобы обеспечить конечность алгоритма, то есть решение задачи ЦЛП должно строится за конечное число шагов.

1.3.2 Построение отсекающей плоскости

Рассмотрим задачу ЛП вида (32), (33). Предположим, что

1. ограничения задачи (32), (33) совместны;
2. целевая функция ограничена сверху.

Прежде чем описать весь алгоритм, покажем в общем случае, как построить дополнительное ограничение, которому удовлетворяют все **целые** планы задачи (32), (33).

Рассмотрим любое линейное уравнение, которое можно получить из уравнений $Ax = b$ путём алгебраических операций над этими уравнениями. В общем случае такое уравнение можно представить в виде

$$y'Ax = y'b, \tag{36}$$

где $y \in \mathbb{R}^m, \quad y \neq 0,$ -- произвольный вектор.

Очевидно, из условия $Ax = b$ следует справедливость (36).

Обозначим

$$a_j = y'A_j, \; j \in J, \;\; \beta = y'b.$$

Тогда равенство (36) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \beta. \tag{37}$$

Предположим, что хотя бы одно из чисел $a_j, \; j \in J, \beta$ является дробным.

Как и раньше, обозначим через $[d]$ целую часть числа $d; \quad [d]$ --- наибольшее целое, не превосходящее d .

По построению любой вектор x , удовлетворяющий $Ax = b$, должен удовлетворять и (37). Так как все $x_j \geq 0, \; j \in J,$ и $[a_j] \leq a_j, \; j \in J,$ то из (37) следует более слабое условие

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j] \, x_j \leq \beta. \tag{38}$$

Теперь учтём, что по условию все $x_j, \; j \in J,$ -- целые. Отсюда следует, что все целые $x_j, \; j \in J,$ удовлетворяющие (38), должны удовлетворять более сильному, чем (38), неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j] \, x_j \leq [\beta]. \tag{39}$$

Заметим, что в общем случае, без учёта целочисленности, из (38) не следует (39)!

Условие (39) можно переписать в эквивалентной форме

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j]\, x_j + x_* = [\beta],\ x_* \geq 0, x_* \text{ -- целое.} \tag{40}$$

Таким образом, условие (40) есть новое условие, которому удовлетворяют все **целые** планы исходной задачи (32) -- (33).

В алгоритме используется не условие (40), а разность между (40) и (37).

Определим значения f_j и f тождественными

$$[a_j] + f_j \equiv a_j,\ j \in J;\ \ [\beta] + f = \beta,$$

т.е. f_j -- дробная часть числа $a_j,\ j \in J$, а f -- дробная часть числа β .

По построению,

$$0 \leq f_j < 1,\ j \in J,\ \ 0 \leq f < 1.$$

Вычтем из (40) равенство (37), в результате получим

$$\sum_{j=1}^{n} -f_j x_j + x_* = -f,\ x_* \geq 0 \text{ -- целое.} \tag{41}$$

В алгоритме вместо (40) используется отсекающее ограничение (41).

1.3.3 Алгоритм Гомори (общая схема)

Общую схему алгоритма Гомори можно представить в виде последовательности следующих шагов.

Шаг 1. Найти оптимальное решение задачи линейного программирования.

Шаг 2. Если в оптимальном базисе задачи ЛП есть искусственные индексы и размеры задачи ЛП велики, то уменьшаем размеры текущей задачи ЛП: удаляем из задачи ЛП искусственные переменные с базисными индексами и соответствующие им ограничения. В противном случае сразу переходим к шагу 3 без уменьшения размеров задачи ЛП.

Шаг 3. Прекращаем решение задачи ЦЛП, если все неискусственные переменные задачи ЛП целые. В противном случае переходим к шагу 4.

Шаг 4. Сформируем отсекающую плоскость (ограничение). Для этого выберем любую дробную неискусственную переменную (это обязательно базисная переменная!) $x^0_{i_0},\ i_0 \in J^0_B$. Здесь J^0_B --- оптимальный базис текущей задачи ЛП. Положим $y' = e'_k(A^0_B)^{-1}$, где k --- порядковый номер индекса i_0 во множестве J_B .

Сформируем отсекающее ограничение (41), исходя из ограничения (37), построенного по правилам предыдущего пункта.

Шаг 5. Добавляем отсекающее ограничение (41) и новую (целую!) переменную x_* к задаче ЛП и получаем расширенную (новую) задачу ЛП. Переходим к шагу 1.

Опишем перечисленные шаги алгоритма подробнее.

Рассмотрим шаг 1. Пусть в текущей задаче ЛП есть переменные $x_j \geq 0,\ j \in J \bigcup J_u$, и есть $\bar{m} \geq m$ основных ограничений.

По построению $\bar{m} = m + |J_u|$ и каждой искусственной переменной x_{j_*} поставлено в соответствие некоторое основное ограничение текущей задачи ЛП.

Отметим, что это ограничение не входит в число основных ограничений исходной задачи ЛП или ЦЛП, т.е. является дополнительным отсекающим ограничением.

Решим текущую задачу ЛП и обозначим через

$$x_j^0,\ j \in J \bigcup J_u,\ \ J_B^0 \subset J \bigcup J_u,\ |J_B^0| = \bar{m}$$

ее оптимальный базисный план.

Опустим пока подробное описание шага 2, поскольку на первой итерации этот шаг «пропускается» и поэтому его удобнее описывать после описания всех других шагов.

Шаг 3 описан подробно ранее.\textbf{}

Рассмотрим шаг 4. Предположим, что выбран некоторый индекс i_0, такой, что

$i_0 \in J_B^0 \subset J \bigcap J_u,\ x_{i_0}^0 > 0$ -- нецелое.

Положим

$$y' = e_k'(A_b^0)^{-1},\ a_j = y'A_j,\ j \in J \bigcup J_u,\ \ \beta = y'b,$$

где k --- порядковый номер индекса i_0 в базисе J_B^0, A_j --- j -й столбец матрицы условий и b --- вектор правых частей основных ограничений текущей задачи ЛП.

Рассмотрим ограничение

$$\sum_{j \in J \bigcup J_u} a_j x_j = \beta. \tag{42}$$

Так как по построению, в силу специального выбора вектора *y*, имеют место равенства

$$a_{i_0} = 1, a_j = 0, j \in J_B^0 \backslash i_0,$$

то равенство (42) можно представить в виде

(43)

$$x_{i_0}+\sum_{j\in J_{\text{H}}} a_j x_j=\beta,$$

где $J_H=(J\bigcup J_u)\setminus J_B^0$. Так как все $x_j^0=0,\ j\in J_H$, и вектор $x^0=(x_j^0, j\in J\bigcup J_u)$ удовлетворяет (43), то имеем $\beta=x_{i_0}^0>0$ --- нецелое. Отсекающее ограничение (41), построенное по (43), имеет вид

$$\sum_{j\in J_H} -f_j x_j + x_{j_*}=f,\ x_{j_*}\geq 0 \text{ --- целое,} \tag{44}$$

где x_{j_*} --- новая переменная, соответствующая отсекающему ограничению (44), j_* --- наименьший целый индекс, не принадлежащий множеству $J\bigcup J_u$.

Рассмотрим шаг 5.\textbf{ }Ограничение (44) добавляем к основным ограничениям имеющейся задачи ЛП, индекс j_* и соответствующую ему переменную x_{j_*} добавляем к переменным текущей задачи ЛП. При этом произойдут следующие замены:

$$\bar{m}\rightarrow\bar{m}+1;\ \ J\bigcup J_u\rightarrow J\bigcup \bar{J}_u,\ \bar{J}_u=J_u\bigcup j_*.$$

Покажем, что добавляемое новое ограничение (44) является «отсекающим», т.е. оно отсекает нецелочисленное оптимальное решение «старой» задачи ЛП. Действительно, на оптимальном плане x^0 «старой» задачи ЛП имеют место соотношения: $x_j^0=0,\ j\in J_H,$ и по построению, $0\leq f<1.$ Следовательно, для выполнения ограничения (44) надо положить $x_{j_*}^0=-f<0.$ Однако это противоречит условию $x_{j_*}^0\geq 0.$

Таким образом, мы видим, что оптимальный план «старой» задачи ЛП не удовлетворяет ограничению (44) и, следовательно, не является планом новой задачи ЛП. В этой ситуации новую задачу ЛП разумно решать двойственным симплекс-методом [2, 8], начиная процесс вычисления с оптимального двойственного базисного плана старой задачи ЛП.

Отметим, что если оказалось, что $f_j=0, j\in J_H,$ то прекращаем решение исходной задачи, т.к. у нее нет допустимых (целочисленных) планов

Рассмотрим шаг 2. Для того чтобы размеры задачи ЛП не росли неограниченно, поступаем следующим образом. Если $J_B^0\bigcap J_u\neq\emptyset,$ то перед тем, как построить новое отсекающее ограничение, выбросим отсекающее ограничение, породившее искусственную переменную $x_{j_*},\ j_*\in J_B^0\bigcap J_u$.

Исключим из задачи ЛП искусственную переменную x_{j_*} , подставив вместо неё в другие отсекающие ограничения, содержащие переменную x_{j_*} , её выражение через другие переменные, найденное из «выбрасываемого» отсекающего ограничения.

Дополнительное ограничение, соответствующее x_{j_*} , можно выбросить, так как вхождение искусственной переменной x_{j_*} в оптимальный базис означает, что это ограничение пассивно. Используя эту процедуру выбрасывания лишних ограничений, всегда можно добиться того, что в решаемой задаче ЛП будет не более чем *n* основных ограничений.

Замечание. В алгоритме сказано, что для построения отсекающей плоскости можно выбирать любую дробную неискусственную переменную. Для ускорения процесса решения задачи обычно рекомендуют следующее правило такой компоненты:

А) для построения отсекающей плоскости следует выбирать переменную с максимально дробной частью.

Действительно, при таком выборе отсекающая плоскость, как правило, отсекает «больший кусок» от множества допустимых планов текущей задачи ЛП. Однако при использовании этого правила совместно с процедурой сокращения размеров задачи, нельзя гарантировать конечность алгоритма. Для обеспечения конечности (теоретической) алгоритма необходимо использовать следующее правило:

Б) для построения отсекающей плоскости нужно выбрать дробную неискусственную переменную с наименьшим индексом j.

Теоретически доказано, что если целевая функция ограничена на множестве планов и используется правило Б), то описанный алгоритм решает задачу за конечное число итераций.

В процессе решения задачи можно комбинировать правила А) и Б) следующим образом: Использовать правило А), если на текущей итерации оптимальное значение целевой текущей задачи ЛП не равно оптимальному значению целевой функции задачи ЛП на предыдущей итерации. В противном случае надо использовать правило Б).

Пример. Рассмотрим задачу

$$21x_1 + 11x_2 \to \max, \tag{45}$$

$$7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13,\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}, \tag{46}$$

$$x_j \text{ -- целое}, \ j = \overline{1,3}\,. \tag{47}$$

Решим данную задачу методом Гомори. Алгоритм опишем по итерациям.

Итерация 1. Решим задачу ЛП (45), (46) симплекс-методом [2, 9]. В результате получим оптимальный базисный план

$$x_1^0 = \frac{13}{7}, x_2^0 = x_3^0 = 0, J_B^0 = \{1\}.$$

Базисная матрица $A_B = (A_j, j \in J_B^0)$ и обратная к ней матрица A_B^{-1} имеют вид

$$A_B = 7, A_B^{-1} = \frac{1}{7}.$$

Выберем $i_0 = 1$, подсчитаем вектор $y' = e_1' A_B^{-1} = \frac{1}{7}$ и получим ограничение вида (37)

$$x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 = 1\frac{6}{7}.$$

По последнему ограничению построим отсекающее ограничение вида (41)

$$-\frac{4}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_3 + x_4 = -\frac{6}{7}, x_4 \geq 0. \tag{48}$$

Добавим ограничение (48) к задаче (45), (46) и перейдем к следующей итерации.

Итерация 2. Решим задачу ЛП (45), (46), (48). Она имеет решение:

$$x_1^0 = 1, x_2^0 = 1\frac{1}{2}, x_3^0 = 0, x_4^0 = 0, J_B^0 = \{1, 2\}.$$

Базисная матрица $A_B = (A_j, j \in J_B^0)$ и обратная к ней матрица A_B^{-1} имеют вид

$$A_B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}, A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 1 \\ 0 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

Выберем $i_0 = 2$, положим $y' = (0, 1)A_B^{-1} = (0, -\frac{7}{4})$.

Используя найденный вектор *y*, построим ограничение вида

$$\sum_{j \in J_H} a_j x_j = \beta, \tag{49}$$

где $a_j = y' A_j,\ \beta = y' b$.

На данной итерации матрица условий A и вектор правых частей b текущей задачи ЛП имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 13 \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ 3a_3 = 1/4,\ a_4 = -7/4,\ \beta = 3/2$ и ограничение (49)принимает вид $x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 = 3/2$.

По этому ограничению сформируем отсекающее ограничение вида (41)

(50)

$$-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4+x_5=-\frac{1}{2}, x_5\geq 0.$$

Добавим ограничение (50) к задаче (45), (46), (48) и перейдем к следующей итерации.

Итерация 3. Решим задачи ЛП (45), (46), (48)}, (50) симплекс-методом. В результате будет найдено ее решение

$$x_1^0=0, x_2^0=3, x_3^0=1, x_4^0=1, x_5^0=0, J_B^0=\{2,3,4\}.$$

Это решение является целочисленным. Следовательно, оно является решением исходной задачи ЦЛП (45) -- (47).

Отметим, что если бы последнее решение было нецелочисленным, то на следующей итерации перед началом формирования нового отсекающего ограничения мы удалили бы из последней задачи ЛП (т.е. из задачи (45) (46), (48), (50)) ограничение (48), «породившее» искусственную переменную x_4 , которая вошла в оптимальный базис, а в остальные ограничения (например, в (50) подставили бы вместо переменной x_4 ее выражение через другие переменные, найденное из (48), т. е. в (50) вместо x_4 подставили бы

$$x_4=\frac{4}{7}x_2+\frac{1}{7}x_3--\frac{6}{7}.$$

В результате ограничение (50) приняло бы вид

$$-\frac{1}{7}x_2-\frac{2}{7}x_3=-\frac{5}{7}\text{ или } x_2+2x_3=5.$$