Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Calculo Diferencial e Integral-LSI

GUÍAS DE TRABAJOS PRÁCTICOS

Docentes

- Profesor Adjunto: Mgtr. Garau, Cesar
- Auxiliares de Docencia
  - Dr. Espinoza, Fabian
  - Prof. Gómez, Ana
  - Lic. Mariño, Teresa
  - Lic. Navarro, Micaela

2025

Índice general

Trabajo Práctico N◦ 1 - Funciones. Límites. Continuidad

1) En cada caso:

a) $|2x-5|<1$

b) $\left|-\frac{1}{2}x+1\right|\geq 3$

c) $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|<1$

d) $D=\{x\in R/3x^2-3x-6\leq 0\}$

I. Determinar el subconjunto de números reales, que verifiquen cada una de las desigualdades y representar en la recta real.
II. Hallar, en caso de ser posible, la amplitud del intervalo, cotas, extremos, elementos
III. Analizar si dicho intervalo es o no un entorno. En caso afirmativo, expresarlo como tal.

2) Dadas las siguientes funciones:

$f_1: D_1\subseteq R\rightarrow R/f_1(x)=-\frac{3}{2}x+2$ si $x>0$

$f_2: D_2\subseteq R\rightarrow R/f_2(x)=x^2-2x-3$

$f_3: D_3\subseteq R\rightarrow R/f_3(x)=-x^3+1$ si $x>0$

$f_4: D_4\subseteq R\rightarrow R/f_4(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$f_5: D_5\subseteq R\rightarrow R/f_5(x)=\frac{2x-3}{3x+2}$

$f_6: D_6\subseteq R\rightarrow R/f_6(x)=\sqrt{x-2}$ $,\forall x\geq 2$

$$f_7: D_7\subseteq R\rightarrow R/f_7(x)=\begin{cases}-x+2 & si \quad x<0\\ -x^2+4x & si \quad 0<x\leq 2\\ 2x-4 & si \quad x>2\end{cases}$$

a) Representar gráficamente.
b) Determinar el dominio, imagen e intersección con los ejes coordenados.

3) Calcular los límites de las siguientes funciones, salvando las indeterminaciones en los casos que fuera posible.

a) $\lim_{x\to 4}\frac{x+1}{3x-5}=$

b) $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}=$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-16x}{x^2+4x}=$

d) $\lim_{x\to -2}\frac{2x^5+3x^4+5x+26}{4x^3+8x^2+6x+12}=$

e) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 6x}{2x}=$

g) $\lim_{x\to 1}\frac{tg\ (x)}{x}=$

h) $\lim_{x\to \infty}\frac{4x^4-2x^2+10}{2x^3+3x^2-5x}=$

i) $\lim_{x\to \infty}\frac{x}{(x^3-10)^{\frac{1}{3}}}=$

j) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{20}{x^2-4}-\frac{5}{x-2}\right)=$

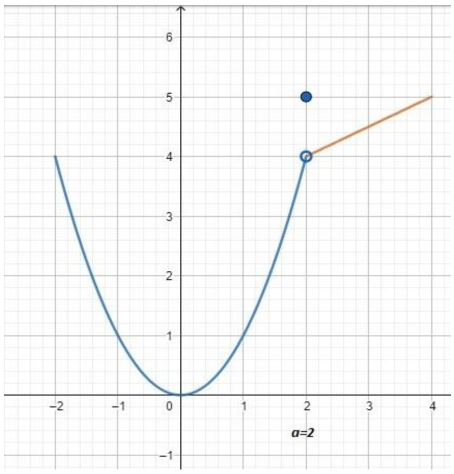
k) $\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=$

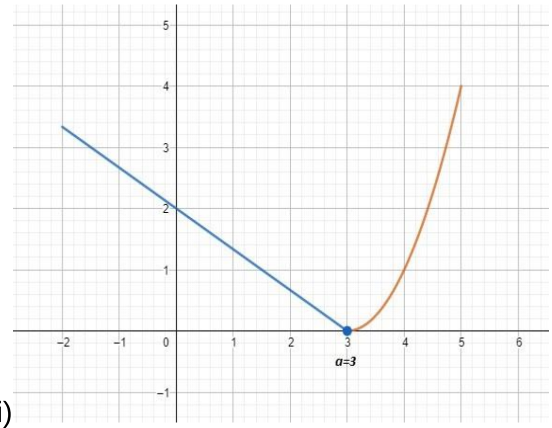
l) $\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^{2x+8}=$

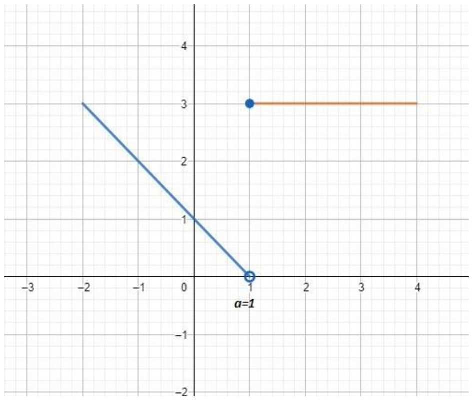
m) $\lim_{x\to 2}\frac{x+\sqrt[3]{x+6}-1}{3x-5}$

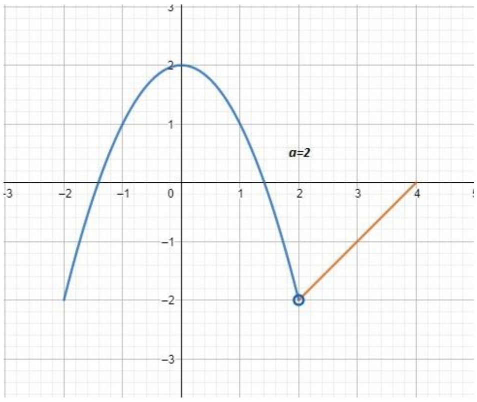
n) $\lim_{x\to 1}\frac{tg\ (x^2-1)}{x-1}=$

4) En los gráficos propuestos determinar:
a) El valor de la función en el punto $x=a$.
b) El $\lim_{x\to a} f(x)$, en el caso que exista.
c) La continuidad de cada función en los puntos correspondiente. En caso de ser discontinua, justificar y clasificar.

i)


ii)


iii)


iv)


5) Analizar la continuidad de la siguiente función en $x = 0$ y $x = 2$.
Clasificar en caso de ser discontinua y graficar.

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - x & si \quad x > 2 \end{cases}$$

6) Determinar los valores de c y d para que la siguiente función sea continua en $x = -1$ y $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 4x & si \quad x \leq -1 \\ cx + d & si \quad -1 < x < 2 \\ 5x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicios complementarios

1) En cada caso:

a) $|x + 2| \leq 2$

b) $|2 - x| \geq 3$

c) $x^2 < 1$

d) $D = \{x \in R / x^2 - x - 6 \geq 0\}$

i) Determinar el subconjunto de números reales, que verifiquen cada una de las siguientes desigualdades y representar en la recta real.
ii) Hallar, en caso de ser posible, la amplitud del intervalo, cotas, extremos, elementos máximo y mínimo.
iii) Analizar si dicho intervalo es o no un entorno. En caso afirmativo, expresarlo como tal.

2) Dadas las siguientes funciones:

$f_1: D_1 \subseteq R \to R / f_1(x) = -\frac{2}{3}x - 1$

$f_2: D_2 \subseteq R \to R / f_2(x) = -2x^2 + 8x + 1$

$f_3: D_3 \subseteq R \to R / f_3(x) = x^3 - 2$

$f_4: D_4 \subseteq R \to R / f_4(x) = \frac{3x+2}{x-1}$

$$f_5: D_5 \subseteq R \to R / f_5(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 3 \\ -2^2 + 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f_6: D_6 \subseteq R \to R / f_6(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x \leq 1 \\ 2 & si \quad 1 < x < 3 \\ x^2 - 3x & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente.

b) Determinar el dominio, imagen e intersección con los ejes coordenados.

3) Verificar los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1} = 8$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{1}{2}$

4) Calcular los límites de las siguientes funciones, salvando las indeterminaciones en los casos que sea necesario.

a) $\lim\limits_{x \to 1} 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x^2-8x}{4x} =$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} =$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} =$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{sen^2(x^2-9)}{x-3} =$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3+6x^2+3x-2}{2x^3+3x-2} =$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3+3}{\sqrt{16x^2+3}} =$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x}\right) =$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{3x} =$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{4x+1} =$

5) Analizar la continuidad de las siguientes funciones, graficando previamente. Clasificar las discontinuidades en los casos en que se presenten.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < -1 \\ x^2 & si \quad -1 \leq x \leq 3 \\ 2x + 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x < -1 \\ x & si \quad -1 < x < 1 \\ 1 - x & si \quad x \geq 3 \end{cases}$

Trabajo Práctico N◦ 2 - La Derivada y sus Aplicaciones

1) Sabiendo que la función $f(x) = x^2 + 2x$ es continua.

a) Construir su gráfica.
b) Calcular el incremento Δy de la función f cuando $x_0 = 1$ y $\Delta x = 0{,}5$.
c) Calcular el cociente incremental correspondiente para $x_0 = 1$ y $x_0 + \Delta x = 1{,}5$.
d) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. ¿Qué se obtiene?
e) Calcular la derivada de la función f en $x_0 = 1$.

2) Determinar las derivadas de cada una de las siguientes funciones, en los puntos indicados, utilizando la definición.

a) $f(x) = x^2 - 2x$, en $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = -1$.
b) $g(x) = \frac{1}{x}$, en $x_0 = 1$, $x_1 = -2$.
c) $h(x) = \sqrt{x}$, en $x_0 = 0$, $x_1 = 2$.

3) Utilizando las fórmulas de derivación, calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$a(x) = 7x^3 - 2x + 5x + 1$ $\qquad$ $l(x) = cos^4 x$
$b(x) = \frac{2}{x^3}$ $\qquad$ $m(x) = cotgx$
$c(x) = 7x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-2} + ex + 1$ $\qquad$ $n(x) = x.senx + \sqrt[3]{x^2}$
$d(x) = x^4.2^x$ $\qquad$ $o(x) = 3sen\,(5x^2 + 1)$
$e(x) = \frac{x^3-2}{x+1}$ $\qquad$ $p(x) = sen^2 x^3$
$f(x) = 7e^x - 2^x$ $\qquad$ $q(x) = sen\,(\cos x)$
$g(x) = (x^2 - x)^4$ $\qquad$ $r(x) = tg^2 x$
$h(x) = \sqrt{4x^3 - 3x^2 + 4x + 1}$ $\qquad$ $s(x) = 2^{tgx}$
$i(x) = 3^{2x+1}$ $\qquad$ $t(x) = ln^2(x^2 + 2)$
$j(x) = \ln x^3$ $\qquad$ $u(x) = arcsen\sqrt{x}$
$k(x) = sen\,x$ $\qquad$ $v(x) = \arccos\,(1 + x^3)$

4)

a) Sea $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 0$.
b) Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de ecuación $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, que son paralelas a la recta de ecuación $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.
c) Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, en el punto de abscisa $x = 1$.

5) Calcular las derivadas de las siguientes funciones, aplicando la derivación logarítmica.

$f(x) = x^x$ $\qquad$ $h(x) = x^{\sqrt{x}}$
$g(x) = (sen\,x)^{sen\,x}$ $\qquad$ $i(x) = (\ln x)^x$

6) Dadas las siguientes funciones.

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ $\qquad$ $h(x) = x^3(x + 2)^2$
$g(x) = x^4 - 2x^2$ $\qquad$ $i(x) = sen\,2x,$ en $[0,2\pi]$

Determinar:
a) Máximos y mínimos relativos
b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad positiva y negativa.
d) Construir un gráfico y representar todo lo obtenido en los puntos anteriores.

7)
a) Determinar a y b para que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto $(3, -1)$.
b) Determinar a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo local en el punto $(-1{,}3)$y un punto de inflexión en $(0{,}1)$.

8) Verificar los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$
b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-sen\, x}{x^3} = \frac{1}{6}$
c) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+\ln x}{x.\ln x} = 0$
d) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$
e) $\lim_{x\to 0} (\ln x\, .\, tgx) = 0$
f) $\lim_{x\to 0} x^x = 0$
g) $\lim_{x\to \infty} \frac{ln\, x}{x^4} = 0$
h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x^{\cos x} = 1$
i) $\lim_{x\to \infty} [(x - sen\, x) \ln x] = 0$
j) $\lim_{x\to 0} (secx.\, cosec\, x - cosex) = 0$

9) Hallar el diferencial de:
a) $f(x) = x^3 - 2x$
b) $f(x) = \ln(x + 1)$

10) Hallar dos números cuya suma sea 20 sabiendo que el producto es máximo.

11) Eficiencia laboral: Un estudio sobre la eficiencia de los trabajadores del turno matutino de una fábrica indica que el número N de artículos ensamblados por un trabajador promedio está dada por la relación $N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15$ siendo t el tiempo transcurrido desde el inicio del turno (8 a 13 horas). Se pide hallar:
¿A qué hora de la mañana la tasa de producción del trabajador (eficiencia) es máxima?
¿A qué hora es la mínima?
Graficar la curva de producción $N(t)$ para $0 \leq t \leq 5$.

Ejercicios Complementarios

1) Dada la función $f(x) = x^2 + 4x + 3$,
a) Hallar el cociente incremental (razón o tasa de cambio promedio) de la función.
b) Calcular la tasa de cambio promedio en $x = 3$ y $\Delta x = 0{,}3$ e interpretar el resultado.
c) Hallar e interpretar la derivada o razón de cambio instantánea de la función aplicando la definición.
d) Calcular el valor de la derivada en $x = 3$. Intepretar el resultado.
e) Calcular el valor del ángulo que determina la recta tangente a la curva con el semieje positivo de las abscisas.
f) Representar la función y destacar en el gráfico los incrementos en el punto x = 3.

2) Derivar las siguientes funciones.

a) $f(x) = 4x^5 - 2x^4 + 5x - 3$
b) $f(x) = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$
e) $f(x) = \sqrt[5]{7 - 8x^2}$
f) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt[2]{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{7}{2}} + \frac{11}{\sqrt[3]{x}}$

d) $f(x) = \frac{6-2x}{4x^2-3x}$

g) $f(x) = ln^{\,3}(x^2+1)$

h) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ln(x+2)$

3) Calcular las derivadas sucesivas de las siguientes funciones hasta el orden indicado.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 1$ hasta $n = 5$

a) $f(x) = sen\ (17x)$ hasta $n = 3$

4) Considerando la función del ejercicio 1).

a) Calcular su diferencial.

b) Comparar Δy y dy en $x = 3$ y $\Delta x = 0{,}4$.

c) Representar en la gráfica el dy.

4)

a) Sea $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de ecuación $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, que son paralelas a la recta de ecuación $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

c) Determinar la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, en el punto de abscisa $x = 2$.

Trabajo Práctico N° 3 - Integrales Indefinidas

1) Calcular las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int x^4\, dx$

b) $\int \frac{1}{x^3} dx$

c) $\int 5x^6\, dx$

d) $\int \frac{4}{x^4} dx$

e) $\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}} dx$

g) $\int \frac{1}{x} dx$

h) $\int \frac{3}{4} sen\, x\, dx$

i) $\int 2sec^2 x\, dx$

2) Calcular las siguientes integrales por descomposición:

a) $\int \left(3 - 2x^2 + \frac{2}{x^4}\right) dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x} + 2e^x - \frac{3}{x^2}\right) dx$

c) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right) dx$

d) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x}+7}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

3) Calcular las siguientes integrales por sustitución:

a) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$

b) $\int e^{-3x}\, dx$

c) $\int sen^3 x. \cos x\, dx$

d) $\int \frac{sen\, x}{1-\cos x} dx$

e) $\int \cos(5x)\, dx$

f) $\int \frac{dx}{5x-3}$

g) $\int \frac{ln^4 x}{x} dx$

h) $\int \frac{2e^x}{6e^x+7} dx$

i) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$

j) $\int \frac{sen\, x}{cos^3 x} dx$

k) $\int tg(4x)\, dx$

4) Calcular las siguientes integrales por partes:

a) $\int xe^{3x}\, dx$

b) $\int xcos\, x\, dx$

c) $\int x^2 \ln x\, dx$

d) $\int x^2 sen\, x\, dx$

5) Para cada caso, determinar la ecuación de la curva que pasa por el punto de coordenadas que se indica, si la pendiente de la recta tangente a la misma en dicho punto está dada por:

a) $f'(x) = x^3 + 4$ en $(0,1)$

b) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$ en $\left(1, \frac{3}{4}\right)$

c) $f'(x) = 2sen\, x + e^x$ en $(0,0)$

6) Calcular las siguientes integrales de funciones trigonométricas

a) $\int sen^3 x\, dx$ b) $\int cos^2 x\, dx$ c) $\int sen^2 x\, dx$

Ejercicios complementarios

Resolver las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1++3x+7x^2-2x^3}{x^2} dx$

b) $\int \frac{(2t+1)^2}{3t} dt$

i) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

l) $\int \frac{x}{e^{2x}} dx$

c) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

d) $\int x\sqrt{3x^2+4}\,dx$

e) $\int te^{t^2}\,dt$

f) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}}\,dx$

g) $\int \left(\sqrt{2}y+1\right)^2\,dy$

h) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

j) $\int (x^2+5)\ln x\,dx$

m) $\int (2x+1)e^{3x}\,dx$

n) $\int e^{2x}\cos x\,dx$

ñ) $\int sen^4\,x\,dx$

o) $\int cos^4\,x\,dx$

p) $\int tg^3\,x\,dx$

k) $\int xe^{-x}\,dx$

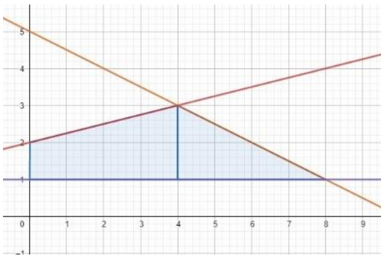
q) $\int \frac{dx}{x^2-16}$

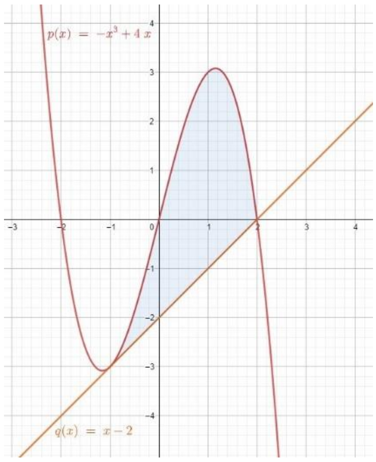
Trabajo Práctico N◦ 4 - La Integral Definida. Aplicaciones

1) Las rectas $y_1 = 2x$, $y_2 = -\frac{3}{2}x + 7$ e $y_3 = \frac{1}{4}x$, determinan un triángulo.
a) Representar gráficamente y hallar los vértices del triángulo.
b) Hallar el área del triángulo.

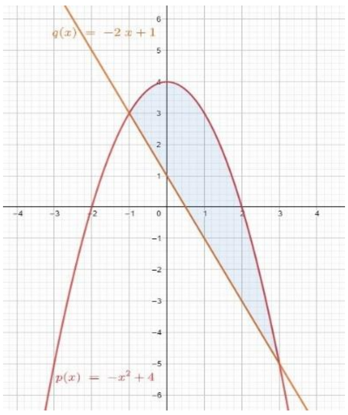
2) Calcular el área limitada por cada una de las siguientes curvas y el eje de las abscisas.
a) $y = x^2 - 4$ b) $y = -x^2 + 1$

3) Calcular el área sombreada en cada caso.

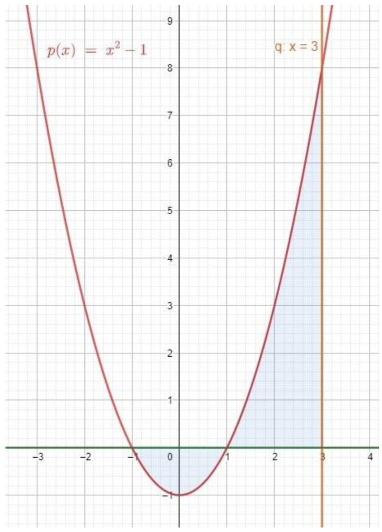

a)



c)



b)



d)

4) Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones f y g en cada caso.
a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$
b) $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 3 - \frac{5}{4}x$
d) $f(x) = x^2 - x$ y $g(x)$ es una recta que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(-3,-6)$

5) Hallar la longitud del arco de curva de $y = \sqrt{x^3}$
a) En el intervalo $[0,5]$
b) Del punto $(1,1)$ al punto $(4,8)$

6) a) Determinar el volumen del cuerpo engendrado por la curva que se indica en cada caso, cuando giran alrededor del eje coordenado considerado.
i) $f(x) = x^2 + 3$, entre $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$, con respecto al eje x.

ii) $f(x) = 4x^2$, entre $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$, con respecto al eje y.

b) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = 8x$, alrededor del eje x.

7) De ser posible, hallar las siguientes integrales impropias.

a) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ b) $\int_{-\infty}^{1} xe^{-x^2}\,dx$

8) Un compilador es un software que convierte un código de alto nivel (C + + por ejemplo) a uno de más bajo nivel (Assembler). Cierto compilador realiza dicha transformación a una velocidad dada por la expresión $V(t) = 10t\sqrt[3]{2-t^2}$, donde $V(t)$es la velocidad de conversión dada en líneas por segundo y t es el tiempo. Calcular la cantidad de líneas transformadas al cabo de un segundo para dicho compilador si en $t = 0$ tenemos 0 líneas transformadas

Ejercicios complementarios

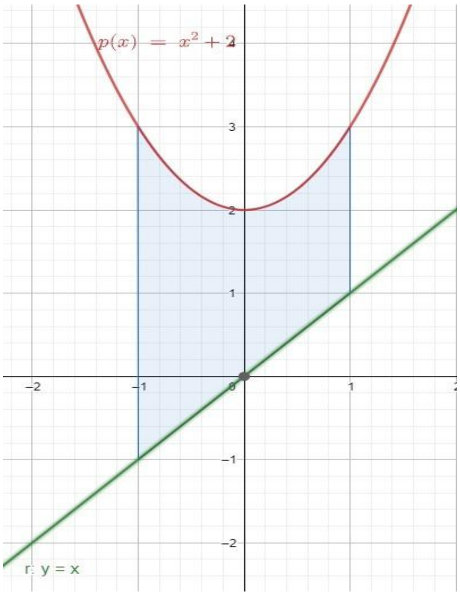
1) Calcular el área limitada por las curvas:

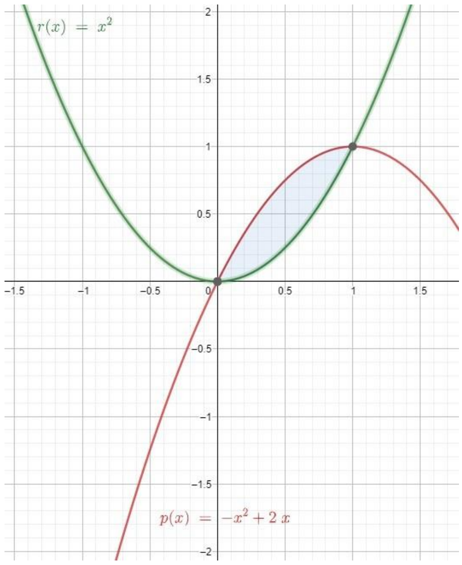
a) $f(x) = 4 - x^2$ y el eje x.

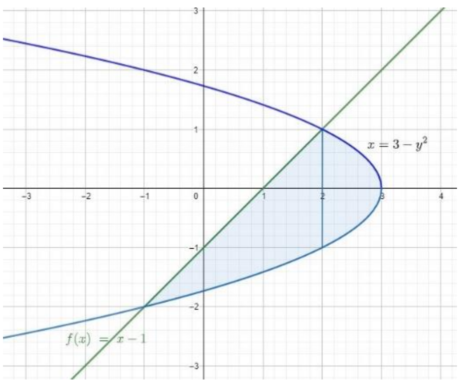
b) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$.

c) $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

2) Calcular, en cada caso, el área sombreada.

a) 

b) 

c) 

Trabajo Práctico N◦ 5 - Funciones de Varias Variables

1) Determinar el dominio $D \subset R^2$ de las siguientes funciones $z = f(x, y)$ y representar gráficamente.

a) $z = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$ c) $z = \ln(x + y)$ e) $z = \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$

b) $z = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$ d) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$

2) Determinar dos curvas de nivel de cada una de las siguientes funciones.

a) $z = x^2 + y^2$ b) $z = \sqrt{xy}$

3) Utilizando un graficador realizar las siguientes representaciones.

a) Representar gráficamente en el espacio tridimensional.

i) $x - y = 0$ ii) $y + z = 1$ iii) $2x + 3y + z = 1$

b) Representar gráficamente en el espacio tridimensional las superficies dadas por las siguientes ecuaciones.

i) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 0$ iv) $2x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$

ii) $y^2 + z^2 = 4x$ v) $x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 1$

iii) $x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 1$ vi) $z = x^2 - y^2$

c) Utilizando un graficador determinar dos superficies de nivel de cada una de las siguientes funciones (a cargo del alumno).

i) $U = x^2 + y^2 - z^2$ ii) $U = x + y + z$

3) Verificar, utilizando las propiedades de los límites.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x^4 + 2xy^2 - 1 = 8$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \frac{2xy}{3x+y} = \frac{3}{4}$

4) Dadas las siguientes funciones, calcular el límite doble y los iterados, si existen, en los puntos que se indican en cada caso.

a) $f(x, y) = \frac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ c) $f(x, y) = \frac{2x-6y+14}{7x-5y-29}$ en $(2, -3)$

b) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 6$ en $(-1,1)$ d) $f(x, y) = \frac{xy-1}{x^3-y^2}$ en $(1,1)$

5) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indica. Si es discontinua, clasificar el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} 3xy & si \quad (x, y) \neq (1,2) \\ 0 & si \quad (x, y) = (1,2) \end{cases}$ en $(1,2)$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 2 & si \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$

Ejercicios complementarios

1) Determinar e identificar las curvas de nivel correspondientes a las siguientes funciones, representar al menos dos curvas en cada caso.

a) $z = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - 1$

b) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2-2y}}$

c) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$

d) $z = \frac{y}{x^2+3}$

e) $U = 3x + 2y - 1$

f) $U = \frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} - 5$

2) Estudiar la continuidad de cada una de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = \begin{cases} 6 & si \quad (x,y) = (1,2) \\ 3x^2y^2 + 2x + y - 1 & si \quad (x,y) \neq (1,2) \wedge (x,y) \neq (0,2) \\ 1 & si \quad (x,y) = (0,2) \end{cases}$ en $(1,2)$ y $(0,2)$

b) $f(x) = \begin{cases} 3xyz - 2xy + xz^2 - 2 & si \quad (x,y,z) \neq (1,0,2) \\ 3 & si \quad (x,y,z) = (1,0,2) \end{cases}$ en $(1,0,2)$

Trabajo Práctico N◦ 6 - Derivadas Parciales

1) Calcular aplicando la definición, las derivadas parciales de:

a) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ en $(1{,}2)$ b) $f(x,y) = 2x^3y - 3xy + 5$ en $(1{,}1)$

2) Determinar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = 2x^4y + 3xy^2 + 10$

b) $f(x,y) = \sqrt{5x - y^2}$

c) $f(x,y) = x.e^{xy}$

d) $f(x,y) = cos^3[sen\,(x + y^2 - 2)]$

e) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2 + z^2) + \ln(\sqrt{xy})$

f) $f(x,y) = z^2.sen^3(x^3 + y^2)$

3) Determinar las derivadas parciales que se indican:

a) $f_{xy}(x,y)$ si $f(x,y) = x.\cos y + y.\cos x$

b) $f_{yz}(x,y,z)$ si $f(x,y,z) = e^{xyz}$

c) $f_{yx}(1{,}1)$ si $f(x,y) = x^2arctg(xy)$

4) a) Calcular $df(1{,}1)$ si $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$

b) Hallar una aproximación lineal de la función $f(x,y) = \ln(x - 3y)$ en $(7{,}2)$ y $f(6{,}9\,;2{,}06)$.

5) Utilizando la regla de la cadena, determinar:

a) $\frac{dU}{dt}$, siendo $U = f(x,y) = x^3 - 2xy$, siendo $x = \frac{3}{t}$, $y = t^2 - 1$.

b) $\frac{dU}{dt}$, siendo $U = f(x,y) = e^{3x+2y}$, siendo $x = \cos t$, $y = t^2$.

6) Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $z = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1$

b) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

c) $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

d) $z = x^3 + y^3 + \frac{48}{x} + \frac{48}{y}$

e) $z = x^3 + y^2 - 3x$

f) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 2$

g) $z = 5 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3}$

h) $z = 3x^2 + xy$

i) $z = \frac{4x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - 6x^2 + y^2 + 9x + y - 2$

7) Determinar:

a) y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

b) $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $xyz = \cos(x + y + z)$

8) La altura de un cono es $h = 30cm$, el radio de su base es $r = 10cm$. ¿Cómo varia, aproximadamente, el volumen de dicho cono si h aumenta en $3mm$ y r disminuye $1mm$? (Volumen del cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

9) Un agricultor planta soja y maíz. Se sabe que el beneficio de la producción está dado por $B(x) = 1600x + 2400y - 2x^2 - 4y^2 - 4x$, donde x e y son las cantidades de hectáreas plantadas de soja y maíz respectivamente. Hallar cuántas hectáreas conviene plantar con cada cultivo para maximizar el beneficio.

Ejercicios complementarios

1) Aproximar lineal de la función $\sqrt{(3{,}02)^2+(1{,}97)^2+(5{,}99)^2}$ usando diferenciales.

2) Utilizando la regla de la cadena, determinar las derivadas que se indican:

a) $\frac{dU}{dt}$, siendo $U=f(x,y)=e^x sen\, y$, siendo $x=st^2$, $y=ts^2$.

b) $\frac{\partial w}{\partial s},\frac{\partial w}{\partial t}$, siendo $w=x^2+y^2+z^2$, siendo $x=st$, $y=s.\cos x$ y $z=s.sen\, t$

c) $\frac{\partial z}{\partial t},\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$, siendo $z=y^2tg\, x$, siendo $x=t^2uv$, $y=u+tv^2$ cuando $t=2,u=1,v=0$

Trabajo Práctico N◦ 7 - Integrales Paramétricas y Múltiples

1) Resolver las siguientes integrales paramétricas:

a) $\int_1^2 \frac{x}{y} dx =$

b) $\int_{-1}^{2} (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy =$

c) $\int_0^x (2x - y)\, dy =$

d) $\int_1^{2y} (2xy)\, dy =$

e) $\int_y^{\frac{\pi}{2}} (sen\, x. \cos y)\, dx =$

2) Calcular las siguientes integrales iteradas:

a) $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\, dxdy =$

b) $\int_{-1}^1 \int_{-2}^2 (x^2 - y^2)\, dydx =$

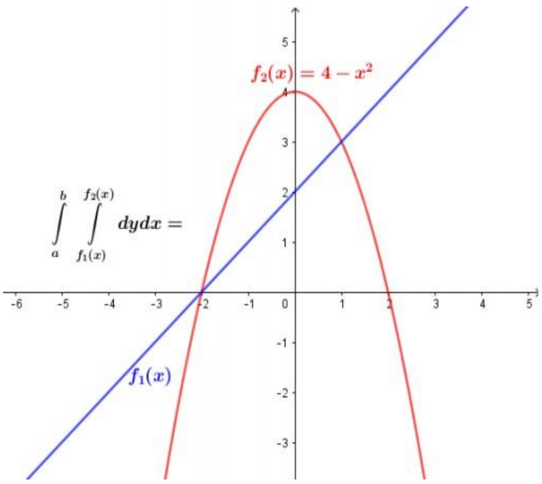
c) $\int_0^2 \int_0^1 (xy)\, dxdy =$

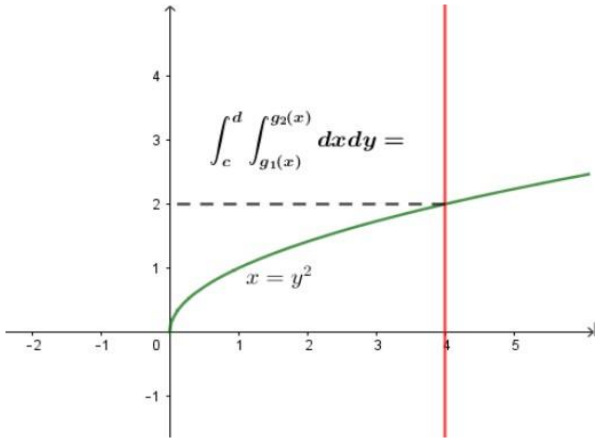
d) $\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2 + 1)\, dxdy =$

e) $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z)\, dxdydz =$

f) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2y^2z^2)\, dxdydz =$

3) Calcular el área que corresponde a cada una de las siguientes integrales. Dibujar las gráficas de las funciones en los casos en que corresponda.

a) 

b) 

4) A un Licenciado en Sistemas se le encarga construir, en un depósito de una empresa, una central de procesamiento de datos. Para ello necesita saber el área disponible para así poder ubicar las distintas computadoras. El arquitecto le informa que la región que puede utilizar esta limitada por las curvas $f_1(x)$ y $f_2(x)$ medida en metros. ¿Cuál será el área que puede utilizar el Licenciado?

$$f_1(x) = 1 - x \quad \text{y} \quad f_2(x) = 3 - x^2$$

Trabajo Práctico N◦ 8 - Ecuaciones Diferenciales

1) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^3dx + (y + 1)^2dy = 0$

b) $x^2(y + 1)dx + y^2(x - 1)dy = 0$

c) $4xdy - ydx = x^2dy$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{1+x}$

e) $\frac{ds}{dx} = e^{3x+2s}$

f) $e^xy\frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

g) $y' = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

h) $\frac{ds}{dr} = ks$

2) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a la condición inicial que se indica.

a) $(1 + x^4)dy + x(1 + 4y^2)dx = 0$, $y(1) = 0$

b) $(1 + e^{-y})sen\,x\,dx = (1 + \cos x)dy$, $y(0) = 0$

c) $y' + ty = y$, $y(1) = 3$

d) $x' = 7(x^2 + 1)$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

3) Resolver las siguientes ecuaciones, utilizando una sustitución adecuada.

a) $(x - y)dx + xdy = 0$

b) $(x + y)dx + xdy = 0$

c) $(y^2yx)dx + x^2dy = 0$

d) $y' = \frac{y-x}{y+x}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

4) Determinar si la ecuación dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

a) $(2x + 4)dx + (3y - 1)dy = 0$

b) $(sen\,y - ysen\,x)dx + (\cos x + xcos\,y)dy = 0$

c) $(x^3 + y^3)dx + 3xy^3dy = 0$

d) $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

5) Determinar el valor de k de modo que la ecuación dada, sea exacta.

a) $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$

a) $(2x - ysen\,xy + ky^4)dx - (20xy^3 + xsen\,xy)dy = 0$

6) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, sujetas a las condiciones iniciales correspondientes.

a) $y' + 5y = 20$, $y(0) = 2$

b) $\frac{dy}{dx} = 2y + x(e^{3x} - e^{2x})$, $y(0) = 2$

c) $\frac{dQ}{dx} = 5x^4Q$, $Q(0) = -7$

Trabajo Práctico N◦ 9 - Sucesiones y Series

1) Considerar las siguientes secuencias de números:

a) Triangulares: $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

b) Cuadrados: $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

c) Primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$

d) De Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

¿Se podría programar una función que calcule el enésimo término, asumiendo que siempre se cumple la ley de formación de estos primeros elementos? En caso afirmativo, explicítela.

2) Dos ciclistas se preparan para una competencia. Pablo comienza recorriendo 1.000 metros y todos los días agrega 1.000 metros más, en tanto que Emilio empieza con 200 metros y cada día duplica la distancia alcanzada el día anterior, ¿cuántos metros recorre cada uno el décimo día?

3) Hallar, si fuera posible, una cota para las siguientes sucesiones, ¿son sucesiones acotadas?, ¿son convergentes? $(n \in N)$.

a) $(a_n) = n$ b) $(b_n) = \frac{1}{n}$ c) $(c_n) = (-1)^n$

4) Determinar en cada caso si la sucesión es convergente, divergente u oscilante:

a) $(a_n) = 2n$

b) $(b_n) = \frac{1}{2n}$

c) $(c_n) = 2n(-1)^n$

d) $(d_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

e) $(e_n) = \sqrt{n^2 + 1}$

5) Al cortar un triángulo equilátero de área 1 por lo puntos medios de los lados se obtiene un triángulo equilátero de área $\frac{1}{4}$. Al hacer lo mismo infinitas veces con los sucesivos triángulos ¿se podría hallar la suma de todas las áreas obtenidas? Si fuera posible, ¿Cuánto valdría dicha suma?

6) Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes series. Justificar

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$

BIBLIOGRAFÍA:

Bibliografía Específica

1. Alcázar Arribas, J. G. *Cálculo en varias variables reales*. 1. ed. Álcala de Henares: Editorial Universidad de Alcalá, (2022). 183 p. Disponible en: https://elibro.net/es/ereader/unne/226335?page=1.
2. Bartle, R. y Sherbert, D. (1996). Introducción al análisis matemático de una variable. Limusa. http://redbiblio. unne.edu. ar/pergamo/documento. php?ui=l 0&recno=l 6234&id=R OCA. 10.16976
3. De Burgos Román, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable*. Mc GrawHill. http://redbiblio.unne.edu.ar/pergamo/documento.php?ui=10&recno=26976&id=ROCA.10.26976
4. De Burgos Román, J. (1995). *Cálculo infinitesimal de varias variables*. Mc Graw Hill. http://redbiblio.unne.edu.ar/pergamo/documento.php?ui=10&recno=26981&id=ROCA.10.26981
5. García Franchini, C. ; Alvarado Arellano, M. Cálculo diferencial en competencias. ed. México D.F: Grupo Editorial Patria, (2016). 317 p. Disponible en: https://elibro.net/es/ereader/unne/40452?page=1.
6. Guerrero Torres, G. (2019). Cálculo diferencial: un nuevo enfoque. Grupo Editorial Patria. https://elibro.net/es/lc/unne/titulos/121276?page=1
7. Larson, R. y Hostetler, R. (2006). *Cálculo y Geometría Analítica*". Mc Graw Hill. http://redbiblio.unne.edu.ar/pergamo/documento.php?ui=10&recno=45977&id=ROCA.10.45977
8. Larson, R. y Hostetler, R. (2006). Cálculo y Geometría Analítica". Me Graw Hill. http://redbiblio.unne.edu.ar/pergamo/dQcumento.php?ui=10&recno=45977&id=R QCA. 10.45977
9. Mejia Paredez, T. Cálculo I: teoría y ejercicios resueltos. 1. ed. Cochabamba, Bolivia: Universidad Privada del Valle, (2024). 273 p. Disponible en: https://elibro.net/es/ereader/unne/252596?page=1
10. Ortiz Campos, F. J. & Ortiz Cerecedo, F. J. (2019). Cálculo diferencial (3a. ed.). Grupo Editorial Patria. https://elibro.net/es/lc/unne/titulos/121278
11.Ortiz Campos, F., Ortiz Cerecedo, F. y Ortiz Cerecedo, F. (2015). *Cálculo Diferencial.* Grupo Editorial Patria. https://elibro.net/es/ereader/unne/39479
12. Ortiz Campos, F., Ortiz Cerecedo, F. y Ortiz Cerecedo, F. (2015). *Cálculo Integral.* Grupo Editorial Patria. https://elibro.net/es/ereader/unne/39469
13. Purcell, E. y Varberg, D. (2001). *Cálculo diferencial e Integral*. Pearson Educación.
14. Rodríguez Ricard, M. Ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones. ed. La Habana: Editorial Universitaria, (2022). 195 p. Disponible en: https://elibro.net/es/ereader/unne/213680?page=1.
15. Stewart, J. (2006). *Cálculo. Conceptos y Contextos (3ra. Edición). Thompson*.

2. Bibliografía Complementaria

1. Piskunov, N. (1991). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial Mir. http://redbiblio.unne.edu.ar/pergamo/opac.php?c=10&a=bsqSi&p=1&o=&trSimple=piskunov
2. Rabuffetti, H. (1994). *Cálculo 1 – Cálculo 2*". El Ateneo. http://redbiblio.unne.edu.ar/pergamo/opac.php?c=10&a=bsqSi&p=1&o=&trSimple=rabuffetti
3. Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C.(1965). *Análisis Matemático*. Kapelusz. http://redbiblio.unne.edu.ar/pergamo/documento.php?ui=10&recno=14182&id=R OCA.10.14182
4. Spiegel. (1980). *Cálculo Superior*. Mac Graw Hill. http://redbiblio.unne.edu.ar/pergamo/documento.php?ui=10&recno=17328&id=ROCA.10.17328
5. Thomas, G. y Finney, R. (1998). *Cálculo*. Addison Wesley. http://redbiblio.unne.edu.ar/pergamo/documento.php?ui=10&recno=24816&id=ROCA.10.24816