Bài tập phần Đệ quy

Nhân ma trận

Tích hai ma trận X và Y kích thước $n \times n$ là ma trận $Z = XY$ với vị trí (i, j) xác định bởi

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} X_{ik} Y_{kj}$$

Công thức trên cho ta một thuật toán đơn giản $O(n^3)$ để nhân hai ma trận.

Nhà toán học người Đức, tên là Volker Strassen, đã đưa ra thuật toán *đệ quy* hiệu quả hơn để tính tích ma trận. *Mục đích của bài tập này là cài đặt thuật toán của Strassen*. Thuật toán mô tả như sau.

Bài toán nhân ma trận có thể dễ dàng chia thành các bài toán con theo khối. Cụ thể, ta chia ma trận X và Y thành các ma trận kích thước $n/2 \times n/2$:

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

Tích XY có thể biểu diễn theo các khối như sau:

$$XY = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có thuật toán đệ quy: để tính tích hai ma trận kích thước n, ta đệ quy tính tám tích ma trận $n/2$:

$$AE, BG, CE, DG, AF, BH, CF, DH$$

và sau đó tính $O(n^2)$ phép cộng. Thời gian tính toán sẽ là

$$T(n) = 8T(n/2) + O(n^2)$$

Cách này cho ta thuật toán thời gian tính toán $O(n^3)$. Nhưng ta có thể cải thiện hiệu quả với một vài tính toán đại số. Strassen đã đưa ra một cách tính tích hai ma trận dùng ít phép nhân hơn:

$$XY = \begin{bmatrix} P_5 + P_4 - P_2 + P_6 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 + P_5 - P_3 - P_7 \end{bmatrix}$$

với

$$\begin{aligned} P_1 &= A(F-H), & P_5 &= (A+D)(E+H) \\ P_2 &= (A+B)H, & P_6 &= (B-D)(G+H) \\ P_3 &= (C+D)E, & P_7 &= (A-C)(E+F) \\ P_4 &= D(G-E) \end{aligned}$$

Với cải tiến này, thời gian tính toán chỉ còn

$$T(n) = 7T(n/2) + O(n^2)$$

và theo định lý Master, thời gian chạy $T(n) = O(n^{\log 7}) \approx O(n^{2.81})$.

Yêu cầu:

- Hãy cài đặt thuật toán của Volker Strassen. Để đơn giản, bạn có thể giả sử ma trận đầu vào kích thước theo luỹ thừa của 2, tức có dạng $2^k \times 2^k$.
- Hãy so sánh thời gian chạy của thuật toán với thuật toán đơn giản $O(n^3)$ cho các ma trận ngẫu nhiên kích thước lớn hơn 1000.