知识：命题的概念

难度：1

题目：“红豆生南国, 春来发几枝？愿君多采撷, 此物最相思．” 这是唐代诗人王维的《相思》, 在这 4 句诗中, 可作为命题的是 (　　)

A．红豆生南国

B．春来发几枝

C．愿君多采撷

D．此物最相思

解析：“红豆生南国” 是陈述句, 意思是 “红豆生长在南方”, 故本句是命题；“春来发几枝” 是疑问句,“愿君多采撷” 是祈使句,“此物最相思” 是感叹句, 都不是命题.

答案：A.

知识：命题的概念

难度：1

题目：下列命题为真命题的是 (　　)

A．若 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$, 则 $x=y$

B．若 $x^2=1$, 则 $x=1$

C．若 $x=y$, 则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$

D．若 $x<y$, 则 $x^2<y^2$

解析：很明显 A 正确；B 中, 由 $x^2=1$, 得 $x=\pm1$, 所以 B 是假命题；C 中, 当 $x=y<0$ 时, 结论不成立, 所以 C 是假命题；D 中, 当 $x=-1, y=1$ 时, 结论不成立, 所以 D 是假命题.

答案：A.

知识：命题的概念

难度：1

题目：给出下列命题：

若直线 $l\perp$ 平面 α, 直线 $m\perp$ 平面 α, 则 $l\perp m$；

若 a,b 都是正实数, 则 $a+b\geq2$；

若 $x^2>x$, 则 $x>1$

函数 $y=x^3$ 是指数函数.

其中假命题为 (　　)

A．

B．

C．

D．

解析： 显然错误, 所以 是假命题；由基本不等式, 知 是真命题； 中, 由 $x^2>x$, 得 $x<0$ 或 $x>1$, 所以 是假命题； 中函数 $y=x^3$ 是幂函数, 不是指数函数, 是假命题.

答案：C.

知识：命题的概念

难度：1

题目：命题“垂直于同一条直线的两个平面平行”的条件是（　　）

A．两个平面

B．一条直线

C．垂直

D．两个平面垂直于同一条直线

解析：把命题改为“若 p 则 q”的形式为若两个平面垂直于同一条直线, 则这两个平面平行, 则条件为“两个平面垂直于同一条直线”.

答案：D.

知识：命题的概念

难度：1

题目：下列语句中命题的个数为（　　）

若 a,G,b 成等比数列, 则 $G^2=ab$.

$4-x^2\geq 0$

梯形是中心对称图形.

$\pi>\sqrt{2}$ 吗？

2016 年是我人生中最难忘的一年！

A．2

B．3

C．4

D．5

解析：依据命题的概念知 和 不是陈述句, 故 不是命题；再从“能否判断真假”的角度分析： 不是命题．只有 为命题, 故选 A.

答案：A.

知识：命题的概念

难度：1

题目：下列语句： $\sqrt{2}$ 是无限循环小数； $x^2-3x+2=0$； 当 $x=4$ 时,$2x>0$； 把门关上！其中不是命题的是 ____________.

解析： 是命题； 不是命题, 因为语句中含有变量 x, 在没给变量 x 赋值的情况下, 无法判断语句的真假； 是命题； 是祈使句, 不是命题.

答案： .

知识：命题的概念

难度：1

题目：已知命题"$f(x)=\cos^2\omega x-sin^2\omega x$ 的最小正周期是 π"是真命题, 则实数 ω 的值为 ____________.

解析：$f(x)=\cos^2\omega x-sin^2\omega x=\cos 2\omega x$, 所以 $|\frac{2\pi}{2\omega}|=\pi$, 解得 $\omega=\pm1$.

答案：±1.

知识：命题的概念

难度：1

题目：下列命题：

若 $xy=1$, 则 x,y 互为倒数；

二次函数的图象与 x 轴有公共点；

平行四边形是梯形；

若 $ac^2>bc^2$, 则 $a>b$.

其中真命题是 ____________(写出所有真命题的编号).

解析：对于 , 二次函数图象与 x 轴不一定有公共点；对于 , 平行四边形不是梯形.

答案： .

知识：命题的概念

难度：1

题目：把下列命题改写成"若 p, 则 q"的形式, 并判断其真假.

(1) 末位数字是 0 的整数能被 5 整除；

(2) 偶函数的图象关于 y 轴对称；

(3) 菱形的对角线互相垂直.

解析：

解：(1) 若一个整数的末位数字是 0, 则这个整数能被 5 整除, 为真命题.

(2) 若一个函数是偶函数, 则这个函数的图象关于 y 轴对称, 为真命题.

(3) 若一个四边形是菱形, 则它的对角线互相垂直, 为真命题.

知识：命题的概念

难度：1

题目：已知：A：$5x-1>a$,B：$x>1$, 请选择适当的实数 a, 使得利用 A、B 构造的命题"若 p, 则 q"为真命题.

解：若视 A 为 p, 则命题"若 p, 则 q"为"若 $x>\frac{1+a}{5}$, 则 $x>1$". 由命题为真命题可知 $\frac{1+a}{5}\geq1$, 解得 $a\geq4$;

若视 B 为 p, 则命题 “若 p, 则 q” 为 “若 $x>1$, 则 $x>\frac{1+a}{5}$”. 由命题为真命题可知 $\frac{1+a}{5}\le 1$, 解得 $a\le 4$.

故 a 取任一实数均可利用 A,B 构造出一个真命题, 比如这里取 a=1, 则有真命题 “若 $x>1$, 则 $x>\frac{2}{5}$”.

知识：命题的概念

难度：2

题目：给出命题 “方程 $x^2+ax+1=0$ 没有实数根”, 则使该命题为真命题的 a 的一个值可以是 (　　)

A．4

B．2

C．1

D．-3

解析：C 中, 当 a=1 时,$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0$, 方程无实根, 其余 3 项中,a 的值使方程均有实根.

答案：C.

知识：命题的概念

难度：1

题目：　若 $a\cdot b=a\cdot c$, 则 $b=c$；

若 $a=(1,k),b=(-2,6),a//b$, 则 $k=-3$；

非零向量 a 和 b 满足 $|a|=|b|=|a-b|$, 则 a 与 $a+b$ 的夹角为 60°.

其中真命题的序号为 ____________(写出所有真命题的序号).

解析：取 $a=0$, 满足 $a\cdot b=a\cdot c$, 但不一定有 $b=c$, 故　不正确；

当 $a=(1,k),b=(-2,6),a//b$ 时,$6+2k=0$,

所以 $k=-3$, 则　正确；

非零向量 a 和 b 满足 $|a|=|b|=|a-b|$ 时,$|a|,|b|,|a-b|$ 构成等边三角形, 所以 a 与 $a+b$ 的夹角为 30°, 因此　错误.

答案：.

知识：命题的概念

难度：1

题目：把下列命题改写成 “若 p, 则 q” 的形式, 并判断真假.

(1) 乘积为 1 的两个实数互为倒数；

(2) 奇函数的图象关于原点对称；

(3) 与同一直线平行的两个平面平行.

解析：

解：(1)“若两个实数乘积为 1, 则这两个实数互为倒数”, 它是真命题.

(2)“若一个函数为奇函数, 则它的图象关于原点对称”. 它是真命题.

(3)“若两个平面与同一条直线平行, 则这两个平面平行”. 它是假命题, 这两个平面也可能相交.

知识：四种命题, 四种命题的关系

难度：1

题目：命题“对角线相等的四边形是矩形”是命题“矩形的对角线相等”的(　　)

A．逆命题

B．否命题

C．逆否命题

D．无关命题

解析：将命题“对角线相等的四边形是矩形”写成“若 p, 则 q”的形式为：“若一个四边形的对角线相等, 则这个四边形是矩形”. 而将命题“矩形的对角线相等”写成“若 p, 则 q”的形式为：“若一个四边形是矩形, 则四边形的对角线相等”. 则前一个命题为后一个命题的逆命题.

答案：A.

知识：四种命题, 四种命题的关系

难度：1

题目：已知 $a,b,c\in R$, 命题“若 $a+b+c=3$, 则 $a^2+b^2+c^2\geq 3$”的否命题是(　　)

A．若 $a+b+c\neq 3$, 则 $a^2+b^2+c^2<3$

B．若 $a+b+c=3$, 则 $a^2+b^2+c^2<3$

C．若 $a+b+c\neq 3$, 则 $a^2+b^2+c^2\geq 3$

D．若 $a+b+c\geq 3$, 则 $a^2+b^2+c^2=3$

解析：否定条件, 得 $a+b+c\neq 3$, 否定结论, 得 $a^2+b^2+c^2<3$. 所以否命题是“若 $a+b+c\neq 3$, 则 $a^2+b^2+c^2<3$”.

答案：A

知识：四种命题, 四种命题的关系

难度：1

题目：与命题“能被 6 整除的整数, 一定能被 3 整除”等价的命题是(　　)

A．能被 3 整除的整数, 一定能被 6 整除

B．不能被 3 整除的整数, 一定不能被 6 整除

C．不能被 6 整除的整数, 一定不能被 3 整除

D．不能被 6 整除的整数, 不一定能被 3 整除

解析：原命题与它的逆否命题是等价命题, 原命题的逆否命题是：不能被 3 整除的整数, 一定不能被 6 整除.

答案：B

知识：, 四种命题, 四种命题的关系

难度：1

题目：下列说法：

原命题为真, 它的否命题为假；

原命题为真, 它的逆命题不一定为真；

一个命题的逆命题为真, 它的否命题一定为真；

一个命题的逆否命题为真, 它的否命题一定为真.

其中正确的是 (　　)

A.

B.

C.

D.

解析：互为逆否命题的两个命题同真假, 互为否命题和逆命题的两个命题, 它们的真假性没有关系.

答案：B

知识：, 四种命题, 四种命题的关系

难度：1

题目：有下列四种命题：

"若 $x+y=0$, 则 x,y 互为相反数" 的否命题；

"若 $x>y$, 则 $x^2>y^2$" 的逆否命题；

"若 $x\leq 3$, 则 $x^2-x-6>0$" 的否命题；

"对顶角相等" 的逆命题.

其中真命题的个数是 (　　)

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

解析：(1) 原命题的否命题与其逆命题有相同的真假性, 其逆命题为 "若 x,y 互为相反数, 则 $x+y=0$", 为真命题；(2) 原命题与其逆否命题具有相同的真假性. 而原命题为假命题 (如 $x=0,y=-1$), 故其逆否命题为假命题；(3) 该命题的否命题为 "若 $x>3$, 则 $x^2-x-6\leq 0$", 很明显为假命题；(4) 该命题的逆命题是 "相等的角是对顶角", 显然是假命题.

答案：B

知识：, 四种命题, 四种命题的关系

难度：1

题目：命题“若 $x^2 < 4$, 则 $-2 < x < 2$” 的逆否命题为 ____________________, 是 ____________________(填“真” 或“假”) 命题.

解析：命题“若 $x^2 < 4$, 则 $-2 < x < 2$” 的逆否命题为“若 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$, 则 $x^2 \geq 4$”, 因为原命题是真命题, 所以其逆否命题也是真命题.

答案：若 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$, 则 $x^2 \geq 4$ 真

知识：四种命题, 四种命题的关系

难度：1

题目：命题“当 AB=AC 时,△ABC 是等腰三角形” 与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中, 真命题有 ____________ 个.

解析：原命题“当 AB=AC 时,△ABC 是等腰三角形” 是真命题, 且互为逆否命题等价, 故其逆否命题为真命题. 其逆命题“若 △ABC 是等腰三角形, 则 AB=AC” 是假命题, 则否命题是假命题. 则 4 个命题中有 2 个是真命题.

答案：2

知识：四种命题, 四种命题的关系

难度：1

题目：设有两个命题： 不等式 $mx^2+1 > 0$ 的解集是 R； 函数 $f(x) = \log_m x$ 是减函数. 如果这两个命题中有且只有一个是真命题, 则实数 m 的取值范围是 ____________.

解析： 当 $m = 0$ 时,$mx^2 + 1 = 1 > 0$ 恒成立, 解集为 R. 当 $m \neq 0$ 时, 若 $mx^2 + 1 > 0$ 的解集为 R, 必有 $m > 0$. 综上知, 不等式 $mx^2 + 1 > 0$ 的解集为 R, 必有 $m \geq 0$.

当 $0 < m < 1$ 时,$f(x) = \log_m x$ 是减函数, 当两个命题中有且只有一个真命题时 $\begin{cases} m \geq 0, \\ m \leq 0 m \geq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m < 0, \\ 0 < m < 1, \end{cases}$

所以 $m = 0$ 或 $m \geq 1$.

答案：$m = 0$ 或 $m \geq 1$

知识：四种命题, 四种命题的关系

难度：1

题目：写出命题“在 △ABC 中, 若 $a > b$, 则 $A > B$” 的逆命题、否命题和逆否命题, 并判断它们的真假.

解析：

解：(1) 逆命题：在 △ABC 中, 若 $A > B$, 则 $a > b$ 为真命题. 否命题：在

$\triangle$ABC 中, 若 $a \le b$, 则 $A \le B$ 为真命题. 逆否命题: 在 $\triangle$ABC 中, 若 $A \le B$, 则 $a \le b$ 为真命题.

知识: 四种命题, 四种命题的关系

难度: 2

题目: 判断命题“已知 a,x 为实数, 若关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2>0$ 的解集是 $\mathcal{R}$, 则 $a<\frac{7}{4}$” 的逆否命题的真假.

解: 先判断原命题的真假如下: 因为 a,x 为实数, 关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2>0$ 的解集为 $\mathcal{R}$, 且抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+a^2+2$ 的开口向上, 所以 $\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)=4a-7<0$.

所以 $a<\frac{7}{4}$. 所以原命题是真命题.

因为互为逆否命题的两个命题同真同假, 所以原命题的逆否命题为真命题.

知识: 四种命题, 四种命题的关系

难度: 2

题目: 若命题 p 的逆命题是 q, 命题 q 的否命题是 m, 则 m 是 p 的 (　　)

A. 原命题

B. 逆命题

C. 否命题

D. 逆否命题

解析: 设命题 p 为 “若 k, 则 l”, 则命题 q 为 “若 l, 则 k”, 从而命题 m 为 “若非 l, 则非 k”, 即命题 m 是命题 p 的逆否命题.

答案: D

知识: 四种命题, 四种命题的关系

难度: 2

题目: 给出命题: 若函数 $y=f(x)$ 是幂函数, 则函数 $y=f(x)$ 的图象不过第四象限, 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中, 为真命题的是____________.

解析: 由于原命题为真命题, 则其逆否命题也为真命题. 其否命题: 若函数 $y=f(x)$ 不是幂函数, 则 $y=f(x)$ 的图象过第四象限, 为假命题, 从而原命题的逆命题也是假命题.

答案: 逆否命题

知识: 四种命题, 四种命题的关系

难度: 2

题目: 已知 p: $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根,q: $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实数根. 若 p,q 一真一假, 求 m 的取值范围.

解析:

解：当 p 为真时, 即方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根, 设两个负根为 x_1,x_2, 则有 $\begin{cases} m^2-4>0, \\ x_1+x_2=-m<0 \end{cases}$

解得 $m>2$.

当 q 为真时, 即方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实数根, 则有 $16(m-2)^2-4\times 4\times 1<0$, 解得 $1<m<3$.

若 p 真,q 假, 则 $\begin{cases} m>2, \\ m\le 1 m\ge 3, \end{cases}$ 得 $m\in[3,+\infty)$;

若 p 假,q 真, 则 $\begin{cases} m\le 2, \\ 1<m<3, \end{cases}$ 得 $m\in(1,2]$.

综上所述,m 的取值范围是 $(1,2]\cup[3,+\infty)$.

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目："$\alpha=\frac{\pi}{6}$" 是 "$\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$" 的 (　　)

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

解析：由 $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$, 可得 $\alpha=k\pi\pm\frac{\pi}{6}(k\in Z)$, 故选 A.

答案：A

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目：(2016 · 天津卷) 设 $x>0,y\in R$, 则 "$x>y$" 是 "$x>|y|$" 的 (　　)

A．充要条件

B．充分而不必要条件

C．必要而不充分条件

D．既不充分也不必要条件

解析：当 $x=1,y=-2$ 时,$x>y$, 但 $x>|y|$ 不成立;

若 $x>|y|$, 因为 $|y|\ge y$, 所以 $x>y$.

所以 $x>y$ 是 $x>|y|$ 的必要而不充分条件.

答案：C

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目：$x^2<4$ 的必要不充分条件是 (　　)

A．$0<x\le 2$

B．$-2<x<0$

C．$-2\le x\le 2$

D．$1<x<3$

解析：$x^2<4$ 即 $-2<x<2$, 因为 $-2<x<2$ 能推出 $-2\le x\le 2$, 而 $-2\le x\le 2$ 不出 $-2<x<2$, 所以 $x^2<4$ 的必要不充分条件是 $-2\le x\le 2$.

答案：C

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目：(2016· 山东卷) 已知直线 a,b 分别在两个不同的平面 α,β 内, 则 “直线 a 和直线 b 相交” 是 “平面 α 和平面 β 相交” 的 (　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

解析：由题意知 a⊂α,b⊂β, 若 a,b 相交, 则 a,b 有公共点, 从而 α,β 有公共点, 可得出 α,β 相交；反之, 若 α,β 相交, 则 a,b 的位置关系可能为平行、相交或异面．因此 “直线 a 和直线 b 相交” 是 “平面 α 和平面 β 相交” 的充分不必要条件．故选 A.

答案：A

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目：函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是 (
)

A．$m=2$

B．$m=-2$

C．$m=-1$

D．$m=1$

解析：当 $m=-2$ 时,$f(x)=x^2-2x+1$,

其图象关于直线 $x=1$ 对称, 反之也成立,

所以函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是 $m=-2$.

答案：B

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目：设 a,b 是实数, 则 "$a+b>0$" 是 "$ab>0$" 的 ____________________ 条件.

解析：若 $a+b>0$, 取 $a=3,b=-2$, 则 $ab>0$ 不成立;

反之, 若 $a=-2,b=-3$, 则 $a+b>0$ 也不成立,

因此 "$a+b>0$" 是 "$ab>0$" 的既不充分也不必要条件.

答案：既不充分也不必要条件

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目：关于 x 的不等式 $|2x-3|>a$ 的解集为 $\mathcal{R}$ 的充要条件是 ____________.

解析：由题意知 $|2x-3|>a$ 恒成立.

因为 $|2x-3|\geq 0$, 所以 $a<0$.

答案：$a<0$

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目：对任意实数 a,b,c, 给出下列命题：

" $a=b$" 是 "$ac=bc$" 的充要条件;

" $b-2$ 是无理数" 是 "b 是无理数" 的充要条件;

" $a>b$" 是 "$a^2>b^2$" 的充分条件;

" $a<5$" 是 "$a<3$" 的必要条件.

其中真命题的序号是 ____________.

解析： 中由 "$a=b$" 可得 $ac=bc$,

但由 "$ac=bc$" 得不到 "$a=b$", 所以不是充要条件;

是真命题;

中 $a>b$ 时,$a^2>b^2$ 不一定成立, 所以 是假命题;

中由 "$a<5$" 得不到 "$a<3$",

但由 "$a<3$" 可以得出 "$a<5$",

所以 "$a<5$" 是 "$a<3$" 的必要条件, 是真命题.

答案：

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目：已知 p：$-4<x-a<4$,q：$(x-2)(x-3)<0$, 且 q 是 p 的充分而不必要条件, 试求 a 的取值范围.

解析：

解：设 q,p 表示的范围为集合 A,B, 则 $A=(2,3),B=(a-4,a+4)$. 由于 q 是 p 的充分而不必要要件, 则有 $A\subsetneq B$, 即或解得 $-1\leq a\leq 6$.

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：1

题目：求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

解析：

证明：必要性：因为方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1,

所以 $x=1$ 满足方程 $ax^2+bx+c=0$, 即 $a+b+c=0$.

充分性：因为 $a+b+c=0$, 所以 $c=-a-b$,

代入方程 $ax^2+bx+c=0$ 中可得 $ax^2+bx-a-b=0$,

即 $(x-1)(ax+a+b)=0$.

故方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1.

所以关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：2

题目：$m=\frac{1}{2}$ 是直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直的 (　　)

A．充要条件

B．充分不必要条件

C．必要不充分条件

D．既不充分也不必要条件

解析：当 $m=\frac{1}{2}$ 时, 两直线为 $\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y+1=0$ 和 $-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}y-3=0$, 两直线斜率之积为 -1, 两直线垂直；而当两直线垂直时,$(m+2)(m-2)+3m(m+2)=0$, 即 $2(m+2)(2m-1)=0$, 所以 $m=-2$ 或 $m=\frac{1}{2}$. 所以为充分不必要条件.

答案：B

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：2

题目：已知 p：不等式 $x^2+2x+m>0$ 的解集为 $\mathbb{R}$；q：指数函数 $f(x)=(m+\frac{1}{4})^x$ 为增函数, 则 p 是 q 成立的 ____________ 条件.

解析：p：不等式 $x^2+2x+m>0$ 的解集为 $\mathbb{R}$,

即 $\Delta=4-4m<0, m>1$；q：指数函数 $f(x)=(m+\frac{1}{4})^x$ 为增函数, 即 $m+\frac{1}{4}>1, m>\frac{3}{4}$, 则 p 是 q 成立的充分不必要条件.

答案：充分不必要

知识：充分条件与必要条件, 充要条件

难度：2

题目：已知 p：$-2 \le x \le 10$,q：$x^2-2x+1-m^2 \le 0(m>0)$, 若 ¬p 是 ¬q 的充分不必要条件．求实数 m 的取值范围．

解析：

解：p：$-2 \le x \le 10$.q：$x^2-2x+1-m^2 \le 0(m>0) \Leftrightarrow [x-(1-m)][x-(1+m)] \le 0(m>0) \Leftrightarrow 1-m \le x \le 1+m(m>0)$.

因为 ¬p 是 ¬q 的充分不必要条件, 所以 q 是 p 的充分不必要条件, 即 $\{x|1-m \le x \le 1+m\} \subsetneqq \{x|-2 \le x \le 10\}$, 故有 $\begin{cases} 1-m \ge -2, \\ 1+m < -10 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-m > -2, \\ 1+m \le 10 \end{cases}$

解得 $m \le 3$. 又 $m>0$, 所以实数 m 的取值范围为 $\{m|0<m \le 3\}$.

本题还可用以下方法求解．

因为 p：$-2 \le x \le 10$, 所以 ¬p：$x<-2$ 或 $x>10$.

q：$x^2-2x+1-m^2 \le 0(m>0) \Leftrightarrow [x-(1-m)][x-(1+m)] \le 0(m>0) \Leftrightarrow 1-m \le x \le 1+m(m>0)$,

¬q：$x<1-m$ 或 $x>1+m(m>0)$．因为 ¬p 是 ¬q 的充分不必要条件, 所以

$\{x|x<-2x>10\} \subsetneqq \{x|x<1-mx>1+m\}$,

故有 $\begin{cases} 1-m \ge -2, \\ 1+m < 10 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-m > -2, \\ 1+m \le 10 \end{cases}$

解得 $m \le 3$. 又 $m>0$, 所以实数 m 的取值范围为 $\{m|0<m \le 3\}$.

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：命题“2 是 3 的约数或 2 是 4 的约数”中, 使用的逻辑联结词的情况是 (　　)

A．没有使用逻辑联结词

B．使用了逻辑联结词“且”

C．使用了逻辑联结词“或”

D．使用了逻辑联结词“非”

解析：

答案：C

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：若命题“p 且 q”为假, 且 ¬p 为假, 则 (　　)

A．p 或 q 为假

B．q 假

C．q 真

D．p 假

解析：¬p 为假, 则 p 为真, 而 $p \wedge q$ 为假, 得 q 为假.

答案：B

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：下列命题中, 既是 “p 或 q” 形式的命题, 又是真命题的是 (　　)

A．方程 $x^2 - x + 2 = 0$ 的两根是 -2,1

B．方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 没有实根

C．$2n - 1 (n \in Z)$ 是奇数

D．$a^2 + b^2 \geq 0 (a, b \in R)$

解析：选项 A 中,-2,1 都不是方程的根；选项 B 不是 “p 或 q” 的形式；选项 C 也不是 “p 或 q” 的形式；选项 D 中,$a^2 + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 0$ 或 $a^2 + b^2 = 0$, 且是真命题, 故选 D.

答案：D

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：已知 p：$x \in A \cap B$, 则 ¬p 是 (　　)

A．$x \in A$ 且 $x \notin B$

B．$x \notin A$ 或 $x \notin B$

C．$x \notin A$ 且 $x \notin B$

D．$x \in A \cup B$

解析：p：$x \in A \cap B$, 即 $x \in A$ 且 $x \in B$, 故 ¬p 是 $x \notin A$ 或 $x \notin B$.

答案：B

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：给出命题 p：函数 $y = x^2 - x - 1$ 有两个不同的零点；q：若 $\frac{1}{x}$<1, 则 x>1. 那么在下列四个命题中, 真命题是 (　　)

A．(¬p)∨q

B．p∧q

C．(¬p)∧(¬q)

D．(¬p)∨(¬q)

解析：对于 p, 函数对应的方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$, 所以函数有两个不同的零点, 故 p 为真.

对于 q, 当 x<0 时, 不等式 $\frac{1}{x}$<1 恒成立；当 x>0 时, 不等式的解集为 $\{x | x > 1\}$. 故不等式 $\frac{1}{x}$<1 的解集为 $\{x | x < 0 x > 1\}$. 故 q 为假. 结合各选项知, 只有 (¬p)∨(¬q) 为真. 故选 D.

答案：D

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：命题“若 $a<b$, 则 $2^a<2^b$” 的否命题是 ______________________, 命题的否定是 ____________________.

解析：命题“若 p, 则 q” 的否命题是“若 ¬p, 则 ¬q”, 命题的否定是“若 p, 则 ¬q”.

答案：若 $a\geq b$, 则 $2^a\geq 2^b$　若 $a<b$, 则 $2^a\geq 2^b$

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：已知命题 p：对任意 $x\in R$, 总有 $|x|\geq 0$.q：$x=1$ 是方程 $x+2=0$ 的根, 则 p∧(¬q) 为 ___________ 命题 (填“真” 或“假”).

解析：命题 p 为真命题, 命题 q 为假命题, 所以命题 ¬q 为真命题, 所以 p∧¬q 为真命题.

答案：真

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：已知 p：$x^2-x\geq 6$,q：$x\in Z$. 若 “p∧q”“¬q” 都是假命题, 则 x 的值组成的集合为 ___________.

解析：因为“p∧q” 为假,“¬q” 为假, 所以 q 为真,p 为假．故即因此,x 的值可以是 -1,0,1,2.

答案：$\{-1,0,1,2\}$

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：写出下列命题的 p∨q,p∧q,¬p 的形式, 并判断其真假：

(1)p：$\sqrt{2}$ 是有理数；q：$\sqrt{2}$ 是实数.

(2)p：5 不是 15 的约数；q：5 是 15 的倍数.

(3)p：空集是任何集合的子集；q：空集是任何集合的真子集.

解析：

解：(1)p∨q：$\sqrt{2}$ 是有理数或 $\sqrt{2}$ 是实数, 真命题；

p∧q：$\sqrt{2}$ 是有理数且 $\sqrt{2}$ 是实数, 假命题；¬p：$\sqrt{2}$ 不是有理数, 真命题.

(2)p∨q：5 不是 15 的约数或 5 是 15 的倍数, 假命题；

p∧q：5 不是 15 的约数且 5 是 15 的倍数, 假命题；

¬p：5 是 15 的约数, 真命题.

(3)p∨q：空集是任何集合的子集或空集是任何集合的真子集, 真命题；

p∧q：空集是任何集合的子集且空集是任何集合的真子集, 假命题；

¬p：空集不是任何集合的子集, 假命题.

知识：逻辑连接词

难度：1

题目：已知命题 p：方程 $x^2+2x+a=0$ 有实数根；命题 q：函数 $f(x)=(a^2-a)x$ 在 R 上是增函数．若 p∧q 为真命题, 求实数 a 的取值范围.

解析：

解：当 p 是真命题时,$\Delta=4-4a\geq 0$, 解得 $a\leq 1$. 当 q 是真命题时,$a^2-a>0$, 解得 $a<0$ 或 $a>1$.

由题意, 得 p,q 都是真命题, 所以 $\begin{cases} a\leq 1, \\ a<0 a>1 \end{cases}$

解得 $a<0$,

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)$.

知识：逻辑连接词

难度：2

题目：给定命题 p：若 $x^2\geq 0$, 则 $x\geq 0$；命题 q：已知非零向量 a,b, 则 "$a\perp b$" 是 "$|a-b|=|a+b|$" 的充要条件, 则下列各命题中, 假命题是 (　　)

A．p∨q

B．(¬p)∨q

C．(¬p)∧q

D．(¬p)∧(¬q)

解析：命题 p 为假命题, 命题 q 为真命题, 所以 ¬p 是真命题,¬q 为假命题, 所以 (¬p)∧(¬q) 为假命题.

答案：D

知识：逻辑连接词

难度：2

题目：给出下列结论：

(1) 当 p 是真命题时,"p 且 q" 一定是真命题；

(2) 当 p 是假命题时,"p 且 q" 一定是假命题；

(3) 当 "p 且 q" 是假命题时,p 一定是假命题；

(4) 当 "p 且 q" 是真命题时,p 一定是真命题.

其中正确结论的序号是 ____________.

解析：(1) 错误, 当 q 是假命题时,"p 且 q" 是假命题, 当 q 也是真命题时,"p 且 q" 是真命题；(2) 正确；(3) 错误,p 也可能是真命题；(4) 正确.

答案：(2)(4)

知识：逻辑连接词

难度：2

题目：已知 $a>0$, 设 p：函数 $y=a^x$ 在 R 上单调递减；q：不等式 $x+|x-2a|>1$ 的解集为 R, 如果 "p∨q" 为真,"p∧q" 为假, 求实数 a 的取值范围.

解析：

解：对于命题 p：函数 $y=a^x$ 在 R 上单调递减, 即 $0<a<1$. 对于命题 q：不等式 $x+|x-2a|>1$ 的解集为 R, 即函数 $y=x+|x-2a|$ 在 R 上恒大于 1, 又 $y=\begin{cases}2x-2a, x\geq 2a,\\ 2a, x<2a\end{cases}$, 所以 $y_{min}=2a>1$, 即 $a>\frac{1}{2}$.

由 p∨q 为真,p∧q 为假, 根据复合命题真值表知 p、q 一真一假. 如果 p 真 q 假, 则 $0<a\leq\frac{1}{2}$；如果 p 假 q 真, 则 $a\geq 1$.

综上所述,a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.

知识：全称量词与存在量词

难度：1

题目：以下四个命题既是特称命题又是真命题的是（　　）

A．锐角三角形的内角是锐角或钝角

B．至少有一个实数 x, 使 $x^2\leq 0$

C．两个无理数的和必是无理数

D．存在一个负数 x, 使 $\frac{1}{x}>2$

解析：A 中锐角三角形的内角是锐角或钝角是全称命题；B 中 $x=0$ 时,$x^2=0$, 所以 B 既是特称命题又是真命题；C 中因为 $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$, 所以 C 是假命题；D 中对于任一个负数 x, 都有 $\frac{1}{x}<0$, 所以 D 是假命题.

答案：B

知识：全称量词与存在量词, 含有一个量词的命题的否定

难度：1

题目：命题 "$\forall x\in R, x^2\neq x$" 的否定是（　　）

A．$\forall x\notin R, x^2\neq x$

B．$\forall x\in R, x^2=x$

C．$\exists x\notin R, x^2\neq x$

D．$\exists x\in R, x^2=x$

解析：全称命题的否定是特称命题, 所以命题 "$\forall x\in R, x^2\neq x$" 的否定是 "$\exists x\in R, x^2=x$".

答案：D

知识：全称量词与存在量词

难度：1

题目：下列特称命题中假命题的个数是 (　　)

有一条直线与两个平行平面垂直；

有一条直线与两个相交平面平行；

存在两条相交直线与同一个平面垂直.

A．0

B．1

C．2

D．3

解析：　都是真命题，是假命题.

答案：B

知识：全称量词与存在量词

难度：1

题目：设函数 $f(x)=x^2+mx(m\in R)$, 则下列命题中的真命题是 (　　)

A．任意 $m\in R$, 使 $y=f(x)$ 都是奇函数

B．存在 $m\in R$, 使 $y=f(x)$ 是奇函数

C．任意 $m\in R$, 使 $x=f(x)$ 都是偶函数

D．存在 $m\in R$, 使 $y=f(x)$ 是偶函数

解析：当 $m=0$ 时,$f(x)=x^2$ 为偶函数，故选 D.

答案：D

知识：全称量词与存在量词

难度：1

题目：若 $(\frac{1}{3})^{x^2-2ax}<33x+a^2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A．$0<a<1$

B．$a>\frac{3}{4}$

C．$0<a<\frac{3}{4}$

D．$a<\frac{3}{4}$

解析：由题意，得 $-x^2+2ax<3x+a^2$, 即 $x^2+(3-2a)x+a^2>0$ 恒成立，所以 $\Delta=(3-2a)^2-4a^2<0$, 解得 $a>\frac{3}{4}$. 答案：B

知识：全称量词与存在量词，含有一个量词的命题的否定

难度：1

题目：命题 "$\exists x_0,y_0\in Z,3x_0-2y_0=10$" 的否定是 ______________________.

解析：特称命题的否定是全称命题，则否定为 $\forall x,y\in Z,3x-2y\neq 10$.

答案：$\forall x,y\in Z,3x-2y\neq 10$

知识：全称量词与存在量词

难度：1

题目：下列命题中, 是全称命题的是 ____________；是特称命题的是 ____________.

正方形的四条边相等；

有两个角相等的三角形是等腰三角形；

正数的平方根不等于 0；

至少有一个正整数是偶数.

解析： 可表述为“每一个正方形的四条边相等”, 是全称命题； 是全称命题, 即“凡是有两个角相等的三角形都是等腰三角形”； 可表述为“所有正数的平方根不等于 0”是全称命题； 是特称命题.

答案：

知识：全称量词与存在量词

难度：1

题目：下面四个命题：

$\forall x{\in}R, x^2{-}3x{+}2>0$ 恒成立；$\exists x_0{\in}Q, x=2$；$\exists x_0{\in}R, x{+}1=0$；$\forall x{\in}R, 4x^2>2x-1+3x^2$.

其中真命题的个数为 ____________.

解析：$x^2-3x+2>0, \Delta=(-3)^2-4{\times}2>0$, 所以当 $x>2$ 或 $x<1$ 时,$x^2-3x+2>0$ 才成立, 所以 为假命题. 当且仅当 $x=\pm$ 时,$x^2=2$, 所以不存在 $x{\in}Q$, 使得 $x^2=2$, 所以 为假命题. 对 $\forall x{\in}R, x^2+1{\neq}0$, 所以 为假命题.$4x^2-(2x-1+3x^2)=x^2-2x+1=(x-1)^2{\geq}0$, 即当 $x=1$ 时,$4x^2=2x-1+3x^2$ 成立, 所以 为假命题. 所以 均为假命题.

答案：0

知识：全称量词与存在量词, 含有一个量词的命题的否定

难度：1

题目：判断下列各命题的真假, 并写出命题的否定.

(1) 有一个实数 a, 使不等式 $x^2-(a+1)x+a>0$ 恒成立；

(2) 对任意实数 x, 不等式 $|x+2|\leq 0$ 恒成立；

(3) 在实数范围内, 有些一元二次方程无解.

解析：

解：(1) 方程 $x^2-(a+1)x+a=0$ 的判别式 $\Delta=(a+1)^2-4a=(a-1)^2{\geq}0$,

则不存在实数 a, 使不等式 $x^2-(a+1)x+a>0$ 恒成立, 所以原命题为假命题.

它的否定：对任意实数 a, 不等式 $x^2-(a+1)x+a>0$ 不恒成立.

(2) 当 $x=1$ 时,$|x+2|>0$, 所以原命题是假命题.

它的否定：存在实数 x, 使不等式 $|x+2|>0$ 成立.

(3) 由一元二次方程解的情况, 知该命题为真命题.

它的否定：在实数范围内, 所有的一元二次方程都有解.

知识：全称量词与存在量词

难度：1

题目：对于任意实数 x, 不等式 $\sin x+\cos x>m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

解：令 $y=\sin x+\cos x$, 则 $y=\sin x+\cos x=$

$=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

因为 $-1\le\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 1$, 所以 $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\ge-\sqrt{2}$.

因为 $\forall x\in R,\sin x+\cos x>m$ 恒成立,

所以只要 $m<-\sqrt{2}$ 即可.

故实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-\sqrt{2})$.

知识：全称量词与存在量词

难度：2

题目：若命题 p：$\forall x\in R,\log_2 x>0$, 命题 q：$\exists x_0\in R,2x_0<0$, 则下列命题为真命题的是 (　　)

A．p∨q

B．p∧q

C．(¬p)∧q

D．p∨(¬q)

解析：命题 p：$\forall x\in R,\log_2 x>0$ 为假命题, 命题 q：$\exists x_0\in R,2x_0<0$ 为假命题, 所以 p∨(¬q) 为真命题, 故选 D.

答案：D

知识：全称量词与存在量词

难度：2

题目：已知命题 "$\exists x_0\in R,2x_0^2+(a-1)x_0+\frac{1}{2}\le 0$" 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ____________.

解析：由题意可得 "对 $\forall x\in R,2x^2+(a-1)x+\frac{1}{2}>0$ 恒成立" 是真命题, 令 $\Delta=(a-1)^2-4<0$, 得 $-1<a<3$.

答案：$(-1,3)$

知识：全称量词与存在量词

难度：1

题目：已知命题 p："$\forall x\in[1,2],x^2-a\ge 0$", 命题 q："$\exists x_0\in R,x_0^2+2ax_0+a+2=0$", 若命题 "p 或 q" 是真命题, 求实数 a 的取值范围.

解析：

解：$p \Leftrightarrow a \le (x^2)_{min} = 1 . q \Leftrightarrow \Delta = 4a^2 - 4(a+2) \ge 0 \Leftrightarrow a \le -1 a \ge 2$.

因为 “p 或 q” 为真命题,

所以 p、q 中至少有一个真命题.

所以 a≤1 或 a≤-1 或 a≥2, 所以 a≤1 或 a≥2.

所以 “p 或 q” 是真命题时, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：已知 F_1, F_2 是定点,$|F_1F_2| = 8$, 动点 M 满足 $|MF_1| + |MF_2| = 8$, 则动点 M 的轨迹是 (　　)

A．椭圆

B．直线

C．圆

D．线段

解析：因为 $|MF_1| + |MF_2| = 8 = |F_1F_2|$, 所以点 M 的轨迹是线段 F_1F_2, 故选 D.

答案：D

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$ 的焦点坐标是 (　　)

A．(±5,0)

B．(0,±5)

C．(0,±12)

D．(±12,0)

解析：因为 $c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 25 = 12^2$, 所以 $c = 12$. 又焦点在 y 轴上, 故焦点坐标为 (0,±12),

答案：C

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：已知椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点 P 到椭圆的一个焦点的距离为 3, 到另一个焦点的距离为 7, 则 m=(　　)

A．10

B．5

C．15

D．25

解析：设椭圆的焦点分别为 F_1,F_2, 则由椭圆的定义, 知 $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$, 所以 a=5, 所以 $a^2=25$, 所以椭圆的焦点在 x 轴上,m=25.

答案：D

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：若椭圆焦点在 x 轴上且经过点 $(-4,0),c=3$, 则该椭圆的标准方程为 (　　)

A.$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

B.$\frac{x_2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

C.$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

D.$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

解析：因为椭圆过点 (-4,0), 所以 a=4, 又因为 c=3, 所以 $b=\sqrt{7}$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x_2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

答案：B

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：若方程 $\frac{x_2}{m+9}+\frac{y^2}{25-m}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆, 则实数 m 的取值范围是 (　　)

A．-9<m<25

B．8<m<25

C．16<m<25

D．m>8

解析：依题意有 $\begin{cases} 25-m>0, \\ m+9>0, \\ m+9>25-m \end{cases}$ 解得 8<m<25.

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：已知椭圆 $5x^2-ky^2=5$ 的一个焦点是 (0,2), 则 k=__________.

解析：易知 k≠0, 椭圆方程可化为 $x^2+\frac{y^2}{-\frac{5}{k}}=1$,

所以 $a^2=-\frac{5}{k}$,b^2=1. 又 c=2, 所以 $-\frac{5}{k}-1=4$,

所以 k=-1.

答案：-1

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：已知椭圆的焦点是 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$,P 是椭圆上的一点, 则 $|F_1F_2|$ 是 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$ 的等差中项, 则该椭圆的方程是 ________________.

解析：由题意得 $2|F_1F-2|=|PF_1|+|PF_2|$,

所以 4c=2a=4, 所以 a=2.

又 c=1, 所以 $b^2=a^2-c^2=3$,

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

答案：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：若椭圆 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 上一点 P 与椭圆的两个焦点 F_1,F_2 的连线互相垂直, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 ____________.

解析：设 $|PF_1|=x$, 则 $|PF_2|=14-x$, 又 2c=10,

根据勾股定理, 得 $x^2+(14-x)^2=100$,

解得 x=8 或 x=6, 所以 $S=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$.

答案：24

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：已知椭圆的中心在原点, 两焦点 F_1,F_2 在 x 轴上, 且过点 A(-4,3). 若 $F_1A\perp F_2A$, 求椭圆的标准方程.

解析：

解：设所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

设焦点 $F_1(-c,0),F_2(c,0)(c{>}0)$.

因为 $F_1A\perp F_2A$,

所以 $\overrightarrow{F_1A}\,\overrightarrow{F_2A}=0$,

而 $\overrightarrow{F_1A}=(-4+c,3)$,

$\overrightarrow{F_2A}=(-4-c,3)$,

所以 $(-4+c)\cdot(-4-c)+3^2=0$,

所以 $c^2=25$, 即 c=5.

所以 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$.

所以 $2a=AF_1+AF_2$

$=\sqrt{(-4+5)^2+3^2}+\sqrt{(-4-5)^2+3^2}$

$=\sqrt{10}+\sqrt{90}$

$=4\sqrt{10}$.

所以 $a=2\sqrt{10}$,

所以 $b^2=a^2-c^2=(2\sqrt{10})^2-5^2=15$.

所以所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$.

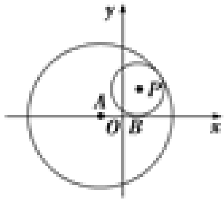
知识：椭圆的定义

难度：1

题目：已知圆 A：$(x+3)^2+y^2=100$, 圆 A 内一定点 B(3,0), 圆 P 过 B 且与圆 A 内切, 求圆心 P 的轨迹方程.

解析：

解：如图, 设圆 P 的半径为 r, 又圆 P 过点 B, 所以 $|PB|=r$.



又因为圆 P 与圆 A 内切, 圆 A 的半径为 10,

所以两圆的圆心距 $|PA|=10-r$,

即 $|PA|+|PB|=10$(大于 $|AB|$).

所以点 P 的轨迹是以 A、B 为焦点的椭圆.

所以 2a=10,2c=$|AB|$=6.

所以 a=5,c=3.

所以 $b^2=a^2-c^2=25-9=16$.

所以点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：平面内有两个定点 A,B 及动点 P, 设甲：$|PA|+|PB|$ 是定值, 乙：点 P 的轨迹是以 A,B 为焦点的椭圆, 则甲是乙的 (　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

解析：点 P 的轨迹是以 A,B 为焦点的椭圆, 则 $|PA|+|PB|$ 是定值, 由椭圆的定义, 知反之不一定成立.

答案：B

知识：椭圆的定义

难度：1

题目：若椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{15}=1$ 的焦距等于 2, 则 m 的值是 ____________.

解析：当椭圆的焦点在 x 轴上时,$a^2=m,b^2=15$,

所以 $c^2=m-15$, 所以 $2c=2\sqrt{m-15}=2$, 解得 m=16;
当椭圆的焦点在 y 轴上时, 同理有 $2\sqrt{15-m}=2$,
所以 m=14.
答案：16 或 14
知识：椭圆的定义
难度：1
题目：已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的一点,F_1,F_2 是椭圆的两个焦点.
(1) 当 $\angle F_1PF_2=60°$ 时, 求 ΔF_1PF_2 的面积;
(2) 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时, 求点 P 横坐标的取值范围.
解析：
解：(1) 由椭圆的定义, 得 $|PF_1|+|PF_2|=4$, 且 $F_1(-\sqrt{3},0),F_2(\sqrt{3},0)$. 在 ΔF_1PF_2 中, 由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos 60°$. 由得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{4}{3}$.
所以 $S\Delta F_1PF_2=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
(2) 设点 P(x,y), 由已知 $\angle F_1PF_2$ 为钝角, 得 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}<0$, 即 $(x+\sqrt{3},y)\cdot(x-\sqrt{3},y)<0$,
又 $y^2=1-\frac{x^2}{4}$, 所以 $\frac{3}{4}x^2<2$, 解得 $-\frac{2\sqrt{6}}{3}<x<\frac{2\sqrt{6}}{3}$,
所以点 P 横坐标的取值范围是 $-\frac{2\sqrt{6}}{3}<x<\frac{2\sqrt{6}}{3}$
知识：椭圆的性质
难度：1
题目：过原点作直线 l 交椭圆 x^2+2y^2=6 于 A,B 两点, 若 A(2,-1), 则点 B 的坐标为 (　　)
A．(-1,2)
B．(-2,-1)
C．(1,-2)
D．(-2,1)
解析：依据椭圆的对称性知,A、B 两点关于原点中心对称, 故选 D.
答案：D
知识：椭圆的性质
难度：1
题目：曲线 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与曲线 $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1(k<9)$ 的 (　　)
A．长轴长相等
B．短轴长相等
C．离心率相等
D．焦距相等

解析：两方程都表示椭圆, 由方程可知 c^2 都为 16, 所以焦距 2c 相等.

答案：D

知识：椭圆的性质

难度：1

题目：椭圆以两条坐标轴为对称轴, 一个顶点是 (0,13), 另一个顶点是 (-10,0), 则焦点坐标为 (　　)

A．(±13,0)

B．(0,±10)

C．(0,±13)

D．(0,± $\sqrt{69}$)

解析：由题意知椭圆焦点在 y 轴上, 且 a=13,b=10,

则 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{69}$, 故焦点坐标为 (0,± $\sqrt{69}$).

答案：D 知识：椭圆的性质

难度：1

题目：已知中心在原点的椭圆 C 的右焦点为 F(1,0), 离心率等于 $\frac{1}{2}$, 则椭圆 C 的方程是 (　　)

A.$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

B.$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\sqrt{3}} = 1$

C.$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

D.$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

解析：设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$,

则 $c = 1, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $a = 2, b = \sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

答案：D

知识：椭圆的性质

难度：1

题目：已知椭圆 $x^2 + my^2 = 1$ 的焦点在 y 轴上, 且长轴长是短轴长的 2 倍, 则 m=(　　)

A.$\frac{1}{4}$

B.$\frac{1}{2}$

C．2

D．4

解析：将椭圆方程化为标准方程为 $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{m}} = 1$.

因为焦点在 y 轴上, 所以 $\frac{1}{m} > 1$, 所以 $0 < m < 1$,

由方程得 $a=\sqrt{\frac{1}{m}}, b=1$.

因为 a=2b, 所以 $m=\frac{1}{4}$.

答案：A

知识：椭圆的第二定义

难度：1

题目：已知椭圆 C：$x^2+3y^2=3$, 则椭圆 C 的离心率为 ________.

解析：椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$, 所以 $a=\sqrt{3}, b=1$,
$c=\sqrt{2}$, 故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

答案：$\frac{\sqrt{6}}{3}$

知识：椭圆的第二定义

难度：1

题目：已知椭圆的短半轴长为 1, 离心率 $0<e\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$. 则长轴长的取值范围为 ___________.

解析：因为 $0<e\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $0<e^2\leq\frac{3}{4}$.

又因为 $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}, b=1$, 而 $0<1-\frac{1}{a^2}\leq\frac{3}{4}$,

所以 $-\frac{3}{4}\leq\frac{1}{a^2}-1<0$,

所以 $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{a^2}<1$,

所以 $1<a^2\leq 4$, 而 $1<a\leq 2$

所以长轴长 $2a\in(2,4]$.

答案：(2,4]

知识：椭圆的第二定义

难度：1

题目：若椭圆 $\frac{x^2}{k+8}+\frac{y^2}{9}=1$ 的离心率 $e=\frac{1}{2}$, 则 k 的值等于 ______.

解析：分两种情况进行讨论：

当焦点在 x 轴上时,$a^2=k+8, b^2=9$, 得 $c^2=k-1$,

又因为 $e=\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+8}}=\frac{1}{2}$, 解得 k=4。

当焦点在 y 轴上时,$a^2=9, b^2=k+8$, 得 $c^2=1-k$,

又因为 $e=\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{9}}=\frac{1}{2}$, 解得 $k=-\frac{5}{4}$.

所以 k=4 或 $k=-\frac{5}{4}$

答案：4 或 $-\frac{5}{4}$

知识：椭圆的第二定义

难度：1

题目：分别求适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 离心率是 $\frac{2}{3}$, 长轴长是 6;

(2) 在 x 轴上的一个焦点与短轴两个端点的连线互相垂直, 且焦距为 6.

解：(1) 设椭圆的方程为

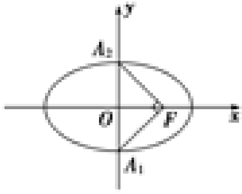
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>b>0) 或 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$(a>b>0).

由已知得 2a=6,$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$, 所以 a=3,c=2.

所以 $b^2=a^2-c^2=9-4=5$.

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 或 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$.

(2) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>b>0).



如图所示,ΔA_1FA_2 为一等腰直角三角形,OF 为斜边 A_1A_2 上的中线 (高), 且 $|OF|=c,|A_1A_2|=2b$, 所以 c=b=3 所以 $a^2=b^2+c^2=18$, 故所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

知识：椭圆的第二定义

难度：1

题目：设椭圆方程 $mx^2+4y^2=4m(m>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 试求椭圆的长轴长和短轴长、焦点坐标及顶点坐标.

解析：

解：(1) 当 0<m<4 时, 长轴长和短轴长分别是 4,2 $\sqrt{3}$, 焦点坐标为 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$, 顶点坐标为 $A_1(-2,0),A_2(2,0),B_1(0,-\sqrt{3}),B_2(0,\sqrt{3})$.

(2) 当 m>4 时, 长轴长和短轴长分别为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$,4, 焦点坐标为 $F_1(0,-\frac{2\sqrt{3}}{3}),F_2(0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$, 顶点坐标为 $A_1(0,-\frac{4\sqrt{3}}{3}),A_2(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}),B_1(-2,0),B_2(2,0)$.

知识：椭圆的第二定义

难度：2

题目：设椭圆的两个焦点分别为 F_1,F_2, 过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P, 若 ΔF_1PF_2 为等腰直角三角形, 则椭圆的离心率为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

C. $2-\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}-1$

解析：因为 $|F_1F_2|$=2c,$|PF_2|$=2c,

所以 $|PF_1|=\sqrt{2}|F_1F_2|=2\sqrt{2}c$.

所以 $|PF_1|+|PF_2|=2c+2\sqrt{2}c$.

又 $|PF_1|+|PF_2|=2a$, 所以 $2c+2\sqrt{2}c=2a$.

所以 $\frac{c}{a}=\sqrt{2}-1$, 即 $e=\sqrt{2}-1$.

答案：D 知识：椭圆的性质

难度：2

题目：已知 AB 为过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中心的弦,F(c,0) 为椭圆的右焦点, 则 $\triangle$AFB 面积的最大值为 (　　)

A．b^2

B．ab

C．ac

D．bc

解析：设 A 的坐标为 (x,y), 则根据对称性得 B(-x,-y)

则 $\triangle AFB$ 面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|OF|\cdot|2y|=c|y|$

由椭圆图象知, 当 A 点在椭圆的顶点时, 其 $\triangle AFB$ 面积最大值为 bc.

答案：D

知识：椭圆的性质

难度：2

题目：已知点 P 为椭圆 $x^2+2y^2=98$ 上一个动点, 点 A 的坐标为 (0,5), 求 $|PA|$ 的最值.

解析：

解：设 P(x,y), 则 $|PA|=\sqrt{x^2+(y-5)^2}=\sqrt{x^2+y^2-10y+25}$

因为点 P 为椭圆 $x^2+2y^2=98$ 上一点,

所以 $x^2=98-2y^2,-7\le y\le 7$,

则 $|PA|=\sqrt{98-2y^2+y^2-10y+25}=\sqrt{-(y+5)^2+148}$

因为 $-7\le y\le 7$,

所以当 y=-5 时,$|PA|_{max}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$;

当 y=7 时,$|PA|_{min}$=2.

知识：椭圆的性质

难度：1

题目：点 A(a,1) 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的内部, 则 a 的取值范围是 (　　)

A．$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

B．$a<-\sqrt{2}$ 或 $a>\sqrt{2}$

C．$-2<a<2$

D．$-1<a<1$

解析：由 A(a,1) 在椭圆内部, 则 $\frac{a^2}{4}+\frac{1^2}{2}<1$, 即 $a^2<2$, 则 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$.

答案：A

知识：椭圆的性质

难度：1

题目：已知直线 l 过点 (3,-1)，且椭圆 C:$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$，则直线 l 与椭圆 C 的公共点的个数为 (　　)

A．1

B．1 或 2

C．2

D．0

解析：点 (3,-1) 满足 $\frac{3^2}{25}+\frac{(-1)^2}{36}<1$，即点在椭圆内，过椭圆内部点作的直线与椭圆必有 2 个交点．

答案：C 知识：椭圆的性质

难度：1

题目：若直线 $kx-y+3=0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 有两个公共点，则实数 k 的取值范围是 (　　)

A．$-\frac{5}{4}<k<\frac{\sqrt{5}}{4}$

B．$k=\frac{\sqrt{5}}{4}$ 或 $k=-\frac{\sqrt{5}}{4}$

C．$k>\frac{\sqrt{5}}{4}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{5}}{4}$

D．$k<\frac{\sqrt{5}}{4}$ 且 $k\neq-\frac{\sqrt{5}}{4}$

解析：由 $\begin{cases} y=kx+3, \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 可得 $(4k^2+1)x^2+24kx+20=0$,

当 $\Delta=16(16k^2-5)>0$，即 $k>\frac{\sqrt{5}}{4}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{5}}{4}$ 时，直线与椭圆有两个公共点．

答案：C

知识：椭圆的性质

难度：1

题目：过椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$ 内的一点 P(2,-1) 的弦，恰好被点 P 平分，则这条弦所在的直线方程是 (　　)

A．5x-3y-13=0

B．5x+3y-13=0

C．5x-3y+13=0

D．5x+3y+13=0

解析：设弦的端点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{5}=1, \\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_1^2}{5}=1 \end{cases}$$

故 $\frac{1}{6}\times\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}+\frac{1}{5}\times\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$,

又 $x_1+x_2=4, y_1+y_2=-2$，故斜率 $k=\frac{5}{3}$.

故直线方程为 $y+1=\frac{5}{3}(x-2)$, 即 5x-3y-13=0.

答案：A

知识：椭圆的性质

难度：1

题目：已知椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点为 F_1,F_2,M 是椭圆上一点, 且 $|MF_1|-|MF_2|=1$, 则 $\triangle MF_1F_2$ 是 (　　)

A．锐角三角形

B．钝角三角形

C．直角三角形

D．等边三角形

解析：由 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 知 $a=2,b=\sqrt{3},c=1,e=\frac{1}{2}$,

则 $|MF_1|+|MF_2|=4$, 又 $|MF_1|-|MF_2|=1$,

所以 $|MF_1|=\frac{5}{2},|MF_2|=\frac{3}{2}$.

又 $|F_1F_2|=2$, 所以 $|MF_1|>|F_1F_2|>|MF_2|$.

因为 $|F_1F_2|^2+|MF_2|^2=|MF_1|^2$,

所以 $\triangle MF_1F_2$ 是直角三角形.

答案：C

知识：椭圆的性质

难度：1

题目：椭圆 $x^2+4y^2=16$ 被直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 截得的弦长为 ____________.

解析：由 $\begin{cases} x^2+4y^2=16, \\ y=\frac{1}{2}+1 \end{cases}$

消去 y 并化简得 $x^2+2x-6=0$.

设直线与椭圆的交点为 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=-2,x_1x_2=-6$.

所以弦长 $|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=$
$\sqrt{\frac{5}{4}[(x_1+x_2)^2]-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{5}{4}(4+24)}=\sqrt{35}$

答案：$\sqrt{35}$

知识：椭圆的性质

难度：1

题目：若 A 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的右顶点, 以 A 为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形, 则该三角形的面积为 ____________.

解析：由题意得, 该三角形的两直角边关于 x 轴对称, 且其中一边在过点 A(2,0), 斜率为 1 的直线上, 此直线的方程为 y=x-2, 将 y=x-2 代入 $x^2+4y^2=4$,

得 $5x^2-16x+12=0$, 解得 $x_1=2,x_2=\frac{6}{5}$. 把 $x=\frac{6}{5}$ 代入椭圆方程得 $y=\pm\frac{4}{5}$, 所以三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}\times(2-\frac{6}{5})=\frac{16}{25}$.

答案：$\frac{16}{25}$

知识：椭圆的性质

难度：1

题目：已知动点 P(x,y) 在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上若 A 点坐标为 (3,0),$|\overrightarrow{AM}|=1$, 且 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AM}=0$, 则 $|\overrightarrow{PM}|$ 的最小值是 ____________.

解析：易知点 A(3,0) 是椭圆的右焦点.

因为 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AM}=0$, 所以 $\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{AM}$.

所以 $|\overrightarrow{PM}|^2=|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AM}|^2=|\overrightarrow{AP}|^2-1$,

因为椭圆右顶点到右焦点 A 的距离最小, 故 $|\overrightarrow{AP}|_{min}=2$,

所以 $|\overrightarrow{PM}|_{min}=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$ 知识：椭圆的性质

难度：1

题目：判断直线 kx-y+3=0 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的位置关系.

解：由 $\begin{cases} y=kx+3, \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 可得 $(4k^2+1)x^2+24kx+20=0$,

所以 $\Delta=16(16k^2-5)$.

(1) 当 $\Delta=16(16k^2-5)>0$, 即 $k>\frac{\sqrt{5}}{4}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{5}}{4}$ 时,

直线 kx-y+3=0 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 相交.

(2) 当 $\Delta=16(16k^2-5)=0$, 即 $k=\frac{\sqrt{5}}{4}$ 或 $k=-\frac{\sqrt{5}}{4}$ 时,

直线 kx-y+3=0 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切.

(3) 当 $\Delta=16(16k^2-5)<0$, 即 $-\frac{\sqrt{5}}{4}<k<\frac{\sqrt{5}}{4}$ 时,

直线 kx-y+3=0 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 相离. 知识：椭圆的性质

难度：1

题目：设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>b>0) 过点 (0,4), 离心率为 $\frac{3}{5}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 求过点 (3,0) 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的中点坐标.

解析：

解：(1) 将 (0,4) 代入 C 的方程得 $\frac{16}{x^2}=1$, 所以 b=4.

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$, 得 $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{9}{25}$,

则 $1-\frac{16}{a^2}=\frac{9}{25}$, 所以 a=5,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2) 过点 (3,0) 且斜率为的直线方程为 $y=\frac{4}{5}(x-3)$. 设直线与 C 的交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

将直线方程 $y=\frac{4}{5}(x-3)$ 代入 C 的方程,

得 $\frac{x^2}{25}+\frac{(x-3)^2}{25}=1$, 即 $x^2-3x-8=0$, 解得 $x_1+x_2=3$,

所以 AB 的中点坐标 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2}{5}(x_1+x_2-6)=-\frac{6}{5}$, 即中点坐标为 $(\frac{3}{2},-\frac{6}{5})$.

知识：椭圆的性质

难度：2

题目：若直线 $y=x+t$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A,B 两点, 当 t 变化时,$|AB|$ 的最大值为 (　　)

A．2

B.$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

C.$\frac{4\sqrt{10}}{5}$

D.$\frac{8\sqrt{10}}{5}$

解析：将 y=x+t 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, 得 $5x^2+8tx+4t^2-4=0$, 则 $x_1+x_2=-\frac{8t}{5}, x_1x_2=\frac{4t^2-4}{5}$.

由 $|AB|=\sqrt{1+1^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{80-16t^2}{25}}$, 当 t=0 时 $|AB|$ 最大, 最大为 $\sqrt{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

答案：C

知识：椭圆的性质

难度：2

题目：已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 上一点, 且以点 P 及焦点 F_1,F_2 为顶点的三角形的面积等于 1, 则点 P 的坐标为 ____________.

解析：因为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$,

所以 $a^2=5,b^2=4$,

所以 $c^2=a^2-b^2=1$,

所以 $|F_1F_2|=2c=2$.

设点 P 的纵坐标 y_p,

所以 $S_{\triangle PF_1F_1}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_p|$,

所以 $|y_p|=1$,

故 $y_p=\pm1$,

当 $y_p=1$ 时, 代入 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 中, 可得 $x=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$;

当 $y_p=-1$ 时, 代入 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 中, 可得 $x=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$.

所以点 P 的坐标为 $(\frac{\sqrt{15}}{2},1)$ 或 $(-\frac{\sqrt{15}}{2},1)$ 或 $(\frac{\sqrt{15}}{2},-1)$ 或 $(-\frac{\sqrt{15}}{2},-1)$.

答案：$(\frac{\sqrt{15}}{2},1)$ 或 $(-\frac{\sqrt{15}}{2},1)$ 或 $(\frac{\sqrt{15}}{2},-1)$ 或 $(-\frac{\sqrt{15}}{2},-1)$ 知识：椭圆的性质

难度：2

题目：已知椭圆 G：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>b>0) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 右焦点为 (2,0)．斜率为 1 的直线 l 与椭圆 G 交于 A,B 两点, 以 AB 为底边作等腰三角形, 顶点为 P(-3,2)．

(1) 求椭圆 G 的方程；

(2) 求 △PAB 的面积．

解析：

解：(1) 由已知得 $c=2\sqrt{2}, \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解得 $a=2\sqrt{3}$.

又 $b^2=a^2-c^2=4$, 所以椭圆 G 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 设直线 l 的方程为 y=x+m.

由 $\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $4x^2+6mx+3m^2-12=0$.

设 A,B 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)(x_1<x_2)$,AB 中点为 $E(x_0,y_0)$, 则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3m}{4}, y_0=x_0+m=\frac{m}{4}$. 于是得 $E(-\frac{3m}{4},\frac{m}{4})$.

因为 AB 是等腰 △PAB 的底边,E 为中点, 所以 PE⊥AB.

所以 PE 的斜率 $k=\frac{2-\frac{m}{4}}{-3+\frac{3m}{4}}=-1$.

解得 m=2.

所以直线 l 的方程为 y=x+2.

此时方程　为 $4x^2+12x=0$.

解得 $x_1=-3, x_2=0$.

所以 $y_1=-1, y_2=2$. 所以 $|AB|=3\sqrt{2}$.

此时, 点 P(-3,2) 到直线 AB：x-y+2=0 的距离 $d=\frac{|-3-2+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 所以 △PAB 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{9}{2}$.

知识：双曲线的定义

难度：1

题目：双曲线方程为 $x^2-2y^2=1$, 则它的右焦点坐标为 (　　)

A.　$(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$

B. $(\frac{\sqrt{5}}{2},0)$

C. $(\frac{\sqrt{6}}{2},0)$

D. $(\sqrt{3},0)$

解析：将双曲线方程化成标准方程为 $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$,

所以 $a^2=1, b^2=\frac{1}{2}$, 所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故其右焦点坐标为 $(\frac{\sqrt{6}}{2},0)$.

答案：C

知识：双曲线的定义

难度：1

题目：若方程 $\frac{x^2}{10-k}+\frac{y^2}{5-k}=1$ 表示双曲线, 则 k 的取值范围是 (　　)

A．(5,10)

B．(-∞,5)

C．(10,+∞)

D．(-∞,5)∪(10,+∞)

解析：由题意得 (10-k)(5-k)<0, 解得 5<k<10.

答案：A

知识：双曲线的定义

难度：1

题目：已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中 $\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$, 且其右焦点为 $F_2(5,0)$, 则双曲线 C 的方程为 (　　)

A.$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

B.$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

C.$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

D.$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$

解析：由题意得 $c=5,\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$, 所以 a=4, 则 $b^2=c^2-a^2=25-16=9$. 所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

答案：C

知识：双曲线的定义

难度：1

题目：已知 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$ 为定点, 动点 P 满足 $|PF_1|-|PF_2|=2a$, 当 a=3 和 a=5 时, P 点的轨迹分别为 (　　)

A．双曲线和一条直线

B．双曲线的一支和一条直线

C．双曲线和一条射线

D．双曲线的一支和一条射线

解析：由题意知 $|F_1F_2|=10$, 因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$, 所以当 a=3 时,$2a=6<|F_1F_2|$, 为双曲线的一支, 当 a=5 时,$2a=10=|F_1F_2|$, 为一条射线.

答案：D 知识：双曲线的定义

难度：1

题目：椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{2}=1$ 有相同的焦点, 则 a 的值是 (　　)

A.$\frac{1}{2}$

B．1 或 -2

C．1 或 $\frac{1}{2}$

D．1

解析：依题意得 $\begin{cases} a > 0, \\ 0 < a^2 < 4, \\ 4 - a^2 = a + 2 \end{cases}$ 解得 a=1.

答案：D

知识：双曲线的定义

难度：1

题目：设 m 是大于 0 的常数, 若点 F(0,5) 是双曲线 $\frac{y^2}{m} - \frac{x^2}{9} = 1$ 的一个焦点, 则 m=____________.

解析：由题意可知 m+9=25, 所以 m=16.

答案：16

知识：双曲线的定义

难度：1

题目：双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2, 双曲线上的点 P 到 F_1 的距离为 12, 则点 P 到 F_2 的距离为 ____________.

解析：因为 $||PF_1| - 12| = 2a = 10$,

所以 $|PF_2| = 12 \pm 10$, 即 $|PF_2| = 2$ 或 $|PF_2| = 22$.

答案：2 或 22

知识：双曲线的定义

难度：1

题目：若双曲线 $x^2 - 4y^2 = 4$ 的左、右焦点分别是 F_1F_2, 过 F_2 的直线交右支于 A、B 两点, 若 $|AB| = 5$, 则 $\triangle AF_1B$ 的周长为 ____________.

解析：由双曲线定义可知 $|AF_1| = 2a + |AF_2| = 4 + |AF_2|; |BF_1| = 2a + |BF_2| = 4 + |BF_2|$,

所以 $|AF_1| + |BF_1| = 8 + |AF_2| + |BF_2| = 8 + |AB| = 13$.

$\triangle AF_1B$ 的周长为 $|AF_1| + |BF_1| + |AB| = 18$.

答案：18

知识：双曲线的定义

难度：1

题目：双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m-5} = 1$ 的一个焦点到中心的距离为 3, 那么 m 的取值范围.

解析：

解：(1) 当焦点在 x 轴上, 有 m>5, 则 $c^2 = m + m - 5 = 9$,

所以 m=7;

(2) 当焦点在 y 轴上, 有 m<0, 则 $c^2 = -m + 5 - m = 9$,

所以 m=-2.

综上所述,m=7 或 m=-2.

知识：双曲线的定义

难度：1

题目：已知 k 为实常数, 命题 p：方程 $(k-1)x^2+(2k-1)y^2=(2k-1)(k-1)$ 表示椭圆, 命题 q：方程 $(k-3)x^2+4y^2=4(k-3)$ 表示双曲线.

(1) 若命题 p 为真命题, 求实数 k 的取值范围；

(2) 若命题 p,q 中恰有一个为真命题, 求实数 k 的取值范围.

解析：

解：(1) 若命题 p 为真命题, 则 $\begin{cases} 2k-1>0, \\ k-1>0, \\ 2k-1\neq k-1 \end{cases}$ 解得 k>1, 即实数 k 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

(2) 当 p 真 q 假时,$\begin{cases} k>1, \\ k\geq 3 \end{cases}$ 解得 k≥3,

当 p 假 q 真时,$\begin{cases} k\leq 1, \\ k<3 \end{cases}$ 解得 k≤1,

故实数 k 的取值范围是 (-∞,1]∪[3,+∞).

知识：双曲线的定义

难度：2

题目：k<2 是方程 $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{k-2}=1$ 表示双曲线的 (　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

解析：$k<2\Rightarrow$ 方程 $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{k-2}=1$ 表示双曲线, 而方程 $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{k-2}=1$ 表示双曲线 $\Rightarrow(4-k)(k-2)<0\Rightarrow k<2$ 或 $k>4$, 故 $k<2$ 是方程 $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{k-2}=1$ 表示双曲线的充分不必要条件.

答案：A

知识：双曲线的定义

难度：2

题目：过点 $P_1(2,1)$ 和 $P_2(-3,2)$ 的双曲线的方程是 ____________.

解析：设方程为 $ax^2+by^2=1(ab<0)$, 则 $\begin{cases} 4a+b=1, \\ 9a+4b=1 \end{cases}$ 解方程组得

$\begin{cases} a = \frac{3}{7}, \\ b = -\frac{5}{7} \end{cases}$ 所以双曲线的方程是 $\frac{3x^2}{7} - \frac{5y^2}{7} = 1$.

答案：$\frac{3x^2}{7} - \frac{5y^2}{7} = 1$

知识：双曲线的定义

难度：2

题目：已知双曲线 $16x^2 - 9y^2 = 144, F_1, F_2$ 是左右两焦点, 点 P 在双曲线上, 且 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 32$, 求 $\angle F_1PF_2$.

解析：

解：由题意知 $||PF_1| - |PF_2|| = 6$,

所以 $(|PF_1| - |PF_2|)^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 36$. 所以 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 36 + 2 \times 32 = 100$.

又由题意知 $|F_1F_2| = 2c = 10$,

所以 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{100-100}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = 0$.

所以 $\angle F_1PF_2 = 90°$.

知识：双曲线的性质

难度：1

题目：双曲线 $2x^2 - y^2 = 8$ 的实轴长是 (　　)

A．2

B．$2\sqrt{2}$

C．4

D．$4\sqrt{2}$

解析：双曲线方程可变形为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$, 所以 $a^2 = 4, a = 2$, 从而 2a=4.

答案：C

知识：双曲线的性质

难度：1

题目：等轴双曲线的一个焦点是 $F_1(-6, 0)$, 则其标准方程为 (　　)

A.$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

B.$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$

C.$\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{18} = 1$

D.$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$

解析：由已知可得 c=6, 所以 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}c = 3\sqrt{2}$,

所以双曲线的标准方程是 $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1$.

答案：D 知识：双曲线的第二定义

难度：1

题目：已知双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{b}=1$(b>0) 的焦点到其渐近线的距离为 1, 则该双曲线的离心率为 (　　)

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D.$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

解析：由题意及对称性可知焦点 ($\sqrt{b^2+3}$,0) 到 $bx-\sqrt{3}y=0$ 的距离为 1, 即 $\frac{|\sqrt{b^2+3}\cdot b|}{\sqrt{b^2+3}}=1$, 所以 b=1, 所以 c=2, 又 $a=\sqrt{3}$, 所以双曲线的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

答案：C

知识：双曲线的第二定义

难度：1

题目：已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a>0,b>0) 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 (　　)

A． y=±$\frac{1}{4}$x

B． y=±$\frac{1}{3}$x

C． y=±$\frac{1}{2}$x

D． y=±x

解析：因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点在 x 轴上, 所以双曲线的渐近线方程为 y=±$\frac{b}{a}$x.

又离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, 所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

答案：C

知识：双曲线的第二定义

难度：1

题目：双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a>0,b>0) 的离心率为 2, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 则 C 的焦距等于 (　　)

A． 2

B． $2\sqrt{2}$

C． 4

D． $4\sqrt{2}$

解析：双曲线的一条渐近线方程为 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, 即 bx-ay=0, 焦点 (c,0) 到该渐近线的距离为 $\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc}{c}=\sqrt{3}$, 故 $b=\sqrt{3}$, 结合 $\frac{c}{a}=2, c^2=a^2+b^2$ 得 c=2, 则双曲线 C 的焦距为 2c=4.

答案：C 知识：双曲线的第二定义

难度：1

题目：已知双曲线 $\frac{x^2}{n}-\frac{y^2}{12-n}=1(0<n<12)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则 n 的值为____________.

解析：因为 0<n<12，所以 $a^2=n,b^2=12-n$.

所以 $c^2=a^2+b^2=12$. 所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{n}}=\sqrt{3}$.

所以 n=4.

答案：4

知识：双曲线的性质

难度：1

题目：(2016· 北京卷) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 2x+y=0，一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，则 a=______,b=____________.

解析：因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 2x+y=0，即 y=-2x，所以 $\frac{b}{a}=2$.

又双曲线的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，所以 $a^2+b^2=5$.

由　得 a=1,b=2.

答案：1　2

知识：双曲线的第二定义

难度：1

题目：双曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{k}=1$ 的离心率 $e\in(1,2)$，则 k 的取值范围是____________.

解析：双曲线方程可变为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{-k}=1$，则 $a^2=4,b^2=-k,c^2=4-k,e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{4-k}}{2}$，又因为 $e\in(1,2)$，则 $1<\frac{\sqrt{4-k}}{2}<2$，解得 -12<k<0

答案：(-12,0)

知识：双曲线的性质

难度：1

题目：求适合下列条件的双曲线的标准方程：

(1) 过点 $(3,-\sqrt{2})$，离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$；

(2) 中心在原点，焦点 F_1,F_2 在坐标轴上，实轴长和虚轴长相等，且过点 $P(4,-\sqrt{10})$.

解析：

解：(1) 若双曲线的焦点在 x 轴上，设其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.

因为双曲线过点 $(3,-\sqrt{2})$，则 $\frac{9}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1$.

又 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 故 $a^2=4b^2$.

由　得 $a^2=1,b^2=\frac{1}{4}$，故所求双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

若双曲线的焦点在 y 轴上，设其标准方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$. 同理可得 $b^2=-\frac{17}{2}$，不符合题意.

综上可知, 所求双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

(2) 由 2a=2b 得 a=b, 所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$,

所以可设双曲线方程为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$.

因为双曲线过点 P$(4,-\sqrt{10})$,

所以 16-10=λ, 即 λ=6.

所以双曲线方程为 x^2-y^2=6.

所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{6}=1$.

知识：双曲线的性质

难度：1

题目：设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$(a>0) 与直线 l：x+y=1 相交于两个不同的点 A、B.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 设直线 l 与 y 轴的交点为 P, 若 $\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$, 求 a 的值.

解析：

解：(1) 将 y=-x+1 代入双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$(a>0) 中得 $(1-a^2)x^2+2a^2x-2a^2=0$.

依题意 $\begin{cases}1-a^2\neq0,\\ \Delta=4a^4+8a^2(1-a^2)>0\end{cases}$

所以 $0<a<\sqrt{2}$ 且 a≠1.

(2) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(0,1)$,

因为 $\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$, 所以 $(x_1,y_1-1)=\frac{5}{12}(x_2,y_2-1)$.

由此得 $x_1=\frac{5}{12}x_2$.

由于 x_1,x_2 是方程 $(1-a^2)x^2+2a^2x-2a^2=0$ 的两根, 且 $1-a^2\neq0$, 所以 $\frac{17}{12}x_2=-\frac{2a^2}{1-a^2},\frac{5}{12}x_2^2=-\frac{2a^2}{1-a^2}$

消去 x_2 得 $-\frac{2a^2}{1-a^2}=\frac{289}{60}$.

由 a>0, 解得 $a=\frac{17}{13}$.

知识：双曲线的性质

难度：2

题目：若 $0<k<a^2$, 则双曲线 $\frac{x^2}{a^2-k}-\frac{y^2}{b^2+k}=1$ 与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有 (　　)

A．相同的虚线

B．相同的实轴

C．相同的渐近线

D．相同的焦点

解析：因为 $0<k<a^2$, 所以 $a^2-k>0$. 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2-k}-\frac{y^2}{b^2+k}=1$, 焦点在 x 轴上且 $c^2=a^2-k+b^2+k=a^2+b^2$. 同理双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 焦点在 x 轴上且

$c^2=a^2+b^2$, 故它们有共同的焦点.

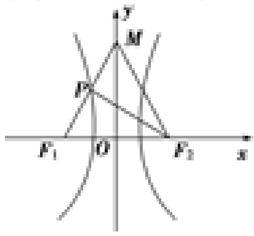
答案：D

知识：双曲线的第二定义

难度：2

题目：已知 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a>0,b>0) 的两焦点, 以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2, 若边 MF_1 的中点 P 在双曲线上, 则双曲线的离心率是____________.

解析：如图, 连接 F_2P,P 是 MF_1 中点, 则 $PF_2\perp MF_1$, 在正三角形 MF_1F_2 中,$|F_1F_2|=2c$, 则 $|PF_1|=c,|PF_2|=\sqrt{3}c$.



因为 P 在双曲线上,

所以 $|PF_2|-|PF_1|=2a$

而 $\sqrt{3}c-c=2a$

所以 $\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$.

答案：$\sqrt{3}+1$ 知识：双曲线的性质

难度：2

题目：已知直线 kx-y+1=0 与双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 相交于两个不同点 A,B.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 x 轴上的点 M(3,0) 到 A,B 两点的距离相等, 求 k 的值.

解析：

解：(1) 由 $\begin{cases} kx-y+1=0, \\ \frac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases}$ 得 $(1-2k^2)x^2-4kx-4=0$.

所以 $\begin{cases} 1-2k^2\neq 0, \\ \Delta=16k^2+16(1-2k^2)=16(1-k^2)>0 \end{cases}$

解得：-1<k<1, 且 k≠±$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{4k}{1-2k^2}$,

设 P 为 AB 中点, 则 $P(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{k(x_1+x_2)}{2}+1)$,

即 $P(\frac{2k}{1-2k^2},\frac{1}{1-2k^2})$,

因为 M(3,0) 到 A,B 两点的距离相等,

所以 $MP \perp AB$, 所以 $k_{MP} \cdot k_{AB}$=-1,

即 $k \cdot \frac{\frac{1}{1-2k^2}}{\frac{2k}{1-2k^2}-3} = -1$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = -1$(舍去),

所以 $k = \frac{1}{2}$.

知识：抛物线的定义

难度：1

题目：准线方程为 $y = \frac{2}{3}$ 的抛物线的标准方程为 (　　)

A．$x^2 = \frac{8}{3}y$

B．$x^2 = -\frac{8}{3}y$

C．$y^2 = -\frac{8}{3}x$

D．$y^2 = \frac{8}{3}x$

解析：由准线方程为 $y = \frac{2}{3}$, 知抛物线焦点在 y 轴负半轴上, 且 $\frac{p}{2} = \frac{2}{3}$, 则 $p = \frac{4}{3}$. 故所求抛物线的标准方程为 $x^2 = -\frac{8}{3}y$.

答案：B

知识：抛物线的定义

难度：1

题目：已知抛物线 $y - 2016x^2 = 0$, 则它的焦点坐标是 (　　)

A．(504,0)

B. $(\frac{1}{8064}, 0)$

C. $(0, \frac{1}{8064})$

D.$(0, \frac{1}{504})$

解析：抛物线的标准方程为 $x^2 = \frac{1}{2016}y$, 故其焦点为 $(0, \frac{1}{8064})$.

答案：C

知识：抛物线的定义

难度：1

题目：抛物线 $y = 12x^2$ 上的点到焦点的距离的最小值为 (　　)

A．3

B．6

C.$\frac{1}{48}$

D.$\frac{1}{24}$

解析：将方程化为标准形式是 $x^2 = \frac{1}{12}y$, 因为 $2p = \frac{1}{12}$, 所以 $p = \frac{1}{24}$. 故到焦点的距离最小值为 $\frac{1}{48}$.

答案：C 知识：抛物线的定义

难度：1

题目：一动圆的圆心在抛物线 $y^2 = 8x$ 上, 且动圆恒与直线 x+2=0 相切, 则动圆过定点 (　　)

A．(4,0)

B．(2,0)

C．(0,2)

D．(0,4)

解析：由题意易知直线 x+2=0 为抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线, 由抛物线的定义知动圆一定过抛物线的焦点.

答案：B

知识：抛物线的定义

难度：1

题目：抛物线 $y^2 = 2px$(p>0) 上有 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 三点,F 是焦点,$|AF|,|BF|,|CF|$ 成等差数列, 则 (　　)

A．x_1,x_2,x_3 成等差数列

B．x_1,x_3,x_2 成等差数列

C．y_1,y_2,y_3 成等差数列

D．y_1,y_3,y_2 成等差数列

解析：由抛物线的定义知 $|AF| = x_1 + \frac{p}{2}, |BF| = x_2 + \frac{p}{2}, |CF| = x_3 + \frac{p}{2}$.

因为 $|AF|,|BF|,|CF|$ 成等差数列,

所以 $2(x_2 + \frac{p}{2}) = (x_1 + \frac{p}{2}) + (x_3 + \frac{p}{2})$, 即 $2x_2 = x_1 + x_3$. 故 x_1, x_2, x_3 成等差数列. 故选 A.

答案：A

知识：抛物线的定义

难度：1

题目：抛物线 $y^2 = 2x$ 上的两点 A,B 到焦点的距离之和是 5, 则线段 AB 中点的横坐标是 ____________.

解析：由抛物线的定义知点 A,B 到准线的距离之和是 5, 则 AB 的中点到准线的距离为 $\frac{5}{2}$, 故 AB 中点的横坐标为 $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$.

答案：2

知识：抛物线的定义

难度：1

题目：抛物线过原点, 焦点在 y 轴上, 其上一点 P(m,1) 到焦点的距离为 5, 则抛物线的标准方程是 ____________.

解析：由题意, 知抛物线开口向上, 且 $1 + \frac{p}{2} = 5$, 所以 p=8, 即抛物线的标准方程是 $x^2 = 16y$.

答案：$x^2 = 16y$

知识：抛物线的定义

难度：1

题目：焦点为 F 的抛物线 $y^2=2px$(p>0) 上一点 M 在准线上的射影为 N, 若 $|MN|=p$, 则 $|FN|$=____________.

解析：由条件知 $|MF|=|MN|=p, MF\perp MN$, 在 $\triangle MNF$ 中,$\angle FMN=90°$, 得 $|FN|=\sqrt{2}p$.

答案：p

知识：抛物线的定义

难度：1

题目：求满足下列条件的抛物线的标准方程.

(1) 焦点在坐标轴上, 顶点在原点, 且过点 (-3,2)；

(2) 顶点在原点, 以坐标轴为对称轴, 焦点在直线 x-2y-4=0 上.

解析：

解：(1) 当焦点在 x 轴上时, 设抛物线的标准方程为 $y^2=-2px$(p>0). 把 (-3,2) 代入, 得 $2^2=-2p\times(-3)$, 解得 $p=\frac{2}{3}$.

所以所求抛物线的标准方程为 $y^2=-\frac{4}{3}x$.

当焦点在 y 轴上时, 设抛物线的标准方程为 $x^2=2py$(p>0).

把 (-3,2) 代入, 得 $(-3)^2=4p$, 解得 $p=\frac{9}{4}$.

所以所求抛物线的标准方程为 $x^2=\frac{9}{2}y$.

(2) 直线 x-2y-4=0 与 x 轴的交点为 (4,0), 与 y 轴的交点为 (0,-2), 故抛物线的焦点为 (4,0) 或 (0,-2).

当焦点为 (4,0) 时, 设抛物线方程为 $y^2=2px$(p>0),

则 $\frac{p}{2}=4$, 所以 $p=8$. 所以抛物线方程为 $y^2=16x$.

当焦点为 (0,-2) 时, 设抛物线方程为 $x^2=-2py$(p>0), 则 $-\frac{p}{2}=-2$, 所以 p=4. 所以抛物线方程为 $x^2=-8y$.

知识：抛物线的定义

难度：1

题目：已知动圆 M 与直线 y=2 相切, 且与定圆 C：$x^2+(y+3)^2=1$ 外切, 求动圆圆心 M 的轨迹方程.

解析：

解：设动圆圆心为 M(x,y), 半径为 r, 则由题意可得 M 到 C(0,-3) 的距离与到直线 y=3 的距离相等,

则动圆圆心的轨迹是以 C(0,-3) 为焦点,y=3 为准线的一条抛物线, 其方程为 $x^2=-12y$.

知识：抛物线的定义

难度：2

题目：点 M(5,3) 到抛物线 $y=ax^2$ 的准线的距离为 6, 那么抛物线的方程是（　　）

A．$y=12x^2$

B．$y=12x^2$ 或 $y=-36x^2$

C．$y=-36x^2$

D．$y=\frac{1}{12}x^2$ 或 $y=-\frac{1}{36}x^2$

解析：当 a>0 时, 抛物线开口向上, 准线方程为 $y=-\frac{1}{4a}$, 则点 M 到准线的距离为 $3+\frac{1}{4a}=6$, 解得 $a=\frac{1}{12}$, 抛物线方程为 $y=\frac{1}{12}x^2$. 当 a<0 时, 开口向下, 准线方程为 $y=-\frac{1}{4a}$, 点 M 到准线的距离为 $|3+\frac{1}{4a}|=6$, 解得 $a=-\frac{1}{36}$, 抛物线方程为 $y=-\frac{1}{36}x^2$.

答案：D

知识：抛物线的定义

难度：2

题目：已知直线 $l_1 4x-3y+6=0$ 和直线 $l_2 x=-1$, 抛物线 $y^2=4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值为 ____________.

解析：由已知得抛物线的焦点为 $F(1,0)$, 由抛物线的定义知：动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值即为焦点 $F(1,0)$ 到直线 $l_1 4x-3y+6=0$ 的距离, 由点到直线的距离公式得：$d=\frac{|4-0+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$, 所以动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是 2.

答案：2

知识：抛物线的定义

难度：2

题目：抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 且一个内接直角三角形, 直角顶点是原点, 一条直角边所在直线方程为 y=2x, 斜边长为 $5\sqrt{13}$, 求此抛物线方程.

解析:

解：设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的内接直角三角形为 AOB, 直角边 OA 所在直线方程为 y=2x, 另一直角边所在直线方程为 $y=-\frac{1}{2}x$. 解方程组 $\begin{cases} y=2x, \\ y^2=2px \end{cases}$ 可得点 A 的坐标为 $(\frac{p}{2},p)$；解方程组 $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x, \\ y^2=2px \end{cases}$ 可得点 B 的坐标为 (8p,-4p).

因为 $|OA|^2+|OB|^2=|AB|^2$, 且 $|AB|=5\sqrt{13}$,

所以 $(\frac{p^2}{4}+p^2)+(64p^2+16p^2)=325$.

所以 p=2, 所以所求的抛物线方程为 $y^2=4x$.

知识：抛物线的性质

难度：1

题目：已知抛物线的对称轴为 x 轴, 顶点在原点, 焦点在直线 2x-4y+11=0 上, 则此抛物线的方程是 (　　)

A．$y^2 = -11x$

B．$y^2 = 11x$

C．$y^2 = -22x$

D．$y^2 = 22x$

解析：令 y=0 得 $x = -\frac{11}{2}$,

所以抛物线的焦点为 F$(-\frac{11}{2}, 0)$,

即 $\frac{p}{2} = \frac{11}{2}$, 所以 p=11,

所以抛物线的方程是 $y^2 = -22x$.

答案：C

知识：抛物线的性质

难度：1

题目：过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点作倾斜角为 45° 的直线, 则被抛物线截得的弦长为 (　　)

A．8　　B．16　　C．32　　D．64

解析：由题可知抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 (2,0), 直线的方程为 y=x-2, 代入 $y^2 = 8x$, 得 $(x-2)^2 = 8x$, 即 $x^2 - 12x + 4 = 0$, 所以 $x_1 + x_2 = 12$, 弦长 $=x_1 + x_2 + p = 12 + 4 = 16$.

答案：B 知识：抛物线的性质

难度：1

题目：已知抛物线 $y^2 = 2px$(p>0) 的焦点为 F, 点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ 在抛物线上, 且 $2x_2 = x_1 + x_3$, 则有 (　　)

A．$|FP_1| + |FP_2| = |FP_3|$

B．$|FP_1|^2 + |FP_2|^2 = |FP_3|^2$

C．$|FP_1| + |FP_3| = 2|FP_2|$

D．$|FP_1| \cdot |FP_3| = |FP_2|^2$

解析：由焦半径公式, 知 $|FP_1| = x_1 + \frac{p}{2}, |FP_2| = x_2 + \frac{p}{2}, |FP_3| = x_3 + \frac{p}{2}$

因为 $2x_2 = x_1 + x_3$,

所以 $2(x_2 + \frac{p}{2}) = (x_1 + \frac{p}{2}) + (x_3 + \frac{p}{2})$,

即 $2|FP_2| = |FP_1| + |FP_3|$

答案：C 知识：抛物线的性质

难度：1

题目：过抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点作一条直线交抛物线于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2}$ 的值为 (　　)

A．4

B．-4

C．p^2

D．$-p^2$

解析：法一 (特例法)：当直线垂直于 x 轴时,$A(\frac{p}{2},p)$,$B(\frac{p}{2},-p)$, 则 $\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{-p^2}{\frac{p^2}{4}}=4$.

法二：由焦点弦所在直线方程与抛物线方程联立, 可得 $y_1y_2=-p^2$, 则 $\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{y_1\cdot y_2}{\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}}=\frac{4p^2}{y_1y_2}=\frac{4p^2}{-p^2}=-4$.

答案：B

知识：抛物线的性质

难度：1

题目：过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线与抛物线交于 A、B 两点, 若 A、B 在准线上的射影为 A_1、B_1, 则 $\angle A_1FB_1$ 等于 (　　)

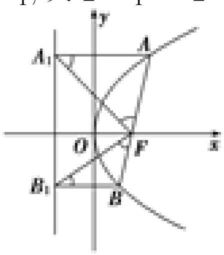
A．90°

B．45°

C．60°

D．120°

解析：如图, 由抛物线定义知 $|AA_1|=|AF|$,$|BB_1|=|BF|$, 所以 $\angle AA_1F=\angle AFA_1$, 又 $\angle AA_1F=\angle A_1FO$,



所以 $\angle AFA_1=\angle A_1FO$,

同理 $\angle BFB_1=\angle B_1FO$,

于是 $\angle AFA_1+\angle BFB_1=\angle A_1FO+\angle B_1FO=\angle A_1FB_1$. 故 $\angle A_1FB_1=90°$.

答案：A

知识：抛物线的性质

难度：1

题目：抛物线 $y^2=4x$ 的弦 AB 垂直于 x 轴, 若 $|AB|=4$, 则焦点到弦 AB 的距离为 ____________.

解析：由题意我们不妨设 A(x,2), 则 $(2)^2=4x$, 所以 $x=3$, 所以直线 AB 的方程为 $x=3$, 又抛物线的焦点为 $(1,0)$,

所以焦点到弦 AB 的距离为 2.

答案：2

知识：抛物线的性质

难度：1

题目：抛物线 $y^2=4x$ 与直线 $2x+y-4=0$ 交于两点 A 与 B,F 为抛物线的焦点, 则 $|FA|+|FB|=$____________.

解析：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

则 $|FA|+|FB|=x_1+x_2+2$.

又 $\begin{cases} y^2=4x, \\ 2x+y-4=0, \end{cases} \Rightarrow x^2-5x+4=0,$

所以 $x_1+x_2=5$,$|FA|+|FB|=x_1+x_2+2=7$.

答案：7

知识：抛物线的性质

难度：1

题目：在抛物线 $y^2=16x$ 内, 过点 (2,1) 且被此点平分的弦 AB 所在直线的方程是 ____________.

解析：显然斜率不存在时的直线不符合题意. 设直线斜率为 k, 则直线方程为 $y-1=k(x-2)$,

由 $\begin{cases} y-1=k(x-2), \\ y^2=16x, \end{cases}$

消去 x 得 $ky^2-16y+16(1-2k)=0$,

所以 $y_1+y_2=\frac{16}{k}=2$(y_1,y_2 分别是 A,B 的纵坐标),

所以 $k=8$. 代入　得 $y=8x-15$.

答案：$y=8x-15$

知识：抛物线的性质

难度：1

题目：已知过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的弦长为 36, 求弦所在的直线方程.

解析：

解：因为过焦点的弦长为 36,

所以弦所在的直线的斜率存在且不为零.

故可设弦所在直线的斜率为 k,

且与抛物线交于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点.

因为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$.

所以直线的方程为 $y=k(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 整理得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0(k\neq 0)$.

所以 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$.

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2=\frac{2k^2+4}{k^2}+2$.

又 $|AB|=36$, 所以 $\frac{2k^2+4}{k^2}+2=36$, 所以 $k=\pm$.

所以所求直线方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$ 或 $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$.

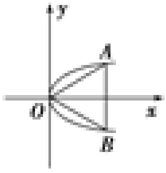
知识：抛物线的性质

难度：1

题目：正三角形的一个顶点位于坐标原点, 另外两个顶点在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上, 求这个正三角形的边长.

解析：

解：如图所示：设正三角形 OAB 的顶点 A,B 在抛物线上, 且坐标分别为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,



则 $y=2px_1$,$y=2px_2$.

又因为 $|OA|=|OB|$,

所以 ${x_1}^2+{y_1}^2={x_2}^2+{y_2}^2$, 即 ${x_1}^2-{x_2}^2+2px_1-2px_2$,

整理得 $(x_1-x_2)(x_1+x_2+2p)=0$.

因为 $x_1>0,x_2>0,2p>0$, 所以 $x_1=x_2$,

由此可得 $|y_1|=|y_2|$, 即点 A,B 关于 x 轴对称.

由此得 $\angle AOx=30°$,

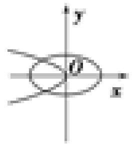
所以 $y_1=\frac{\sqrt{3}}{3}x_1$, 与 ${y_1}^2=2px_1$ 联立, 解得 $y_1=2\sqrt{3}p$.

所以 $|AB|=2y_1=4\sqrt{3}p$.

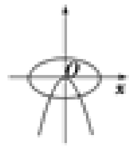
知识：抛物线的性质

难度：2

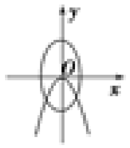
题目：在同一平面直线坐标系中, 方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0(a>b>0)$ 的曲线大致为 (　　)



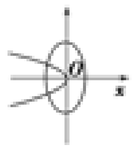
A



B



C



D

解析：将方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0$ 转化为 $\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}}=1$ 与 $y^2=-\frac{a}{b}x$. 因为 $a>b>0$, 所以 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$,

所以椭圆的焦点在 y 轴上, 抛物线的焦点在 x 轴上, 且开口向左.

答案：D

知识：抛物线的性质

难度：2

题目：设 A,B 是抛物线 $x^2=4y$ 上两点,O 为原点, 若 $|OA|=|OB|$, 且 $\triangle AOB$ 的面积为 16, 则 $\angle AOB$ 等于 ____________.

解析：由 $|OA|=|OB|$, 知抛物线上点 A,B 关于 y 轴对称.

设 $A(-a,\frac{a^2}{4}),B(a,\frac{a^2}{4}),a>0,S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{a^2}{4}=16$, 解得 $a=4$. 所以 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形,$\angle AOB=90°$.

答案：90°

知识：抛物线的性质

难度：2

题目：已知过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点, 斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线交抛物线于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)(x_1<x_2)$ 两点, 且 $|AB|=9$.

(1) 求该抛物线的方程;

(2)O 为坐标原点,C 为抛物线上一点, 若 $\vec{OC}=\vec{OA}=+\lambda\vec{OB}$, 求 λ 的值.

解析：

解：(1) 直线 AB 的方程是 $y=2\sqrt{2}(x-\frac{p}{2})$, 与 $y^2=2px$ 联立, 消去 y 得 $4x^2-5px+p^2=0$, 所以 $x_1+x_2=\frac{5p}{4}$.

由抛物线的定义得 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{5p}{4}+p=9$, 所以 $p=4$, 从而抛物线方程是 $y^2=8x$.

(2) 由于 $p=4$, 所以 $4x^2-5px+p^2=0$ 即为 $x^2-5x+4=0$, 从而 $x_1=1,x_2=4$, 于是 $y_1=-2\sqrt{2},y_2=4\sqrt{2}$, 从而 $A(1,-2\sqrt{2}),B(4,4\sqrt{2})$.

设 $C(x_3, y_3)$, 则 $\vec{OC} = (x_3, y_3) = (1, -2\sqrt{2}) + \lambda(4, 4\sqrt{2}) = (4\lambda+1, 4\sqrt{2}\lambda - 2\sqrt{2})$, 又 ${y_3}^2 = 8x_3$, 所以 $[2\sqrt{2}(2\lambda-1)]^2 = 8(4\lambda+1)$, 即 $(2\lambda-1)^2 = 4\lambda+1$, 解得 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 2$.

知识：变化率

难度：1

题目：设函数 $y = f(x)$, 当自变量由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 函数值的改变量 Δy 为 (　　)

A．$f(x_0 + \Delta x)$

B．$f(x_0) + \Delta x$

C．$f(x_0)\Delta x$

D．$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

解析：函数值的改变量为 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 所以 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

答案：D

知识：变化率

难度：1

题目：如果函数 $y = ax + b$ 在区间 $[1, 2]$ 上的平均变化率为 3, 则 a=(　　)

A．-3

B．2

C．3

D．-2

解析：根据平均变化率的定义, 可知 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2a+b)-(a+b)}{2-1} = a = 3$.

答案：C

知识：变化率

难度：1

题目：一直线运动的物体, 从时间 t 到 $t + \Delta t$ 时, 物体的位移为 Δs, 则 $\lim\limits_{\Delta x \to} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 为 (　　)

A. 从时间 t 到 $t + \Delta t$ 一段时间内物体的平均速度

B．在 t 时刻时该物体的瞬时速度

C．当时间为 Δt 时物体的速度

D．在时间 $t + \Delta t$ 时刻物体的瞬时速度

解析：由瞬时速度的求法可知,$\lim\limits_{\Delta x \to} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 表示在 t 时刻时该物体的瞬时速度.

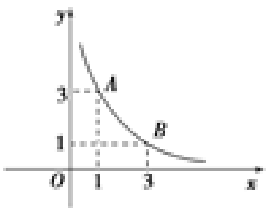
答案：B

知识：导数的概念

难度：1

题目：函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$(　　)

A．与 x_0、h 都有关
B．仅与 x_0 有关, 而与 h 无关
C．仅与 h 有关, 而与 x_0 无关
D．与 x_0、h 均无关
解析：因为 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$,
所以 $f'(x_0)$ 仅与 x_0 有关, 与 h 无关.
答案：B
知识：导数的概念
难度：1
题目：已知 $f(x)=x^2-3x$, 则 $f'(0)$=(　　)
A．$\Delta x-3$
B．$(\Delta x)^2-3\Delta x$
C．-3
D．0
解析：$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+0)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x-3)=-3$.
答案：C
知识：变化率
难度：1
题目：如图, 函数 $f(x)$ 在 A,B 两点间的平均变化率是 ____________.



解析：函数 f(x) 在 A,B 两点间的平均变化率是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{1-3}{3-1}=-1$.
答案：-1
知识：导数的概念
难度：1
题目：设函数 $y=x^2+2x$ 在点 x_0 处的导数等于 3, 则 x_0=_________.
解析：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+2(x_0+\Delta x)-x_0^2-2x_0}{\Delta x}=2x_0+2$, 又 $2x_0+2=3$, 所以 $x_0=\frac{1}{2}$.
答案：$\frac{1}{2}$
知识：导数的概念
难度：1

题目：若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 -2, 则 $\lim \frac{f(x_0-\frac{1}{2}k)-f(x_0)}{k}=$____________.

解析：

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0-\frac{1}{2}k)-f(x_0)}{k}&=-\frac{1}{2}\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0-\frac{1}{2}k)-f(x_0)}{-\frac{1}{2}k}\\&=-\frac{1}{2}f'(x_0)\\&=-\frac{1}{2}\times(-2)\\&=1\end{aligned}$$

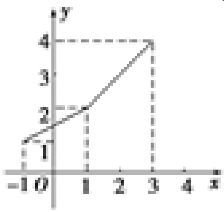
.

答案：1

知识：变化率

难度：1

题目：如图是函数 y=f(x) 的图象.



(1) 求函数 f(x) 在区间 [-1,1] 上的平均变化率；

(2) 求函数 f(x) 在区间 [0,2] 上的平均变化率.

解析：

解：(1) 函数 f(x) 在区间 [-1,1] 上的平均变化率为

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

.

(2) 由函数 f(x) 的图象知,$f(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{2},-1\le x\le 1,\\ x+1,1<x\le 3,\end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 在区间 [0,2] 上的平均变化率为 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{3-\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$.

知识：导数的概念

难度：1

题目：求函数 $y=f(x)=2x^2+4x$ 在 $x=3$ 处的导数.

解析：

解：$\Delta y = 2(3+\Delta x)^2 + 4(3+\Delta x) - (2\times 3^2 + 4\times 3) = 12\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 4\Delta x = 2(\Delta x)^2 + 16\Delta x$,

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x^2 + 16\Delta x}{\Delta x} = 2\Delta x + 16$.

所以 $y'|_{x=3} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2\Delta x + 16) = 16$.

知识：导数的概念

难度：2

题目：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 且有 $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = a\Delta x + b(\Delta x)^2$(a,b 为常数), 则（　　）

A．$f^{'}(x) = a$

B．$f^{'}(x) = b$

C．$f^{'}(x_0) = a$

D．$f^{'}(x_0) = b$

解析：$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a + b\Delta x$.

所以 $f^{'}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to x}(a + b\Delta x) = a$.

答案：C

知识：导数的概念

难度：2

题目：将半径为 R 的球加热, 若半径从 $R=1$ 到 $R=m$ 时球的体积膨胀率为 $\frac{28\pi}{3}$, 则 m 的值为 ____________.

解析：$\Delta V = \frac{4\pi}{3}m^3 - \frac{4\pi}{3}\times 1^3 = \frac{4\pi}{3}(m^3-1)$,

所以 $\frac{\Delta V}{\Delta R} = \frac{\frac{4\pi}{3}(m^2-1)}{m-a} = \frac{28}{3}\pi$.

所以 $m^2 + m + 1 = 7$.

所以 $m=2$ 或 $m=-3$(舍去).

答案：2

知识：变化率

难度：2

题目：若一物体的运动方程为 $s = \begin{cases} 29 + 3(t-3)^2, 0 \le t < 3, \\ 3t^2 + 2, t \ge 3 \end{cases}$ (路程单位：m, 时间单位：s)．求：

(1) 物体在 $t=3s$ 到 $t=5s$ 这段时间内的平均速度；

(2) 物体在 $t=1s$ 时的瞬时速度.

解：(1) 因为 $\Delta s = 3\times 5^2 + 2 - (3\times 3^2 + 2) = 48(m), \Delta t = 2s$, 所以物体在 $t=3s$ 到 $t=5s$ 这段时间内的平均速度为 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{48}{2} = 24(m/s)$.

(2) 因为从 1 s 到 $(1+\Delta t)s$ 的位移为 $\Delta s = 29 + 3[(1+\Delta t) - 3]^2 - 29 - 3\times(1-3)^2 = [3(\Delta t)^2 - 12\Delta t](m)$, 所以平均速度为 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3(\Delta)^2 - 12\Delta t}{\Delta t} = (3\Delta t - 12)(m/s)$, 则物体在

$t=1s$ 时的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3\Delta t-12)=-12(m/s)$.
知识：导函数

难度：1

题目：下列说法正确的是 (　　)

A．曲线的切线和曲线有且只有一个公共点

B．过曲线上的一点作曲线的切线, 这点一定是切点

C．若 $f'(x_0)$ 不存在, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处无切线

D．若 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x))$ 处有切线, 则 $f'(x_0)$ 不一定存在

解析：曲线的切线和曲线除有一个公共切点外, 还可能有其他的公共点, 故 A、B 错误；$f'(x_0)$ 不存在, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x))$ 的切线的斜率不存在, 但切线可能存在, 此时切线方程为 $x=x_0$, 故 C 错误,D 正确.

答案：D

知识：导函数

难度：1

题目：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $2x-y+1=0$, 则 (　　)

A．$f'(x_0)>0$

B．$f'(x_0)<0$

C．$f'(x_0)=0$

D．$f'(x_0)$ 不存在

解析：因为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数就是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率, 又切线 $2x-y+1=0$ 的斜率为 2, 所以 $f'(x_0)=2>0$.

答案：A

知识：导函数

难度：1

题目：若曲线 $f(x)=ax^2$ 在点 $(1,a)$ 处的切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行, 则 a 等于 (　　)

A．1

B.

C．-

D．-1

解析：因为

$$\begin{aligned}f^{'}(1)&=\lim_{x\to 0}\frac{a(1+\Delta x)^2-a\times 1^2}{\Delta x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2a\Delta x+a(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{x\to 0}(2a+a\Delta x)=2a,\end{aligned}$$

所以 $2a=2$, 所以 $a=1$.

答案：A

知识：导函数

难度：1

题目：$y=-\frac{1}{x}$ 在点 $(\frac{1}{2},-2)$ 处的切线方程是 (　　)

A．$y=x-2$

B．$y=x-\frac{1}{2}$

C．$y=4x-4$

D．$y=4x-2$

解析：先求 $y=-\frac{1}{x}$ 的导数：$\Delta y=-\frac{1}{x+\Delta x}+\frac{1}{x}=\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)},\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x(x+\Delta x)},\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x^2}$, 即 $y^{'}=\frac{1}{x^2}$, 所以 $y=-\frac{1}{x}$ 在点 $(\frac{1}{2},-2)$ 处的切线斜率为 $k=y^{'}|x=\frac{1}{2}=4$. 所以切线方程是 $y+2=4(x-\frac{1}{2})$,

即 $y=4x-4$.

答案：C

知识：导函数

难度：1

题目：曲线 $y=f(x)=x^3$ 在点 P 处切线的斜率为 k, 当 $k=3$ 时点 P 的坐标为 (　　)

A．(-2,-8)

B．(-1,-1) 或 (1,1)

C．(2,8)

D. $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{8})$

解析：设点 P 的坐标为 (x_0,y_0),

则

$$
\begin{aligned}
k = f^{'}(x_0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(x_0+\Delta)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{x \to 0} [(\Delta x)^2 + 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x] \\
&= 3x_0^2
\end{aligned}
$$

因为 $k=3$, 所以 $3x_0^2=3$, 所以 $x_0=1$ 或 $x_0=-1$,

所以 $y_0=1$ 或 $y_0=-1$.

所以点 P 的坐标为 (-1,-1) 或 (1,1).

答案：B

知识：导函数

难度：1

题目：已知函数 $y=f(x)$ 在点 (2,1) 处的切线与直线 $3x-y-2=0$ 平行, 则 $y'|_{x=2}$ 等于 ____________.

解析：因为直线 $3x-y-2=0$ 的斜率为 3, 所以由导数的几何意义可知 $y'|_{x=2}=3$.

答案：3

知识：导函数

难度：1

题目：曲线 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 的平行于直线 $x-y+1=0$ 的切线方程为 ____________.

解析：$f^{'}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+\Delta x)^2-\frac{1}{2}x^2}{\Delta x}=x$. 因为直线 $x-y+1=0$ 的斜率为 1, 所以 $x=1$, 所以 $f(1)=\times 1=\frac{1}{2}$, 切点为 $(1,\frac{1}{2})$. 故切线方程为 $y-\frac{1}{2}=1(x-1)$, 即 $x-y-\frac{1}{2}=0$.

答案：$x-y-\frac{1}{2}=0$

知识：导函数

难度：1

题目：已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\frac{1}{2}x+2$, 则 $f(1)+f^{'}(1)$=____________.

解析：由导数的几何意义, 得 $f^{'}(1)=\frac{1}{2}$, 又切点在切线上, 故 $f(1)=\frac{1}{2}\times 1+2=\frac{5}{2}$, 所以 $f(1)+f^{'}(1)=3$.

答案：3

知识：导函数

难度：1

题目：在抛物线 $y=x^2$ 上哪一点处的切线平行于直线 $4x-y+1=0$？哪一点处的切线垂直于这条直线？

解析：

解：$y'=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

设抛物线上点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线平行于直线 $4x-y+1=0$,

则 $y'|_{x=x_0}=2x_0=4$, 解得 $x_0=2$.

所以 $y_0=x_0^2=4$, 即 $P(2,4)$.

设抛物线上点 $Q(x_1,y_1)$ 处的切线垂直于直线 $4x-y+1=0$,

则 $y'|_{x=x_1}=2x_1=-\frac{1}{4}$, 解得 $x_1=-\frac{1}{8}$.

所以 $y_1=x_1^2=\frac{1}{64}$, 即 $Q(-\frac{1}{8},\frac{1}{64})$.

故抛物线 $y=x^2$ 在点 (2,4) 处的切线平行于直线 $4x-y+1=0$, 在点 $(-\frac{1}{8},\frac{1}{64})$ 处的切线垂直于直线 $4x-y+1=0$.

知识：导函数

难度：1

题目：已知曲线 $y=\frac{1}{t-x}$ 上两点 $P(2,-1),Q(-1,\frac{1}{2})$.

(1) 求曲线在点 P,Q 处的切线的斜率；

(2) 求曲线在点 P,Q 处的切线方程.

解析：

解：将 (2,-1) 代入 $y=\frac{1}{t-x}$, 得 $t=1$,

所以 $y=\frac{1}{1-x}$.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{1-(x+\Delta x)}-\frac{1}{1-x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{[1-(x+\Delta x)](1-x)\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(1-x-\Delta x)(1-x)} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

(1) 曲线在点 P 处的切线斜率为 $y'|_{x=2}=\frac{1}{(1-2)^2}=1$；曲线在点 Q 处的切线斜率为 $y'|_{x=-1}=\frac{1}{4}$.

(2) 曲线在点 P 处的切线方程为 $y-(-1)=x-2$, 即 $x-y-3=0$, 曲线在点 Q 处的切线方程为 $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}[x-(-1)]$, 即 $x-4y+3=0$.

知识：导函数

难度：2

题目：已知直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=x^3+ax+b$ 相切于点 (1,3), 则 b 的值为 (　　)

A．3

B．-3

C．5

D．-5

解析：点 (1,3) 既在直线上, 又在曲线上．由于 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+a(x+\Delta x)+b-(x^2+ax+b)}{\Delta x}=3x^2+a$, 所以 $y'|_{x=1}=3+a=k$, 将 (1,3) 代入 $y=kx+1$, 得 $k=2$, 所以 $a=-1$, 又点 (1,3) 在曲线 $y=x^3+ax+b$ 上, 故 $1+a+b=3$, 又由 $a=-1$, 可得 $b=3$.

答案：A

知识：导函数

难度：2

题目：曲线 $f(x)=\frac{9}{x}$ 在点 (3,3) 处的切线的倾斜角等于 ____________.

解析：

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=9\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}\\&=-9\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(x+\Delta x)x}=-\frac{9}{x^2}\end{aligned}$$

, 所以 $f'(3)=-\frac{9}{9}=-1$, 又因为直线的倾斜角范围是 $[0°,180°)$, 所以倾斜角为 $135°$.

答案：135°

知识：导函数

难度：2

题目：设函数 $f(x)=x^3+ax^2-9x-1(a<0)$, 若曲线 $y=f(x)$ 的斜率最小的切线与直线 $12x+y=6$ 平行, 求 a 的值.

解析：

解：因为

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=(x_0+\Delta x)^3+a(x_0+\Delta x)^2-9(x_0+\Delta x)-1-(x+ax-9x_0-1)\\&=(3x+2ax_0-9)\Delta x+(3x_0+a)(\Delta x)^2+(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\end{aligned}$$

,

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+2ax_0-9+(3x_0+a)\Delta x+(\Delta x)^2$.

当 Δx 无限趋近于 0 时,

无限趋近于 $3x_0^2+2ax_0-9$,

即 $f'(x_0)=3x_0^2+2ax_0-9$,

所以 $f'(x_0)=3(x_0+\frac{a}{3})^2-9-\frac{a^2}{3}$.

当 $x_0=-\frac{a}{3}$ 时,

$f'(x_0)$ 取最小值 $-9-\frac{a^2}{3}$.

因为斜率最小的切线与直线 $12x+y=6$ 平行,

所以该切线斜率为 -12.

所以 $-9-\frac{a^2}{3}=-12$.

解得 $a=\pm3$. 又 a<0,

所以 $a=-3$.

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：某物体运动方程为 $y=4.9t^2$(其中 y 的单位为米,t 的单位为秒), 则该物体在 1 秒末的瞬时速度为 (　　)

A．4.9 米/秒

B．9.8 米/秒

C．49 米/秒

D．2.45 米/秒

解析：由题意知 $y'=9.8t$, 则 $y'|_{t=1}=9.8$, 故选 B.

答案：B

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：$f(x)=x^3, f'(x_0)=6$, 则 x_0 等于 (　　)

A. $\sqrt{2}$ B．- $\sqrt{2}$ C．$\pm\sqrt{2}$ D．±1

解析：$f'(x)=3x^2$, 由 $f'(x_0)=6$, 知 $3x_0^2=6$, 所以 $x_0=\pm\sqrt{2}$.

答案：C

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：若指数函数 $f(x)=a^x(a>0, a\neq1)$ 满足 $f'(1)=\ln 27$, 则 $f'(-1)$=(
)

A．2

B．$\ln 3$

C. $\frac{\ln 3}{3}$

D．$-\ln 3$

解析：$f'(x)=a^x\ln a$, 则 $f'(1)=a\ln a=\ln 27$,

解得 $a=3$, 所以 $f'(x)=3^x\ln 3$.

故 $f'(-1)=3^{-1}\ln 3=\frac{\ln 3}{3}$.

答案：C

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：曲线 $y=e^x$ 在点 $(2,e^2)$ 处的切线与坐标轴所围成的三角形的面积为(　　)

A.$\frac{9}{4}e^2$

B．$2e^2$

C．e^2

D.$\frac{e^2}{2}$

解析：因为 $y=e^x$, 所以 $y'=e^x$, 所以 $y'|_{x=2}=e^2=k$, 所以切线方程为 $y-e^2=e^2(x-2)$, 即 $y=e^2x-e^2$. 在切线方程中, 令 $x=0$, 得 $y=e^2x-e^2$, 令 $y=0$, 得 $x=1$, 所以 $S_{三角形}=\frac{1}{2}\times|-e^2|\times 1=\frac{e^2}{2}$.

答案：D

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：若 $f_0(x)=\sin x, f_1(x)=f_0'(x), f_2(x)=f_1'(x), \ldots, f_{n+1}(x)=f_n'(x), n\in N, f_{2\ 013}(x)$=(　)

A．$\sin x$

B．$-\sin x$

C．$\cos x$

D．$-\cos x$

解析：因为 $f_1(x)=(\sin x)'=\cos x, f_2(x)=(\cos x)'=-\sin x, f_3(x)=(-\sin x)'=-\cos x, f_4(x)=(-\cos x)'=\sin x, f_5(x)=(\sin x)'=\cos x$, 所以循环周期为 4, 因此 $f_{2\ 013}(x)=f_1(x)=\cos x$.

答案：C

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：已知点 P 在曲线 $f(x)=x^4-x$ 上, 曲线在点 P 处的切线平行于直线 $3x-y=0$, 则点 P 的坐标为 ____________.

解析：设点 P 的坐标为 (x_0,y_0),

因为 $f'(x)=4x^3-1$, 所以 $4x_0^3-1=3$, 所以 $x_0=1$.

所以 $y_0=1^4-1=0$, 所以即得 P(1,0).

答案：(1,0)

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3xf'(0)$, 则 $f'(1)=$____________.

解析：由于 $f'(0)$ 是一常数, 所以 $f'(x)=x^2+3f'(0)$, 令 $x=0$, 则 $f'(0)=0$, 所以 $f'(1)=1^2+3f'(0)=1$.

答案：1

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：曲线 $y=\frac{x}{x-2}$ 在点 (1,-1) 处的切线方程为 ____________.

解析：因为 $y'=\frac{x-2-x}{(x-2)^2}=\frac{-2}{(x-2)}$, 所以曲线在点 (1,-1) 处的切线的斜率 $k=\frac{-2}{(1-2)^2}=-2$, 故所求切线方程为 $y+1=-2(x-1)$, 即 $2x+y-1=0$.

答案：$2x+y-1=0$

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：求下列函数的导数：

(1)$y=(2x^2+3)(3x-1)$；

(2)$y=(\sqrt{x}-2)^2$；

(3)$y=x-\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$.

解析：

解：(1) 法一：$y'=(2x^2+3)'(3x-1)+(2x^2+3)(3x-1)'=4x(3x-1)+3(2x^2+3)=18x^2-4x+9$.

法二：因为 $y=(2x^2+3)(3x-1)=6x^3-2x^2+9x-3$,

所以 $y'=(6x^3-2x^2+9x-3)'=18x^2-4x+9$.

(2) 因为 $y=(\sqrt{2}-2)^2=x-4\sqrt{4}+4$,

所以 $y'=x'-(4\sqrt{x})'+4'=1-4\times x-\frac{1}{2}=1-2x-\frac{1}{2}$.

(3) 因为 $y=x-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=x-\frac{1}{2}\sin x$,

所以 $y'=x'-(\frac{1}{2}\sin x)'=1-\frac{1}{2}\cos x$.

知识：常用函数的导数

难度：1

题目：设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+bx+c$, 其中 $a>0$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$, 确定 b,c 的值.

解：由题意得 $f(0)=c,f'(x)=x^2-ax+b$,

由切点 P(0,f(0)) 既在曲线 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+bx+c$ 上又在切线 $y=1$ 上知 $\begin{cases}f'(0)=0,\\ f(0)=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0^2-a\times 0+b=0,\\ \frac{1}{3}\times 0^2-\frac{a}{2}\times 0^2+b\times 0+c=1,\end{cases}$ 故 $b=0,c=1$.

知识：常用函数的导数

难度：2

题目：已知点 P 在曲线 $y=\frac{4}{e^x+1}$ 上,α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 α 的取值范围是（　　）

A．$[0,\frac{\pi}{4})$

B．$[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$

C．$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$

D．$[\frac{3\pi}{4},\pi)$

解析：$y'=-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=-\frac{4e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$,

设 $t=e^x\in(0,+\infty)$, 则 $y'=-\frac{4t}{t^2+2t+1}=-\frac{4}{t+\frac{1}{t}+2}$,

因为 $t+\frac{1}{t}\geq 2$, 所以 $y'\in[-1,0),\alpha\in[\frac{3\pi}{4},\pi)$.

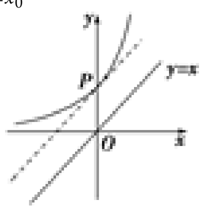
答案：D

知识：常用函数的导数

难度：2

题目：点 P 是曲线 $y=ex$ 上任意一点, 则点 P 到直线 $y=x$ 的最小距离为 ＿＿＿＿＿＿.

解析：根据题意设平行于直线 $y=x$ 的直线与曲线 $y=e^x$ 相切于点 (x_0,y_0), 该切点即为与 y=x 距离最近的点, 如图, 则在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率为 1, 即 $y'|_{x=x_0}=1$.



因为 $y'=(e^x)'=e^x$, 所以 $ex_0=1$,

得 $x_0=0$, 代入 $y=e^x$, 得 $y_0=1$, 即 P(0,1).

利用点到直线的距离公式得距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：

知识：常用函数的导数

难度：2

题目：设函数 $f(x)=ax-\frac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $7x-4y-12=0$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 证明：曲线 $y=f(x)$ 上任意一点处的切线与直线 $x=0$ 和直线 $y=x$ 所围成的三角形的面积为定值, 并求此定值.

解析：

(1) 解：$f'(x)=a+\frac{b}{x^2}$.

因为点 $(2,f(2))$ 在切线 $7x-4y-12=0$ 上,

所以 $f(2)=\frac{2\times7-12}{4}=\frac{1}{2}$.

又曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $7x-4y-12=0$,

所以 $\begin{cases} f'(2)=\frac{7}{4}, \\ f(2)=\frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{4}=\frac{7}{4}, \\ 2a-\frac{b}{2}=\frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=3, \end{cases}$

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x-\frac{3}{x}$.

(2) 证明：设 $(x_0,x_0\frac{3}{x_0})$ 为曲线 $y=f(x)$ 上任意一点, 则切线斜率 $k=1+\frac{3}{x_0^2}$, 切线方程为 $y-(x_0-\frac{3}{x_0})=(1+\frac{3}{x_0^2})(x-x_0)$, 令 $x=0$, 得 $y=-\frac{6}{x_0}$.

由 $\begin{cases} y-(x_0-\frac{3}{x_0^2})=(1+\frac{3}{x_0^2})(x-x_0), \\ y=x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2x_0, \\ y=2x_0. \end{cases}$ 所以曲线 $y=f(x)$ 上任意一点处的切线与直线 $x=0$ 和直线 $y=x$ 所围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}|2x_0||-\frac{6}{x_0}|=6$, 为定值.

知识：函数的单调性与导数

难度：1

题目：函数 $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调减区间是 (　　)

A．$(0,1)$

B．$(0,1)\cup(-\infty,-1)$

C．$(-\infty,1)$

D．$(-\infty,+\infty)$

解析：因为 $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

所以 $y'=x-\frac{1}{x}$, 令 $y'<0$, 即 $x-\frac{1}{x}<0$,

解得：$0<x<1$ 或 $x<-1$.

又因为 $x>0$, 所以 $0<x<1$.

答案：A

知识：函数的单调性与导数

难度：1

题目：下列函数中, 在 $(0,+\infty)$ 内为增函数的是 (　　)

A．$y=\sin x$

B．$y=xe^2$

C．$y=x^3-x$

D．$y=\ln x-x$

解析：显然 $y=sinx$ 在 $(0,+\infty)$ 上既有增又有减, 故排除 A；对于函数 $y=xe^2$, 因 e^2 为大于零的常数, 不用求导就知 $y=xe^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内为增函数；

对于 C,$y'=3x^2-1=3(x+\frac{\sqrt{3}}{3})(x-\frac{\sqrt{3}}{3})$,

故函数在 $(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ 上为增函数,

在 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上为减函数；对于 D,$y'=\frac{1}{x}-1(x>0)$.

故函数在 $(1,+\infty)$ 上为减函数, 在 $(0,1)$ 上为增函数.

答案：B

知识：函数的单调性与导数

难度：1

题目：函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 其中 a,b,c 为实数, 当 $a^2-3b<0$ 时,f(x) 是（　　）

A．增函数

B．减函数

C．常数

D．既不是增函数也不是减函数

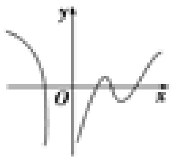
解析：求函数的导函数 $f'(x)=3x^2+2ax+b$, 导函数对应方程 $f'(x)=0$ 的 $\Delta=4(a^2-3b)<0$, 所以 $f'(x)>0$ 恒成立, 故 f(x) 是增函数.

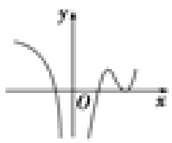
答案：A

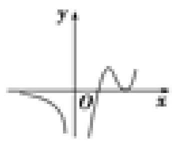
知识：函数的单调性与导数

难度：1

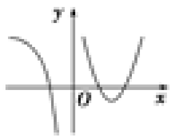
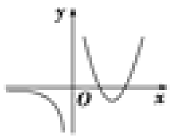
题目：设函数 f(x) 在定义域内可导,y=f(x) 的图象如图所示, 则 y=f'(x) 的图象可能为（　　）







A　　　　　　　　B

C D

解析：由题图找出函数 f(x) 的增 (减) 区间, 则其导函数 f’(x) 在相应区间上的函数值为正 (负), 即导函数在相应区间上的图象在 x 轴的上 (下) 方, 易知 D 正确.

答案：D

知识：函数的单调性与导数

难度：1

题目：若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 (1,+∞) 上单调递增, 则 k 的取值范围是 (　　)

A．(-∞,-2]

B．(-∞,-1]

C．[2,+∞)

D．[1,+∞)

解析：依题意得 $f'(x)=k-\frac{1}{x}\geq 0$ 在 (1,+∞) 上恒成立, 即 $k\geq\frac{1}{x}$ 在 (1,+∞) 上恒成立, 因为 $x>1$, 所以 $0<\frac{1}{x}<1$,

所以 $k\geq 1$, 故选 D.

答案：D

知识：函数的单调性与导数

难度：1

题目：函数 $f(x)=x-2\sin x$ 在 (0,π) 上的单调递增区间为 ____________.

解析：令 $f'(x)=1-2\cos x>0$, 得 $\cos x<\frac{1}{2}$, 又 $x\in(0,\pi)$, 所以 $\frac{\pi}{3}<x<\pi$.

答案：$(\frac{\pi}{3},\pi)$

知识：函数的单调性与导数

难度：1

题目：已知函数 $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$, 则 f(2),f(3),f(e) 按从小到大排列应为 ____________ .

解析：因为在定义域 (0,+∞) 上 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{x}>0$,

所以 f(x) 在 (0,+∞) 上是增函数, 所以有 f(2)<f(e)<f(3).

答案：f(2)<f(e)<f(3)

知识：函数的单调性与导数

难度：1

题目：函数 $f(x)=x^3+x^2+mx+1$ 是 R 上的单调递增函数, 则 m 的取值范围为 ____________.

解析：因为 $f(x)=x^3+x^2+mx+1$, 所以 $f'(x)=3x^2+2x+m$, 由题意可知 $f'(x)\geq 0$ 在 R 上恒成立, 所以 $\Delta=4-12m\leq 0$, 即 $m\geq\frac{1}{3}$.

答案：$[\frac{1}{3},=\infty)$

知识：函数的单调性与导数

难度：1

题目：证明：函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在区间 (0,2) 内是增函数.

解析：

证明：$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

因为 0<x<2, 所以 $\ln x<\ln 2<1$, 故 $1-\ln x>0$.

所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$.

根据导数与函数单调性的关系,

得函数 f(x)= 在区间 (0,2) 内是增函数.

知识：函数的单调性与导数

难度：1

题目：已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的图象经过点 P(0,2), 且在点 M(-1,f(-1)) 处的切线方程为 $6x-y+7=0$.

(1) 求函数 y=f(x) 的解析式；

(2) 求函数 y=f(x) 的单调区间.

解析：

解：(1) 由 y=f(x) 的图象经过点 P(0,2), 知 d=2,

所以 $f(x)=x^3+bx^2+cx+2,f'(x)=3x^2+2bx+c$.

由在点 M(-1,f(-1)) 处的切线方程为 $6x-y+7=0$,

如 $-6-f(-1)+7=0$, 即 f(-1)=1,f'(-1)=6.

所以即

解得 b=c=-3.

故所求的解析式是 $f(x)=x^3-3x^2-3x+2$.

(2)$f'(x)=3x^2-6x-3$, 令 f'(x)>0, 得 $x<1-\sqrt{2}$ 或 $x>1+\sqrt{2}$;

令 f'(x)<0, 得 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$.

故 $f(x)=x^3-3x^2-3x+2$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1-\sqrt{2})$,$(1+\sqrt{2},+\infty)$, 单调递减区间为 $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

知识：函数的单调性与导数

难度：2

题目：设 f(x),g(x) 在 [a,b] 上可导, 且 f'(x)>g'(x), 则当 a<x<b 时, 有 (
)

A．f(x)>g(x)

B．f(x)<g(x)

C．f(x)+g(a)>g(x)+f(a)

D．f(x)+g(b)>g(x)+f(b)

解析：因为 f'(x)-g'(x)>0, 所以'>0, 所以 f(x)-g(x) 在 [a,b] 上是增函数,

所以当 a<x<b 时 f(x)-g(x)>f(a)-g(a),

所以 f(x)+g(a)>g(x)+f(a).

答案：C

知识：函数的单调性与导数

难度：2

题目：若函数 $f(x) = x^3+bx^2+cx+d$ 的单调递减区间为 (-1,2), 则 b=____________,c=____________.

解析：$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$, 由题意知 -1<x<2 是不等式 f'(x)<0 的解, 即 -1,2 是方程 $3x^2 + 2bx + c = 0$ 的两个根, 把 -1,2 分别代入方程, 联立解得 $b = -\frac{3}{2}, c = -6$.

答案：$-\frac{3}{2}$ -6

知识：函数的单调性与导数

难度：2

题目：已知函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$ 在 R 上是减函数, 求 a 的取值范围.

解析：

解：$f'(x) = 3ax^2 + 6x - 1$.

由已知得 $f'(x) \leq 0$ 在 R 上恒成立, 即 $3ax^2 + 6x - 1 \leq 0$ 在 R 上恒成立, 当 $a \geq 0$ 时, 不满足题意, 所以 a<0 且 $\Delta = 36 + 12a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -3$.

当 a=-3 时,$f(x) = -3x^3 + 3x^2 - x + 1 = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 + \frac{8}{9}$, 由函数 $y = -x^3$ 在 R 上的单调性可知当 a=-3 时,f(x) 在 R 上是减函数.

综上,a 的取值范围是 (-∞,-3].

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：可导 “函数 y=f(x) 在一点的导数值为 0” 是 “函数 y=f(x) 在这点取得极值” 的 (　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

解析：对于 $f(x)=x^3, f'(x)=3x^2, f'(0)=0$, 不能推出 f(x) 在 x=0 处取极值, 反之成立.

答案：B

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：已知可导函数 f(x),x∈R, 且仅在 x=1 处,f(x) 存在极小值, 则 (　　)

A．当 x∈(-∞,1) 时,f’(x)>0；当 x∈(1,+∞) 时,f’(x)<0

B．当 x∈(-∞,1) 时,f’(x)>0；当 x∈(1,+∞) 时,f’(x)>0

C．当 x∈(-∞,1) 时,f’(x)<0；当 x∈(1,+∞) 时,f’(x)>0

D．当 x∈(-∞,1) 时,f’(x)<0；当 x∈(1,+∞) 时,f’(x)<0

解析：因为 f(x) 在 x=1 处存在极小值,

所以 x<1 时,f’(x)<0,x>1 时,f’(x)>0.

答案：C

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：函数 $y=x^3-3x^2-9x(-2<x<2)$ 有 (　　)

A．极大值 5, 极小值 -27

B．极大值 5, 极小值 -11

C．极大值 5, 无极小值

D．极小值 -27, 无极大值

解析：由 $y'=3x^2-6x-9=0$, 得 x=-1 或 x=3,

当 x<-1 或 x>3 时,y’>0；当 -1<x<3 时,y’<0.

故当 x=-1 时, 函数有极大值 5；x 取不到 3, 故无极小值.

答案：C

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：已知 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x+1$ 有极大值和极小值, 则 a 的取值范围为 (　　)

A．-1<a<2

B．-3<a<6

C．a<-1 或 a>2

D．a<-3 或 a>6

解析：$f'(x)=3x^2+2ax+(a+6)$, 因为 f(x) 既有极大值又有极小值, 那么 $\Delta=(2a)^2-4\times3\times(a+6)>0$, 解得 a>6 或 a<-3.

答案：D

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：设 a∈R, 若函数 $y=e^x+ax$,x∈R 有大于零的极值点, 则 (　　)

A．a<-1

B．a>-1

C．a>-

D．a<-

解析：$y'=e^x+a=0,e^x=-a$,

因为 x>0, 所以 e^x>1, 即 -a>1, 所以 a<-1.

答案：A

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：函数 $f(x)=x^3-6x+a$ 的极大值为 ____________, 极小值为 ____________.

解析：$f'(x)=x^2-6$

令 f'(x)=0, 得 $x=-\sqrt{2}$ 或 $x=\sqrt{2}$,

所以 $f(x)_{极大值}=f(-\sqrt{2})=a+4\sqrt{2}$,

$f(x)_{极小值}=f(\sqrt{2})=a-4\sqrt{2}$.

答案：$a+4\sqrt{2},a-4\sqrt{2}$.

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：已知函数 $y=x^3+ax^2+bx+27$ 在 x=-1 处取极大值, 在 x=3 处取极小值, 则 a=____________,b=____________.

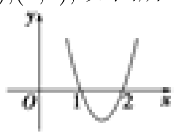
解析：$y'=3x^2+2ax+b$, 根据题意知,-1 和 3 是方程 $3x^2+2ax+b=0$ 的两根, 由根与系数的关系可求得 a=-3,b=-9. 经检验, 符合题意.

答案：-3　-9

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, 其导函数 y=f'(x) 的图象经过点 (1,0),(2,0), 如图所示.



则下列说法中不正确的是 ____________.

当 $x=\frac{3}{2}$ 时, 函数取得极小值;

f(x) 有两个极值点;

当 x=2 时, 函数取得极小值;

当 x=1 时, 函数取得极大值.

解析：由图象可知当 x∈(-∞,1) 时,$f'(x) > 0$；当 x∈(1,2) 时,f'(x)<0；当 x∈(2,+∞) 时,f'(x)>0, 所以 f(x) 有两个极值点 1 和 2, 且当 x=2 时, 函数取得极小值, 当 x=1 时, 函数取得极大值．故只有 不正确．

答案：

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：已知 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$, 求 f(x) 的极大值与极小值．

解析：

解：由已知得 f(x) 的定义域为 R.

$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

令 f'(x)=0, 得 x=-1 或 x=2.

当 x 变化时,f'(x) 与 f(x) 的变化情况如下表：

x	(-∞,-1)	-1	(-1,2)	2	(2,+∞)
f'(x)	+	0	-	0	+
f'(x)	↗	极大值	↘	极小值	↗

因此, 当 x=-1 时,f(x) 取得极大值, 且极大值为 $f(-1) = \times(-1)^3 - \times(-1)^2 - 2\times(-1) = \frac{7}{6}$；

当 x=2 时,f(x) 取得极小值, 且极小值为 $f(2) = \frac{1}{3}\times 2^3 - \frac{1}{2}\times 2^2 - 2\times 2 = -\frac{10}{3}$.

从而 f(x) 的极大值为 $\frac{10}{3}$, 极小值为 $-\frac{10}{3}$.

知识：函数的最值与导数

难度：1

题目：已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 x=1 处取极值 10, 求 f(2) 的值．

解析：

解：$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

由题意得 $\begin{cases} f(1) = 10, \\ f'(1) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^2 + a + b + 1 = 10, \\ 2a + b + 3 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 4, \\ b = -11, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -3, \\ b = 3. \end{cases}$ 当 a=4,b=-11 时, 令 f'(x)=0, 得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{11}{3}$.

当 x 变化时,f'(x),f(x) 的变化情况如下表：

x		-	(-,1)	1	(1,+∞)
f'(x)	+	0	-	0	+
f'(x)	↗	极大值	↘	极小值	↗

显然函数 f(x) 在 x=1 处取极小值, 符合题意, 此时 f(2)=18.

当 a=-3,b=3 时,$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$,

所以 f(x) 在 x=1 处没有极值, 不合题意.

综上可知 f(2)=18.

知识：函数的最值与导数

难度：2

题目：等差数列 a_n 中的 $a_1, a_{4\ 031}$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ 的极值点, 则 $\log_2 a_{2\ 016}$ 的值为 (　　)

A．2

B．3

C．4

D．5

解析：因为 $f'(x) = x^2 - 8x + 6$, 且 $a_1, a_{4\ 031}$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ 的极值点, 所以 $a_1, a_{4\ 031}$ 是方程 $x^2 - 8x + 6 = 0$ 的两个实数根, 则 $a_1 + a_{4\ 031} = 8$. 而 a_n 为等差数列, 所以 $a_1 + a_{4\ 031} = 2a_{2\ 016}$, 即 $a_{2\ 016} = 4$, 从而 $\log_2 a_{2\ 016} = \log_2 4 = 2$. 故选 A.

答案：A