知识：基本不等式

难度：1

题目：下列命题中不正确的是 (　　)

A. 若 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$，则 a>b B. 若 a>b，c>d，则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

C. 若 a>b>0，c>d>0，则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$ D. 若 a>b>0，ac>bd，则 c>d

解析：当 a>b>0，ac>ad 时，c，d 的大小关系不确定.

答案：D

知识：基本不等式

难度：1

题目：已知 a>b>c，则下列不等式正确的是 (　　)

A.ac>bc　　　　　　　　B.$ac^2>bc^2$

C.b(a-b)>c(a-b) D.|ac|>|bc|

解析：a>b>c⇒a-b>0⇒(a-b)b>(a-b)c.

答案：C

知识：基本不等式

难度：1

题目：如果 a<b<0，那么下列不等式成立的是 (　　)

A.$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ B.$ab<b^2$

C.$-ab<-a^2$ D.$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$

解析：对于 A 项，由 a<b<0，得 b-a>0，ab>0，故 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 A 项错误；对于 B 项，由 a<b<0，得 b(a-b)>0，$ab>b^2$，故 B 项错误；对于 C 项，由 a<b<0，得 a(a-b)>0，$a^2>ab$，即 $-ab>-a^2$，故 C 项错误；对于 D 项，由 a<b<0，得 a-b<0，ab>0，故 $-\frac{1}{a}-(-\frac{1}{b})=\frac{a-b}{ab}<0$，$-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$ 成立，故 D 项正确.

答案：D

知识：基本不等式

难度：1

题目：若 a ＞ 0 ＞ b ＞ -a，c ＜ d ＜ 0，则下列结论：ad ＞ bc；$\frac{a}{d}+\frac{b}{c}$ ＜ 0；a-c ＞ b-d；a(d-c) ＞ b(d-c) 中，成立的个数是 (　　)

A.1 B.2

C.3 D.4

解析：∵a ＞ 0 ＞ b，c ＜ d ＜ 0，∴ad ＜ 0，bc ＞ 0，∴ad ＜ bc，故 不成立．∵a ＞ 0 ＞ b ＞ -a，∴a ＞ -b ＞ 0，∵c ＜ d ＜ 0，∴-c ＞ -d ＞ 0，∴a(-c) ＞ (-b)(-d)，∴ac ＋ bd ＜ 0，∴$\frac{a}{d}+\frac{b}{c}=\frac{ac+bd}{cd}$ ＜ 0，故 成立．∵c ＜ d，∴-c

＞-d，∵a ＞ b，∴a ＋ (-c) ＞ b ＋ (-d)，a-c ＞ b-d，故　成立．∵a ＞ b，d-c ＞ 0，∴a(d-c) ＞ b(d-c)，故　成立．成立的个数为 3.

答案：C

知识：基本不等式

难度：1

题目：给出四个条件：

b>0>a； 0>a>b； a>0>b； a>b>0.

能得出 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的有 ____________(填序号).

解析：由 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，得 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$，$\frac{b-a}{ab}<0$，故　可推得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立.

答案：

知识：基本不等式

难度：1

题目：设 a>b>1，c<0，给出下列三个结论： $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$； $a^c<b^c$； $\log_b$(a-c)>$\log_a$(b-c)．

其中所有的正确结论的序号是 ____________.

解析：由 a>b>1，c<0，得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$；幂函数 y ＝ x^c(c<0) 是减函数，所以 $a^c<b^c$；因为 a-c>b-c，所以 $\log_b$(a-c)>$\log_a$(a-c)>$\log_a$(b-c)，　均正确.

答案：

知识：基本不等式

难度：1

题目：已知 -1<x ＋ y<4 且 2<x-y<3，则 z ＝ 2x-3y 的取值范围是 ____________.

解析：设 z ＝ 2x-3y ＝ m(x ＋ y) ＋ n(x-y)，即 2x-3y ＝ (m ＋ n)x ＋ (m-n)y.

$\therefore\left\{\begin{array}{c} m+n=2 \\ m-n=-3 \end{array}\right.$ 解得 $\left\{\begin{array}{c} m=-\frac{1}{2} \\ n=\frac{5}{2} \end{array}\right.$ ∴2x-3y ＝ $-\frac{1}{2}$(x ＋ y) ＋ $\frac{5}{2}$(x-y).

∵-1<x ＋ y<4,2<x-y<3，

∴-2<$-\frac{1}{2}$(x ＋ y)<$\frac{1}{2}$，5<$\frac{5}{2}$(x-y)<$\frac{15}{2}$.

由不等式同向可加性，得 3<$-\frac{1}{2}$(x ＋ y) ＋ $\frac{5}{2}$(x-y)<8，即 3<z<8.

答案：(3,8)

知识：基本不等式

难度：1

题目：若 a>0，b>0，求证：$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$≥a ＋ b.

解析：

证明：∵$\frac{b^2}{a}$ ＋ $\frac{a^2}{b}$-a-b ＝ (a-b)$(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})$ ＝ $\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}$，

$(a-b)^2$≥0 恒成立，且已知 a ＞ 0，b ＞ 0，

$\therefore a+b>0$，$ab>0$.$\therefore \frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}\geq 0$.$\therefore \frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geq a+b$.
知识：基本不等式
难度：1
题目：已知 $-6<a<8$，$2<b<3$，分别求 $2a+b$，$a-b$，$\frac{a}{b}$ 的取值范围.
解析：
解：$\because -6<a<8$，$\therefore -12<2a<16$.
又 $2<b<3$，$\therefore -10<2a+b<19$.
$\because 2<b<3$，$\therefore -3<-b<-2$.
又 $\because -6<a<8$，$\therefore -9<a-b<6$.
$\because 2<b<3$，$\therefore \frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$.
当 $0\leq a<8$ 时，$0\leq \frac{a}{b}<4$；
当 $-6<a<0$ 时，$-3<\frac{a}{b}<0$.
综合　得 $-3<\frac{a}{b}<4$.
$\therefore 2a+b$，$a-b$，$\frac{a}{b}$ 的取值范围分别为 $(-10,19)$，$(-9,6)$，$(-3,4)$.
知识：基本不等式
难度：2
题目：已知 $a>0$，$a\neq 1$.
（1）比较下列各式大小.
a^2+1 与 $a+a$；a^3+1 与 a^2+a；
a^5+1 与 a^3+a^2.
（2）探讨在 m，$n\in N_+$ 条件下，$a^{m+n}+1$ 与 a^m+a^n 的大小关系，并加以证明.
解析：
解：（1）由题意，知 $a>0$，$a\neq 1$，
$a^2+1-(a+a)=a^2+1-2a=(a-1)^2>0$.
$\therefore a^2+1>a+a$.
$a^3+1-(a^2+a)=a^2(a-1)-(a-1)$
$=(a+1)(a-1)^2>0$，$\therefore a^3+1>a^2+a$，
$a^5+1-(a^3+a^2)$
$=a^3(a^2-1)-(a^2-1)=(a^2-1)(a^3-1)$.
当 $a>1$ 时，$a^3>1$，$a^2>1$，$\therefore (a^2-1)(a^3-1)>0$.
当 $0<a<1$ 时，$0<a^3<1$，$0<a^2<1$，
$\therefore (a^2-1)(a^3-1)>0$，即 $a^5+1>a^3+a^2$.
（2）根据（1）可得 $a^{m+n}+1>a^m+a^n$. 证明如下：
$a^{m+n}+1-(a^m+a^n)=a^m(a^n-1)+(1-a^n)=(a^m-1)(a^n-1)$.

当 a>1 时，$a^m>1$，$a^n>1$，$\therefore(a^m-1)(a^n-1)>0$.

当 0<a<1 时，$0<a^m<1,0<a^n<1$，

$\therefore(a^m-1)(a^n-1)>0$.

综上可知 $(a^m-1)(a^n-1)>0$，即 $a^{m+n}+1>a^m+a^n$.

知识：基本不等式

难度：1

题目：下列不等式中，正确的个数是 (　　)

若 a，b∈R，则 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$；

若 x∈R，则 $x^2+2+\frac{1}{x^2+2}\geq2$；

若 x∈R，则 $x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\geq2$；

若 a，b 为正实数，则 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\geq\sqrt{ab}$.

A.0　　　　　　　　B.1

C.2 D.3

解析：显然　不正确，　正确；虽然 $x^2+2=\frac{1}{x^2+2}$ 无解，但 $x^2+2+\frac{1}{x^2+2}>2$ 成立，故　正确；　不正确，如 a = 1，b = 4.

答案：C

知识：基本不等式

难度：1

题目：已知 a>0，b>0，a，b 的等差中项是 $\frac{1}{2}$，且 $\alpha=a+\frac{1}{a}$，$\beta=b+\frac{1}{b}$，则 $\alpha+\beta$ 的最小值是 (　　)

A.3 B.4

C.5 D.6

解析：$\because a+b=2\times\frac{1}{2}=1$，a>0，b>0，

$\therefore\alpha+\beta=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=1+\frac{1}{ab}\geq1+\frac{1}{(\frac{a+b}{2})^2}=5$，

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

答案：C

知识：基本不等式

难度：1

题目：已知不等式 $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{a}{y})\geq9$ 对任意的正实数 x，y 恒成立，则正实数 a 的最小值为 (　　)

A.2 B.4

C.6 D.8

解析：$(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{a}{y})=1+a+\frac{y}{x}+\frac{ax}{y}\geq1+a+2\sqrt{a}=(\sqrt{a}+1)^2$(x，y，a>0)，当且仅当 y = x 时取等号，所以 $(xy)\cdot(\frac{1}{x}+\frac{a}{y})$ 的最小值为 $(\sqrt{a}+1)^2$，于是 $(\sqrt{a}+1)^2\geq9$ 恒成立，所以 a≥4，故选 B.

答案：B

知识：基本不等式

难度：1

题目：要制作一个容积为 4 m^3，高为 1 m 的无盖长方体容器．已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是 (　　)

A.80 元 B.120 元

C.160 元 D.240 元

解析：设底面矩形的长和宽分别为 a m，b m，则 ab ＝ 4. 容器的总造价为 $20ab + 2(a + b)\times 10 = 80 + 20(a + b)\geq 80 + 40\sqrt{ab} = 160$(元)(当且仅当 a ＝ b ＝ 2 时，等号成立)．

答案：C

知识：基本不等式

难度：1

题目：已知函数 $f(x) = 4x + \frac{a}{x}(x > 0，a > 0)$ 在 x ＝ 3 时取得最小值，则 a ＝ ____________.

解析：∵x ＞ 0，a ＞ 0，

$\therefore f(x) = 4x + \frac{a}{x}\geq 2\sqrt{4x\cdot\frac{a}{x}} = 4\sqrt{a}$，当且仅当 $4x = \frac{a}{x}$ 时等号成立，此时 $a = 4x^2$，由已知 x ＝ 3 时函数取得最小值，

$\therefore a = 4\times 9 = 36$.

答案：36

知识：基本不等式

难度：1

题目：若 $log_{\sqrt{2}}x + log_{\sqrt{2}}y = 4$，则 x ＋ y 的最小值是 ____________.

解析：由题意知 x>0，y>0，$log_{\sqrt{2}}xy = 4$，得 xy ＝ 4，

$\therefore x + y\geq 2\sqrt{xy} = 4$(当且仅当 x ＝ y 时，等号成立)．

答案：4

知识：基本不等式

难度：1

题目：$y = \frac{3+x+x^2}{x+1}(x>0)$ 的最小值是 ____________.

解析：∵x>0，

$\therefore y = \frac{3+x+x^2}{x+1} = \frac{3}{x+1} + x + 1-1\geq 2\sqrt{3}-1$.

当且仅当 $x + 1 = \sqrt{3}$ 时，等号成立．

答案：$2\sqrt{3}-1$

知识：基本不等式

难度：1

题目：已知 a，b 是正数，求证：

（1）$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$；　　（2）$\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

证明：（1）左边＝ $\sqrt{\frac{a^2+b^2+a^2+b^2}{4}}$

$\geq$ $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{4}}$ ＝ $\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}$ ＝ $\frac{a+b}{2}$ ＝右边，

原不等式成立.

（2）右边＝ $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{ab}}}$ ＝ $\sqrt{ab}$ ＝左边，

原不等式成立.

知识：基本不等式

难度：1

题目：设 x>0，y>0 且 x ＋ y ＝ 4，要使不等式 $\frac{1}{x}$ ＋ $\frac{4}{y}$≥m 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解析：

解：由 x>0，y>0 且 x ＋ y ＝ 4，得 $\frac{x+y}{4}$ ＝ 1，

∴$\frac{1}{x}$ ＋ $\frac{4}{y}$ ＝ $\frac{x+y}{4}\cdot(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})$

＝ $\frac{1}{4}(1+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}+4)$

＝ $\frac{1}{4}(5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y})$

$\geq\frac{1}{4}(5+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}})$ ＝ $\frac{9}{4}$.

当且仅当 $\frac{y}{x}$ ＝ $\frac{4x}{y}$ 时，等号成立.

即 y ＝ 2x(∵x>0，y>0，∴y ＝ -2x 舍去).

此时，结合 x ＋ y ＝ 4，解得 x ＝ $\frac{4}{3}$，y ＝ $\frac{8}{3}$.

∴$\frac{1}{x}$ ＋ $\frac{4}{y}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$，∴m≤$\frac{9}{4}$，

∴m 的取值范围为 $(-\infty,\frac{9}{4}]$.

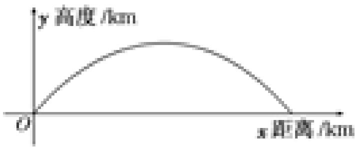
知识：基本不等式

难度：2

题目：如图，建立平面直角坐标系 xOy，x 轴在地平面上，y 轴垂直于地平面，单位长度为 1 千米，某炮位于坐标原点．已知炮弹发射后的轨迹在方程 y ＝ kx-$\frac{1}{20}$(1 ＋ k^2)x^2(k ＞ 0) 表示的曲线上，其中 k 与发射方向有关．炮的射程是指炮弹落地点的横坐标.

（1）求炮的最大射程.

（2）设在第一象限有一飞行物 (忽略其大小)，其飞行高度为 3.2 千米，试问它的横坐标 a 不超过多少时，炮弹可以击中它？请说明理由.



解析：

解：（1）令 y ＝ 0，得 kx-$\frac{1}{20}$(1 ＋ k^2)x^2 ＝ 0.

由实际意义和题设条件知 x ＞ 0，k ＞ 0，

故 x ＝ $\frac{20k}{1+k^2}$ ＝ $\frac{20}{k+\frac{1}{k}}\le\frac{20}{2}$ ＝ 10，

当且仅当 k ＝ 1 时取等号.

所以炮的最大射程为 10 千米.

（2）因为 a ＞ 0，所以炮弹可击中飞行物，

即存在 k ＞ 0，使 3.2 ＝ ka-$\frac{1}{20}$(1 ＋ k^2)a^2 成立，

即关于 k 的方程 a^2k^2-20ak ＋ a^2 ＋ 64 ＝ 0 有正根

⇒Δ ＝ $(-20a)^2$-4a^2(a^2 ＋ 64)≥0

⇒a≤6.

所以当 a 不超过 6(千米) 时，可击中飞行物.

知识：几何平均不等式

难度：1

题目：已知 x 为正数，下列各题求得的最值正确的是 (　　)

A.y ＝ x^2 ＋ 2x ＋ $\frac{4}{x^3}\ge3\sqrt[3]{x^2\cdot2x\cdot\frac{4}{x^3}}$ ＝ 6，∴y_{min} ＝ 6.

B.y ＝ 2 ＋ x ＋ $\frac{1}{x}\ge3\sqrt[3]{2\cdot x\cdot\frac{1}{x}}$ ＝ 3$\sqrt[3]{2}$，∴y_{min} ＝ 3$\sqrt[3]{2}$.

C.y ＝ 2 ＋ x ＋ $\frac{1}{4}$≥4，∴y_{min} ＝ 4.

D.y ＝ x(1-x)(1-2x)≤$\frac{1}{3}[\frac{3x+(1-x)+(1-2x)}{3}]^3$ ＝ $\frac{8}{81}$，

∴y_{max} ＝ $\frac{8}{81}$.

解析：A、B、D 在使用不等式 a ＋ b ＋ c≥3$\sqrt[3]{abc}$(a，b，c∈R_+) 和 abc≤$(\frac{a+b+c}{3})^3$(a，b，c∈R_+) 都不能保证等号成立，最值取不到.

C 中，∵x>0，∴y ＝ 2 ＋ x ＋ $\frac{1}{x}$ ＝ 2 ＋ (x ＋ $\frac{1}{x}$)≥2 ＋ 2 ＝ 4，

当且仅当 x ＝ $\frac{1}{x}$，即 x ＝ 1 时，等号成立.

答案：C

知识：几何平均不等式

难度：1

题目：已知 a，b，c 为正数，则 $\frac{a}{b}$ ＋ $\frac{b}{c}$ ＋ $\frac{c}{a}$ 有 (　　)

A. 最小值 3

B. 最大值 3

C. 最小值 2

D. 最大值 2

解析：$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}x\frac{b}{c}x\frac{c}{a}}=3$，

当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，即 a = b = c 时，等号成立.

答案:A

知识：几何平均不等式

难度：1

题目：若 $\log_x y=-2$，则 x + y 的最小值是 (　　)

A. $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ B.$\frac{8\sqrt{3}}{3}$ C.$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D.$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

解析：由 $\log_x y=-2$，得 $y=\frac{1}{x^2}$. 而 $x+y=x+\frac{1}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$，当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{1}{x^2}$，即 $x=\sqrt[3]{2}$ 时，等号成立.

答案：A

知识：几何平均不等式

难度：1

题目：已知圆柱的轴截面周长为 6，体积为 V，则下列不等式总成立的是 (　　)

A.V≥π B.V≤π

C.V≥$\frac{1}{8}\pi$ D.V≤$\frac{1}{8}\pi$

解析：设圆柱底面半径为 r，则圆柱的高 $h=\frac{6-4r}{2}$，所以圆柱的体积为 $V=\pi r^2\cdot h=\pi r^2\cdot\frac{6-4r}{2}=\pi r^2(3-2r)\leq\pi(\frac{r+r+3-2r}{3})^3=\pi$.

当且仅当 r = 3-2r，即 r = 1 时，等号成立.

答案：B

知识：几何平均不等式

难度：1

题目：若 a>2，b>3，则 $a+b+\frac{1}{(a-2)(b-3)}$ 的最小值为 ____________.

解析：∵a>2，b>3，∴a-2>0，b-3>0，

则 $a+b+\frac{1}{(a-2)(b-3)}$

$=(a-2)+(b-3)+\frac{1}{(a-2)(b-3)}+5$

$\geq 3\sqrt[3]{(a-2)x(b-3)x\frac{1}{(a-2)(b-3)}}+5=8$.

当且仅当 $a-2=b-3=\frac{1}{(a-2)(b-3)}$，即 a = 3，b = 4 时，等号成立.

答案：8

知识：几何平均不等式

难度：1

题目：设 0<x<1，则 $x(1-x)^2$ 的最大值为 ____________.

解析：∵0<x<1，∴1-x>0.

故 $x(1-x)^2=\times 2x(1-x)(1-x)\le\frac{1}{2}[\frac{2x+(1-x)+(1+x)}{3}]^3$

$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{27}=\frac{4}{27}$(当且仅当 $x=\frac{1}{3}$ 时，等号成立).

答案：$\frac{4}{27}$

知识：几何平均不等式

难度：1

题目：已知关于 x 的不等式 $2x+\frac{1}{(x-a)^2}\ge 7$ 在 $x\in(a,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的最小值为 ____________.

解析：$2x+\frac{1}{(x-a)^2}=(x-a)+(x-a)+\frac{1}{(x-a)^2}+2a$.

$\because x-a>0$，

$\therefore 2x+\frac{1}{(x-a)^2}\ge 3\sqrt[3]{(x-a)(x-a)\frac{1}{(x-a)^2}}+2a=3+2a$，当且仅当 $x-a=\frac{1}{(x-a)^2}$ 即 $x=a+1$ 时，等号成立.

$\therefore 2x+\frac{1}{(x-a)^2}$ 的最小值为 $3+2a$.

由题意可得 $3+2a\ge 7$，得 $a\ge 2$.

答案：2

知识：几何平均不等式

难度：1

题目：设 a，b，$c\in R_+$，求证：

$(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c})\ge\frac{9}{2}$.

解析：

证明：$\because a，b，c\in R_+$，

$\therefore 2(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(c+a)\ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}>0$.

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{b+c}\cdot\frac{1}{a+c}}>0$,

$\therefore(a+b+c)\frac{1}{a+b}+frac1b+c+\frac{1}{a+c}\ge\frac{9}{2}$.

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

知识：几何平均不等式

难度：1

题目：已知正数 a，b，c 满足 $abc=1$，求 $(a+2)(b+2)\cdot(c+2)$ 的最小值.

解析：

解：因为 $(a+2)(b+2)(c+2)=(a+1+1)(b+1+1)(c+1+1)$

$\ge 3\cdot\sqrt[3]{a}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{b}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{c}=27\cdot\sqrt[3]{abc}=27$，

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，等号成立.

所以 $(a+2)(b+2)(c+2)$ 的最小值为 27.

知识：几何平均不等式

难度：2

题目：已知 a，b，c 均为正数，证明：$a^2+b^2+c^2+(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c})^2 \geq 6\sqrt{3}$，并确定 a，b，c 为何值时，等号成立．

解析：

证明：法一：因为 a，b，c 均为正数，由平均值不等式，得

$a^2+b^2+c^2 \geq 3(abc)\frac{2}{3}$，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3(abc)\text{-}\frac{1}{3}$，

所以 $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 \geq 9(abc)\text{-}\frac{2}{3}$.

故 $a^2+b^2+c^2+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 \geq 3(abc)+9(abc)\text{-}\frac{2}{3}$.

又 $3(abc)\frac{2}{3}+9(abc)\text{-}\frac{2}{3} \geq 2\sqrt{27}=6\sqrt{3}$，

所以原不等式成立．

当且仅当 a = b = c 时，　式和　式等号成立．

当且仅当 $3(abc)\frac{2}{3}=9(abc)\text{-}\frac{2}{3}$ 时，　式等号成立．

即当且仅当 $a=b=c=3\frac{1}{4}$ 时，原式等号成立．

法二：因为 a，b，c 均为正数，由基本不等式，得

$a^2+b^2 \geq 2ab$，$b^2+c^2 \geq 2bc$，$c^2+a^2 \geq 2ac$，

所以 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$，

同理 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$，

故 $a^2+b^2+c^2+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 \geq ab+bc+ac+\frac{3}{ab}+\frac{3}{bc}+\frac{3}{ac} \geq 6\sqrt{3}$，

所以原不等式成立．

当且仅当 a = b = c 时，　式和　式等号成立；当且仅当 a = b = c，$(ab)^2=(bc)^2=(ac)^2=3$ 时，　式等号成立，即当且仅当 $a=b=c=3\frac{1}{4}$ 时，原式等号成立．

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：对于 $|a|-|b| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$，下列结论正确的是 (　　)

A. 当 a，b 异号时，左边等号成立

B. 当 a，b 同号时，右边等号成立

C. 当 a + b = 0 时，两边等号均成立

D. 当 a + b>0 时，右边等号成立；当 a + b<0 时，左边等号成立

解析：当 a，b 异号且 $|a|>|b|$ 时左边等号才成立，A 不正确，显然 B 正确；当 a + b = 0 时，右边等号不成立，C 不正确，D 显然不正确．

答案:B

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：不等式 $\frac{|a+b|}{|a|+|b|}<1$ 成立的充要条件是 (　　)

A.a，b 都不为零

B.ab<0

C.ab 为非负数

D.a，b 中至少有一个不为零

解析：原不等式即为 $|a+b|<|a|+|b| \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab<a^2+b^2+2|ab| \Leftrightarrow ab<0$.

答案:B

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：已知 a，b，c∈R，且 a>b>c，则有 (　　)

A.|a|>|b|>|c|　　　　　B.|ab|>|bc|

C.|a + b|>|b + c| D.|a-c|>|a-b|

解析：∵a，b，c∈R，且 a>b>c，令 a = 2，b = 1，c = -6.

∴|a| = 2，|b| = 1，|c| = 6，|b|<|a|<|c|，故排除 A.

又 |ab| = 2，|bc| = 6，|ab|<|bc|，故排除 B.

又 |a + b| = 3，|b + c| = 5，|a + b|<|b + c|，排除 C.

而 |a-c| = |2-(-6)| = 8，|a-b| = 1，∴|a-c|>|a-b|.

答案：D

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：设 |a|<1，|b|<1，则 |a + b| + |a-b| 与 2 的大小关系是 (　　)

A.|a + b| + |a-b|>2

B.|a + b| + |a-b|<2

C.|a + b| + |a-b| = 2

D. 不可能比较大小

解析：当 $(a+b)(a-b)\geq 0$ 时，$|a+b|+|a-b|=|(a+b)+(a-b)|=2|a|<2$.

当 $(a+b)(a-b)<0$ 时，$|a+b|+|a-b|=|(a+b)-(a-b)|=2|b|<2$.

答案：B

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：不等式 |x-1|-|x-2|<a 恒成立，则 a 的取值范围为 ____________.

解析：若使不等式 |x-1|-|x-2|<a 恒成立，只需 $a>(|x-1|-|x-2|)_{max}$.

因为 $|x-1|-|x-2|\leq|x-1-(x-2)|=1$，

故 $a>1$. 故 a 的取值范围为 $(1，+\infty)$.

答案：$(1，+\infty)$

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：设 a，$b\in R$，$|a-b|>2$，则关于实数 x 的不等式 $|x-a|+|x-b|>2$ 的解集是 ___________.

解析：$\because |x-a|+|x-b|=|a-x|+|x-b|\geq|(a-x)+(x-b)|=|a-b|>2$，

$\therefore |x-a|+|x-b|>2$ 对 $x\in R$ 恒成立，故解集为 $(-\infty，+\infty)$.

答案：$(-\infty，+\infty)$

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：下列四个不等式：

$\log_x 10+\lg x\geq2(x>1)$；

$|a-b|<|a|+|b|$；

$|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}|\geq2(ab\neq0)$；

$|x-1|+|x-2|\geq1$. 其中恒成立的是 _________(把你认为正确的序号都填上).

解析：$\log_x 10+\lg x=\frac{1}{lgx}+\lg x\geq2$，　正确；$ab\leq0$ 时，$|a-b|=|a|+|b|$，　不正确；

$\because ab\neq0$ 时，$\frac{b}{a}$ 与 $\frac{a}{b}$ 同号，

$\therefore |\frac{b}{a}+\frac{a}{b}|=|\frac{b}{a}|+|\frac{a}{b}|\geq2$，　正确；

由 $|x-1|+|x-2|$ 的几何意义知 $|x-1|+|x-2|\geq1$ 恒成立，　正确.

综上可知　　正确.

答案：

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：已知 x，$y\in R$，且 $|x+y|\leq\frac{1}{6}$，$|x-y|\leq\frac{1}{4}$，求证：$|x+5y|\leq1$.

解析：

证明：$|x+5y|=|3(x+y)-2(x-y)|$.

由绝对值不等式的性质，得

$|x+5y|=|3(x+y)-2(x-y)|\leq|3(x+y)|+|2(x-y)|$

$=3|x+y|+2|x-y|\leq3\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{4}=1$，即 $|x+5y|\leq1$.

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：设 $f(x)=x^2-x+b$，$|x-a|<1$，求证：$|f(x)-f(a)|<2(|a|+1)$.

解析：

证明：$\because f(x)-f(a)=x^2-x-a^2+a=(x-a)(x+a-1)$，

$|f(x)-f(a)|=|(x-a)(x+a-1)|$

$=|x-a||x+a-1|<|x+a-1|$

$=|(x-a)+2a-1|\leq|x-a|+|2a-1|$

$\leq|x-a|+2|a|+1<2|a|+2=2(|a|+1)$，

$\therefore|f(x)-f(a)|<2(|a|+1)$.

知识：绝对值三角不等式

难度：2

题目：设函数 $y=|x-4|+|x-3|$. 求：

（1）y 的最小值；

（2）使 $y<a$ 有解的 a 的取值范围；

（3）使 $y\geq a$ 恒成立的 a 的最大值.

解析：

解：（1）$y=|x-4|+|x-3|=|x-4|+|3-x|$

$\geq|(x-4)+(3-x)|=1$，

$\therefore y_{min}=1$.

（2）由（1）知 $y\geq1$，要使 $y<a$ 有解，$\therefore a>1$，即 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

（3）要使 $y\geq a$ 恒成立，只要 y 的最小值 $1\geq a$ 即可，

$\therefore a_{max}=1$.

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：不等式 $|x+1|>3$ 的解集是 (　　)

A.$\{x|x<-4$ 或 $x>2\}$ B.$\{x|-4<x<2\}$

C.$\{x|x<-4$ 或 $x\geq2\}$ D.$\{x|-4\leq x<2\}$

解析：$|x+1|>3$，则 $x+1>3$ 或 $x+1<-3$，因此 $x<-4$ 或 $x>2$.

答案：A

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：满足不等式 $|x+1|+|x+2|<5$ 的所有实数解的集合是 (　　)

A.(-3,2) B.(-1,3) C.(-4,1) D.$(-\frac{3}{2},\frac{7}{2})$

解析：$|x+1|+|x+2|$ 表示数轴上一点到 -2，-1 两点的距离和，根据 -2，-1 之间的距离为 1，可得到 -2，-1 距离和为 5 的点是 -4,1. 因此 $|x+1|+|x+2|<5$ 解集是 (-4,1).

答案：C

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：不等式 1≤|2x-1|<2 的解集为 (　　)

A.$(-\frac{1}{2},0)\cup[1,\frac{3}{2}]$

B.$(-\frac{1}{2},0]\cup[1,\frac{3}{2}]$

C.$(-\frac{1}{2},0]\cup(1,\frac{3}{2}]$

D.$(-\frac{1}{2},0]\cup[1,\frac{3}{2})$

解析：由 1≤|2x-1|<2，得 1≤2x-1<2 或 -2<2x-1≤-1，因此 $-\frac{1}{2}<x\leq 0$ 或 $1\leq x<\frac{3}{2}$.

答案：D

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：若关于 x 的不等式 |x-1| ＋ |x ＋ m| ＞ 3 的解集为 R，则实数 m 的取值范围是 (　　)

A.(-∞，-4)∪(2，＋ ∞) B.(-∞，-4)∪(1，＋ ∞)

C.(-4,2) D.(-4,1)

解析：由题意知，不等式 |x-1| ＋ |x ＋ m| ＞ 3 恒成立，即函数 f(x) ＝ |x-1| ＋ |x ＋ m| 的最小值大于 3，根据绝对值不等式的性质可得 |x-1| ＋ |x ＋ m|≥|(x-1)-(x ＋ m)| ＝ |m ＋ 1|，故只要满足 |m ＋ 1| ＞ 3 即可，所以 m ＋ 1 ＞ 3 或 m ＋ 1 ＜ -3，解得 m ＞ 2 或 m ＜ -4，故实数 m 的取值范围是 (-∞，-4)∪(2，＋ ∞).

答案：A

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：不等式 |x ＋ 2|≥|x| 的解集是 ____________.

解析：∵ 不等式两边是非负实数，∴ 不等式两边可以平方，两边平方，得 $(x+2)^2\geq x^2$，

$\therefore x^2+4x+4\geq x^2$，即 x≥-1，

∴ 原不等式的解集为 {x|x≥-1}.

答案：{x|x≥-1}

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：不等式 |2x-1|-x<1 的解集是 _______________.

解析：原不等式等价于 |2x-1|<x ＋ 1⇔-x-1<2x-1<x ＋ 1⇔$\begin{cases} 3x>0 \\ x<2 \end{cases}$⇔0<x<2.

答案：{x|0<x<2}

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：已知函数 $f(x) = |x + 1| + |x-2|-|a^2-2a|$，若函数 $f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方，则实数 a 的取值范围为 ____________.

解析：因为 $|x + 1| + |x-2| \geq |x + 1-(x-2)| = 3$，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $3-|a^2-2a|$.

由题意，得 $|a^2-2a| < 3$，解得 $-1<a<3$.

答案：$(-1,3)$

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：解不等式：$|x^2-2x + 3|<|3x-1|$.

解析：

解：原不等式 $\Leftrightarrow (x^2-2x + 3)^2<(3x-1)^2$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 2)(x^2-5x + 4)<0$

$\Leftrightarrow x^2-5x + 4<0$(因为 $x^2 + x + 2$ 恒大于 0)$\Leftrightarrow 1<x<4$.

所以原不等式的解集是 $\{x|1<x<4\}$.

知识：绝对值三角不等式

难度：1

题目：解关于 x 的不等式 $|2x-1|<2m-1(m\in R)$.

解析：

解：若 $2m-1<0$，即 $m\leq\frac{1}{2}$，则 $|2x-1|<2m-1$ 恒不成立，此时，原不等式无解；若 $2m-1>0$，即 $m>\frac{1}{2}$，

则 $-(2m-1)<2x-1<2m-1$，

所以 $1-m<x<m$.

综上所述：

当 $m\leq\frac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为 $\emptyset$；

当 $m>\frac{1}{2}$ 时，原不等式的解集为 $\{x|1-m<x<m\}$.

知识：绝对值三角不等式

难度：2

题目：已知函数 $f(x) = |2x-1| + |2x + a|$，$g(x) = x + 3$.

（1）当 $a = -2$ 时，求不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集；

（2）设 $a > -1$，且当 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 时，$f(x)\leq g(x)$，求 a 的取值范围.

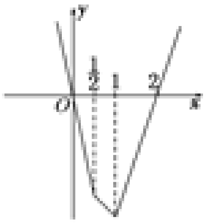
解析：

解：（1）当 $a = -2$ 时，不等式 $f(x) < g(x)$ 化为 $|2x-1| + |2x-2|-x-3 < 0$.

设函数 $y = |2x-1| + |2x-2|-x-3$，则

$$y=\begin{cases}-5x, x<\frac{1}{2}\\ -x-2, \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 3x-6, x>1\end{cases}$$

其图象如图所示.



从图象可知，当且仅当 x∈(0,2) 时，y ＜ 0，

所以原不等式的解集是 {x|0 ＜ x ＜ 2}.

（2）当 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 时，f(x) ＝ 1 ＋ a.

不等式 f(x)≤g(x) 化为 1 ＋ a≤x ＋ 3，

所以 x≥a-2 对 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 都成立.

故 -$\frac{a}{2}$≥a-2，即 a≤$\frac{4}{3}$.

从而 a 的取值范围是 $(-1,\frac{4}{3}]$.

知识：比较法解不等式

难度：1

题目：下列命题：

当 b>0 时，a>b⇔$\frac{a}{b}$>1；

当 b>0 时，a<b⇔$\frac{a}{b}$<1；

当 a>0，b>0 时，$\frac{a}{b}$>1⇔a>b；

当 ab>0 时，$\frac{a}{b}$>1⇔a>b.

其中是真命题的有 (　　)

A.　B.

C.　D.

解析：只有　不正确．如 a ＝ -2，b ＝ -1 时，$\frac{a}{b}$ ＝ 2>1，但 a<b.

答案：A

知识：比较法解不等式

难度：1

题目：若 x，y∈R，记 w ＝ x^2 ＋ 3xy，u ＝ 4xy-y^2，则 (　　)

A.w>u B.w<u C.w≥u D. 无法确定

解析：∵w-u ＝ x^2-xy ＋ y^2 ＝ $(x-\frac{y}{2})^2$ ＋ $\frac{3y^2}{4}$≥0，

∴w≥u.

答案：C

知识：比较法解不等式

难度：1

题目：a，b 都是正数，P = $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$，Q = $\sqrt{a+b}$，则 P，Q 的大小关系是(　　)

A.P>Q

B.P<Q

C.P≥Q

D.P≤Q

解析：∵a，b 都是正数，∴P>0，Q>0.

∴P^2-Q^2 = $(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}})^2$-$(\sqrt{a+b})^2$

= $\frac{-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$≤0(当且仅当 a = b 时取等号)，

∴P^2-Q^2≤0，∴P≤Q.

答案:D

知识：比较法解不等式

难度：1

题目：在 △ABC 中，sin Asin C<cos Acos C，则 △ABC(　　)

A. 一定是锐角三角形 B. 一定是直角三角形

C. 一定是钝角三角形 D. 不确定

解析：　由 sin Asin C<cos Acos C，得

cos Acos C-sin Asin C>0，即 cos(A + C)>0，

所以 A + C 是锐角，从而 B>$\frac{\pi}{2}$，

故 △ABC 一定是钝角三角形.

答案：D

知识：比较法解不等式

难度：1

题目：若 0<x<1，则 $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{x^2}$ 的大小关系是 ____________.

解析：$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ = $\frac{x-1}{x^2}$.

因为 0<x<1，所以 $\frac{1}{x}$-$\frac{1}{x^2}$<0，

所以 $\frac{1}{x}$<$\frac{1}{x^2}$.

答案：$\frac{1}{x}$<$\frac{1}{x^2}$

知识：比较法解不等式

难度：1

题目：$\frac{2a}{1+a^2}$ 与 1 的大小关系为 ____________.

解析：$\frac{2a}{1+a^2}$-1 = $\frac{2a-1-a^2}{1+a^2}$ = -$\frac{(1-a)^2}{1+a^2}$≤0.

答案：$\frac{2a}{1+a^2}$≤1

知识：比较法解不等式
难度：1
题目：设 a>b>0，x ＝ $\sqrt{a+b}$-$\sqrt{a}$，y ＝ $\sqrt{a}$-$\sqrt{a-b}$，则 x，y 的大小关系是 ＿＿＿＿＿＿.
解析：$\because \frac{x}{y}=\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}=1$，且 x>0，y>0，
∴x<y.
答案：x<y
知识：比较法解不等式
难度：1
题目：已知 x，y∈R, 求证：sin x ＋ sin y≤1 ＋ sin xsin y.
解析：
证明：∵sin x ＋ sin y-1-sin xsin y
＝ sin x(1-sin y)-(1-sin y) ＝ (1-sin y)(sin x-1).
∵-1≤sin x≤1，-1≤sin y≤1，
∴1-sin y≥0，sin x-1≤0，∴(1-sin y)(sin x-1)≤0，
即 sin x ＋ sin y≤1 ＋ sin xsin y.
知识：比较法解不等式
难度：1
题目：已知 a<b<c，求证：$a^2b+b^2c+c^2a<ab^2+bc^2+ca^2$.
解析：
证明：因为 a<b<c，所以 a-b<0，b-c<0，a-c<0，
所以 $(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)$
$=(a^2b-ca^2)+(b^2c-bc^2)+(ac^2-ab^2)$
$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b-c)(b+c)$
$=(b-c)=(b-c)(a-b)(a-c)<0$，
所以 $a^2b+b^2c+c^2a<ab^2+bc^2+ca^2$.
知识：比较法解不等式
难度：2
题目：已知 a>2，求证：$\log_a(a-1)<\log_{(a+1)}a$.
解析：
证明：∵a>2，
∴a-1>1，
∴$\log_a(a-1)>0$，$\log_{(a+1)}a>0$.
由于 $\frac{\log_a(a-1)}{\log_{a+1}a}=\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<[\frac{\log_a(a-1)+\log_a(a+1)}{2}]^2=[\frac{\log_a(a^2-1)}{2}]^2$.
∵a>2，∴$0<\log_a(a^2-1)<\log_a a^2=2$.

$\therefore[\frac{log_a(a^2-1)}{2}]^2<[\frac{log_a a^2}{2}]^2=1$，即 $\frac{log_a(a-1)}{log_{a+1}a}<1$.

$\because\log_{(a+1)}$a>0，$\therefore\log_a$(a-1)<$\log_{(a+1)}$a.

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：1

题目：设 a，b∈R_+，A = $\sqrt{a}+\sqrt{b}$，B = $\sqrt{a+b}$，则 A，B 的大小关系是 (　　)

A.A≥B B.A≤B C.A > B D.A < B

解析：$A^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$，$B^2=a+b$，所以 $A^2>B^2$. 又 A > 0，B > 0，∴A > B.

答案：C

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：1

题目：a，b∈R_+，那么下列不等式中不正确的是 (　　)

A.$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq2$ B.$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geq a+b$

C.$\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}\leq\frac{a+b}{ab}$ D.$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{2}{ab}$

解析：A 项满足基本不等式；B 项可等价变形为 $(a-b)^2(a+b)\geq0$，正确；B 选项中不等式的两端同除以 ab，不等式方向不变，所以 C 选项不正确；D 选项是 A 选项中不等式的两端同除以 ab 得到的，正确.

答案:C

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：1

题目：设 a = $\sqrt{2}$，b = $\sqrt{7}-\sqrt{3}$，c = $\sqrt{6}-\sqrt{2}$，那么 a，b，c 的大小关系是 (　　)

A.a>b>c B.a>c>b C.b>a>c D.b>c>a

解析：　由已知，可得出 a = $\frac{4}{2\sqrt{2}}$，b = $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$，c = $\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$，

$\because\sqrt{7}+\sqrt{3}>\sqrt{6}+\sqrt{2}>2\sqrt{2}$，∴b<c<a.

答案:B

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：1

题目：设 $\frac{1}{3}<(\frac{1}{3})^b<(\frac{1}{3})^a<1$，则 (　　)

A.$a^a<a^b<b^a$ B.$a^a<b^a<a^b$ C.$a^b<a^a<b^a$ D.$a^b<b^a<a^a$

解析：$\because\frac{1}{3}<(\frac{1}{3})^b<(\frac{1}{3})^a<1$，

∴0<a<b<1，$\therefore\frac{a^a}{a^b}=a^{a-b}>1$，

$\therefore a^b<a^a$，$\frac{a^a}{b^a}=(\frac{a}{b})^a$.$\because0<\frac{a}{b}<1$，a>0，

$\therefore(\frac{a}{b})^a<1$，$\therefore a^a<b^a$，$\therefore a^b<a^a<b^a$.

答案：B

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：1

题目：若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{a} < 0$，则下列不等式：

$a + b < ab$；$|a| > |b|$；$a < b$；$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$，

其中正确的有 ____________(填序号).

解析：$\because \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$，$\therefore b < a < 0$.

$\therefore \begin{cases} a+b<0 \\ ab>0 \\ |b|>|a| \end{cases}$ 故　正确，　错误.

$\because$a，b 同号且 $a \neq b$，$\therefore \frac{b}{a}$，$\frac{a}{b}$ 均为正，

$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$，故　正确.

答案：

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：1

题目：已知 a>0，b>0，若 P 是 a，b 的等差中项，Q 是 a，b 的正的等比中项，$\frac{1}{R}$ 是 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$ 的等差中项，则 P，Q，R 按从大到小的顺序排列为____________.

解析：$\because P = \frac{a+b}{2}$，$Q = \sqrt{ab}$，$\frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$，

$\therefore R = \frac{2ab}{a+b} \leq Q = \sqrt{ab} \leq P = \frac{a+b}{2}$，

当且仅当 a ＝ b 时，等号成立.

答案：P≥Q≥R

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：1

题目：设 a>b>c，且 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{m}{a-c}$ 恒成立，则 m 的取值范围是____________.

解析 $\because$a>b>c，$\therefore$a-b>0，b-c>0，a-c>0.

$\therefore$, 原不等式等价于 $\frac{a-c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} \geq m$

$\frac{a-c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} = \frac{(a-b)+(b-c)}{a-b} + \frac{(a-b)+(b-c)}{b-c} = 2 + \frac{b-c}{a-b} + \frac{a-b}{b-c} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b-c}{a-b} \cdot \frac{a-b}{b-c}} = 4$

当且仅当 $\frac{b-c}{a-b} = \frac{a-b}{b-c}$, 即 $2b = a + c$ 或 $a = c$（舍去）时，等式成立，

$\therefore m \leq 4$.

答案：(-∞，4]

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：1

题目：已知 a，b，c 均为正实数，且 $b^2 = ac$.

求证：$a^4 + b^4 + c^4 > (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

解析：

证明：要证 $a^4+b^4+c^4>(a^2-b^2+c^2)^2$ 成立，

只需证 $a^4+b^4+c^4>a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2$，

即证 $a^2b^2+b^2c^2-a^2c^2>0.\because b^2=ac$，

故只需证 $(a^2+c^2)ac-a^2c^2>0$.

$\because a>0$，$c>0$，故只需证 $a^2+c^2-ac>0$.

又 $\because a^2+c^2\geq 2ac>ac$，$\therefore a^2+c^2-ac>0$ 显然成立，

$\therefore$ 原不等式成立.

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：1

题目：已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，且 a，b，c 不全相等，

求证：$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}>a+b+c$.

解析：

证明：因为 a，b，$c\in(0,+\infty)$，所以 $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}}=2c$.

同理 $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq 2a$，$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b$. 因为 a，b，c 不全相等，

所以上述三个不等式中至少有一个等号不成立，三式相加，得 $2(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})>2(a+b+c)$，即 $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}>a+b+c$.

知识：综合法解不等式，分析法解不等式

难度：2

题目：设实数 x，y 满足 $y+x^2=0,0<a<1$，

求证：$\log_a(a^x+a^y)<\frac{1}{8}+\log_a 2$.

解析：

证明：因为 $a^x>0$，$a^y>0$，所以 $a^x+a^y\geq 2\sqrt{a^{x+y}}=2\sqrt{ax-x^2}$.

因为 $x-x^2=x(1-x)\leq[\frac{x+(1-x)}{2}]^2=\frac{1}{4}$，

又因为 $0<a<1$，所以 $ax-x^2\geq a\frac{1}{4}$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，等式成立.

但当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$a^x\neq a-x^2$，所以 $\sqrt{ax-x^2}>a\frac{1}{8}$，

所以 $a^x+a^y>2a\frac{1}{8}$. 又因为 $0<a<1$，

所以 $\log_a(a^x+a^y)<\log_a 2a\frac{1}{8}$，即 $\log_a(a^x+a^y)<\log_a 2+\frac{1}{8}$.

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：1

题目：设 a，b，$c\in R_+$，$P=a+b-c$，$Q=b+c-a$，$R=c+a-b$，则“$PQR>0$”是“P，Q，R 同时大于零”的 (　　)

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

解析：必要性是显然成立的；当 $PQR > 0$ 时，若 P，Q，R 不同时大于零，则其中两个为负，一个为正，不妨设 $P > 0$，$Q < 0$，$R < 0$，则 $Q + R = 2c < 0$，这与 $c > 0$ 矛盾，即充分性也成立.

答案：C

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：1

题目：若 $|a-c|<h$，$|b-c|<h$，则下列不等式一定成立的是 (　　)

A.$|a-b|<2h$

B.$|a-b|>2h$

C.$|a-b|<h$

D.$|a-b|>h$

解析：$|a-b| = |(a-c)-(b-c)|\le|a-c| + |b-c|<2h$.

答案：A

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：1

题目：设 x，y 都是正实数，且 $xy-(x + y) = 1$，则 (　　)

A.$x + y\ge2(\sqrt{2} + 1)$

B.$xy\le\sqrt{2} + 1$

C.$x + y\le(\sqrt{2} + 1)^2$

D.$xy\ge2(\sqrt{2} + 1)$

解析：由已知 $(x + y) + 1 = xy\le(\frac{x+y}{2})^2$，

$\therefore(x + y)^2-4(x + y)-4\ge0$.

$\because x$，y 都是正实数，

$\therefore x>0$，$y>0$，$\therefore x + y\ge2\sqrt{2} + 2 = 2(\sqrt{2} + 1)$.

答案：A

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：1

题目：对“a，b，c 是不全相等的正数”，给出下列判断：

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\ne0$；

$a>b$ 与 $a<b$ 及 $a\ne c$ 中至少有一个成立；

$a\ne c$，$b\ne c$，$a\ne b$ 不能同时成立.

其中判断正确的个数为 (　　)

A.0 B.1

C.2 D.3

解析：若 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，则 $a=b=c$，与已知矛盾，故 对；当 a>b 与 a<b 及 $a\neq c$ 都不成立时，有 $a=b=c$，不符合题意，故 对；显然不正确.

答案：C

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：1

题目：若要证明“a，b 至少有一个为正数”，用反证法证明时作的反设应为 ___________.

答案：a，b 中没有任何一个为正数 (或 $a\leq 0$ 且 $b\leq 0$)

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：1

题目：lg9 · lg11 与 1 的大小关系是 ___________.

解析：$\because \lg 9>0$，$\lg 11>0$，

$\therefore \sqrt{lg9\cdot lg11}<\frac{lg9+lg11}{2}=\frac{lg99}{2}<\frac{lg100}{2}=1$，

$\therefore \lg 9\cdot\lg 11<1$.

答案：$\lg 9\cdot\lg 11<1$

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：1

题目：设 $x>0$，$y>0$，$A=\frac{x+y}{1+x+y}$，$B=\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}$，则 A，B 的大小关系是 ___________.

解析：$A=\frac{x}{1+x+y}+\frac{y}{1+x+y}<\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}=B$.

答案：$A<B$

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：1

题目：实数 a，b，c，d 满足 $a+b=c+d=1$，且 $ac+bd>1$. 求证：a，b，c，d 中至少有一个是负数.

解析：

证明：假设 a，b，c，d 都是非负数.

由 $a+b=c+d=1$ 知 a，b，c，d∈.

从而 $ac\leq\sqrt{ac}\leq\frac{a+c}{2}$，$bd\leq\sqrt{bd}\leq\frac{b+d}{2}$，

$\therefore ac+bd\leq\frac{a+c+b+d}{2}=1$，

即 $ac+bd\leq 1$，与已知 $ac+bd>1$ 矛盾，

∴a，b，c，d 中至少有一个是负数.

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：1

题目：已知 $a_n = \sqrt{1\times2} + \sqrt{2\times3} + \sqrt{3\times4} +\ldots+ \sqrt{n(n+1)}(n\in N^*)$.

求证：$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{n(n+2)}{2}$.

解析：

证明：$\because \sqrt{n(n+1)} = \sqrt{n^2+n}$，

$\sqrt{n(n+1)}\therefore>n$，

$\therefore a_n = \sqrt{1\times2} + \sqrt{2\times3} + \sqrt{3\times4} +\ldots+ \sqrt{n(n+1)}>1 + 2 + 3 +\ldots+ n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$\because \sqrt{n(n+1)}<\frac{n+(n+1)}{2}$，

$\therefore a_n<\frac{1+2}{2} + \frac{2+3}{2} + \frac{3+4}{2} +\ldots+ \frac{n+(n+1)}{2}$

$= \frac{n}{2} + (1 + 2 + 3 +\ldots+ n) = \frac{n(n+2)}{2}$.

综上得 $\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{n(n+2)}{2}$.

知识：放缩法解不等式，反证法解不等式

难度：2

题目：已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$，若 $a + c = 0$，$f(x)$ 在上的最大值为 2，最小值为 $-\frac{5}{2}$.

求证：$a\neq0$ 且 $|\frac{b}{a}|<2$.

解析：

证明：假设 $a = 0$ 或 $|\frac{b}{a}|\geq2$.

当 $a = 0$ 时，由 $a + c = 0$，得 $f(x) = bx$，显然 $b\neq0$.

由题意得 $f(x) = bx$ 在上是单调函数，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $|b|$，最小值为 $-|b|$.

由已知条件得 $|b| + (-|b|) = 2-\frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$，

这与 $|b| + (-|b|) = 0$ 相矛盾，所以 $a\neq0$.

当 $|\frac{b}{a}|\geq2$ 时，由二次函数的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$，

知 $f(x)$ 在上是单调函数，故其最值在区间的端点处取得.

所以 $\begin{cases} f(1)=a+b+c=2 \\ f(-1)=a-b+c=-\frac{5}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(1)=a-b+c=-\frac{5}{2} \\ f(-1)=a+b+c=2 \end{cases}$

又 $a + c = 0$，则此时 b 无解，所以 $|\frac{b}{a}|<2$.

由 ，得 $a\neq0$ 且 $|\frac{b}{a}|<2$.

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：已知 x，$y\in R_+$，且 $xy = 1$，则 $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})$ 的最小值为 (　　)

A.4　　　　B.2

C.1 D.$\frac{1}{4}$

解析：$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y}) = [1^2+(\frac{1}{\sqrt{x}})^2]\cdot[1^2+(\frac{1}{\sqrt{y}})^2]$

$\geq(1\times1+\frac{1}{\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{y}}})^2=(1+\frac{1}{\sqrt{xy}})^2=2^2=4$.
答案：A
知识：二维柯西不等式
难度：1
题目：若 a，b∈R，且 $a^2+b^2=10$，则 a-b 的取值范围是 (　　)
A.$[-2\sqrt{5},2\sqrt{5}]$ B.$[-2\sqrt{10},2\sqrt{10}]$
C.$[-\sqrt{10},\sqrt{10}]$ D.$(-\sqrt{5},\sqrt{5})$
解析：$(a^2+b^2)\geq(a-b)^2$，
$\because a^2+b^2=10$，$\therefore(a-b)^2\leq20$.
$\therefore-2\sqrt{5}\leq a-b\leq2\sqrt{5}$.
答案：A
知识：二维柯西不等式
难度：1
题目：已知 $x+y=1$，那么 $2x^2+3y^2$ 的最小值是 (　　)
A. $\frac{5}{6}$ B.$\frac{6}{5}$ C.$\frac{25}{36}$ D.$\frac{36}{25}$
解析：$(2x^2+3y^2)\geq(\sqrt{6}x+\sqrt{6}y)^2=[\sqrt{6}(x+y)]^2=6$，
当且仅当 $x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{2}{5}$ 时，等号成立，即 $2x^2+3y^2\geq\frac{6}{5}$.
答案：B
知识：二维柯西不等式
难度：1
题目：函数 $y=\sqrt{x-5}+2\sqrt{6-x}$ 的最大值是 (　　)
A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$
C.3 D.5
解析：　根据柯西不等式，知 $y=1\times\sqrt{x-5}+2\times\sqrt{6-x}\leq\sqrt{1^2+2^2}\times\sqrt{(\sqrt{x-5})^2+(\sqrt{6-x})^2}=\sqrt{5}$，当且仅当 $x=\frac{26}{5}$ 时，等号成立.
答案：B
知识：二维柯西不等式
难度：1
题目：设 xy>0，则 $(x^2+\frac{4}{y^2})\cdot(y^2+\frac{1}{x^2})$ 的最小值为 ____________.
解析：原式$=[x^2+(\frac{2}{y})^2][(\frac{1}{x})^2+y^2]$
$\geq(x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\cdot y)^2=9$(当且仅当 $xy=\sqrt{2}$ 时，等号成立).
答案：9
知识：二维柯西不等式
难度：1
题目：

设实数 x，y 满足 $3x^2+2y^2\le 6$，则 $P=2x+y$ 的最大值为 ___________.

解析：由柯西不等式，得 $(2x+y)^2\le(3x^2+2y^2)\cdot[(\frac{2}{\sqrt{3}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2]=(3x^2+2y^2)\cdot(\frac{4}{3}+\frac{1}{2})\le 6\times\frac{11}{6}=11$，当且仅当 $x=\frac{4}{\sqrt{11}}$，$y=\frac{3}{\sqrt{11}}$ 时，等号成立，

于是 $2x+y\le\sqrt{11}$.

答案：

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：

函数 $f(x)=\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2x^2-1}$ 的最大值为 ___________.

解析：因题意得函数有意义时 x 满足 $\frac{1}{2}\le x^2\le 2$.

由柯西不等式，得 $[f(x)]^2=[\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2(x^2-\frac{1}{2})}]^2$

$\le(1+2)(2-x^2+x^2-\frac{1}{2})=\frac{9}{2}$，$\therefore f(x)\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $2-x^2=$，即 $x^2=$时，等号成立.

答案：$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：已知 θ 为锐角，a，b $\in R_+$.

求证：$(a+b)^2\le\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}$.

解析：

证明：设 $m=(\frac{a}{\cos\theta},\frac{b}{\sin\theta})$，$n=(\cos\theta,\sin\theta)$，

则 $|a+b|=|\frac{a}{\cos\theta}\cdot\cos\theta+\frac{b}{\sin\theta}\cdot\sin\theta|$

$=|m\cdot n|\le|m||n|=\sqrt{(\frac{a}{\cos\theta})^2+(\frac{b}{\sin\theta})^2}\cdot\sqrt{1}$

$=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}}$，$\therefore(a+b)^2\le\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}$.

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：解方程：$\sqrt{4x+3}+2\sqrt{1-2x}=\sqrt{15}$.

解析：

解：$15=(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x+\frac{3}{2}}+2\sqrt{1-2x})^2$

$\le(\sqrt{2}^2+2^2)\cdot[(\sqrt{2x+\frac{3}{2}})^2+(\sqrt{1-2x})^2]$

$=6(2x+\frac{3}{2}+1-2x)=6\times\frac{5}{2}=15$.

其中等号成立的充要条件是 $\frac{\sqrt{2x+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1-2x}}{2}$，

解得 $x=-\frac{1}{3}$.

知识：二维柯西不等式

难度：2

题目：试求函数 f(x) ＝ 3cos x ＋ 4 $\sqrt{1+\sin^2 x}$ 的最大值，并求出相应的 x 的值.

解析：

解：设 m ＝ (3,4)，

$n=(\cos x, \sqrt{1+\sin^2 x})$

则 f(x) ＝ 3cos x ＋ 4 $\sqrt{1+\sin^2 x}$

＝ |m • n|≤|m| • |n|

＝ $\sqrt{\cos^2 x+1+\sin^2 x}\cdot\sqrt{3^2+4^2}$ ＝ 5 $\sqrt{2}$，

当且仅当 m//n 时，上式取等号.

此时，$3\sqrt{1+\sin^2 x}-4\cos x=0$

解得 sin x ＝ $\frac{\sqrt{7}}{5}$，cos x ＝ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

故当 sin x ＝ $\frac{\sqrt{7}}{5}$，cos x ＝ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ 时，

f(x) ＝ $3\cos x+4\sqrt{1+\sin^2 x}$ 取得最大值 5 $\sqrt{2}$.

知识：二维柯西不等式

难度：2

题目：设 a ＝ (-2,1,2)，|b| ＝ 6，则 a • b 的最小值为 (　　)

A.18　　　　B.6

C.-18 D.12

解析：|a • b|≤|a||b|，

∴|a • b|≤18.

∴-18≤a • b≤18，当 a，b 反向时，a，b 最小，最小值 -18.

答案：C

知识：二维柯西不等式

难度：2

题目：已知 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1, x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，则 a_1x_1 ＋ a_2x_2 ＋… ＋ a_nx_n 的最大值是 (　　)

A.1 B.2

C.3 D.4

解析：$(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$ ＝ 1×1 ＝ 1，当且仅当 $\frac{x_1}{a_1}$ ＝ $\frac{x_2}{a_2}$ ＝… ＝ $\frac{x_n}{a_n}$ ＝ 1 时取等号，∴a_1x_1 ＋ a_2x_2 ＋… ＋ a_nx_n 的最大值是 1.

答案：A

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：已知 $a^2+b^2+c^2+d^2=5$，则 $ab+bc+cd+ad$ 的最小值为 (　　)

A.5 B.-5

C.25 D.-25

解析：　$(ab+bc+cd+da)^2\leq(a^2+b^2+c^2+d^2)\cdot(b^2+c^2+d^2+a^2)=25$，当且仅当 $a=b=c=d=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，等号成立，$\therefore ab+bc+cd+bd$ 的最小值为 -5.

答案：B

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：已知 x，y，z∈R，且 $x-2y-3z=4$，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 (　　)

A.$\frac{8}{7}$ B.$\frac{7}{8}$

C.$\frac{4}{7}$ D.$\frac{7}{4}$

解析：　由柯西不等式，得 $^2\leq(x^2+y^2+z^2)$，即 $(x-2y-3z)^2\leq14(x^2+y^2+z^2)$，

即 $16\leq14(x^2+y^2+z^2)$，所以 $x^2+y^2+z^2\geq\frac{8}{7}$.

当且仅当 $x=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-3}=\frac{2}{7}$ 时，等号成立，

即 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 $\frac{8}{7}$.

答案：A

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：已知 $2x+3y+z=8$，则 $x^2+y^2+z^2$ 取得最小值时，x，y，z 形成的点 (x，y，z) = ___________.

解析：由柯西不等式，得 $(2^2+3^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(2x+3y+z)^2$，即 $x^2+y^2+z^2\geq\frac{8^2}{14}=\frac{32}{7}$.

当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=z$ 时，等号成立．又 $2x+3y+z=8$，

解得 $x=\frac{8}{7}$，$y=\frac{12}{7}$，$z=\frac{4}{7}$，所求点为 $(\frac{8}{7},\frac{12}{7},\frac{4}{7})$.

答案：$(\frac{8}{7},\frac{12}{7},\frac{4}{7})$

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：已知实数 x，y，z 满足 $x+2y+z=1$，则 $x^2+4y^2+z^2$ 的最小值为 ___________.

解析：由柯西不等式，得 $(x^2+4y^2+z^2)(1+1+1)\geq(x+2y+z)^2$.

$\because x+2y+z=1$，$\therefore 3(x^2+4y^2+z^2)\geq1$，

即 $x^2+4y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$. 当且仅当 $x=2y=z=\frac{1}{3}$，

即 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{6}$，$z=\frac{1}{3}$ 时，等号成立，

故 $x^2+4y^2+z^2$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$.

答案：

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：已知 a，b，c∈R_+ 且 $a+b+c=6$，则 $\sqrt{2a}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+3}$ 的最大值为 ____________.

解析：由柯西不等式，得 $(\sqrt{2a}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+3})^2=(1\times\sqrt{2a}+1\times\sqrt{2b+1}+1\times\sqrt{2c+3})^2\leq(1^2+1^2+1^2)(2a+2b+1+2c+3)=3(2\times6+4)=48$.

当且仅当 $\sqrt{2a}=\sqrt{2b+1}=\sqrt{2c+3}$，

即 $2a=2b+1=2c+3$ 时，等号成立.

又 $a+b+c=6$，$\therefore a=\frac{8}{3}$，$b=\frac{13}{6}$，$c=\frac{7}{6}$ 时，

$\sqrt{2a}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+3}$ 取得最大值 $4\sqrt{3}$.

答案：$4\sqrt{3}$

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：在 △ABC 中，设其各边长为 a，b，c，外接圆半径为 R，求证：$(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C})\geq 36R^2$.

解析：

证明：$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

$(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C})\geq(\frac{a}{\sin A}+\frac{b}{\sin B}+\frac{c}{\sin C})^2=36R^2$

知识：二维柯西不等式

难度：1

题目：求实数 x，y 的值使得 $(y-1)^2+(x+y-3)^2+(2x+y-6)^2$ 取到最小值.

解析：

解：$a=y-1, b=x+y, c=2x+y-6$, 可得 $a-2b+c=-1$,

则原式 $=a^2+b^2+c^2=a^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}b^2+c^2\geq\frac{1}{6}(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}b+c)^2=\frac{1}{6}(a-2b+c)^2=\frac{1}{6}$,

取等条件 $a=-\frac{1}{2}b=c$, 即 $y-1=-\frac{1}{2}(x+y-3)=2x+y-6$,

$$\begin{cases} y-1=-\frac{1}{2}(x+y-3) \\ y-1=2x+y-6 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{5}{6} \end{cases}$

$\therefore x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{6}$, 此时最小值为 $\frac{1}{6}$.

知识：二维柯西不等式

难度：3

题目：已知不等式 $|a-2|\le x^2+2y^2+3z^2$ 对满足 $x+y+z=1$ 的一切实数 x，y，z 都成立，求实数 a 的取值范围.

解析：

解：由柯西不等式，得 $[1^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2]\ge(x+y+z)^2$.

又因为 $x+y+z=1$，所以 $x^2+2y^2+3z^2\ge\frac{6}{11}$.

当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{2}y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3}z}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$，即 $x=\frac{6}{11}$，$y=\frac{3}{11}$，$z=\frac{2}{11}$ 时取等号，则 $|a-2|\le\frac{6}{11}$，所以实数 a 的取值范围为 $[\frac{16}{11},\frac{28}{11}]$.

知识：排序不等式

难度：1

题目：有一有序数组，其顺序和为 A，反序和为 B，乱序和为 C，则它们的大小关系为 (　　)

A.A≥B≥C　　　　　　　　B.A≥C≥B

C.A≤B≤C D.A≤C≤B

解析：由排序不等式，顺序和 ≥ 乱序和 ≥ 反序和知：A≥C≥B.

答案：B

知识：排序不等式

难度：1

题目：若 $A=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，$B=x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$，其中 x_1，x_2，…，x_n 都是正数，则 A 与 B 的大小关系为 (　　)

A.A>B B.A<B C.A≥B D.A≤B

解析：序列 $\{x_n\}$ 的各项都是正数，不妨设 $0<x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$，则 x_2，x_3，…，x_n，x_1 为序列 $\{x_n\}$ 的一个排列．由排序原理，得 $x_1x_1+x_2x_2+\ldots+x_nx_n\ge x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1$，即 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\ge x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1$.

答案：C

知识：排序不等式

难度：1

题目：锐角三角形中，设 $P=\frac{a+b+c}{2}$，$Q=a\cos C+b\cos B+c\cos A$，则 P，Q 的关系为 (　　)

A.P≥Q B.P = Q C.P≤Q D. 不能确定

解析：不妨设 A≥B≥C，则 a≥b≥c，cos A≤cos B≤cos C，

则由排序不等式有 $Q = a\cos C + b\cos B + c\cos A$

$\geq a\cos B + b\cos C + c\cos A$

$= R(2\sin A\cos B + 2\sin B\cos C + 2\sin C\cos A)$

$= R$

$= R(\sin C + \sin A + \sin B) = P = \frac{a+b+c}{2}$.

答案:C

知识：排序不等式

难度：1

题目：儿子过生日要老爸买价格不同的礼品 1 件、2 件及 3 件，现在选择商店中单价为 13 元、20 元和 10 元的礼品，至少要花 ____________ 元．(　)

A.76 B.20 C.84 D.96

解析：设 $a_1 = 1$(件)，$a_2 = 2$(件)，$a_3 = 3$(件)，$b_1 = 10$(元)，$b_2 = 13$(元)，$b_3 = 20$(元)，则由排序原理反序和最小知至少要花 $a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 = 1\times20 + 2\times13 + 3\times10 = 76$(元).

答案：A

知识：排序不等式

难度：1

题目：已知两组数 1,2,3 和 4,5,6，若 c_1，c_2，c_3 是 4,5,6 的一个排列，则 $1c_1 + 2c_2 + 3c_3$ 的最大值是 ____________，最小值是 ____________.

解析：由反序和 ≤ 乱序和 ≤ 顺序和知，顺序和最大，反序和最小，故最大值为 32，最小值为 28.

答案：32　28

知识：排序不等式

难度：1

题目：有 4 人各拿一只水桶去接水，设水龙头注满每个人的水桶分别需要 5 s、4 s、3 s、7 s，每个人接完水后就离开，则他们总的等候时间最短为 ____________s.

解析：由题意知，等候的时间最短为 $3\times4 + 4\times3 + 5\times2 + 7 = 41$.

答案：41

知识：排序不等式

难度：1

题目：在 Rt△ABC 中，∠C 为直角，A，B 所对的边分别为 a，b，则 $aA + bB$ 与 $\frac{\pi}{4}(a + b)$ 的大小关系为 ____________.

解析：不妨设 $a\geq b>0$，则 $A\geq B>0$，由排序不等式

$\left.\begin{matrix} aA+bB\geq aB+bA \\ aA+bB=aA+bB \end{matrix}\right\}\Rightarrow 2(aA+bB)\geq a(A+B)+b(A+B)\ \frac{\pi}{2}=(a+b)$，

$\therefore aA+bB\geq\frac{\pi}{4}(a+b)$.

答案：$aA+bB\geq\frac{\pi}{4}(a+b)$

知识：排序不等式

难度：1

题目：设 a，b，c 都是正数，求证：$a+b+c\leq\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$.

解析：

证明：由题意不妨设 $a\geq b\geq c>0$.

由不等式的性质，知 $a^2\geq b^2\geq c^2$，$ab\geq ac\geq bc$.

根据排序原理，得 $a^2bc+ab^2c+abc^2\leq a^3c+b^3a+c^3b$.

又由不等式的性质，知 $a^3\geq b^3\geq c^3$，且 $a\geq b\geq c$.

再根据排序不等式，得

$a^3c+b^3a+c^3b\leq a^4+b^4+c^4$.

由　及不等式的传递性，得

$a^2bc+ab^2c+abc^2\leq a^4+b^4+c^4$.

两边同除以 abc 得证原不等式成立.

知识：排序不等式

难度：1

题目：设 a，b，c 为任意正数，求 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值.

解析：

解：不妨设 $a\geq b\geq c$，

则 $a+b\geq a+c\geq b+c$，$\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}$.

由排序不等式，得

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$，

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$，

以上两式相加，得 $2(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})\geq 3$，

$\therefore\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$，

即当且仅当 $a=b=c$ 时，

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$.

知识：排序不等式

难度：2

题目：设 x，y，z 为正数，求证：

$x+y+z\leq\frac{x^2+y^2}{2z}+\frac{y^2+z^2}{2x}+\frac{z^2+x^2}{2y}$.

解析：

证明：由于不等式关于 x，y，z 对称，

不妨设 $0<x\le y\le z$，于是 $x^2\le y^2\le z^2$，$\frac{1}{z}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{x}$，

由排序原理：反序和 ≤ 乱序和，得

$x^2\cdot\frac{1}{x}+y^2\cdot\frac{1}{z}+z^2\cdot\frac{1}{z}\le x^2\cdot\frac{1}{z}+y^2\cdot\frac{1}{x}+z^2\cdot\frac{1}{y}$，

$x^2\cdot\frac{1}{x}+y^2\cdot\frac{1}{z}+z^2\cdot\frac{1}{z}\le x^2\cdot\frac{1}{y}+y^2\cdot\frac{1}{z}+z^2\cdot\frac{1}{x}$，

将上面两式相加，得 $2(x+y+z)\le\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}$，于是 $x+y+z\le\frac{x^2+y^2}{2z}+\frac{y^2+z^2}{2x}+\frac{z^2+x^2}{2y}$.

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：数学归纳法证明中，在验证了 $n=1$ 时命题正确，假定 $n=k$ 时命题正确，此时 k 的取值范围是　(　　)

A. $k\in N$　　B. $k>1$，$k\in N^*$

C. $k\ge1$，$k\in N^*$ D. $k>2$，$k\in N^*$

解析：数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题的一种方法，所以 k 是正整数；因为第一步是递推的基础，所以 k 大于等于 1.

答案：C

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：用数学归纳法证明 $1+2+3+\ldots+n^3=\frac{n^6+n^3}{2}$，则当 $n=k+1$ 时，左端应在 $n=k$ 的基础上加上 (　　)

A. k^3+1

B. $(k+1)^3$

C. $\frac{(k+1)^6+(k+1)^3}{2}$

D. $(k^3+1)+(k^3+2)+(k^3+3)+\ldots+(k+1)^3$

解析：　当 $n=k$ 时，等式左端 $=1+2+\ldots+k^3$.

当 $n=k+1$ 时，等式左端 $=1+2+\ldots+k^3+(k^3+1)+(k^3+2)+(k^3+3)+\ldots+(k+1)^3$，故选 D.

答案:D

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：设 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}(n\in N^*)$，那么 $f(n+1)-f(n)$ 等于 (　　)

A. $\frac{1}{2n+1}$　　B. $\frac{1}{2n+2}$

C. $\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$ D. $\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$

解析：因为 f(n) ＝ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}$，

所以 f(n ＋ 1) ＝ $\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$

所以 f(n ＋ 1)-f(n) ＝ $\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n-1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$.

答案：D

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：某同学回答“用数学归纳法证明 $\sqrt{n^2+n}$<n ＋ 1(n∈N*)”的过程如下：

证明：(1) 当 n ＝ 1 时，显然命题是正确的.

(2) 假设 n ＝ k 时，有 $\sqrt{k(k+1)}$<k ＋ 1，那么当 n ＝ k ＋ 1 时，$\sqrt{(k+1)^2+k+1}=\sqrt{k^2+3k+2}<\sqrt{k^2+4k+4}$ ＝ (k ＋ 1) ＋ 1，

所以当 n ＝ k ＋ 1 时命题是正确的.

由 (1)(2) 可知对于 n∈N*，命题都是正确的.

以上证法是错误的，错误在于 (　　)

A. 从 k 到 k ＋ 1 的推理过程没有使用归纳假设

B. 归纳假设的写法不正确

C. 从 k 到 k ＋ 1 的推理不严密

D. 当 n ＝ 1 时，验证过程不具体

解析：　证明 $\sqrt{(k+1)^2+k+1}$<(k ＋ 1) ＋ 1 时进行了一般意义的放大，而没有使用归纳假设 $\sqrt{k(k+1)}$<k ＋ 1.

答案：A

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：数列 $\{a_n\}$ 中，已知 a_1 ＝ 1，当 n≥2 时，a_n-a_{n-1} ＝ 2n-1，依次计算 a_2，a_3，a_4 后，猜想 a_n 的表达式是 ____________.

解析：计算出 a_1 ＝ 1，a_2 ＝ 4，a_3 ＝ 9，a_4 ＝ 16. 可猜想 a_n ＝ n^2.

答案：a_n ＝ n^2

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：用数学归纳法证明“1×4 ＋ 2×7 ＋ 3×10 ＋… ＋ n(3n ＋ 1) ＝ n(n ＋ 1)^2，n∈N*”时，若 n ＝ 1，则左端应为 ____________.

解析：n ＝ 1 时，左端应为 1×4 ＝ 4.

答案：4

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：记凸 k 边形的内角和为 f(k)，则凸 k ＋ 1 边形的内角和 f(k ＋ 1) ＝ f(k) ＋ ___________.

解析：由凸 k 边形变为凸 k ＋ 1 边形时，增加了一个三角形图形，故 f(k ＋ 1) ＝ f(k) ＋ π.

答案：π

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：用数学归纳法证明：1 • (n^2-1^2) ＋ 2 • (n^2-2^2) ＋… ＋ $n(n^2-n^2)$ ＝ $\frac{1}{4}n^2(n-1)(n+1)$.

解析：

证明： 当 n ＝ 1 时，左边＝ 1 • (1^2-1^2) ＝ 0，右边＝ $\frac{1}{4}\times1^2\times0\times2$ ＝ 0，所以左边＝右边，n ＝ 1 时，等式成立.

假设 n ＝ k(k≥1，k∈N*) 时，等式成立，即

1 • (k^2-1^2) ＋ 2 • (k^2-2^2) ＋… ＋ k • (k^2-k^2) ＝ $\frac{1}{4}k^2(k-1)$ • (k ＋ 1)，所以当 n ＝ k ＋ 1 时，左边＝ 1 •＋ 2 •＋… ＋ k •＋ (k ＋ 1) ＝＋＝ $\frac{1}{4}k^2(k-1)(k+1)$ ＋ $\frac{k(k+1)}{2}$ • (2k ＋ 1) ＝ $\frac{1}{4}k(k+1)$ •

＝ $\frac{1}{4}k(k+1)(k^2+3k+2)$ ＝ $\frac{1}{4}(k+1)^2k(k+2)$，

即 n ＝ k ＋ 1 时，等式成立，

根据 与 可知等式对 n∈N* 都成立.

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：

求证：$a^{n+2}+(a+1)^{2n+1}$ 能被 a^2+a+1 整除，n∈N*.

解析：

证明： 当 n ＝ 1 时，

$a^3+(a+1)^3 == (2a+1)(a^2+a+1)$.

结论成立.

假设当 n ＝ k 时，结论成立，

即 $a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}$ 能被 a^2+a+1 整除，

那么 n ＝ k ＋ 1 时，

有 $a^{(k+1)+2}+(a+1)^{2(k+1)+1} = a \cdot a^{k+2}+(a+1)^2(a+1)^{2k+1}$

$= a+(a+1)^2(a+1)^{2k+1}-a(a+1)^{2k+1}$

$= a+(a^2+a+1)(a+1)^{2k+1}$.

因为 $a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}$，a^2+a+1 均能被 a^2+a+1 整除，

所以 $a^{(k+1)+2}+(a+1)^{2(k+1)+1}$ 能被 a^2+a+1 整除，

即当 $n = k + 1$ 时，结论也成立.

由 可知，原结论成立.

知识：数学归纳法及应用

难度：2

题目：有 n 个圆，任意两个圆都相交于两点，任意三个圆不相交于同一点，求证这 n 个圆将平面分成 $f(n) = n^2-n + 2$ 个部分 ($n\in N^*$).

解析：

证明： 当 $n = 1$ 时，一个圆将平面分成两个部分，且 $f(1) = 1-1 + 2 = 2$，

所以 $n = 1$ 时命题成立.

假设 $n = k(k\geq 1)$ 时命题成立.

即 k 个圆把平面分成 $f(k) = k^2-k + 2$ 个部分.

则 $n = k + 1$ 时，在 $k + 1$ 个圆中任取一个圆 O，剩下的 k 个圆将平面分成 f(k) 个部分，而圆 O 与 k 个圆有 2k 个交点，这 2k 个点将圆 O 分成 2k 段弧，每段弧将原平面一分为二，

故得 $f(k + 1) = f(k) + 2k = k^2-k + 2 + 2k$

$= (k + 1)^2-(k + 1) + 2$，∴ 当 $n = k + 1$ 时，命题成立.

综合 可知，对一切 $n\in N^*$，命题成立.

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：用数学归纳法证明“对于任意 $x>0$ 和正整数 n，都有 $x^n + x^{n-2} + x^{n-4} +\ldots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n}\geq n + 1$”时，需验证的使命题成立的最小正整数值 n_0 应为 (　　)

A.1　　　　B.2

C.1,2 D. 以上答案均不正确

解析：需验证 $n_0 = 1$ 时，$x + \frac{1}{x}\geq 1 + 1$ 成立.

答案：A

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：用数学归纳法证明“$2^n>n^2 + 1$ 对于 $n\geq n_0$ 的正整数 n 都成立”时，第一步证明中的起始值 n_0 应取 (　　)

A.2 B.3 C.5 D.6

解析：n 取 1,2,3,4 时不等式不成立，起始值为 5.

答案：C

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：用数学归纳法证明“$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in N^*，n>1)$”时，由 $n=k(k>1)$ 不等式成立，推证 $n=k+1$ 时，左边应增加的项数是 (　　)

A.2^{k-1} B.2^k-1 C.2^k D.2^k+1

解析：由 $n=k$ 到 $n=k+1$，应增加的项数为 $(2^{k+1}-1)-(2^k-1)=2^{k+1}-2^k=2^k$ 项.

答案：C

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：设 f(x) 是定义在正整数集上的函数，且 f(x) 满足“当 $f(k)\geq k^2$ 成立时，总可推出 $f(k+1)\geq(k+1)^2$ 成立”. 那么，下列命题总成立的是 (　　)

A. 若 f（1）<1 成立，则 f(**??**)<100 成立

B. 若 f（2）<4 成立，则 f(1)≥1 成立

C. 若 f（3）≥9 成立，则当 k≥1 时，均有 $f(k)\geq k^2$ 成立

D. 若 f（4）≥16 成立，则当 k≥4 时，均有 $f(k)\geq k^2$ 成立

解析：选项 A、B 与题设中不等号方向不同，故 A、B 错；选项 C 中，应该是 k≥3 时，均有 $f(k)\geq k^2$ 成立；选项 D 符合题意.

答案：D

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：证明 $\frac{n+2}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}<n+1(n>1)$，当 $n=2$ 时，要证明的式子为 ____________.

解析：当 $n=2$ 时，要证明的式子为 $2<1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<3$.

答案：$2<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<3$

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：利用数学归纳法证明“$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\ldots(1+\frac{1}{2n-1})>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$”时，n 的最小取值 n_0 为 ____________.

解析：左边为 (n-1) 项的乘积，故 $n_0=2$.

答案：2

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：设 a，b 均为正实数 $(n\in N^*)$，已知 $M=(a+b)^n$，$N=a^n+na^{n-1}b$，则 M，N 的大小关系为 ____________(提示：利用贝努利不等式，令 $x=\frac{b}{a}$).

解析：当 $n = 1$ 时，$M = a + b = N$. 当 $n = 2$ 时，$M = (a + b)^2$，$N = a^2 + 2ab<M$. 当 $n = 3$ 时，$M = (a + b)^3$，$N = a^3 + 3a^2b<M$. 归纳得 $M \geq N$.

答案：$M \geq N$

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：用数学归纳法证明，对任意 $n\in N^*$，有

$(1 + 2 +\dots + n)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\geq n^2$.

解析：

证明： 当 $n = 1$ 时，左边＝右边，不等式成立.

当 $n = 2$ 时，左边＝ $(1 + 2)(1+\frac{1}{2}) = \frac{9}{2}>2^2$，不等式成立.

假设当 $n = k(k\geq 2)$ 时不等式成立，

即 $(1 + 2 +\dots + k)(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})\geq k^2$.

则当 $n = k + 1$ 时，有

左边＝ $[(1+2+\cdots+k+(k+1))(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})]$

$= (1 + 2 +\dots + k)(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}) + (1 + 2 +\dots + k)\cdot\frac{1}{k+1} + (k + 1)\times(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}) + 1$

$\geq k^2 + \frac{k}{2} + 1 + (k + 1)(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})$.

$\because$ 当 $k\geq 2$ 时，$1 + \frac{1}{2} +\dots + \frac{1}{k}\geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$，

$\therefore$ 左边 $\geq k^2 + \frac{k}{2} + 1 + (k + 1)\times\frac{3}{2}$

$= k^2 + 2k + 1 + \frac{3}{2}\geq(k + 1)^2$.

这就是说当 $n = k + 1$ 时，不等式成立.

由 可知当 $n\geq 1$ 时，不等式成立.

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_0^2-na_n + 1$，$n = 1,2,3\dots$

（1）当 $a_1 = 2$ 时，求 a_2，a_3，a_4，并由此猜想出 a_n 的一个通项公式；

（2）当 $a\geq 3$ 时，证明对所有的 $n\geq 1$，有 $a_n\geq n + 2$.

解析：

解：（1）由 $a_1 = 2$，得 $a_2 = a_0^2-a_1 + 1 = 3$；

由 $a_2 = 3$，得 $a_3 = a_2^2-2a_2 + 1 = 4$；

由 $a_3 = 4$，得 $a_4 = a_3^2-3a_3 + 1 = 5$.

由此猜想 a_n 的一个通项公式：$a_n = n + 1(n\geq 1)$.

（2）证明：用数学归纳法证明.

当 $n = 1$，$a_1\geq 3 = 1 + 2$，不等式成立.

假设当 n = k 时不等式成立，

即 $a_k \geq k+2$.

那么，当 n = k + 1 时，$a_{k+1} = a_k(a_k-k)+1 \geq (k+2)(k+2-k)+1 \geq k+3$，

也就是说，当 n = k + 1 时，$a_{k+1} \geq (k+1)+2$.

根据 和 ，对于所有 $n \geq 1$，有 $a_n \geq n+2$.

知识：数学归纳法及应用

难度：1

题目：设 $a \in R$，$f(x) = \frac{a \cdot 2^x + a - 2}{2^x + 1}$ 是奇函数.

（1）求 a 的值；

（2）如果 $g(n) = \frac{n}{n+1}(n \in N^*)$，试比较 f(n) 与 g(n) 的大小 $(n \in N^*)$.

解析：

解：（1）∵f(x) 是定义在 R 上的奇函数，

∴f(0) = 0. 故 a = 1.

（2）$f(n)-g(n)=\frac{2^n-1}{2^n+1}-\frac{n}{n+1}=\frac{2^n-2n-1}{(2^n+1)(n+1)}$.

只要比较 2^n 与 2n + 1 的大小.

当 n = 1,2 时，$f(n)<g(n)$；

当 $n \geq 3$ 时，$2^n>2n+1$，$f(n)>g(n)$.

下面证明，$n \geq 3$ 时，$2^n>2n+1$，即 $f(x)>g(x)$.

n = 3 时，$2^3>2 \times 3+1$，显然成立，

假设 $n = k(k \geq 3, k \in N^*)$ 时，$2^k>2k+1$，

那么 n = k + 1 时，$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2(2k+1)$.

$2(2k+1)- = 4k+2-2k-3 = 2k-1>0(\because k \geq 3)$，有 $2^{k+1}>2(k+1)+1$.

∴n = k + 1 时，不等式也成立.

由 可以判定，$n \geq 3$，$n \in N^*$ 时，$2^n>2n+1$.

∴n = 1,2 时，$f(n)<g(n)$；

当 $n \geq 3$，$n \in N^*$ 时，$f(n)>g(n)$.

知识：曲边梯形的面积

难度：1

题目：和式 $\sum_{i=1}^{5}(y_i+1)$ 可表示为 (　　)

A.$(y_1+1)+(y_5+1)$

B.$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+1$

C.$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+5$

D.$(y_1+1)(y_2+1)\ldots(y_5+1)$

解析：　$\sum_{i=1}^{5}(y_i+1)=(y_1+1)+(y_2+1)+(y_3+1)+(y_4+1)+(y_5+1)=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+5$，故选 C.

答案：　C

知识：曲边梯形的面积

难度：1

题目：在求由 $x=a$，$x=b(a<b)$，$y=f(x)(f(x)\geq 0)$ 及 $y=0$ 围成的曲边梯形的面积 S时，在区间 $[a，b]$ 上等间隔地插入 n-1 个分点，分别过这些分点作 x轴的垂线，把曲边梯形分成 n个小曲边梯形，下列说法中正确的个数是 (　)

n个小曲边梯形的面积和等于 S；

n个小曲边梯形的面积和小于 S；

n个小曲边梯形的面积和大于 S；

n个小曲边梯形的面积和与 S之间的大小关系无法确定

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

解析：　n个小曲边梯形是所给曲边梯形等距离分割得到的，因此其面积和为 S.∴ 正确，　错误，故应选 A.

答案：　A

知识：曲边梯形的面积

难度：1

题目：在 “近似代替” 中，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i，x_{i+1}]$ 上的近似值等于 (　)

A. 只能是左端点的函数值 $f(x_i)$

B. 只能是右端点的函数值 $f(x_{i+1})$

C. 可以是该区间内任一点的函数值 $f(\xi_i)(\xi_i\in[x_i，x_{i+1}])$

D. 以上答案均不正确

解析：　由求曲边梯形面积的 “近似代替” 知，C 正确，故应选 C.

答案：　C

知识：曲边梯形的面积

难度：1

题目：(2010 ・惠州高二检测) 求由抛物线 $y=2x^2$ 与直线 $x=0$，$x=t(t>0)$，$y=0$ 所围成的曲边梯形的面积时，将区间 $[0，t]$ 等分成 n个小区间，则第 i-1 个区间为 (　　)

A.$[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ B.$[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$

C.$[\frac{t(i-1)}{n},\frac{ti}{n}]$ D.$[\frac{t(i-2)}{n},\frac{t(i-1)}{n}]$

解析:　在 $[0，t]$ 上等间隔插入 $(n\text{-}1)$ 个分点，把区间 $[0，t]$ 等分成 n个小区间，每个小区间的长度均为 $\frac{t}{n}$，故第 i-1 个区间为 $[\frac{t(i-2)}{n},\frac{t(i-1)}{n}]$，故选 D.

答案:　D

知识：曲边梯形的面积

难度：1

题目：由直线 $x= 1$，$y= 0$，$x= 0$ 和曲线 $y= x^3$ 所围成的曲边梯形，将区间 4 等分，则曲边梯形面积的近似值 (取每个区间的右端点) 是 (　　)

A.$\frac{1}{19}$ B.$\frac{111}{256}$

C.$\frac{110}{270}$ D.$\frac{25}{64}$

解析:　$s= [(\frac{1}{4})^3+(\frac{2}{4})^3+(\frac{3}{4})^3+1^3]\times\frac{1}{4} = \frac{1^3+2^3+3^3+4^3}{4^4} = \frac{25}{64}$.

答案:　D

知识：曲边梯形的面积

难度：1

题目：在等分区间的情况下，$f(x) = \frac{1}{1+x^2}(x\in[0,2])$ 及 x轴所围成的曲边梯形面积和式的极限形式正确的是 (　　)

A.$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}[\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{2}{n}]$

B.$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}[\frac{1}{1+(\frac{2i}{n})^2}\cdot\frac{2}{n}]$

C.$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}[\frac{1}{1+i^2}\cdot\frac{1}{n}]$

D.$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}[\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot n]$

解析:　将区间 $[0,2]$ 进行 n等分每个区间长度为 $\frac{2}{n}$，故应选 B.

答案:　B

知识：曲边梯形的面积

难度：1

题目：求直线 $x= 0$，$x= 2$，$y= 0$ 与曲线 $y= x^2$ 所围成曲边梯形的面积.

解析:　按分割，近似代替，求和，取极限四个步骤进行.

解:　将区间 $[0,2]$ 分成 n个小区间，则第 i个小区间为 $[\frac{2(i-1)}{n},\frac{2i}{n}]$.

第 i个小区间的面积 $\Delta S_i = f(\frac{2(t-1)}{n})\cdot\frac{2}{n}$,

$\therefore S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{2(i-1)}{n})\cdot\frac{2}{n}$

$= \frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{4(i-1)^2}{n^2} = \frac{8}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)^2$

$= \frac{8}{n^3}[0^2 + 1^2 + 2^2 +\ldots + (n\text{-}1)^2]$

$= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ •

$= \frac{8(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

$S= \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{8}{3}$，

∴ 所求曲边梯形面积为 $\frac{8}{3}$.

知识：行驶路程

难度：1

题目：汽车以速度 v做匀速直线运动时，经过时间 t所行驶的路程 $s= vt$. 如果汽车做变速直线运动，在时刻 t的速度为 $v(t) = t^2 + 2$(单位：km/h)，那么它在 $1\le t\le 2$(单位：h) 这段时间行驶的路程是多少？

解析： 汽车行驶路程类似曲边梯形面积，根据曲边梯形面积思想，求和后再求极限值.

解： 将区间 [1,2] 等分成 n个小区间，第 i个小区间为 $[1+\frac{i-1}{n},1+\frac{i}{n}]$.

$\therefore \Delta s_i = f(1+\frac{i-1}{n})\cdot\frac{1}{n}$.

$s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(1+\frac{i-1}{n})\cdot\frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[(1+\frac{i-1}{n})^2+2]$

$= \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[\frac{(i-1)^2}{n}+\frac{2(i-1)}{n}+3]$

$= \frac{1}{n}3n+ \frac{1}{n^2}[0^2 + 1^2 + 2^2 +\ldots + (n-1)^2] + \frac{1}{n}[0 + 2 + 4 + 6 +\ldots + 2(n-1)]$

$= 3+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + \frac{n-1}{n}$.

$s= s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}[3+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}+\frac{n-1}{n}] = \frac{13}{3}$.

∴ 这段时间行驶的路程为 $\frac{13}{3}$km.

知识：行驶路程

难度：1

题目：求物体自由落体的下落距离：已知自由落体的运动速度 $v= gt$，求在时间区间 [0，t] 内物体下落的距离.

解析： 选定区间 → 分割 → 近似代替 → 求和 → 求极限

解： (1) 分割：将时间区间 [0，t] 分成 n等份.

把时间 [0，t] 分成 n个小区间 $[\frac{i-1}{n}t,\frac{it}{n}]$($i= 1,2$，…，$n$)，

每个小区间所表示的时间段 $\Delta t= \frac{it}{n}-\frac{i-1}{n}t= \frac{t}{n}$，在各小区间物体下落的距离记作 Δs_i($i= 1,2$，…，n).

(2) 近似代替：在每个小区间上以匀速运动的路程近似代替变速运动的路程.

在 $[\frac{i-1}{n}t,\frac{it}{n}]$ 上任取一时刻ξ_i($i= 1,2$，…，n)，可取ξ_i 使 $v(\xi_i) = g\frac{(i-1)}{n}t$ 近似代替第 i个小区间上的速度，因此在每个小区间上自由落体 $\Delta t= \frac{t}{n}$ 内所经过的距离可近似表示为 $\Delta s_i\approx g(\frac{i-1}{n}t)\cdot\frac{t}{n}$($i= 1,2$，…，$n$).

(3) 求和：$s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} g(\frac{i-1}{n} \cdot t) \cdot \frac{t}{n}$

$= \frac{gt^2}{n^2}[0 + 1 + 2 +\ldots + (n\text{-}1)]$

$= \frac{1}{2}gt^2(1-\frac{1}{n})$.

(4) 取极限：$s= \lim\limits_{n\to\infty} gt^2(1-\frac{1}{n}) = gt^2$.

知识：定积分的概念

难度：1

题目：定积分 $\int_1^3(\text{-}3)\mathrm{d}x$等于（　　）

A.-6　　　　　　　　B.6

C.-3 D.3

解析：　由积分的几何意义可知 $\int_1^3(\text{-}3)\mathrm{d}x$表示由 $x= 1$，$x= 3$，$y= 0$ 及 $y= \text{-}3$ 所围成的矩形面积的相反数，故 $\int_1^3(\text{-}3)\mathrm{d}x= \text{-}6$.

答案：A

知识：定积分的概念

难度：1

题目：定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的大小（　　）

A. 与 $f(x)$ 和积分区间 $[a，b]$ 有关，与ξ_i 的取法无关

B. 与 $f(x)$ 有关，与区间 $[a，b]$ 以及ξ_i 的取法无关

C. 与 $f(x)$ 以及ξ_i 的取法有关，与区间 $[a，b]$ 无关

D. 与 $f(x)$、区间 $[a，b]$ 和ξ_i 的取法都有关

解析：　由定积分定义及求曲边梯形面积的四个步骤知 A 正确.

答案：　A

知识：定积分的概念

难度：1

题目：下列说法成立的个数是（　　）

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x= \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\xi_i)\frac{b-a}{n}$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$等于当 n趋近于$+\infty$ 时，$f(\xi_i) \cdot \frac{b-a}{n}$ 无限趋近的值

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$等于当 n无限趋近于$+\infty$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\xi_i)\frac{b-a}{n}$ 无限趋近的常数

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$可以是一个函数式子

A.1 B.2

C.3 D.4

解析：　由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的定义及求法知仅　正确，其余不正确．故应选 A.

答案：　A
知识：定积分的概念
难度：1
题目：已知 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 56$，则（　　）
A.$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 28$ B.$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 28$
C.$\int_1^2 2f(x)\mathrm{d}x = 56$ D.$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 56$
解析：　由 $y = f(x)$，$x = 1$，$x = 3$ 及 $y = 0$ 围成的曲边梯形可分拆成两个：由 $y = f(x)$，$x = 1$，$x = 2$ 及 $y = 0$ 围成的曲边梯形知由 $y = f(x)$，$x = 2$，$x = 3$ 及 $y = 0$ 围成的曲边梯形.
$\therefore \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$
即 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 56$.
故应选 D.
答案：　D
知识：定积分的概念
难度：1
题目：已知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 6$，则 $\int_a^b 6f(x)\mathrm{d}x$等于（　　）
A.6 B.$6(b-a)$
C.36 D. 不确定
解析：　$\because \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 6$，
$\therefore$ 在 $\int_a^b 6f(x)\mathrm{d}x$中曲边梯形上、下底长变为原来的 6 倍，由梯形面积公式，知 $\int_a^b 6f(x)\mathrm{d}x = 6\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 36$. 故应选 C.
答案：C
知识：定积分的概念
难度：1
题目：设 $f(x) = \begin{cases} x^2, (x \geq 0) \\ 2^x, (x < 0) \end{cases}$ 则 $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$的值是（　　）
A. $\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$ B.$\int_{-1}^1 2^x\mathrm{d}x$ C. $\int_{-1}^0 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 2^x\mathrm{d}x$ D.$\int_{-1}^0 2^x\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$
解析：　由定积分性质 (3) 求 $f(x)$ 在区间 [-1,1] 上的定积分，可以通过求 $f(x)$ 在区间 [-1,0] 与 [0,1] 上的定积分来实现，显然 D 正确，故应选 D.
答案：　D
知识：定积分的概念
难度：1
题目：下列命题不正确的是（　　）
A. 若 $f(x)$ 是连续的奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$
B. 若 $f(x)$ 是连续的偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

C. 若 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续且恒正，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$

D. 若 $f(x)$ 在 $[a，b)$ 上连续且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，则 $f(x)$ 在 $[a，b)$ 上恒正

解析：　本题考查定积分的几何意义，对 A：因为 $f(x)$ 是奇函数，所以图象关于原点对称，所以 x轴上方的面积和 x轴下方的面积相等，故积分是 0，所以 A 正确．对 B：因为 $f(x)$ 是偶函数，所以图象关于 y轴对称，故图象都在 x轴下方或上方且面积相等，故 B 正确．C 显然正确．D 选项中 $f(x)$ 也可以小于 0，但必须有大于 0 的部分，且 $f(x)>0$ 的曲线围成的面积比 $f(x)<0$ 的曲线围成的面积大．

答案：　D

知识：定积分的概念

难度：1

题目：利用定积分的有关性质和几何意义可以得出定积分 $\int_{-1}^{1}[(\tan x)^{11}+(\cos x)^{21}]\mathrm{d}x=$

(　　)

A.$2\int_0^1[(\tan x)^{11}+(\cos x)^{21}]\mathrm{d}x$

B.0

C.$2\int_0^1(\cos x)^{21}\mathrm{d}x$

D.2

解析：　$\because y=\tan x$为 [-1,1] 上的奇函数，

$\therefore y=(\tan x)^{11}$ 仍为奇函数，而 $y=(\cos x)^{21}$ 是偶函数，

$\therefore$ 原式$=\int_{-1}^{1}(\cos x)^{21}\mathrm{d}x=2\int_0^1(\cos x)^{21}\mathrm{d}x$. 故应选 C.

答案：　C

知识：定积分的概念

难度：1

题目：设 $f(x)$ 是 $[a，b]$ 上的连续函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$的值 (　　)

A. 小于零 B. 等于零

C. 大于零 D. 不能确定

解析：　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$都表示曲线 $y=f(x)$ 与 $x=a$，$x=b$及 $y=0$ 围成的曲边梯形面积，不因曲线中变量字母不同而改变曲线的形状和位置．所以其值为 0.

答案：B

知识：定积分的概念

难度：1

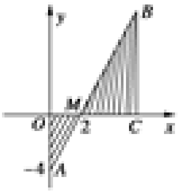
题目：由 $y=\sin x$，$x=0$，$x=\frac{\pi}{2}$，$y=0$ 所围成的图形的面积可以写成____________.

解析：　由定积分的几何意义可得.

答案：　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x$

知识：定积分的概念

难度：1



题目：$(2x\text{-}4)\mathrm{d}x=$ ____________.

解析：　如图 $A(0，\text{-}4)$，$B(6,8)$

$S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}\times2\times4 = 4$

$S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}\times4\times8 = 16$

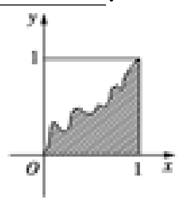
$\therefore\int_0^6(2x\text{-}4)\mathrm{d}x= 16\text{-}4 = 12.$

答案：　12

知识：定积分的概念

难度：1

题目：(2010 ·新课标全国理，13) 设 $y= f(x)$ 为区间 $[0,1]$ 上的连续函数，且恒有 $0\le f(x)\le1$，可以用随机模拟方法近似计算积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 先产生两组 (每组 N个) 区间 $[0,1]$ 上的均匀随机数 x_1，x_2，…，x_N 和 y_1，y_2，…，y_N，由此得到 N个点 $(x_i，y_i)(i= 1,2，…，N)$. 再数出其中满足 $y_i\le f(x_i)(i=1,2，…，N)$ 的点数 N_1，那么由随机模拟方法可得积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$的近似值为 ____________.



解析：　因为 $0\le f(x)\le1$ 且由积分的定义知：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$是由直线 $x= 0$，$x= 1$ 及曲线 $y= f(x)$ 与 x轴所围成的面积，又产生的随机数对在如图所示的正方形内，正方形面积为 1，且满足 $y_i\le f(x_i)$ 的有 N_1 个点，即在函数 $f(x)$ 的图象上及图象下方有 N_1 个点，所以用几何概型的概率公式得：$f(x)$ 在 $x= 0$ 到 $x= 1$ 上与 x轴围成的面积为 $\frac{N_1}{N}\times1 = \frac{N_1}{N}$，即 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x= \frac{N_1}{N}$.

答案：$\frac{N_1}{N}$

知识：定积分的概念

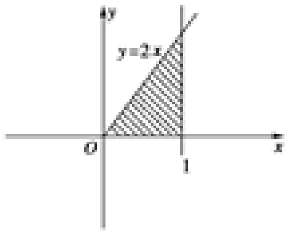
难度：1

题目：利用定积分的几何意义，说明下列等式.

(1)$\int_0^1 2x\mathrm{d}x$=1; (2)$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

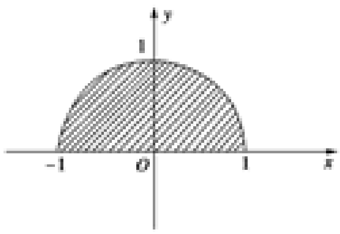
解析：

解： (1)$\int_0^1 2x\mathrm{d}x$表示由直线 $y=2x$，直线 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 所围成的图形的面积，如图所示，阴影部分为直角三角形，所以 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$，故 $\int_0^1 2x\mathrm{d}x=1$.



(2)$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}x$表示由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$，直线 $x=-1$，$x=1$，$y=0$ 所围成的图形面积 (而 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示圆 $x^2+y^2=1$ 在 x轴上面的半圆)，如图所示阴影部分，所以 $S_{半圆}=\frac{\pi}{2}$，

故 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$



知识：定积分的概念

难度：1

题目：利用定积分的性质求 $\int_{-1}^1(\frac{2x}{x^4+1}+\sin^3 x+x^2-\frac{e^x-1}{e^x+1})\mathrm{d}x$.

解析：

解： $y=\frac{2x}{x^4+1}$，$y=\sin^3 x$均为 [-1,1] 上的奇函数，而对于 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，

$\because f(-x)=\frac{e^{-1}-1}{e^{-1}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x)$，

此函数为奇函数.

$\therefore \int_{-1}^1(\frac{2x}{x^4+1})\mathrm{d}x=0,\ \int_{-1}^1 \sin^3 x\mathrm{d}x=0,\ \int_{-1}^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\mathrm{d}x=0$

$\therefore$ 原式 $=\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$

$\because S=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot(\frac{i}{n})^2=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i)^2$

$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{6}(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})$

$\therefore S= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{6}(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{3}$

即 $2\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x= 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\int_{-1}^{1}(\frac{2x}{x^4+1}+\sin^3 x+x^2-\frac{e^x-1}{e^x+1})\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$

知识：定积分的概念

难度：1

题目：已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, x\in[-2,2) \\ 2x, x\in[2,\pi) \\ \cos x, x\in[\pi,2\pi] \end{cases}$，求 $f(x)$ 在区间 $[-2,2\pi]$ 上的积分.

解析：

解：　由定积分的几何意义知

$\int_{-2}^{2} x^3 \mathrm{d}x=0$

$\int_{2}^{\pi} 2x\mathrm{d}x=\frac{(\pi-2)(2\pi+4)}{2}=\pi^2-4$

$\int_{\pi}^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x=0$, 由定积分的性质得

$\int_{-2}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2} x^3\mathrm{d}x+\int_{2}^{\pi} 2x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x$

$= \pi^2-4$.

知识：定积分的概念

难度：1

题目：利用定积分的定义计算 $\int_a^b x\mathrm{d}x$.

解析：

解：　(1) 分割：将区间 $[a，b]$ n等分，则每一个小区间长为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}(i=1,2，…，n)$.

(2) 近似代替：在小区间 $[x_{i-1}，x_i]$ 上取点：$\xi_i = a+ \frac{i(b-a)}{n}(i= 1,2，…，n)$.

$I_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = [a+\frac{i(b-a)}{n}]\cdot\frac{b-a}{n}$.

(3) 求和：$I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

$= \sum\limits_{i=1}^{n}[a+\frac{i(b-a)}{n}]\cdot\frac{b-a}{n}$

$= \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[a+\frac{i(b-a)}{n}]$

$= \frac{b-a}{n}[\sum\limits_{i=1}^{n} a+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i(b-a)}{n}]$

$= \frac{b-a}{n}(na+\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} i)$

$= (b-a)(a+\frac{b-a}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2})$

(4) 求极限：$\int_a^b x\mathrm{d}x= \lim\limits_{n\to\infty} I_n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(b\text{-}a)[a+\frac{b-a}{n}(1+\frac{1}{n})]$

$=(b\text{-}a)(a+\frac{b}{2}-\frac{a}{2})=\frac{1}{2}(b^2\text{-}a^2)$.

知识：微积分定理

难度：1

题目：$\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x$等于（　　）

A.$\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x$ B.$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x$

C.$\int_{-1}^{0}(\text{-}x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x$ D.$\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(\text{-}x)\mathrm{d}x$

解析：　$\because|x|=\begin{cases}x,(x\geq 0)\\-x,(x<0)\end{cases}$

$\therefore\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}|x|\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}|x|\mathrm{d}x$

$=\int_{-1}^{0}(\text{-}x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x$，故应选 C.

答案：　C

知识：微积分定理

难度：1

题目：设 $f(x)=\begin{cases}x^2,(x\leq x<0)\\2-x,(1\leq x\leq 2)\end{cases}$，则 $\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$等于（　　）

A.$\frac{3}{4}$ B.$\frac{4}{5}$

C.$\frac{5}{6}$ D. 不存在

解析：　$\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(2\text{-}x)\mathrm{d}x$

取 $F_1(x)=x^3$，$F_2(x)=2x\text{-}x^2$，

则 $F'_1(x)=x^2$，$F'_2(x)=2\text{-}x$

$\therefore\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=F_1(1)\text{-}F_1(0)+F_2(2)\text{-}F_2(1)$

$=\frac{1}{3}\text{-}0+2\times2\text{-}\frac{1}{2}\times2^2\text{-}(2\times1-\frac{1}{2}\times1^2)=\frac{5}{6}$. 故应选 C.

答案：C

知识：微积分定理

难度：1

题目：$\int_{a}^{b}f'(3x)\mathrm{d}x=$（　　）

A.$f(b)\text{-}f(a)$ B.$f(3b)\text{-}f(3a)$

C.$\frac{1}{3}[f(3b)\text{-}f(3a)]$ D.$3[f(3b)\text{-}f(3a)]$

解析：　$\because[\frac{1}{3}]f(3x)'=f'(3x)$

$\therefore$ 取 $F(x)=\frac{1}{3}f(3x)$，则

$\int_{a}^{b}f'(3x)\mathrm{d}x=F(b)\text{-}F(a)=\frac{1}{3}[f(3b)\text{-}f(3a)]$. 故应选 C.

答案：　C

知识：微积分定理

难度：1

题目：$\int_0^3|x^2\text{-}4|\mathrm{d}x=$（　　）

A.$\frac{21}{3}$　　　　B.$\frac{22}{3}$

C.$\frac{23}{3}$　　　　D.$\frac{25}{3}$

解析：　$\int_0^3|x^2\text{-}4|\mathrm{d}x=\int_0^2(4\text{-}x^2)\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2\text{-}4)\mathrm{d}x$

$=(4x-\frac{1}{3}x^3)|_0^2+(\frac{1}{3}x^3-4x)|_2^3=\frac{23}{3}$

答案：　C

知识：微积分定理

难度：1

题目：$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})\mathrm{d}\theta$ 的值为 ( )

A.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B.$-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$ D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：　$\because 1\text{-}2\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\mathrm{d}\theta$

$=\sin\theta|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：　D

知识：微积分定理

难度：1

题目：函数 $F(x)=\int_0^x\cos t\mathrm{d}t$的导数是（　　）

A.$\cos x$ B.$\sin x$

C.$\text{-}\cos x$ D.$\text{-}\sin x$

解析：$F(x)=\int_0^x\cos t\mathrm{d}t=\sin t|_0^x=\sin x\text{-}\sin 0=\sin x$.

所以 $F'(x)=\cos x$，故应选 A.

答案：　A

知识：微积分定理

难度：1

题目：若 $\int_0^k(2x\text{-}3x^2)\mathrm{d}x=0$，则 $k=$（　　）

A.0 B.1

C.0 或 1 D. 以上都不对

解析：　$\int_0^k(2x\text{-}3x^2)\mathrm{d}x=(x^2\text{-}x^3)|_0^k=k^2\text{-}k^3=0$，

$\therefore k=0$ 或 1.

答案：　C

知识：微积分定理

难度：1

题目：函数 $F(x)=\int_0^x t(t\text{-}4)\mathrm{d}t$在 $[\text{-}1,5]$ 上（　　）

A. 有最大值 0，无最小值

B. 有最大值 0 和最小值 $-\frac{32}{3}$

C. 有最小值 $-\frac{32}{3}$，无最大值

D. 既无最大值也无最小值

解析： $F(x)=\int_0^x(t^2\text{-}4t)\mathrm{d}t=(\frac{1}{3}t^3-2t^2)|_0^x=x^3\text{-}2x^2(\text{-}1\le x\le 5)$.

$F'(x)=x^2\text{-}4x$，由 $F'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=4$，列表如下：

x	(-1,0)	0	(0,4)	4	(4,5)
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

可见极大值 $F(0)=0$，极小值 $F(4)=-\frac{32}{3}$.

又 $F(\text{-}1)=-\frac{7}{3}$，$F(5)=-\frac{25}{3}$

∴ 最大值为 0，最小值为 $-\frac{32}{3}$.

答案： B

知识：微积分定理

难度：1

题目：计算定积分：

$\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x=$ ____________

$\int_2^3(3x-\frac{2}{x^2})\mathrm{d}x=$ ____________

$\int_0^2|x^2\text{-}1|\mathrm{d}x=$ ____________

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0|\sin x|\mathrm{d}x=$ ____________

解析： $\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3|_{-1}^1=\frac{2}{3}$.

$\int_2^3(3x-\frac{2}{x^2})\mathrm{d}x=(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{x})|_2^3=\frac{43}{6}$.

$\int_0^2|x^2\text{-}1|\mathrm{d}x=\int_0^1(1\text{-}x^2)\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2\text{-}1)\mathrm{d}x$

$=(x-\frac{1}{3}x^3)|_0^1+(\frac{1}{3}x^3-x)|_1^2=2$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0|\sin x|\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(-\sin x)\mathrm{d}x=\cos x|_{-\frac{\pi}{2}}^0=1$

答案： $\frac{2}{3};\frac{43}{6};2;1$

知识：微积分定理

难度：1

题目：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2\mathrm{d}x=$_____

解析：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\mathrm{d}x$

$=(x-\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+1$

答案： $\frac{\pi}{2}+1$

知识：微积分定理

难度：1

题目：已知 $f(x)=3x^2+2x+1$，若 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=2f(a)$ 成立，则 $a=$ ____________.

解析:　由已知 $F(x)=x^3+x^2+x$，$F(1)=3$，$F(-1)=-1$，

$\therefore\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(-1)=4$，

$\therefore 2f(a)=4$，$\therefore f(a)=2$.

即 $3a^2+2a+1=2$. 解得 $a=-1$ 或 $\frac{1}{3}$.

答案:　-1 或 $\frac{1}{3}$

知识：微积分定理

难度：1

题目：计算下列定积分：

(1)$\int_0^5 2x\mathrm{d}x$；(2)$\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}x$；

(3)$\int_0^2(4-2x)(4-x^2)\mathrm{d}x$；(4)$\int_1^2\frac{x^2+2x-3}{x}\mathrm{d}x$.

解析:

解:　(1)$\int_0^5 2x\mathrm{d}x=x^2|_0^5=25-0=25$.

(2)$\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x-\int_0^1 2x\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}x^3|_0^1-x^2|_0^1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$

(3)$\int_0^2(4-2x)(4-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^2(16-8x-4x^2+2x^3)\mathrm{d}x$

$=(16x-4x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4)|_0^2$

$32-16-\frac{32}{3}+8=\frac{40}{3}$.

(4)$\int_1^2\frac{x^2+2x-3}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2(x+2-\frac{3}{x})\mathrm{d}x$

$=(\frac{1}{2}x^2+2x-3\ln x)|_1^2=\frac{7}{2}-3\ln 2$

知识：微积分定理

难度：1

题目：计算下列定积分：

(1)$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$

(2)$\int_2^3(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2\mathrm{d}x$

(3)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3x+\sin x)\mathrm{d}x$

(4)$\int_a^b e^x\mathrm{d}x$

解析:

解:　(1) 取 $F(x)=\sin 2x$，则 $F'(x)=\cos 2x$

$\therefore\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x=F(\frac{\pi}{4})-F(\frac{\pi}{6})$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$

(2) 取 $F(x)=+\frac{x^2}{2}+\ln x+2x$，则

$F'(x)=x+\frac{1}{x}+2$.

$\therefore\int_2^3(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2\mathrm{d}x=\int_2^3(x+\frac{1}{x}+2)\mathrm{d}x$

$=F(3)\text{-}F(2)$

$=(\frac{9}{2}+\ln 3+6)-(\frac{1}{2}\times 4+\ln 2+4)$

$=\frac{9}{2}+\ln\frac{3}{2}$

(3) 取 $F(x)=\frac{3}{2}x^2\text{-}\cos x$，则 $F'(x)=3x+\sin x$

$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3x+\sin x)\mathrm{d}x=F(\frac{\pi}{2})-F(0)=\frac{3}{8}\pi^2+1$

(4) 取 $F(x)=e^x$, 则 $F'(x)=e^x$, $\therefore\int_a^b e^x\mathrm{d}x=e^x|_a^b=e^b-e^a$

知识：微积分定理

难度：1

题目：计算下列定积分：

(1)$\int_{-4}^0|x+2|\mathrm{d}x$；

(2) 已知 $f(x)=\begin{cases}|x-1|,(0\le x\le 2)\\ 0,(x<0\text{或}x>2)\end{cases}$，求 $\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x$的值.

解析:

解: (1)$\because f(x)=|x+2|=\begin{cases}x+2,x\ge -2\\ -x-2,x<-2\end{cases}$

$\therefore\int_{-4}^0|x+2|\mathrm{d}x=-\int_{-4}^{-2}(x+2)\mathrm{d}x+\int_{-2}^0(x+2)\mathrm{d}x$

$=-(\frac{1}{2}x^2+2x)|_{-4}^{-2}+(\frac{1}{2}x^2+2x)|_{-2}^0=2+2=4$

(2)$\because f(x)=\begin{cases}|x-1|,(0\le x\le 2)\\ 0,(x<0\text{或}x>2)\end{cases}=\begin{cases}0,(x<0)\\ 1-x,(0\le x<1)\\ x-1,(1\le x\le 2)\\ 0,(x>2)\end{cases}$

$\therefore\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1\text{-}x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x\text{-}1)\mathrm{d}x$

$=(x-\frac{x^2}{2})|_0^1+(\frac{x^2}{2}-x)|_1^2$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

知识：微积分定理

难度：1

题目：(1) 已知 $f(a)=\int_0^1(2ax^2\text{-}a^2x)\mathrm{d}x$，求 $f(a)$ 的最大值；

(2) 已知 $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$，且 $f(\text{-}1)=2$，$f'(0)=0$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\text{-}2$，求 a，b，c的值.

解析:

解: (1) 取 $F(x)=\frac{2}{3}ax^3\text{-}\frac{1}{2}a^2x^2$

则 $F'(x)=2ax^2\text{-}a^2x$

$\therefore f(a)=\int_0^1(2ax^2\text{-}a^2x)\mathrm{d}x$

$= F(1)\text{-}F(0) = \frac{2}{3}a\text{-}\frac{1}{2}a^2$

$= -\frac{1}{2}(a-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{9}$

∴当 $a=\frac{2}{3}$ 时，$f(a)$ 有最大值 $\frac{2}{9}$.

(2)∵$f(-1) = 2$，∴$a\text{-}b+c= 2$

又∵$f'(x) = 2ax+b$，∴$f'(0) = b= 0$

而 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x= \int_0^1(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x$

取 $F(x) = \frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx$

则 $F'(x) = ax^2+bx+c$

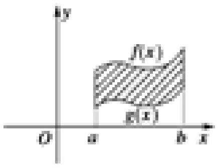
∴$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x= F(1)\text{-}F(0) = \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c= -2$

解　得 $a= 6$，$b= 0$，$c= -4$.

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：如图所示，阴影部分的面积为 (　　)



A.$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　　B.$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

C.$\int_a^b[f(x)\text{-}g(x)]\mathrm{d}x$ D.$\int_a^b[g(x)\text{-}f(x)]\mathrm{d}x$

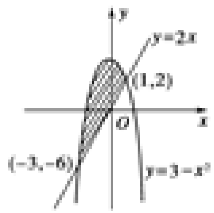
解析:　由题图易知，当 $x\in[a，b]$ 时，$f(x)>g(x)$，所以阴影部分的面积为 $[f(x)\text{-}g(x)]\mathrm{d}x$.

答案:　C

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：如图所示，阴影部分的面积是 (　　)



A.$2\sqrt{3}$ B.$2\text{-}\sqrt{3}$

C.$\frac{32}{3}$ D.$\frac{35}{3}$

解析:　$S= \int_{-3}^{1}(3\text{-}x^2\text{-}2x)\mathrm{d}x$

即 $F(x) = 3x\text{-}\frac{1}{3}x^3\text{-}x^2$，

则 $F(1)=3-1-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$F(-3)=-9-9+9=-9.$

$\therefore S=F(1)-F(-3)=\frac{5}{3}+9=\frac{32}{3}$ 故应选 C.

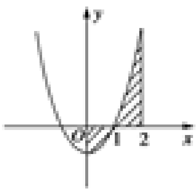
答案: C

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：由曲线 $y=x^2-1$、直线 $x=0$、$x=2$ 和 x轴围成的封闭图形的面积(如图) 是 (　　)

A.$\int_0^2(x^2-1)\mathrm{d}x$



B.$|\int_0^2(x^2-1)\mathrm{d}x|$

C.$\int_0^2|x^2-1|\mathrm{d}x$

D.$\int_0^1(x^2-1)\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2-1)\mathrm{d}x$

解析:$y=|x^2-1|$ 将 x轴下方阴影反折到 x轴上方，其定积分为正，故应选 C.

答案: C

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：设 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，则曲线 $f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 围成图形的面积为 (　　)

A.$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ B.$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x|$

C.$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ D. 以上都不对

解析: 当 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上满足 $f(x)<0$ 时，$f(x)\mathrm{d}x<0$，排除 A；当阴影有在 x轴上方也有在 x轴下方时，$f(x)\mathrm{d}x$是两面积之差，排除 B；无论什么情况 C 对，故应选 C.

答案:C

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：曲线 $y=1-\frac{16}{81}x^2$ 与 x轴所围图形的面积是 (　　)

A.4　　　　B.3

C.2　　　　D.$\frac{5}{2}$

解析: 曲线与 x轴的交点为 $(-\frac{9}{4},0)$，$(\frac{9}{4},0)$

$\therefore$ 所求面积 $S=\int_{-\frac{9}{4}}^{\frac{9}{4}}(1-\frac{16}{81}x^2)dx=(x-\frac{16}{243}x^3)|_{-\frac{9}{4}}^{\frac{9}{4}}=[\frac{9}{4}-\frac{16}{243}\times(\frac{9}{4})^3]\times 2=3$ 故应选 B.

答案:　B

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：一物体以速度 $v=(3t^2+2t)$m/s 做直线运动，则它在 $t=0$s 到 $t=3$s 时间段内的位移是 (　　)

A.31m　　B.36m

C.38m　　D.40m

解析:　$S=\int_0^2(3t^2+2t)\mathrm{d}t=(t^3+t^2)|_0^3=3^3+3^2=36(\mathrm{m})$，故应选 B.

答案:　B

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：(2010 · 山东理，7) 由曲线 $y=x^2$，$y=x^3$ 围成的封闭图形面积为 (　　)

A.　$\frac{1}{12}$　　B.　$\frac{1}{4}$

C.　$\frac{1}{3}$　　D.　$\frac{7}{12}$

解析:　由 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x^3 \end{cases}$ 得交点为 (0,0)，(1,1).

$\therefore S=\int_0^1(x^2\text{-}x^3)\mathrm{d}x=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4)|_0^1=\frac{1}{12}$.

答案:　A

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：一物体在力 $F(x)=4x\text{-}1$(单位：N) 的作用下，沿着与力 F相同的方向，从 $x=1$ 运动到 $x=3$ 处 (单位：m)，则力 $F(x)$ 所做的功为 (　　)

A.8J　　B.10J

C.12J　　D.14J

解析:　由变力做功公式有：$W=\int_1^3(4x\text{-}1)\mathrm{d}x=(2x^2\text{-}x)|_1^3=14(\mathrm{J})$，故应选 D.

答案:D

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：若某产品一天内的产量 (单位：百件) 是时间 t的函数，若已知产量的变化率为 $a=\frac{3}{\sqrt{6t}}$，那么从 3 小时到 6 小时期间内的产量为 (　　)

A.$\frac{1}{2}$ B.$3-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

C.$6+3\sqrt{2}$ D.$6-3\sqrt{2}$

解析: $\int_3^6 \frac{3}{\sqrt{6t}}\mathrm{dt} = \frac{6}{\sqrt{6}}\sqrt{t}|_3^6 = 6-3\sqrt{2}$，故应选 D.

答案: D

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：过原点的直线 l与抛物线 $y= x^2$-$2ax(a>0)$ 所围成的图形面积为 $\frac{9}{2}a^3$，则直线 l的方程为 (　　)

A.$y= \pm ax$ B.$y= ax$

C.$y= -ax$ D.$y= -5ax$

解析: 设直线 l的方程为 $y= kx$，

由 $\begin{cases} y=kx \\ y=x^2-2ax \end{cases}$ 得交点坐标为 (0,0)，$(2a+ k,2ak+ k^2)$

图形面积 $S= \int_0^{2a+k}[kx-(x^2-2ax)]\mathrm{d}x$

$= (\frac{k+2a}{2}x^2-\frac{x^3}{3})|_0^{2a+k}$

$= \frac{(k+2a)^3}{2}$-$\frac{(2a+k)^3}{3} = \frac{(2a+k)^3}{6} = \frac{9}{2}a^3$

$\therefore k= a$，$\therefore l$的方程为 $y= ax$，故应选 B.

答案: B

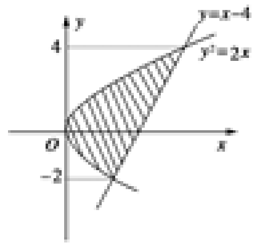
知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：由曲线 $y^2 = 2x$，$y= x$-4 所围图形的面积是 ___________.

解析: 如图，为了确定图形的范围，先求出这两条曲线交点的坐标，解方程组 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点坐标为 (2，-2)，(8,4).

因此所求图形的面积 $S= \int_{-2}^4(y+ 4-\frac{y^2}{2})\mathrm{d}y$



取 $F(y) = \frac{1}{2}y^2 + 4y-\frac{y^2}{6}$，则 $F'(y) = y+ 4-\frac{y^2}{2}$，从而 $S= F(4)-F(-2) =$ 18.

答案: 18

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：一物体沿直线以 $v=\sqrt{1+t}$m/s 的速度运动，该物体运动开始后 10s 内所经过的路程是 ___________.

解析：$S=\int_0^{10}\sqrt{1+t}dt=\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}|_0^{10}=\frac{2}{3}(11^{\frac{3}{2}}-1)$

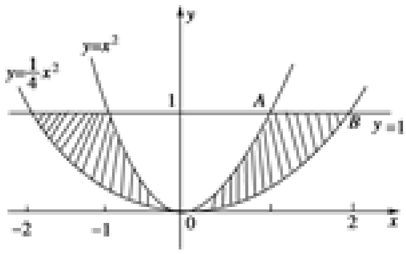
答案：$\frac{2}{3}(11^{\frac{3}{2}}-1)$

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：由两条曲线 $y=x^2$，$y=\frac{1}{4}x^2$ 与直线 $y=1$ 围成平面区域的面积是 ___________.

解析: 如图，$y=1$ 与 $y=x^2$ 交点 $A(1,1)$，$y=1$ 与 $y=\frac{x^2}{4}$ 交点 $B(2,1)$，由对称性可知面积 $S=2(\int_0^1x^2\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}x-\int_0^2\frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x)=\frac{4}{3}$.



答案: $\frac{4}{3}$

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：一变速运动物体的运动速度 $v(t)=\begin{cases}2t(0\le t\le 1)\\ a^t(1\le t\le 2)\\ \frac{b}{t}(2\le t\le e)\end{cases}$ 则该物体在 $0\le t\le e$时间段内运动的路程为 (速度单位：m/s，时间单位：s)______________________________.

解析: $\because 0\le t\le 1$ 时，$v(t)=2t$，$\therefore v(1)=2$；

又 $1\le t\le 2$ 时，$v(t)=a^t$，

$\therefore v(1)=a=2$，$v(2)=a^2=2^2=4$；

又 $2\le t\le e$时，$v(t)=\frac{b}{t}$，

$\therefore v(2)=\frac{b}{2}=4$，$\therefore b=8$.

$\therefore$ 路程为 $S=\int_0^1 2t\mathrm{d}t+\int_1^2 2^t\mathrm{d}t+\int_2^e\frac{8}{t}\mathrm{d}t=9\text{-}8\ln 2+\frac{2}{ln2}$.

答案: $9\text{-}8\ln 2+\frac{2}{ln2}$

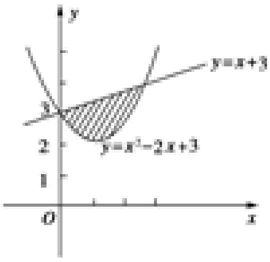
知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：计算曲线 $y=x^2\text{-}2x+3$ 与直线 $y=x+3$ 所围图形的面积.

解析:

解:　由 $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$ 解得 $x=0$ 及 $x=3$.



从而所求图形的面积

$S=\int_0^3(x+3)\mathrm{d}x-\int_0^3(x^2-2x+3)\mathrm{d}x$

$=\int_0^3[(x+3)-(x^2-2x+3)]\mathrm{d}x$

$=\int_0^3(-x^2+3x)\mathrm{d}x$

$=(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2)|_0^3=\frac{9}{2}$.

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：设 $y=f(x)$ 是二次函数，方程 $f(x)=0$ 有两个相等的实根，且 $f'(x)=2x+2$.

（1）求 $y=f(x)$ 的表达式;

（2）若直线 $x=-t(0<t<1)$ 把 $y=f(x)$ 的图象与两坐标轴所围成图形的面积二等分，求 t的值.

解析:

解:　（1）设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，则 $f'(x)=2ax+b$，

又已知 $f'(x)=2x+2$，$\therefore a=1$，$b=2$，

$\therefore f(x)=x^2+2x+c$.

又方程 $f(x)=0$ 有两个相等实根.

$\therefore$ 判别式 $\Delta=4-4c=0$，即 $c=1$.

故 $f(x)=x^2+2x+1$.

（2）依题意有 $\int_{-1}^{-t}(x^2+2x+1)\mathrm{d}x=\int_{-t}^{0}(x^2+2x+1)\mathrm{d}x$，

$\therefore(\frac{1}{3}x^3+x^2+x)|_{-1}^{-t}=(\frac{1}{3}x^3+x^2+x)|_{-t}^{0}$

即 $-\frac{1}{3}t^3+t^2-t+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}t^3-t^2+t$.

$\therefore 2t^3-6t^2+6t-1=0$，

$\therefore 2(t-1)^3=-1$，$\therefore t=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：A、B两站相距 7.2km，一辆电车从 A站开往 B站，电车开出 ts 后到达途中 C点，这一段速度为 $1.2t$(m/s)，到 C点的速度达 24m/s，从 C点到 B站前的 D点以等速行驶，从 D点开始刹车，经 ts 后，速度为 $(24\text{-}1.2t)$m/s，在 B点恰好停车，试求：

（1）A、C间的距离；

（2）B、D间的距离；

（3）电车从 A站到 B站所需的时间.

解析:

解: （1）设 A到 C经过 t_1s，

由 $1.2t = 24$ 得 $t_1 = 20(\mathrm{s})$，

所以 $AC = \int_0^{20} 1.2t\mathrm{d}t = 0.6t^2 = 240(\mathrm{m})$.

（2）设从 $D \to B$经过 t_2s，

由 $24\text{-}1.2t_2 = 0$ 得 $t_2 = 20(\mathrm{s})$，

所以 $DB = \int_0^{20}(24\text{-}1.2t)\mathrm{d}t = 240(\mathrm{m})$.

（3）$CD = 7200\text{-}2\times240 = 6720(\mathrm{m})$.

从 C到 D的时间为 $t_3 = \frac{6720}{24} = 280(\mathrm{s})$.

于是所求时间为 $20 + 280 + 20 = 320(\mathrm{s})$.

知识：定积分在几何上的应用，定积分在物理上的应用

难度：1

题目：在曲线 $y = x^2(x\geq0)$ 上某一点 A处作一切线使之与曲线以及 x轴所围成的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：

（1）切点 A的坐标；

（2）过切点 A的切线方程.

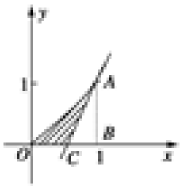
解析:

解: 如图所示，设切点 $A(x_0，y_0)$，由 $y' = 2x$，过 A点的切线方程为 $y\text{-}y_0 = 2x_0(x\text{-}x_0)$，

即 $y = 2x_0x\text{-}x_0^2$.

令 $y = 0$ 得 $x = \frac{x_0}{2}$，即 $C(\frac{x_0}{2},0)$.

设由曲线和过 A点的切线及 x轴所围成图形的面积为 S，



$S = S_{\text{曲边}\triangle AOB}\text{-}S_{\triangle ABC}$.

$S_{曲边\triangle AOB}=\int x_{00}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|AB|$

$=\frac{1}{2}(x_0-\frac{x_0}{2})\cdot x_0^2=\frac{1}{4}x_0^3$,

即 $S=\frac{1}{3}x_0^3-\frac{1}{4}x_0^3=\frac{1}{12}x_0^3=\frac{1}{12}$.

所以 $x_0=1$，从而切点 $A(1,1)$，切线方程为 $y=2x$-1.