知识点：数列的概念

难度：1

将正整数的前 5 个数作如下排列: 1,2,3,4,5; 5,4,3,2,1; 2,1,5,3,4; 4,1,5,3,2. 则可以称为数列的是 (　　)

A. B. C. D.

解析:4 个都构成数列.

答案:D

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$, 则该数列的前 4 项依次为 (　　)

A.1,0,1,0 B.0,1,0,1

C.$\frac{1}{2}$,0,$\frac{1}{2}$,0 D.2,0,2,0

解析: 把 n=1,2,3,4 分别代入 $a_n=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ 中, 依次得到 0,1,0,1.

答案:B

知识点：数列的概念

难度：1

数列 $1,\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{9}{\sqrt{5}},\frac{16}{\sqrt{7}},\ldots$ 的一个通项公式是 (　　)

A.$a_n=\frac{n^2}{\sqrt{2n-1}}$ B.$a_n=\frac{(n-1)^2}{\sqrt{2n-1}}$

C.$a_n=\frac{n^2}{\sqrt{2n+1}}$ D.$a_n=\frac{n^2-2n}{\sqrt{2n+1}}$

解析:$1=1^2,4=2^2,9=3^2,16=4^2$,1=2×1-1,3=2×2-1,5=2×3-1,7=2×4-1, 故 $a_n=\frac{n^2}{\sqrt{2n-1}}$.

答案:A

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{1}{n^2-1}$, 若 $a_k=\frac{1}{35}$, 则 $a_{2k}=$ (　　)

A.$\frac{1}{99}$ B.99 C.$\frac{1}{143}$ D.143

解析: 由 $a_k=\frac{1}{35}$ 得 $\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{35}$, 于是 k=6(k=-6 舍去).

因此 $a_{2k}=a_{12}=\frac{1}{12^2-1}=\frac{1}{148}$.

答案:C

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots$, 则三个数 0.98,0.96,0.94 中属于该数列中的数只有（　　）

A.1 个 B.2 个

C.3 个 D. 以上都不对

解析: 由已知可得该数列的一个通项公式 $a_n=\frac{n}{n+1}$. 令 a_n=0.98, 解得 n=49, 令 a_n=0.96, 解得 n=24, 令 a_n=0.94, 解得 $n=\frac{47}{3}\notin\mathrm{N}_+$. 故只有 0.98 和 0.96 是该数列中的项.

答案:B

知识点：数列的概念

难度：1

已知曲线 $y=x^2+1$, 点 $(n,a_n)(n\in\mathrm{N}_+)$ 位于该曲线上, 则 a_{10}=__________.

解析: 由题意知 $a_n=n^2+1$, 因此 $a_{10}=10^2+1=101$.

答案:101

知识点：数列的概念

难度：1

数列 $\sqrt{3},3,\sqrt{15},\sqrt{21},3\sqrt{3},\cdots$ 的一个通项公式是____________________.

解析: 数列可化为 $\sqrt{3},\sqrt{9},\sqrt{15},\sqrt{21},\sqrt{27}$, 即 $\sqrt{3\times1},\sqrt{3\times3},\sqrt{3\times5},\sqrt{3\times7},\sqrt{3\times9},\cdots$, 每个根号里面可分解成两数之积, 前一个因式为常数 3, 后一个因式为 $2n$-1, 故原数列的通项公式为 $a_n=\sqrt{3(2n-1)}=\sqrt{6n-3},n\in\mathrm{N}_+$.

答案:$a_n=\sqrt{6n-3}$

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, 则 $\sqrt{10}-3$ 是此数列的第__________项.

解析: 令 $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{10}-3$, 得 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{10}-3$-3, 解得 n=9.

答案:9

知识点：数列的概念

难度：1

写出下列各数列的一个通项公式:

(1)4,6,8,10,…

(2)$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\cdots$

(3)$\frac{2}{3},-1,\frac{10}{7},-\frac{17}{9},\frac{26}{11},-\frac{37}{13},\cdots$

(4)3,33,333,3 333,…

解析：

答案：(1) 各项是从 4 开始的偶数, 所以 $a_n=2n+2$.

(2) 数列中的每一项分子比分母少 1, 而分母可写成 $2^1,2^2,2^3,2^4,2^5,\ldots,2^n$, 故所求数列的通项公式可写为 $a_n=\frac{2^n-1}{2^n}$.

(3) 所给数列中正、负数相间, 所以通项中必须含有 $(-1)^{n+1}$ 这个因式, 忽略负号, 将第二项 1 写成 $\frac{5}{5}$, 则分母可化为 3,5,7,9,11,13,…, 均为正奇数, 分子可化为 $1^2+1,2^2+1,3^2+1,4^2+1,5^2+1,6^2+1,\cdots$, 故其通项公式可写为 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{2n+1}$

(4) 将数列各项写为 $\frac{9}{3},\frac{99}{3},\frac{999}{3},\frac{9999}{3},\cdots$, 分母都是 3, 而分子分别是 10-1,$10^2$-1,$10^3$-1,$10^4$-1,…, 所以 $a_n=\frac{1}{3}(10^n\text{-}1)$.

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 a_n=3n^2-28n.

(1) 写出数列的第 4 项和第 6 项;

(2) 问-49 是不是该数列的一项? 如果是, 应是哪一项?68 是不是该数列的一项呢?

解析：

答案:(1)a_4=3×16-28×4=-64,

a_6=3×36-28×6=-60.

(2) 设 3n^2-28n=-49, 解得 n=7 或 n=$\frac{7}{3}$(舍去),∴n=7, 即-49 是该数列的第 7 项.

设 3n^2-28n=68, 解得 n=$\frac{34}{8}$ 或 n=-2.

∵$\frac{34}{3}$∉N_+,-2∉N_+,

∴68 不是该数列的项.

知识点：数列的概念

难度：2

$2,-\frac{8}{3},4,-\frac{32}{5},\cdots$ 的通项公式是（　　）

A.$a_n=2^n(n\in N_+)$ B.$a_n=\frac{(-2)^n}{2n-1}(n\in N_+)$

C.$a_n=\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}(n\in N_+)$ D.$a_n=\frac{2n}{2n-1}(n\in N_+)$

解析: 将数列各项改写为 $\frac{2^2}{2},-\frac{2^3}{3},\frac{2^4}{4},-\frac{2^5}{5},\cdots$, 观察数列的变化规律, 可得 $a_n=\frac{(-2)^{n+1}}{n+1}(n\in N_+)$.

答案:C

知识点：数列的概念

难度：2

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n}{n+1}$, 则 $a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}$ 等于（　　）

A.$\frac{n}{n+2}$ B.$\frac{n}{n+3}$ C.$\frac{n+1}{n+2}$ D.$\frac{n+1}{n+3}$

解析:∵$a_n=\frac{n}{n+1},a_{n+1}=\frac{n+1}{n+2},a_{n+2}=\frac{n+2}{n+3}=\frac{n}{n+3}$,

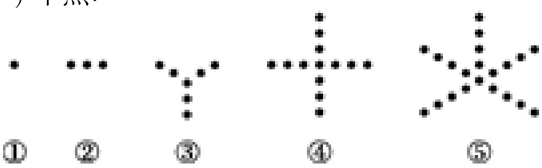
∴$a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}=\frac{n}{n+3}$.

答案:B

知识点：数列的概念

难度：2

根据下列 5 个图形中相应点的个数的变化规律, 猜测第 n 个图形中有（　　）个点.



A.n^2-n+1 B.$2n^2-n$

C.n^2 D.2n-1

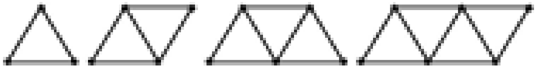
解析: 观察图中 5 个图形点的个数分别为 $1,1\times2+1,2\times3+1,3\times4+1,4\times5+1$, 故第 n 个图形中点的个数为 $(n-1)n+1=n^2-n+1$.

答案:A

知识点：数列的概念

难度：2

用火柴棒按下图的方法搭三角形:



按图示的规律搭下去, 则所用火柴棒数 a_n 与所搭三角形的个数 n 之间的关系式可以是____________________.

解析:$\because a_1=3, a_2=3+2=5, a_3=3+2+2=7, a_4=3+2+2+2=9, \cdots, \therefore a_n=2n+1$

答案:$a_n=2n+1$

知识点：数列的概念

难度：2

在数列 $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{10}}{8}, \frac{\sqrt{17}}{a+b}, \frac{\sqrt{a-b}}{24}, \cdots$ 中, 有序数对 (a,b) 可以是__________________.

解析: 从上面的规律可以看出分母的规律是:1×3,2×4,3×5,4×6,..., 分子的规律是:$5, 5+5, 5+5+7, 5+5+7+9, \cdots$

所以 $\begin{cases} a+b=15, \\ a\cdot b=26. \end{cases}$, 解得 $a=\frac{41}{2}, b=\frac{11}{2}$

答案:$(\frac{41}{2}, -\frac{11}{2})$

知识点：数列的概念

难度：2

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=a2^n+b$, 且 a_1=-1,a_5=-31, 则 a_3=___________.

解析: 由已知得 $\begin{cases} 2a+b=-1, \\ 32a+b=-31, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=1, \end{cases}$

即 $a_n=-2^n+1$, 于是 $a_3=-2^3+1=-7$

答案:-7

知识点：数列的概念

难度：2

如图, 有 $m(m\geq 2)$ 行 $(m+1)$ 列的士兵队列.

·	·	·	…	·	·	·	·
·	·	·	…	·	·	·	·
…	…	…	…	…	…	…	…
·	·	·	…	·	·	·	·
·	·	·	…	·	·	·	·
·	·	·	…	·	·	·	·

(1) 写出一个数列, 用它表示当 m 分别为 2,3,4,5,6,…时队列中的士兵人数;

(2) 写出 (1) 中数列的第 5,6 项, 用 a_5,a_6 表示;

(3) 若把 (1) 中的数列记为 $\{a_n\}$, 求该数列的通项公式 a_n;

(4) 求 a_{10}, 并说明 a_{10} 所表示的实际意义.

解析:

答案: (1) 当 m=2 时, 表示 2 行 3 列, 人数为 6;

当 m=3 时, 表示 3 行 4 列, 人数为 12, 依此类推, 故所求数列为 6,12,20,30,42,….

(2) 队列的行数比数列的序号大 1, 因此第 5 项表示的是 6 行 7 列, 第 6 项表示 7 行 8 列, 故 $a_5=42,a_6=56$.

(3) 根据对数列的前几项的观察、归纳, 猜想数列的通项公式.

前 4 项分别为 6=2×3,12=3×4,20=4×5,30=5×6. 因此 $a_n=(n+1)(n=1)$

(4) 由 (3) 知 $a_{10}=11\times12=132,a_{10}$ 表示 11 行 12 列的士兵队列中士兵的人数.

知识点: 数列的概念

难度: 2

在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=2,a_{17}=66$, 通项公式是关于 n 的一次函数.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 a_{2017};

(3) 是否存在 $m,k\in\mathrm{N}_+$, 满足 $a_m+a_{m+1}=a_k$? 若存在, 求出 m,k 的值, 若不存在, 说明理由.

解析:

答案: (1) 设 $a_n=kn+b(k\neq0)$, 则由 $a_1=2,a_{17}=66$ 得,

$\begin{cases} k+b=2, \\ 17k+b=66. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=4, \\ b=-2. \end{cases}$

所以 $a_n=4n-2$.

(2)$a_{2017}=4\times2017-2=8\ 066$.

(3) 由 $a_m+a_{m+1}=a_k$, 得 $4m-2+4(m+1)-2=4k-2$,

整理后可得 $4m=2k-1$,

因为 $m,k\in N_+$, 所以 $4m$ 是偶数,$2k-1$ 是奇数,

故不存在 $m,k\in N_+$, 使等式 $4m=2k-1$ 成立,

即不存在 $m,k\in N_+$, 使 $a_m+a_{m+1}=a_k$.

知识点：数列的概念

难度：1

数列 $\{n^2-4n+3\}$ 的图像是（　　）

A. 一条直线

B. 一条直线上的孤立的点

C. 一条抛物线

D. 一条抛物线上的孤立的点

解析:$a_n=n^2-4n+3$ 是关于 n 的二次函数, 故其图像是抛物线 $y=x^2-4x+3$ 上一群孤立的点.

答案:D

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{2n}{3n+1}$, 则这个数列是（　　）

A. 递增数列 B. 递减数列

C. 摆动数列 D. 常数列

解析:$\because a_{n+1}-a_n=\frac{2(n+1)}{3(n+1)+1}-\frac{2n}{3n+1}$

$=\frac{2}{[3(n+1)+1](3n+1)}>0$,

$\therefore a_{n+1}>a_n$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

答案:A

知识点：数列的概念

难度：1

若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{3n-5}{3n-14}$, 则在数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项中, 最大项和最小项分别是 (　　)

A.a_1,a_{20} B.a_{20},a_1 C.a_5,a_4 D.a_4,a_5

解析: 由于 $a_n=\frac{3n-5}{3n-14}=\frac{3n-14+9}{3n-14}=1+\frac{3}{n-\frac{14}{3}}$, 因此当 $1\le n\le 4$ 时,$\{a_n\}$ 是递减的, 且 $a_1>0>a_2>a_3>a_4$; 当 $5\le n\le 20$ 时,$a_n>0$, 且 $\{a_n\}$ 也是递减的, 即 $a_5>a_6>\ldots>a_{20}>0$, 因此最大的是 a_5, 最小的是 a_4.

答案:C

知识点：数列的概念

难度：1

已知 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=n^2+3kn$, 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 k 的取值范围是 (　　)

A.$k\geq-1$ B.$k>-\frac{2}{3}$ C.$k\le-\frac{2}{3}$ D.$k>-1$

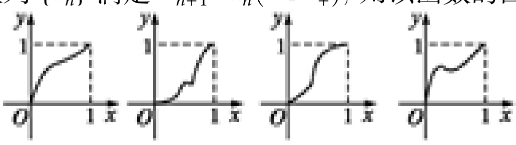
解析: 因为 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $a_{n+1}>a_n$ 对 $n\in N_+$ 恒成立. 即 $(n+1)^2+3k(n+1)>n^2+3kn$, 整理得 $k>-\frac{2n+1}{3}$, 当 $n=1$ 时,$-\frac{2n+1}{3}$ 取最大值-1, 故 $k>-1$.

答案:D

知识点：数列的概念

难度：1

给定函数 $y=f(x)$ 的图像, 对任意 $a_n\in(0,1)$, 由关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n(n\in N_+)$, 则该函数的图像是 (　　)



A　B　C　D

解析: 由 $a_{n+1}>a_n$ 可知数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 又由 $a_{n+1}=f(a_n)>a_n$ 可知, 当 $x\in(0,1)$ 时,$y=f(x)$ 的图像在直线 $y=x$ 的上方.

答案:A

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{an}{bn+1}$, 其中 a,b 均为正常数, 则 a_{n+1} 与 a_n 的大小关系是__.

解析:∵ $a_{n+1}-a_n=\frac{a(n+1)}{b(n+1)+1}-\frac{an}{bn+1}$

$=\frac{a}{[b(n+1)](bn+1)}>0$,

∴a_{n+1}-a_n>0, 故 a_{n+1}>a_n.

答案:a_{n+1}>a_n

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n^2-5n+2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的最小值是__________.

解析:∵ $a_n=2n^2-5n+2=2(n-\frac{5}{4})^2-\frac{9}{8}$,

∴ 当 n=1 时,a_n 最小, 最小为 a_1=-1.

答案:-1

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n(0<a_n<\frac{1}{2}),\\2a_n-1(\frac{1}{2}\le a_n<1),\end{cases}$, 若 $a_1=\frac{6}{7}$, 则 a_{2017}=__.

解析:$a_1=\frac{6}{7},a_2=2a_1-1=\frac{5}{7},a_3=2a_2-1=\frac{3}{7},a_4=2a_3=\frac{6}{7},\cdots$, 所以 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列, 于是 $a_{2017}=a_{672\times3+1}=a_1=\frac{6}{7}$.

答案:$\frac{6}{7}$

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-21n+20$.

(1)-60 是否是该数列中的项, 若是, 求出项数; 该数列中有小于 0 的项吗? 有多少项?

(2)n 为何值时,a_n 有最小值? 并求出最小值.

解析：

答案：(1) 令 $n^2-21n+20=-60$, 得 n=5 或 n=16.

所以数列的第 5 项, 第 16 项都为-60.

由 $n^2-21n+20<0$, 得 1<n<20, 所以共有 18 项小于 0.

(2) 由 $a_n=n^2-21n+20=(n-\frac{21}{2})^2-\frac{361}{4}$, 可知对称轴方程为 $n=\frac{21}{5}=10.5$. 又 n∈N$_+$, 故 n=10 或 n=11 时,a_n 有最小值, 其最小值为 $11^2-21\times11+20=$

-90.

知识点：数列的概念

难度：1

已知函数 $f(x)=\frac{1-2x}{x+1}(x\geq1)$, 构造数列 $a_n=f(n)(n\in N_+)$.

(1) 求证:a_n>-2;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列还是递减数列? 为什么?

解析:

答案：(1) 证明由题意可知 $a_n=\frac{1-2n}{n+1}=\frac{3-2(n+1)}{n+1}=\frac{3}{n+1}-2$.

$\because n\in N_+,\therefore \frac{3}{n+1}>0,\therefore a_n=\frac{3}{n+1}-2>-2$.

(**??**)解递减数列.

理由如下: 由 (1) 知,$a_n=\frac{3}{n+1}-2$.

$\because a_{n+1}-a_n=\frac{3}{(n+1)+1}-\frac{3}{n+1}$

$=\frac{3n+3-3n-6}{(n+1)(n+2)}=\frac{-3}{(n+1)(n+2)}<0$,

即 $a_{n+1}<a_n$,$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.

知识点：数列的概念

难度：2

若函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1,f(n+1)=f(n)+3(n\in N_+)$, 则 $f(n)$ 是 (　　)

A. 递增数列 B. 递减数列

C. 常数列 D. 不能确定

解析:$\because f(n+1)-f(n)=3(n\in N_+)$,

$\therefore ff(n+1)>f(n)$,

$\therefore f(n)$ 是递增数列.

答案:A

知识点：数列的概念

难度：2

设函数 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-3,x\leq7,\\ a^{x-6},x>7.\end{cases}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n),n\in N_+$, 且数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a 的取值范围是 (　　)

A.(1,3) B.(2,3) C.$(\frac{9}{4},2)$ D.(1,2)

答案:B

知识点：数列的概念

难度：2

若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 7(\frac{3}{4})^{2n-2} - 3(\frac{3}{4})^{n-1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的 (　　)

A. 最大项为 a_5, 最小项为 a_6

B. 最大项为 a_6, 最小项为 a_7

C. 最大项为 a_1, 最小项为 a_6

D. 最大项为 a_7, 最小项为 a_6

解析: 令 $t = (\frac{3}{4})^{n-1}, n \in \mathrm{N}_+$, 则 $t \in (0,1]$, 且 $(\frac{3}{4})^{2n-2} = [(\frac{3}{4})^{n-1}]^2 = t^2$. 从而 $a_n = 7t^2 - 3t = 7(t - \frac{3}{14})^2 - \frac{9}{28}$.

又函数 $f(t)=7t^2-3t$ 在 $(0, \frac{3}{14}]$ 上是减少的, 在 $[\frac{3}{14}, 1]$ 上是增加的, 所以 a_1 是最大项,a_6 是最小项. 故选 C.

答案:C

知识点：数列的概念

难度：2

若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -2n^2 + 13n$, 关于该数列, 有以下四种说法:

该数列有无限多个正数项; 该数列有无限多个负数项; 该数列的最大值就是函数 $f(x) = -2x^2 + 13x$ 的最大值; -70 是该数列中的一项.

其中正确的说法有____________.(填序号)

解析: 令 $-2n^2 + 13n > 0$, 得 $0 < n < \frac{13}{2}$, 故数列 $\{a_n\}$ 中有 6 项是正数项, 有无限个负数项, 所以　错, 　正确; 当 $n=3$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 取到最大值, 而当 $x=3.25$ 时, 函数 $f(x)$ 取到最大值, 所以　错; 令 $-2n^2+13n=-70$, 得 $n=10$ 或 $n = -\frac{7}{2}$(舍去), 即-70 是该数列的第 10 项, 所以　正确.

答案:

知识点：数列的概念

难度：2

若数列 $\{n(n+4)(\frac{2}{3})^n\}$ 中的最大项是第 k 项, 则 k=__________.

解析: 已知数列最大项为第 k 项, 则有

$$\begin{cases} k(k+4)(\frac{2}{3})^k \geq (k+1)(k+5)(\frac{2}{3})^{k+1}, \\ k(k+4)(\frac{2}{3})^k \geq (k-1)(k+3)(\frac{2}{3})^{k-1} \end{cases}$$

即 $\begin{cases} k^2 \geq 10, \\ k^2-2k-9 \leq 0. \end{cases}$ 由 $k \in N_+$ 可得 $k=4$.

答案:4

知识点：数列的概念

难度：2

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

(1) 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列还是递减数列？为什么？

(2) 证明:$a_n \leq \frac{1}{2}$ 对一切正整数恒成立.

解析：

答案：(1) 因为 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$,

所以 $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \frac{1}{(n+1)+3} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)}$

$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

所以 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$,

又 $n \in N_+$, 所以 $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}$.

所以 a_{n+1}-a_n>0.

所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

(2) 证明由 (1) 知数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以数列的最小项为 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n \geq a_1 = \frac{1}{2}$, 即 $a_n \geq \frac{1}{2}$ 对一切正整数恒成立.

知识点：数列的概念

难度：2

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 a_n=n^2-n-30.

(1) 求数列的前三项,60 是此数列的第几项？

(2)n 为何值时,a_n=0,a_n>0,a_n<0?

(3) 该数列前 n 项和 S_n 是否存在最值？说明理由.

解析：

答案：(1) 由 a_n=n^2-n-30, 得 a_1=1-1-30=-30,a_2=2^2-2-30=-28,a_3=3^2-3-30=-24.

设 a_n=60, 则 n^2-n-30=60.

解得 n=10 或 n=-9(舍去), 即 60 是此数列的第 10 项.

(2) 令 n^2-n-30=0, 解得 n=6 或 n=-5(舍去).

∴ 当 n=6 时,a_n=0.

令 n^2-n-30>0, 解得 n>6 或 n<-5(舍去).

∴ 当 n>6(n∈N_+) 时,a_n>0.

令 n^2-n-30<0, 解得-5<n<6.

又 n∈N_+,∴0<n<6,

∴ 当 0<n<6(n∈N_+) 时,a_n<0.

(3) 由 $a_n = n^2 - n - 30 = (n-\frac{1}{2})^2 - 30 - \frac{1}{4}(n\in\mathrm{N}_+)$, 知 $\{a_n\}$ 是递增数列,

且 $a_1<a_2<\ldots<a_5<a_6=0<a_7<a_8<a_9<\ldots$,

故 S_n 存在最小值 $S_5=S_6$,S_n 不存在最大值.

知识点：等差数列的概念

难度：1

若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则下列数列中也成等差数列的是 (　　)

A.$\{a_n^2\}$ B.$\{\frac{1}{a_n}\}$ C.$\{3a_n\}$ D.$\{|a_n|\}$

解析: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 则 $3a_{n+1}$-$3a_n$=$3(a_{n+1}$-$a_n)$=$3d$ 是常数, 故 $\{3a_n\}$ 一定成等差数列.

$\{a_n^2\}$,$\{\frac{1}{a_n}\}$,$\{|a_n|\}$ 都不一定是等差数列, 例如当 $\{a_n\}$ 为 {3,1,-1,-3} 时.

答案:C

知识点：等差数列的概念

难度：1

在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1+a_5=10$,a_4=7, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 (　　)

A.1 B.2 C.3 D.4

解析:∵ $a_1+a_5=10=a_1+a_1+4d=2(a_1+2d)=2a_3$,

∴ $a_3=5$. 故 $d=a_4-a_3=7-5=2$.

答案:B

知识点：等差数列的概念

难度：1

已知 $\{a_n\}$ 是首项 a_1=2, 公差为 d=3 的等差数列, 若 a_n=2 018, 则序号 n 等于 (　　)

A.670 B.671 C.672 D.673

解析:∵a_1=2,d=3,∴ $a_n=2+3(n-1)=3n-1$.

令 $3n-1=2018$, 解得 $n=673$.

答案:D

知识点：等差数列的概念

难度：1

等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=8,a_5=2$, 如果在每相邻两项间各插入一个数, 使之成为新的等差数列, 那么新的等差数列的公差是 (　　)

A.$\frac{3}{4}$ B.$-\frac{3}{4}$ C.$-\frac{6}{7}$ D.-1

解析: 设新数列 $a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,a_4,b_4,a_5,\ldots$, 公差为 d, 则 $a_5=a_1+8d$, 所以 $d=\frac{a_5-a_1}{8}=\frac{2-8}{8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$. 故选 B.

答案:B

知识点：等差数列的概念

难度：1

已知点 $(n,a_n)(n\in N_+)$ 都在直线 $3x-y-24=0$ 上, 则在数列 $\{a_n\}$ 中有 ( )

A.$a_7+a_9>0$ B.$a_7+a_9<0$

C.$a_7+a_9=0$ D.$a_7\cdot a_9=0$

解析:$\because(n,a_n)$ 在直线 $3x-y-24=0$,$\therefore a_n=3n-24$.

$\therefore a_7=3\times7-24=-3,a_9=3\times9-24=3$,

$\therefore a_7+a_9=0$.

答案:C

知识点：等差数列的概念

难度：1

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=7,a_7=1$, 则 $a_5=$__________.

答案:3

知识点：等差数列的概念

难度：1

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_5=10,a_{12}>31$, 则公差 d 的取值范围是________________.

解析: 设此数列的首项为 a_1, 公差为 d,

由已知得 $\begin{cases} a_1+4d=10, \\ a_1+11d>31,. \end{cases}$

-, 得 $7d>21$, 所以 $d>3$.

答案:$d>3$

知识点: 等差数列的概念

难度: 1

在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=3$, 且对任意大于 1 的正整数 n, 点 $(\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n-1}})$ 在直线 $x-y-\sqrt{3}=0$ 上, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$__________.

解析: 由题意知 $\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}=\sqrt{3}(n\geq 2)$,

$\therefore\{\sqrt{a_n}\}$ 是以 $\sqrt{a_1}$ 为首项, 以 $\sqrt{3}$ 为公差的等差数列,

$\therefore \sqrt{a_n}=\sqrt{a_1}+(n-1)d=\sqrt{3}+\sqrt{3}(n-1)=\sqrt{3}nn.$

$\therefore a_n=3n^2$.

答案:$3n^2$

知识点: 等差数列的概念

难度: 1

已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\{\frac{1}{a_n+b_n}\}$ 是等差数列, 且 $b_n=n^2,a_2=5,a_8=8$, 则 $a_9=$______________.

解析: 由题意得 $\frac{1}{a_2+b_2}=\frac{1}{9},\frac{1}{a_8+b_8}=\frac{1}{72}$,

因为 $\{\frac{1}{a_n+b_n}\}$ 是等差数列, 所以可得该等差数列的公差 $d=-\frac{7}{72\times6}$,

所以 $\frac{1}{a_9+b_9}=\frac{1}{72}-\frac{7}{72\times6}=-\frac{1}{432}$, 所以 $a_9=-513$.

答案:-513

知识点: 等差数列的概念

难度: 1

如果在等差数列 $\{3n\text{-}1\}$ 的每相邻两项之间插入三项后使它们构成一个新的等差数列, 那么新数列的第 29 项是原数列的第__________ 项.

解析: 设 $a_n=3n\text{-}1$, 公差为 d_1, 新数列为 $\{b_n\}$, 公差为 $d_2,a_1=2,b_1=2,d_1=a_n\text{-}a_{n-1}=3,d_2=\frac{d-1}{4}=\frac{3}{4}$, 则 $b_n=2+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3}{4}n+\frac{5}{4},b_{29}=23$, 令 $a_n=23$, 即 $3n-1=23$. 故 $n=8$.

答案:8

知识点：等差数列的概念

难度：1

若一个数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n+a_{n-1}=h$, 其中 h 为常数,$n\geq 2$ 且 $n\in N_+$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为等和数列,h 为公和. 已知等和数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1,h=-3$, 则 $a_{2\ 016}=$__________.

解析: 易知 $a_n=\begin{cases}1,n\\-4,n\end{cases}$,$\therefore a_{2\ 016}=-4$.

答案:-4

知识点：等差数列的概念

难度：1

已知 a,b,c 成等差数列, 且它们的和为 33, 又 $\lg(a-1),\lg(b-5),\lg(c-6)$ 也构成等差数列, 求 a,b,c 的值.

解析：

答案：由已知, 得 $\begin{cases}2b=a+c\\a+b+c=33\\2\lg(b-5)=\lg(a-1)+\lg(c-6)\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}b=11\\a+c=22\\(b-5)^2=(a-1)(c-6)\end{cases}$

解得 $a=4,b=11,c=18$ 或 $a=13,b=11,c=9$.

知识点：等差数列的概念

难度：1

已知无穷等差数列 $\{a_n\}$, 首项 $a_1=3$, 公差 $d=-5$, 依次取出项的序号被 4 除余 3 的项组成数列 $\{b_n\}$.

(1) 求 b_1 和 b_2;

(2) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(3)$\{b_n\}$ 中的第 110 项是 $\{a_n\}$ 的第几项?

解析：

答案：(1)$\because a_1=3,d=-5,\therefore a_n=3+(n-1)(-5)=8-5n$

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 中项的序号被 4 除余 3 的项依次是第 3 项, 第 7 项, 第 11 项,...,

$\therefore\{b_n\}$ 的首项 $b_1=a_3=-7,b_2=a_7=-27$.

(2) 设 $\{a_n\}$ 中的第 m 项是 $\{b_n\}$ 的第 n 项, 即 $b_n=a_m$,

则 $m=3+4(n-1)=4n-1$,

$\therefore b_n=a_m=a_{4n-1}=8\text{-}5(4n\text{-}1)=13\text{-}20n(n\in N_+).\therefore\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=13\text{-}20n(n\in N_+)$.

(3)$b_{110}=13\text{-}20\times110=\text{-}2187$, 设它是 $\{a_n\}$ 中的第 m 项, 则 $8\text{-}5m=\text{-}2187$, 则 $m=439$.

知识点: 等差数列的概念

难度: 1

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{5}$, 且当 $n>1,n\in N_+$ 时, 有 $\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{2a_{n-1}+1}{1-2a_n}$, 设 $b_n=\frac{1}{a_n},n\in N_+$.

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列.

(2) 试问 a_1a_2 是否是数列 $\{a_n\}$ 中的项? 如果是, 是第几项? 如果不是, 请说明理由.

解析:

答案: (1) 当 $n>1,n\in N_+$ 时,$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{2a_{n-1}+1}{1-2a_n}\Leftrightarrow\frac{1-2a_n}{a_n}=\frac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}}\Leftrightarrow\frac{1}{a_n}-2=2+\frac{1}{a_{n-1}}\Leftrightarrow\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}=4}\Leftrightarrow b_n-b_{n-1}=4$, 且 $b_1=\frac{1}{a_n}=5$

$\therefore\{b_n\}$ 是等差数列, 且公差为 4, 首项为 5.

(2) 由(**??**)知 $b_n=b_1+(n-1)d=5+4(n-1)=4n+1$

$\therefore a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{4n+1},n\in N_+$.

$\therefore a_1=\frac{1}{5},a_2=\frac{1}{9},\therefore a_1a_2=\frac{1}{45}$

令 $a_n=\frac{1}{4n+1}=\frac{1}{45},\therefore n=11$, 即 $a_1a_2=a_{11}$

$\therefore a_1a_2$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 是第 11 项.

知识点: 等差数列的概念

难度: 1

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_7+a_9=16,a_4=1$, 则 a_{12} 的值是 (　　)

A.15 B.30 C.31 D.64

解析:$\because\{a_n\}$ 是等差数列,$\therefore a_7+a_9=a_4+a_{12}$,

$\therefore a_{12}=16-1=15$

答案:A

知识点：等差数列的概念

难度：1

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列,$a_1+a_3+a_5=105,a_2+a_4+a_6=99$, 则 a_{20} 等于（ ）

A.-1 B.1 C.3 D.7

解析:$\because a_1+a_3+a_5=105,\therefore 3a_3=105$,

解得 a_3=35, 同理由 $a_2+a_4+a_6=99$, 得 a_4=33.

$\because d$=a_4-a_3=33-35=-2,

$\therefore a_{20}=a_4+(20-4)d=33+16\times(-2)=1$

答案:B

知识点：等差数列的概念

难度：1

若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则下列数列中仍为等差数列的有（ ）

$\{a_n+3\}$ $\{a_n^2\}$ $\{a_{n+1}$-$a_n\}$ $\{2a_n\}$ $\{2a_n+n\}$

A.1 个 B.2 个 C.3 个 D.4 个

解析: 根据等差数列的定义判断, 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则 $\{a_n+3\},\{a_{n+1}-a_n\},\{2a_n\},\{2a_n+n\}$ 均为等差数列, 而 $\{a_n^2\}$ 不一定是等差数列.

答案:D

知识点：等差数列的概念

难度：1

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$, 则有（ ）

A.$a_1+a_{101}>0$ B.$a_2+a_{101}<0$

C.$a_3+a_{100}\leq 0$ D.a_{51}=0

解析: 由题设 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=101a_{51}=0$, 得 a_{51}=0.

答案:D

知识点：等差数列的概念

难度：1

若等差数列的前三项依次是 $x-1,x+1,2x+3$, 则其通项公式为（ ）

A.a_n=2n-5 B.a_n=2n-3 C.a_n=2n-1 D.$a_n=2n+1$

解析:$\because x-1,x+1,2x+3$ 是等差数列的前三项,

$\therefore 2(x+1)=x-1+2x+3$, 解得 $x=0$.

$\therefore a_1=x-1=-1, a_2=1, a_3=3, \therefore d=2$.

$\therefore a_n=-1+2(n-1)=2n-3$, 故选 B.

答案:B

知识点：等差数列的概念

难度：1

在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1+a_4+a_7=39, a_2+a_5+a_8=33$, 则 $a_3+a_6+a_9=$________.

解析: 由等差数列的性质,

得 $(a_1+a_4+a_7)+(a_3+a_6+a_9)=2(a_2+a_5+a_8)$,

即 $39+(a_3+a_6+a_9)=2\times 33$,

故 $a_3+a_6+a_9=66-39=27$

答案:27

知识点：等差数列的概念

难度：1

若 $\lg 2, \lg(2^x-1), \lg(2^x+3)$ 成等差数列, 则 x 的值是____________.

解析: 由题意, 知 $2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$,

则 $(2^x-1)^2=2(2^x+3)$, 即 $(2^x)^2-4\cdot 2^x-5=0$,

$\therefore (2^x-5)(2^x+1)=0, \therefore 2^x=5, \therefore x=\log_2 5$.

答案:$\log_2 5$

知识点：等差数列的概念

难度：1

已知一个等差数列由三个数构成, 这三个数之和为 9, 平方和为 35, 则这三个数构成的等差数列为____________________________.

答案:1,3,5 或 5,3,1

知识点：等差数列的概念

难度：1

在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1+a_4+a_7=15, a_2a_4a_6=45$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析：

答案：$a_1+a_7=2a_4=a_2+a_6$,

$\therefore a_1+a_4+a_7=3a_4=15$, $\therefore a_4=5$

$\therefore a_2+a_6=10, a_2a_6=9$

$\therefore a_2, a_6$ 是方程 $x^2-10x+9=0$ 的两根.

$\therefore \begin{cases} a_2=1 \\ a_6=9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_2=9 \\ a_6=1 \end{cases}$

若 $a_2=1, a_6=9$, 则 $d=\frac{a_6-a_2}{6-2}=2, \therefore a_n=2n-3$.

若 $a_2=9, a_6=1$, 则 $d=\frac{a_6-a_2}{6-2}=-2, \therefore a_n=13-2n$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-3$ 或 $a_n=13-2n$.

知识点：等差数列的概念

难度：1

已知 $f(x)=x^2-2x-3$, 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=f(x-1), a_2=-\frac{3}{2}, a_3=f(x)$, 求:

(1)x 的值;

(2) 通项 a_n.

解析：

答案：(1) 由 $f(x)=x^2-2x-3$, 得 $a_1=f(x-1)=(x-1)^2-2(x-1)-3=x^2-4x, a_3=x^2-2x-3$,

又因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $2a_2=a_1+a_3$, 即 $-3=x^2-4x+x^2-2x-3$, 解得 $x=0$ 或 $x=3$.

(2) 当 $x=0$ 时, $a_1=0, d=a_2-a_1=-\frac{3}{2}$,

此时 $a_n=a_1+(n-1)d=-\frac{3}{2}(n-1)$;

当 $x=3$ 时, $a_1=-3, d=a_2-a_1=\frac{3}{2}$,

此时 $a_n=a_1+(n-1)d=\frac{3}{2}(n-3)$

知识点：等差数列的概念

难度：2

在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2=2, a_6=0$, 且数列 $\{\frac{1}{a_n+1}\}$ 是等差数列, 则 a_4 等于 (　　)

A.$\frac{1}{2}$ B.$\frac{1}{3}$ C.$\frac{1}{4}$ D.$\frac{1}{6}$

解析: 令 $b_n=\frac{1}{a_n+1}$, 则 $b_2=\frac{1}{a_2+1}=\frac{1}{3}, b_6=\frac{1}{a_6+1}+1$

由题意知 $\{b_n\}$ 是等差数列,

$\therefore b_6-b_2=(6-2)d=4d=\frac{2}{3}, \therefore d=\frac{1}{6}$

$\therefore b_4=b_2+2d=\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\because b_4=\frac{1}{a_4+1},\therefore a_4=\frac{1}{2}$

答案:A

知识点：等差数列的概念

难度：2

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_1+a_7+a_{13}=4\pi$, 则 $\tan(a_2+a_{12})$ 的值为 (　　)

A. $\sqrt{3}$ B.$\pm\sqrt{3}$ C.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D.$-\sqrt{3}$

解析:$\because\{a_n\}$ 为等差数列,$\therefore a_1+a_7+a_{13}=3a_7=4\pi$

$\therefore a_7=\frac{4\pi}{3},\tan(a_2+a_{12})=\tan(2a_7)=\tan\frac{8\pi}{3}=-\sqrt{3}$

答案:D

知识点：等差数列的概念

难度：2

《九章算术》“竹九节”问题: 现有一根 9 节的竹子, 自上而下各节的容积成等差数列, 上面 4 节的容积共 3 升, 下面 3 节的容积共 4 升, 则第 5 节的容积为 (　　)

A.1 升 B.$\frac{67}{66}$ 升 C.$\frac{47}{44}$ 升 D.$\frac{37}{38}$ 升

解析: 设所构成的等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1, 公差为 d,

由题意得 $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=3 \\ a_7+a_8+a_9=4 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4a_1+6d=3, \\ 3a_1+21d=4. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a_1=\frac{13}{22} \\ d=\frac{7}{66} \end{cases}$, 所以 $a_5=a_1+4d=\frac{67}{66}$

答案:B

知识点：等差数列的概念

难度：2

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 如果 $a_2+a_5+a_8=9$, 那么关于 x 的方程 $x^2+(a_4+a_6)x+10=0$(　　)

A. 无实根 B. 有两个相等实根

C. 有两个不等实根 D. 不能确定有无实根

解析:$\because a_4+a_6=a_2+a_8=2a_5$, 即 $3a_5=9,\therefore a_5=3$

又 $a_4+a_6=2a_5=6$,

$\therefore$ 关于 x 的方程为 $x^2+6x+10=0$, 则判别式 $\Delta=6^2-4\times10<0, \therefore$ 无实数解.

答案:A

知识点：等差数列的概念

难度：2

已知 $\log_a b$,-1,$\log_b a$ 成等差数列, 且 a,b 为关于 x 的方程 x^2-cx+d=0 的两根, 则 d=__________.

解析: 由已知, 得 $\log_a b+\log_b a$=-2, 即 $\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{\lg a}{\lg b}=-2$, 从而有 $(\lg a+\lg b)^2=0$, 可得 $\lg a=-\lg b=\lg\frac{1}{b}$, 即 $ab=1$

故由根与系数的关系得 $d=ab=1$

答案:1

知识点：等差数列的概念

难度：2

已知方程 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m-n|$=__________

解析: 由题意设这 4 个根为 $\frac{1}{4},\frac{1}{4}+d,\frac{1}{4}+2d,\frac{1}{4}+3d$

可得 $\frac{1}{4}+(\frac{1}{4}+3d)=2, \therefore d=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 这 4 个根依次为 $\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4}$

$\therefore n=\frac{1}{4}\times\frac{7}{4}=\frac{7}{16}, m=\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}=\frac{15}{16}$ 或 $n=\frac{15}{16}, m=\frac{7}{16}, \therefore |m-n|=\frac{1}{2}$

答案:$\frac{1}{2}$

知识点：等差数列的概念

难度：2

两个等差数列 5,8,11,...和 3,7,11,...都有 100 项, 那么它们共有多少相同的项?

解析:

答案: 在数列 $\{a_n\}$ 中,a_1=5, 公差 d_1=8-5=3.

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d_1=3n+2$

在数列 $\{b_n\}$ 中,b_1=3, 公差 d_2=7-3=4,

$\therefore b_n=b_1+(n-1)d=4n-1$

令 a_n=b_m, 则 $3n+2=4m-1, \therefore n=\frac{4m}{3}-1$

$\because m,n\in \mathrm{N}_+$, $\therefore m=3k(k\in \mathrm{N}_+)$,

又 $\begin{cases} 0<m\le 100, \\ 0<n\le 100 \end{cases}$，解得 $0<m\le 75$.

$\therefore 0<3k\le 75$, $\therefore 0<k\le 25$, $\therefore k=1,2,3,\ldots,25$.

$\therefore$ 两个数列共有 25 个公共项.

知识点：等差数列的概念

难度：2

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{3}{5}$，$a_n a_{n-1}+1=2a_{n-1}(n\ge 2,n\in \mathrm{N}_+)$. 数列 $\{b_n\}$ 中，$b_n=\frac{1}{a_n-1}(n\in \mathrm{N}_+)$.

(1) 求证:$\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并求其最大、最小项.

解析:

答案：(1) 由 $a_n a_{n-1}+1=2a_{n-1}$, 得 $a_n a_{n-1}$-a_{n-1}=a_{n-1}-1,

$\therefore \frac{1}{a_n-1}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}=b_n$, 又 $b_{n-1}=\frac{1}{a_{n-1}-1}$

$\therefore b_n-b_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=1(n\ge 2,n\in N_+)$

$\because b_1=\frac{1}{a_1-1}=-\frac{5}{2}$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 $-\frac{5}{2}$ 为首项,1 为公差的等差数列.

(2) 由 (1) 知 $b_n=n$-3.5,

又由 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$ 得 $a_n=1+\frac{1}{b_n}=1+\frac{1}{n-3.5}$

点 (n,a_n) 在函数 $y=\frac{1}{x-3.5}+1$ 的图像上.

显然, 在区间 $(3.5,+\infty)$ 上,$y=\frac{1}{x-3.5}+1$ 递减且 $y>1$; 在区间 $(0,3.5)$ 上,$y=\frac{1}{x-3.5}+1$ 递减且 $y<1$.

因此, 当 $n=4$ 时,a_n 取得最大值 3; 当 $n=3$ 时,a_n 取得最小值-1.

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：1

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_2=3,a_6=11$, 则 S_7 等于 (   )

A.13 B.35 C.49 D.63

解析:$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(a_2+a_6)}{2}=\frac{7\times(3+11)}{2}=49$

答案:C

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：1

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,S_5=10, 则 a_3 的值为 (　　)

A.$\frac{6}{5}$ B.1 C.2 D.3

解析:$\because S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3$,

$\therefore a_3=\frac{1}{5}S_5=\frac{1}{5}\times10=2$

答案:C

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 a_n=2n-37, 则 S_n 取最小值时 n 的值为 (　　)

A.17 B.18 C.19 D.20

解析: 由 $\begin{cases} a_n\leq0 \\ a_{n+1}\geq0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2n-37\leq0, \\ 2(n+1)-37\geq0 \end{cases}$,$\therefore \frac{35}{2}\leq n\leq\frac{37}{2}$

$\because n\in N_+$,$\therefore n$=18.$\therefore S_{18}$ 最小, 此时 n=18.

答案:B

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：1

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n(n=1,2,3,…), 若当首项 a_1 和公差 d 变化时,$a_5+a_8+a_{11}$ 是一个定值, 则下列选项中为定值的是 (　　)

A.S_{17} B.S_{18} C.S_{15} D.S_{14}

解析: 由 $a_5+a_8+a_{11}=3a_8$ 是定值, 可知 a_8 是定值, 所以 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8$ 是定值.

答案:C

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：1

若两个等差数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 与 B_n, 且满足 $\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+1}{4n+27}$($n\in N_+$), 则 $\frac{a_{11}}{b_{11}}$ 的值是 (　　)

A.$\frac{7}{4}$ B.$\frac{3}{2}$ C.$\frac{4}{3}$ D.$\frac{78}{71}$

解析:$\because \frac{a_n}{b_n}=\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+1}{4(2n-1)+27}=\frac{14n-6}{8n+28}$,

$\therefore \frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{14\times11-6}{8\times11+23}=\frac{148}{111}=\frac{4}{3}$

答案:C

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：1

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列,S_n 为其前 n 项和,$n\in N_+$. 若 $a_3=16,S_{20}=20$, 则 S_{10} 的值为__________.

解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1, 公差为 d.

$\because a_3 = a_1 + 2d, S_{20} = 20a_1 + \frac{20\times19}{2}d = 20,$

$\therefore \begin{cases} a_1 + 2d = 16, \\ 2a_1 + 19d = 2 \end{cases}$

解得 d=-2,a_1=20,

$\therefore S_{10} = 10a_1 + \frac{10\times9}{2}d = 200 - 90 = 110$

答案:110

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：1

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 前 n 项和为 S_n, 若 $a_9=3a_5$, 则 $\frac{S_{17}}{S_9}$__________.

解析:$\because S_{17} = 17a_9, S_9 = 9a_5,$

$\therefore \frac{S_{17}}{S_9} = \frac{17a_9}{9a_5} = \frac{17}{9} \times 3 = \frac{17}{3}$

答案:$\frac{17}{3}$

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：1

已知某等差数列共有 10 项, 其奇数项之和为 15, 偶数项之和为 30, 则其公差等于__________.

解析: 设公差为 d, 则有 $5d=S_{偶}-S_{奇}$=30-15=15, 于是 d=3.

答案:3

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：1

若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d<0, 且 $a_2 \cdot a_4 = 12, a_2 + a_4 = 8$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 S_{10} 的值.

解析:

答案: (1) 由题意知 $(a_1+d)(a_1+3d)=12,(a_1+d)+(a_1+3d)=8$, 且 $d<0$, 解得 $a_1=8,d=-2$.

$(2)S_{10}=10\times a_1+\frac{10\times 9}{2}d=-10$

知识点: 等差数列的前 n 项和

难度: 1

已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 23, 公差为整数的等差数列, 且前 6 项均为正, 从第 7 项开始变为负.

求:(1) 此等差数列的公差 d;

(2) 设前 n 项和为 S_n, 求 S_n 的最大值;

(3) 当 S_n 是正数时, 求 n 的最大值.

解析:

答案: (1)$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 首项为 23, 前 6 项均为正, 从第 7 项开始变为负,

$\therefore a_6=a_1+5d=23+5d>0,a_7=a_1+6d=23+6d<0$, 解得 $-\frac{23}{5}<d<-\frac{23}{6}$, 又 $d\in Z$,$\therefore d=-4$.

(2)$\because d<0,\therefore\{a_n\}$ 是递减数列.

又 $a_6>0,a_7<0,\therefore$ 当 $n=6$ 时,S_n 取得最大值,

即 $S_6=6\times 23+\frac{6\times 5}{2}\times(-4)=78$

$(3)S_n=23n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-4)>0$, 整理得 $n(25-2n)>0,\therefore 0<n<\frac{25}{2}$, 又 $n\in N_+,\therefore n$ 的最大值为 12.

知识点: 等差数列的前 n 项和

难度: 2

设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差 $d=-2,S_n$ 为其前 n 项和, 若 $S_{10}=S_{11}$, 则 $a_1=($　　$)$

A.18 B.20 C.22 D.24

解析: 因为 $S_{11}-S_{10}=a_{11}=0,a_{11}=a_1+10d=a_1+10\times(-2)=0$, 所以 $a_1=20$.

答案:B

知识点: 等差数列的前 n 项和

难度: 2

(2017 全国 1 高考) 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_4+a_5=24, S_6=48$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为 (　　)

A.1 B.2 C.4 D.8

解析: 设首项为 a_1, 公差为 d, 则 $a_4+a_5=a_1+3d+a_1+4d=24, S_6=6a_1+\frac{6\times5}{2}d=48$, 联立可得 $\begin{cases} 2a_1+7d=24, \\ 6a_1+15d=48, \end{cases}$, ×3- , 得 (21-15)$d$=24, 即 6$d$=24, 所以 d=4.

答案:C

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：2

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n, 若 $a_2+a_4+a_{15}$ 的值为一个确定的常数, 则下列各数中也是常数的是 (　　)

A.S_7 B.S_8 C.S_{13} D.S_{15}

解析:$\because a_2+a_4+a_{15}=3a_1+18d=3(a_1+6d)=3a_7$ 为常数,

$\therefore S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7$ 为常数.

答案:C

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：2

若等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 a_n=1-2n, 其前 n 项和为 S_n, 则数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的前 11 项和为 (　　)

A.-45 B.-50 C.-55 D.-66

解析:$\because S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}, \therefore \frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}=-n$,

$\therefore \{\frac{S_n}{n}\}$ 的前 11 项和为 $-(1+2+3+\cdots+11)=-66$. 故选 D.

答案:D

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：2

已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和等于前 4 项的和. 若 $a_1=1, a_k+a_4=0$, 则 k=__________.

解析: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 则 $a_n=1+(n-1)d$,

$\because S_4=S_9, \therefore a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=0$

$\therefore a_7=0, \therefore 1+6d=0, d=-\frac{1}{6}$

又 $a_4=1+3\times(-\frac{1}{6})=\frac{1}{2},a_k=1+(k-1)d$,

由 $a_k+a_4=0$, 得 $\frac{1}{2}+1+(k-1)d=0$, 将 $d=\frac{1}{6}$ 代入, 可得 k=10.

答案:10

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：2

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和为 S_n, 且 $1+\frac{a_{11}}{a_{10}}<0$ 若 S_n 存在最大值, 则满足 S_n>0 的 n 的最大值为__________.

解析: 因为 S_n 有最大值, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 又 $\frac{a_{11}}{a_{10}}<-1$, 所以 a_{10}>0,a_{11}<0, 且 $a_{10}+a_{11}<0$

所以 $S_{19}=19\times\frac{a_1+a_{19}}{2}=19a_{10}>0,S_{20}=20\times\frac{a_1+a_{20}}{2}=10\times(a_{10}+a_{11})<0$,

故满足 S_n>0 的 n 的最大值为 19.

答案:19

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：2

在等差数列 $\{a_n\}$ 中,a_1=-60,a_{17}=-12, 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和.

解析:

答案：数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=\frac{a_{17}-a_1}{17-1}=\frac{-12-(-60)}{17-1}=3$,

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=-60+(n-1)\times3=3n-63$

由 a_n<0 得 $3n$-63<0,

解得 n<21.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项是负数, 第 20 项以后的项都为非负数.

设 $S_n,S_n^{'}$ 分别表示数列 $\{a_n\},\{|a_n|\}$ 的前 n 项和,

当 $n\leq20$ 时,$S_n^{'}=-S_n=-[-60n+\frac{n(n-1)}{2}\times3]=-\frac{3}{2}n^2+\frac{123}{2}n$;

当 n>20 时,$S_n^{'}=-S_{20}+(S_n-S_{20})=S_n-2S_{20}=-60n+\frac{n(n-1)}{2}\times3-2\times(-60\times 20+\frac{20\times19}{2}\times3)=\frac{3}{2}n^2-\frac{123}{2}n+1260$

$\therefore$ 数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和

$$S_n^{'}=\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{123}{2}n(n\leq20),\\ \frac{3}{2}n^2-\frac{123}{2}n+1260(n>20).\end{cases}$$

知识点：等差数列的前 n 项和

难度：2

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 a_5+a_{13}=34,S_3=9.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = \frac{a_n}{a_n+t}$, 问: 是否存在正整数 t, 使得 $b_1,b_2,b_m(m\geq3,m\in\mathrm{N})$ 成等差数列? 若存在, 求出 t 和 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

解析:

答案: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,

因为 $a_5+a_{13}=34,S_3=9$,

所以 $\begin{cases} a_1+4d+a_1+12d=34, \\ a_1+a_1+d+a_1+2d=9 \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} a_1+8d=17, \\ a_1+d=3 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=2 \end{cases}$

所以 $a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$,

$S_n=n\times1+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2$

(2) 由(**??**)知 $b_n=\frac{2n-1}{2n-1+t}$,

所以 $b_1=\frac{1}{1+t},b_2=\frac{3}{3+t},b_m\frac{2m-1}{2m-1+t}$

若 $b_1,b_2,b_m(m\geq3,m\in\mathrm{N})$ 成等差数列,

则 $2b_2=b_1+b_m$,

所以 $\frac{6}{3+t}=\frac{1}{1+t}+\frac{2m-1}{2m-1+t}$,

即 $6(1+t)(2m-1+t)=(3+t)(2m-1+t)+(2m-1)(1+t)(3+t)$,

整理得 $(m-3)t^2-(m+1)t=0$,

因为 t 是正整数, 所以 $(m-3)t-(m+1)=0, m=3$ 时显然不成立, 所以 $t=\frac{m+1}{m-3}=\frac{m-3+4}{m-3}=1+\frac{4}{m-3}$

又因为 $m\geq3,m\in\mathrm{N}$,

所以 $m=4$ 或 5 或 7,

当 $m=4$ 时,$t=5$;

当 $m=5$ 时,$t=3$;

当 $m=7$ 时,$t=2$.

所以存在正整数 t, 使得 $b_1,b_2,b_m(m\geq3,m\in\mathrm{N})$ 成等差数列.

知识点: 数列的概念

难度: 1

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{1}{n}$ 的值等于 (　　)

A.$\frac{1}{20}$ B.$-\frac{1}{20}$ C.$\frac{1}{30}$ D.$-\frac{1}{30}$

解析:$a_5=S_5-S_4=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{20}$

答案:B

知识点：数列的概念

难度：1

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,a_5=5,S_5=15$, 则数列 $\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\}$ 的前 100 项和为 ( )

A.$\frac{100}{101}$ B.$\frac{99}{101}$ C.$\frac{99}{100}$ D.$\frac{101}{100}$

解析:$\because S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5(a_1+5}{2}=15,\therefore a_1=1,$

$\therefore d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=\frac{5-1}{5-1}=1,$

$\therefore a_n=1+(n-1)\times1=n,$

$\therefore \frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}$

设 $\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为 T_n,

则 $T_{100}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{100\times101}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$

答案:A

知识点：数列的概念

难度：1

设 $\{a_n\}(n\in N_+)$ 是等差数列,S_n 是其前 n 项和, 且 $S_5<S_6,S_6=S_7>S_8$, 则下列结论错误的是 ( )

A.$d<0$

B.$a_7=0$

C.$S_9>S_5$

D.S_6 和 S_7 均为 S_n 的最大值

解析: 由 $S_5<S_6$ 得 $a_1+a_2+\cdots+a_5<a_1+a_2+\cdots+a_6,\therefore a_6>0$

又 $S_6=S_7,\therefore a_1+a_2+\cdots+a_6=a_1+a_2+\cdots+a_6+a_7,\therefore a_7=0$, 故 B 正确;

同理由 $S_7>S_8$, 得 $a_8<0$,

又 $d=a_7-a_6<0$, 故 A 正确;

由 C 选项中 $S_9>S_5$, 即 $a_6+a_7+a_8+a_9>0$,

可得 $2(a_7+a_8)>0$

而由 $a_7=0,a_8<0$, 知 $2(a_7+a_8)>0$ 不可能成立, 故 C 错误;

$\because S_5<S_6,S_6=S_7>S_8,\therefore S_6$ 与 S_7 均为 S_n 的最大值, 故 D 正确. 故选 C.

答案:C

知识点：数列的概念

难度：1

数列 $\{\frac{1}{(n+1)^2-1}\}$ 的前 n 项和 S_n 为 (　　)

A.$\frac{n+1}{2(n+2)}$

B.$\frac{3}{4}-\frac{n+1}{2(n+2)}$

C.$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$

D.$\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

解析:$\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$,

于是 $S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$

答案:C

知识点：数列的概念

难度：1

设函数 $f(x)$ 满足 $f(n+1)=\frac{2f(n)+n}{2}(n\in N_+)$, 且 $f(1)=2$, 则 $f(20)$ 为 (
)

A.95 B.97 C.105 D.192

解析:$\because f(n+1)=f(n)+\frac{n}{2}$,

$\therefore f(n+1)-f(n)=\frac{n}{2}$

$\therefore f(2)-f(1)=\frac{1}{2}$,

$f(3)-f(2)=\frac{2}{2}$,

……

$f(20)-f(19)=\frac{19}{2}$,

$\therefore f(20)-f(1)=\frac{1+2+\cdots+19}{2}=\frac{\frac{(1+19)\times 19}{2}}{2}=95$

又 $f(1)=2, \therefore f(20)=97$

答案:B

知识点：数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$-$9n$, 第 k 项满足 5<a_k<8, 则 k=__________.

解析:$a_n=S_n$-$S_{n-1}=(n^2$-$9n)$-$[(n$-$1)^2$-$9(n$-$1)]=2n$-$10(n\geq 2)$, 又 $a_1=S_1=$-8 符合上式, 所以 $a_n=2n$-10.

令 5<2k-10<8, 解得 $\frac{15}{2}<k<9$
又 $k\in N_+$, 所以 k=8.
答案:8

知识点：数列的概念
难度：1
设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,S_n=\frac{a_1(3^n-1)}{2}$, 且 a_4=54, 则 a_1=__________.
解析: 因为 $a_4=S_4-S_3=\frac{a_1(3^4-1)}{2}-\frac{a_1(3^3-1)}{2}$,
所以 $27a_1$=54, 解得 a_1=2.
答案:2

知识点：数列的概念
难度：1
数列 $1,\frac{1}{1+2},\frac{1}{1+2+3},\cdots,\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 的前 n 项和 S_n=______________.
解析: 因为 $\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$
所以 $S_n=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$
答案:$\frac{2n}{n+1}$

知识点：数列的概念
难度：1
正项数列 $\{a_n\}$ 满足]$a_n^2-(2n-1)a_n-2n=0$
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n;
(2) 令 $b_n=\frac{1}{(n+1)a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.
解析:
答案：(1) 由 $a_n^2-(2n-1)a_n-2n=0$,
得 $(a_n-2n)(a_n+1)=0$, 即 a_n=2n 或 a_n=-1,
由于 $\{a_n\}$ 是正项数列, 故 a_n=2n.
(2) 由 (1) 知 a_n=2n, 所以 $b_n=\frac{1}{(n+1)a_n}=\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$,
故 $T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{n}{2(n+1)}$

知识点：数列的概念
难度：1

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, n\in \mathrm{N}_+$, 且 $a_3+a_6=4, S_5=-5$

(1) 求 a_n;

(2) 若 $T_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$, 求 T_5 的值和 T_n 的表达式.

解析:

答案: (1) 设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1, 公差为 d, 易由 $a_3+a_6=4, S_5=-5$ 得出 a_1=-5, d=2.

$\therefore a_n$=2n-7.

(2) 当 $n\geq 4$ 时, $a_n=2n-7>0$; 当 $n\leq 3$ 时, $a_n=2n-7<0$,

$\therefore T_5=-(a_1+a_2+a_3)+a_4+a_5=13$

当 $1\leq n\leq 3$ 时, $T_n=-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=-n^2+6n$;

当 $n\geq 4$ 时, $T_n=-(a_1+a_2+a_3)+a_4+a_5+\cdots+a_n=n^2-6n+18$

综上所述, $T_n=\begin{cases} -n^2+6n, 1\leq n\leq 3, \\ n^2-6n+18, n\geq 4 \end{cases}$

知识点: 数列的概念

难度: 2

若等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$, 则由 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 所确定的数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项之和是 (　　)

A. $n(n+2)$ B. $\frac{1}{2}n(n+4)$

C. $\frac{1}{2}n(n+5)$ D. $\frac{1}{2}n(n+6)$

解析: 由题意知 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(3+2n+1)}{2}=n(n+2), \therefore b_n=\frac{n(n+2)}{n}=n+2$, 于是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n(3+n+2)}{2}=\frac{1}{2}n(n+5)$

答案:C

知识点: 数列的概念

难度: 2

已知一个等差数列共 n 项, 且其前四项之和为 21, 末四项之和为 67, 前 n 项和为 286, 则项数 n 为 (　　)

A.24 B.26 C.25 D.28

解析: 设该等差数列为 $\{a_n\}$,

由题意, 得 $a_1+a_2+a_3+a_4=21$,

$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=67$,

又 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}$,

$\therefore 4(a_1+a_n)=21+67=88, \therefore a_1+a_n=22$

$\therefore S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=11n=286, \therefore n=26$
答案:B

知识点：数列的概念
难度：2
已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n=a_{n-1}+2n(n \geq 2)$，则 $a_7=($　　$)$
A.53 B.54 C.55 D.109
解析:$\because a_n=a_{n-1}+2n, \therefore a_n-a_{n-1}=2n$
$\therefore a_2-a_1=4, a_3-a_2=6, a_4-a_3=8, \cdots, a_n-a_{n-1}=2n(n \geq 2)$
$\therefore a_n=1+4+6+\cdots+2n=1+\frac{(n-1)(4+2n)}{2}=n^2-n+1$
$a_7=7^2+7-1=55$
答案:C

知识点：数列的概念
难度：2
已知数列 $\{a_n\}$ 为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}+\frac{2}{3}, \frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}, \cdots, \frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\cdots+\frac{9}{10}, \cdots$，如果 $b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$，那么数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 为 (　　)
A.$\frac{n}{n+1}$ B.$\frac{4n}{n+1}$ C.$\frac{3n}{n+1}$ D.$\frac{5n}{n+1}$
解析:$\because a_n=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+1}=\frac{n}{2}$,
$\therefore b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{4}{n(n+1)}=4(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1})$,
$\therefore Sn=4[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=4(1-\frac{1}{n+1})=\frac{4n}{n+1}$
答案:B

知识点：数列的概念
难度：2
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2+n+1$，则 $a_n=$____________________.
解析: 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=3$;
当 $n \geq 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n+1-[(n-1)^2+(n-1)+1]=2n$
此时, 当 $n=1$ 时,$2n=2 \neq 3$.
所以 $a_n=\begin{cases} 3(n=1), \\ 2n(n \geq 2) \end{cases}$
答案:$\begin{cases} 3(n=1), \\ 2n(n \geq 2) \end{cases}$

知识点：数列的概念

难度：2

设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 S_6=36,S_n=324, 若 S_{n-6}=144(n>6), 则数列的项数 n 为__________.

解析: 由题意可知 $\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_6=36, \\ a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{n-5}=324-144, \end{cases}$

由 + , 得 $(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_6+a_{n-5})=216, \therefore 6(a_1+a_n)=216, \therefore a_1+a_n=36$

$\therefore S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=18n=324, \therefore n=18$

答案:18

知识点：数列的概念

难度：2

设数列 $\{a_n\}$ 的前 $S_n, a_1=1, a_n=\frac{S_n}{n}+2(n-1)(n\in \mathrm{N}_+)$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 并求 a_n 与 S_n;

(2) 是否存在自然数 n, 使得 $S_1+\frac{S_2}{2}+\frac{S_3}{3}+\cdots+\frac{S_n}{n}-(n-1)^2=2019$? 若存在, 求出 n 的值; 若不存在, 请说明理由.

解析：

答案：(1) 由 $a_n=\frac{S_n}{n}+2(n-1)$,

得 $S_n=na_n-2n(n-1)(n\in N_+)$

当 $n\geq 2$ 时,a_n=S_n-S_{n-1}=na_n-$(n$-1$)a_{n-1}$-4(n-1), 即 a_n-a_{n-1}=4,

故数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项,4 为公差的等差数列.

于是,$a_n=4n-3, S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=2n^2-n$

(2) 存在自然数 n 使得 $S_1+\frac{S_2}{2}+\frac{S_3}{3}+\cdots+\frac{S_n}{n}-(n-1)^2=2019$ 成立. 理由如下:

由 (1), 得 $\frac{S_n}{n}=2n-1(n\in \mathrm{N}_+)$,

所以 $S_1+\frac{S_2}{2}+\frac{S_3}{3}+\cdots+\frac{S_n}{n}-(n-1)^2=1+3+5+7+\cdots+(2n-1)-(n-1)^2=n^2-(n-1)^2=2n-1$

令 2n-1=2019, 得 n=1010,

所以存在满足条件的自然数 n 为 1010.

知识点：数列的概念

难度：2

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n=100n-n^2($n\in \mathrm{N}_+$).

(1) 求证 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 设 $b_n=\{|a_n|\}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

解析:

答案: (1)$a_n=S_n$-S_{n-1}

$=(100n-n^2)-[100(n-1)-(n-1)^2]$

$=101-2n(n\geq 2)$.

$\because a_1=S_1=100\times 1-1^2=99=101-2\times 1$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=101-2n(n\in N_+)$.

又 $a_{n+1}-a_n=-2$ 为常数,$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=99$, 公差 $d=-2$ 的等差数列.

(2) 令 $a_n=101-2n\geq 0$, 得 $n\leq 50.5$.

$\because n\in N_+$,$\therefore n\leq 50(n\in N_+)$.

当 $1\leq n\leq 50$ 时 $a_n>0$, 此时 $b_n=\{|a_n|\}=a_n$,

$\therefore\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n{}'=100n-n^2$;

当 $n\geq 51$ 时 $a_n<0$, 此时 $b_n=\{|a_n|\}=-a_n$,

由 $b_{51}+b_{52}+\cdots+b_n=-(a_{51}+a_{52}+\cdots+a_n)=-(S_n-S_{50})=S_{50}-S_n$,

得数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

$S_n^{'}=S_{50}+(S_{50}-S_n)=2S_{50}-S_n=2\times 2500-(100n-n^2)=5000-100n+n^2$

由　得数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n^{'}=\begin{cases}100n-n^2(1\leq n\leq 50,n\in N_+)\\5000-100n+n^2(n\geq 51,n\in N_+)\end{cases}$$

知识点: 等比数列的概念

难度: 1

若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则下列数列不是等比数列的是 (　　)

A.$\{a_n+1\}$ B.$\{\frac{1}{a_n}\}$ C.$\{4a_n\}$ D.$\{a_n^2\}$

答案:A

知识点: 等比数列的概念

难度: 1

在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$2a_4=a_6-a_5$, 则公比是 (　　)

A.0 B.1 或 2

C.-1 或 2 D.-1 或-2

解析: 设公比为 $q(q\neq 0)$, 由已知得 $2a_1q^3=a_1q^5-a_1q^4$,

$\therefore 2=q^2-q, \therefore q^2-q-2=0$,

$\therefore q=-1$ 或 $q=2$.

答案:C

知识点：等比数列的概念

难度：1

若一个等比数列的首项为 $\frac{9}{4}$, 末项为 $\frac{2}{3}$, 公比为 $\frac{2}{3}$, 则这个数列的项数为(　　)

A.3 B.4 C.5 D.6

解析: 在等比数列中,

$\because \frac{2}{3}=\frac{9}{4}\cdot(\frac{2}{3})^{n-1}=(\frac{2}{3})^{n-3}$,

$\therefore n-3=1$, 即 $n=4$, 故选 B.

答案:B

知识点：等比数列的概念

难度：1

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=4a_n+6(n\in N_+)$ 且 $a_1>0$, 则下列数列是等比数列的是(　　)

A.$\{a_n+6\}$ B.$\{a_n+1\}$

C.$\{a_n+3\}$ D.$\{a_n+2\}$

解析: 由 $a_{n+1}=4a_n+6$ 可得 $a_{n+1}+2=4a_n+8=4(a_n+2)$, 因为 $a_1>0$,

所以 $a_n>0$, 从而 $a_n+2(n\in N_+)$, 因此 $\frac{a_{n+1}+2}{a_n+2}=4$, 故 $\{a_n+2\}$ 是等比数列.

答案:D

知识点：等比数列的概念

难度：1

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5\cdot a_6\cdot a_7=3, a_6\cdot a_7\cdot a_8=24$, 则 $a_7\cdot a_8\cdot a_9$ 的值等于(　　)

A.48 B.72 C.144 D.192

解析: 设公比为 q, 由 $a_6\cdot a_7\cdot a_8=a_5\cdot a_6\cdot a_7\cdot q^3$,

得 $q^3=\frac{24}{3}=8$

所以 $a_7\cdot a_8\cdot a_9=a_6\cdot a_7\cdot a_8\cdot q^3=24\times 8=192$.

答案:D

知识点：等比数列的概念

难度：1

数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, 且 a_1,a_3,a_7 为等比数列 $\{b_n\}$ 的连续三项, 则数列 $\{b_n\}$ 的公比为 (　　)

A. $\sqrt{2}$ B.4 C.2 D.$\frac{1}{2}$

解析:$\because a_1,a_3,a_7$ 为等比数列 $\{b_n\}$ 中的连续三项,

$\therefore a_3^2 = a_1 \cdot a_7$

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 则 $d\neq 0$,

$\therefore (a_1+2d)^2 = a_1(a_1+6d), \therefore a_1 = 2d$

$\therefore$ 公比 $q = \frac{a_3}{a_1} = \frac{4d}{2d} = 2$, 故选 C.

答案:C

知识点：等比数列的概念

难度：1

(2017 全国 3 高考) 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-1, a_1-a_3=-3$, 则 $a_4=$__________.

解析: 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 则由题意, 得 $\begin{cases} a_1(1+q)=-1 \\ a_1(1-q^2)=-3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ q=-2 \end{cases}$ 故 $a_4=a_1q^3=$-8.

答案:-8

知识点：等比数列的概念

难度：1

设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比 $q=2$, 则 $\frac{2a_1+a_2}{2a_3+a_4}$ 的值是__________.

解析:$\because q=2, \therefore 2a_1=a_2, 2a_3=a_4$,

$\therefore \frac{2a_1+a_2}{2a_3+a_4} = \frac{2a_2}{2a_4} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4}$

答案:$\frac{1}{4}$

知识点：等比数列的概念

难度：1

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_9=1, a_{n+1}=2a_n(n\in \mathrm{N}_+)$, 则 $a_5=$__________.

解析: 由 $a_{n+1}=2a_n(n\in \mathrm{N}_+)$ 知, 数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ 的等比数列.

所以 $a_5=a_1q^4=\frac{a_1q^8}{q^4}=\frac{a_9}{q^4}=\frac{1}{16}$

答案:$\frac{1}{16}$

知识点：等比数列的概念

难度：1

若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_2=3,a_5=9$, 则数列 $\{(\frac{1}{2})^{a_n}\}$ 一定是__________数列 (填“等差”或“等比”).

解析: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 则 $\begin{cases} a_1+d=3, \\ a_1+4d=9. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=2. \end{cases}$ 于是 $a_n=2n\text{-}1$,

从而 $(\frac{1}{2})^{a_n}=(\frac{1}{2})^{2n-1}=2\cdot(\frac{1}{4})^n$,

设 $b_n=2\cdot(\frac{1}{4})^n$, 则 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{4}$,

故 $\{(\frac{1}{2})^{a_n}\}$ 一定是等比数列.

答案: 等比

知识点：等比数列的概念

难度：1

在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1\cdot a_9=256,a_4+a_6=40$, 则公比 $q=$__.

解析:$\because a_1a_9=a_1^2q^8,a_4a_6=a_1q^3\cdot a_1q^5=a_1^2q^8$,

$\therefore a_1a_9=a_4a_6$.

可得方程组 $\begin{cases} a_4+a_6=40, \\ a_4\cdot a_6=256 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a_4=32, \\ a_6=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_4=8, \\ a_6=32 \end{cases}$

$q^2=\frac{a_6}{a_4}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ 或 $q^2=\frac{32}{8}=4$

$q=\pm\frac{1}{2}$ 或 $q=\pm2$

答案:$-2,2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

知识点：等比数列的概念

难度：1

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2,a_4=16$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 a_3,a_5 分别为等差数列 $\{b_n\}$ 的第 3 项和第 5 项, 试求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解析:

答案:(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq0)$, 由已知得 $16=2\cdot q^3$, 解得 $q=2$,$\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2\times2^{n-1}=2^n$.

(2) 由(**??**)得 $a_3=8,a_5=32$, 则 $b_3=8,b_5=32$,

设 $\{b_n\}$ 的公差为 d,

则有 $\begin{cases} b_1+2d=8, \\ b_1+4d=32 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b_1=-16, \\ d=12. \end{cases}$

$\therefore -16+12(n-1)=12n-28$

知识点: 等比数列的概念

难度: 1

已知关于 x 的二次方程 $a_nx^2-a_{n+1}x+1=0(n\in\mathrm{N}_+)$ 的两根α,β 满足 $6\alpha-2\alpha\beta+6\beta=3$, 且 $a_1=1$.

(1) 试用 a_n 表示 a_{n+1};

(2) 求证: 数列 $\{a_n-\frac{2}{3}\}$ 为等比数列;

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析:

答案: (1) 因为α,β 是方程 $a_nx^2-a_{n+1}x+1=0(n\in\mathrm{N}_+)$ 的两根,

所以 $\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{a_{n+1}}{a_n}, \\ \alpha\beta=\frac{1}{a_n}. \end{cases}$

又因为 $6\alpha-2\alpha\beta+6\beta=3$, 所以 $6a_{n+1}$-$3a_n$-$2=0$.

所以 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}$

(2) 因为 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}\Rightarrow a_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a_{n+1}-\frac{2}{3}}{a_n-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$ 为常数, 且 $a_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

所以 $\{a_n-\frac{2}{3}\}$ 为等比数列.

(3) 令 $b_n=a_n-\frac{2}{3}$, 则 $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比为 $\frac{1}{2}$, 首项 $b_1=a_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,

所以 $b_n=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$

所以 $a_n=b_n+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{2}{3}$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{2}{3}$

知识点：等比数列的概念

难度：1

容积为 a L(a>1) 的容器盛满酒精后倒出 1 L, 然后加满水, 再倒出 1 L 混合溶液后又用水加满, 如此继续下去, 问第 n 次操作后溶液的浓度是多少? 当 a=2 时, 至少应倒出几次后才可能使酒精浓度低于 10%?

解析:

答案：开始的浓度为 1, 操作一次后溶液的浓度是 $a_1 = 1 - \frac{1}{a}$

设操作 n 次后溶液的浓度是 a_n, 则操作 $n+1$ 次后溶液的浓度是 $a_{n+1} = a_n(1 - \frac{1}{a})$

所以 $\{a_n\}$ 构成以 $a_1 = 1 - \frac{1}{a}$ 为首项,$q = 1 - \frac{1}{a}$ 为公比的等比数列.

所以 $a_n = (1 - \frac{1}{a})^n$, 即第 n 次操作后溶液的浓度是 $(1 - \frac{1}{a})^n$

当 a=2 时, 由 $a_n = (\frac{1}{2})^n < \frac{1}{10}$, 得 n≥4.

因此, 至少应倒 4 次后才可以使酒精浓度低于 10%.

知识点：等比数列的概念

难度：1

在等比数列 $\{a_n\}$ 中,a_5=3, 则 $a_2 \cdot a_8$=(　　)

A.3 B.6 C.8 D.9

解析:$a_2 \cdot a_8 = a_5^2 = 3^2 = 9$

答案:D

知识点：等比数列的概念

难度：1

若 1,a_1,a_2,4 成等差数列,1,b_1,b_2,b_3,4 成等比数列, 则 $\frac{a_1-a_2}{b_2}$ 的值等于 (　)

A.$-\frac{1}{2}$ B.$\frac{1}{2}$ C.$\pm\frac{1}{2}$ D.$\frac{1}{4}$

解析:$\because b_2^2 = 1 \times 4 = 4$,$\therefore b_2$=2 或 b_2=-2(舍去).

又 $a_2 - a_1 = \frac{4-1}{4-1} = 1$,$\therefore \frac{a_1-a_2}{b_2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

答案:A

知识点：等比数列的概念

难度：1

若互不相等的实数 a,b,c 成等差数列,c,a,b 成等比数列, 且 $a+3b+c=10$, 则 a 等于 (　　)

A.4 B.2 C.-2 D.-4

解析: 由 $\begin{cases} 2b=a+c, \\ a^2=bc, \\ a+3b+c=10 \end{cases}$, 解得 a=-4 或 a=2.

又当 a=2 时,b=2,c=2, 与题意不符, 故 a=-4.

答案:D

知识点：等比数列的概念

难度：1

在等比数列 $\{a_n\}$ 中,a_1=1, 公比 $/q/\neq 1$. 若 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$, 则 m=(　　)

A.9 B.10 C.11 D.12

解析: 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_1a_5=a_2a_4=a_3^2$,

于是 $a_1a_2a_3a_4a_5=a_3^5$

从而 $a_m=a_3^5=(q^2)^5=q^{10}=1\times q^{11-1}$, 故 m=11.

答案:C

知识点：等比数列的概念

难度：1

在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中,$\frac{1}{a_2a_4}+\frac{2}{a_4^2}+\frac{1}{a_4a_6}=81$, 则 $\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}$ 等于 (　　)

A.$\frac{1}{9}$ B.3 C.6 D.9

解析:$\because \frac{1}{a_2a_4}+\frac{2}{a_4^2}+\frac{1}{a_4a_6}=81$,

$\therefore \frac{1}{a_3^2}+\frac{1}{a_3a_5}+\frac{1}{a_5^2}=81, \therefore (\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5})^2=81$

$\because$ 数列各项都是正数,$\therefore \frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}=9$

答案:D

知识点：等比数列的概念

难度：1

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d\neq 0$, 且 a_1,a_3,a_9 成等比数列, 则 $\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=$________.

解析: 由题意知 a_3 是 a_1 和 a_9 的等比中项,

$a_3^2=a_1a_9, \therefore (a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$, 得 $a_1=d$,

$\therefore \frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=\frac{13d}{16d}=\frac{13}{16}$

答案:$\frac{13}{16}$

知识点：等比数列的概念

难度：1

在 1 和 100 之间插入 n 个正数, 使这 $n+2$ 个数成等比数列, 则插入的这 n 个正数的积为__________.

解析: 设插入的 n 个正数为 $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

设 $M=1\cdot a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot 100$, 则

$M=100\cdot a_n\cdot a_{n-1}\cdot\ldots\cdot a_1\cdot 1$,

$\therefore M^2=(1\times 100)^{n+2}=100^{n+2}$,$\therefore 100^{\frac{n+2}{2}}=10^{n+2}$,

$\therefore a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=10^n$.

答案:10^n

知识点：等比数列的概念

难度：1

在表格中, 每格填上一个数字后, 使每一横行成等差数列, 每一纵行成等比数列, 所有公比相等, 则 $a+b+c$ 的值为__________.

a				
		b		6
1		2		
				c

解析: 设公比为 q, 由题意知 $q=\frac{2}{b},q^2=\frac{c}{6}$

第四行最后一个数为 $\frac{c}{q}=\frac{c}{\frac{2}{b}}=\frac{bc}{2}$

因为每一行成等差数列, 所以 $2\times 2=1+\frac{bc}{2}$, 即 $bc=6$.

因为 $\frac{4}{b^2}=\frac{c}{6}$, 所以 $\begin{cases} bc=6, \\ b^2c=24. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} b=4, \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}$, 所以 $q=\frac{2}{b}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

又 $\frac{1}{a}=q^3=(\frac{1}{2})^3$, 所以 $a=8,a+b+c=\frac{27}{2}$

答案:$\frac{27}{2}$

知识点：等比数列的概念

难度：1

三个互不相等的实数成等差数列, 如果适当排列这三个数, 又可成为等比数列, 且这三个数的和为 6, 求这三个数.

解析:

答案:由题意, 这三个数成等差数列, 可设这三个数分别为 a-d,a,$a+d$(d≠0),∴a-$d+a+a+d$=6,∴a=2,

∴ 这三个数分别为 2-d,2,2+d.

若 2-d 为等比中项, 则有 $(2\text{-}d)^2=2(2+d)$.

解得 d=6 或 d=0(舍去),

此时三个数分别为-4,2,8;

若 2+d 是等比中项, 则有 $(2+d)^2=2(2\text{-}d)$,

解得 d=-6 或 d=0(舍去), 此时三个数分别为 8,2,-4.

知识点: 等比数列的概念

难度: 1

已知等比数列 $\{b_n\}$ 与数列 $\{a_n\}$ 满足 $b_n=3^{a_n}(n\in\mathrm{N}_+)$.

(1) 判断 $\{a_n\}$ 是何种数列;

(2) 若 $a_8+a_{13}=m$, 求 $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{20}$.

解析:

答案: (1) 设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q, 则 q>0.

$\because b_n=3^{a_n}, \therefore b_1=3^{a_1}$,

$\therefore b_n=3^{a_1}\cdot q^{n-1}, \therefore 3^{a_1}\cdot q^{n-1}=3^{a_n}$.

将两边取以 3 为底的对数得 $a_n=\log(3^{a_1}\cdot q^{n-1})=a_1+(n-1)\log_3 q=\log_3 b_1+(n-1)\log_3 q$

∴ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $\log_3 b_1$ 为首项,$\log_3 q$ 为公差的等差数列.

(2)$\because a_1+a_{20}=a_8+a_{13}=m$,

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=10m$,

$\therefore b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{20}=3^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot\cdots\cdot 3^{a_{20}}=3^{a_1+a_2+\cdot\cdot+a_{20}}=3^{10m}$

知识点: 等比数列的概念

难度: 2

已知 0<a<b<c, 且 a,b,c 成等比数列,n 为大于 1 的整数, 则 $\log_a n,\log_b n,\log_c n$(
)

A. 成等差数列 B. 成等比数列

C. 各项倒数成等差数列 D. 以上都不对

解析:∵a,b,c 成等比数列,∴$b^2=ac$, 又 $\frac{1}{\log_a n}+\frac{1}{\log_c n}=\log_n a+\log_n c=\log_n ac=\log_n b^2=2\log_n b=\frac{2}{\log_b n}$,

∴$\log_a n$,$\log_b n$,$\log_c n$ 的各项倒数成等差数列.

故选 C.

答案:C

知识点：等比数列的概念

难度：2

一个等比数列的前三项的积为 3, 最后三项的积为 9, 且所有项的积为 729, 则该数列的项数是 (　　)

A.13 B.12 C.11 D.10

解析: 设该等比数列为 $\{a_n\}$, 其前 n 项积为 T_n, 则由已知得 $a_1\cdot a_2\cdot a_3=3,a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n=9,(a_1\cdot a_n)^3=3\times9=3^3$,∴$a_1\cdot a_n=3$,

又 $T_n=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n,T_n=a_n\cdot a_{n-1}\cdot\ldots\cdot a_2\cdot a_1$,

∴ $T_n^2=(a_1\cdot a_2)^n$, 即 $729^2=3^n$,∴$n=12$.

答案:B

知识点：等比数列的概念

难度：2

在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$|a_1|=1,a_5=-8a_2$, 且 $a_5>a_2$, 则 a_n 等于 (　　)

A.$(-2)^{n-1}$ B.$-(-2)^{n-1}$

C.$\pm(-2)^{n-1}$ D.$-(-2)^n$

解析:∵ $|a_1|=1$,∴ $a_1=1$ 或 $a_1=-1$.

∵$a_5=-8a_2=a_2\cdot q^3$,∴$q^3=-8$,∴$q=-2$.

又 $a_5>a_2$, 即 $a_2q^3>a_2$,∴$a_2<0$.

而 $a_2=a_1q=a_1\cdot(-2)<0$,∴$a_1=1$.

故 $a_n=a_1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$.

答案:A

知识点：等比数列的概念

难度：2

已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0,n=1,2,\ldots$, 且 $a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}(n\geq3)$, 则当 $n\geq1$ 时,$\log_2 a_1+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{2n-1}=($　　$)$

A.$n(2n\text{-}1)$　　B.$(n+1)^2$C.n^2 D.$(n\text{-}1)^2$

解析: 由等比数列的性质可得 $a_n^2=a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}=(2^n)^2$,

$\because a_n>0,\therefore a_n=2^n$, 故数列首项 $a_1=2$, 公比 $q=2$,

故 $\log_2 a_1+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{2n-1}=\log_2(a_1\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{2n-1})=\log_2[(a_1)^n q^{0+2+4+\cdots+2n-2}]$ $=\log_2[2^n\cdot 2^{\frac{n(0+2n-2)}{2}}]=\log_2(2^{n+n^2-n})=\log_2(2^{n^2})=n^2$, 故选 C.

答案:C

知识点：等比数列的概念

难度：2

在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=2$, 当 n 为奇数时,$a_{n+1}=a_n+2$; 当 n 为偶数时,$a_{n+1}=2a_{n-1}$, 则 $a_{12}=($　　$)$

A.32 C.34 C.66 D.64

解析: 依题意,$a_1,a_3,a_5,a_7,a_9,a_{11}$ 构成以 2 为首项,2 为公比的等比数列, 故 $a_{11}=a_1\times2^5=64,a_{12}=a_{11}+2=66$. 故选 C.

答案:C

知识点：等比数列的概念

难度：2

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_9=$-2, 则此数列的前 17 项之积为__________.

解析:$\because a_1a_2a_3\cdots a_{17}=(a_1\cdot a_{17})(a_2\cdot a_{16})\cdots a_9=a_9^2\cdot a_9^2\cdots a_9=a_9^{17}=(-2)^{17}=-2^{17}$

答案:-2^{17}

知识点：等比数列的概念

难度：2

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 且 a_5,a_8,a_{13} 是等比数列 $\{b_n\}$ 中相邻的三项, 若 $b_2=5$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解析:

答案：$\because\{a_n\}$ 是等差数列,

$\therefore a_5=a_1+4d,a_8=a_1+7d,a_{13}=a_1+12d$

$\because a_5,a_8,a_{13}$ 是等比数列 $\{b_n\}$ 中相邻的三项,

$\therefore a_8^2=a_5a_{13}$, 即 $(a_1+7d)^2=(a_1+4d)(a_1+12d)$,

解得 $d=2a_1$.

$\therefore q=\frac{a_8}{a_5}\frac{5}{3}, b_2=b_1q=5, \frac{5}{3}b_1=5, b_1=3$,

$\therefore b_n=3\cdot(\frac{5}{3})^{n-1}$

知识点：等比数列的概念

难度：2

已知两个等比数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $a_1=a(a>0), b_1\text{-}a_1=1, b_2\text{-}a_2=2, b_3\text{-}a_3=3$.

(1) 若 $a=1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 唯一, 求 a 的值.

解析：

答案：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 则 $b_1=1+a_1=1+a=2, b_2=2+aq=2+q, b_3=3+aq^2=3+q^2$

由 b_1,b_2,b_3 成等比数列, 得 $(2+q)^2=2(3+q^2)$, 即 $q^2-4q+2=0$, 解得 $q_1=2+\sqrt{2}, q_2=2-\sqrt{2}$,

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(2+\sqrt{2})^{n-1}$ 或 $a_n=(2-\sqrt{2})^{n-1}$

(2) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 则由 $(2+aq)^2=(1+a)\cdot(3+aq^2)$, 得 $aq^2\text{-}4aq+3a\text{-}1=0$, 由 $a>0$ 得,$\Delta=4a^2+4a>0$, 故方程 $aq^2\text{-}4aq+3a\text{-}1=0$ 有两个不同的实根. 又 $\{a_n\}$ 唯一, 故方程必有一根为 0, 代入上式得 $a=\frac{1}{3}$

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列, 若 $a_1=1, a_5=16$, 则数列 $\{a_n\}$ 前 7 项的和为 (　　)

A.63 B.64 C.127 D.128

解析: 设公比为 $q(q>0)$, 则 $1\cdot q^4=16$, 解得 $q=2(q=\text{-}2$ 舍去). 于是 $S_7=\frac{1-2^7}{1-2}=127$

答案:C

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $3S_3=a_4$-2,$3S_2=a_3$-2, 则公比 q 等于 (　　)

A.3 B.4 C.5 D.6

解析: 由题意知,$\begin{cases} 3S_3 = a_4 - 2, \\ 3S_2 = a_2 - 2 \end{cases}$

两式相减, 得 $3a_3=a_4$-a_3,

即 $4a_3=a_4$, 则 $q = \frac{a_4}{a_3} = 4$

答案:B

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a^n$-1($a\in$R, 且 $a\neq0$), 则此数列是 (　　)

A. 等差数列

B. 等比数列

C. 等差数列或等比数列

D. 既不是等差数列, 也不是等比数列

解析: 当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=a$-1;

当 $n\geq2$ 时,$a_n=S_n$-$S_{n-1}=(a^n$-1)-$(a^{n-1}$-1)

$=a^n$-$a^{n-1}=a^{n-1}(a$-1$)$.

当 a-1=0, 即 $a=1$ 时, 该数列为等差数列, 当 $a\neq1$ 时, 该数列为等比数列.

答案:C

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

公比 $q\neq$-1 的等比数列的前 3 项, 前 6 项, 前 9 项的和分别为 S_3,S_6,S_9, 则下面等式成立的是 (　　)

A.$S_3 + S_6 = S_9$ B.$S_6^2 = S_3 \cdot S_9$

C.$S_3 + S_6 - S_9 = S_6^2$ D.$S_3^2 + S_6^2 = S_3(S_6 + S_9)$

解析: 由题意知 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 也成等比数列.

$\therefore(S_6$-$S_3)^2=S_3(S_9$-$S_6)$,

整理得 $S_3^2 + S_6^2 = S_3(S_6 + S_9)$

答案:D

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列,S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $9S_3=S_6$, 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 5 项和为 (　　)

A.$\frac{15}{8}$ 或 5 B.$\frac{31}{16}$ 或 5 C.$\frac{31}{16}$ D.$\frac{15}{8}$

解析: 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q. 由 $9S_3=S_6$ 知 $q\neq1$,

于是 $\frac{9a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$, 整理得 $q^6-9q^3+8=0$, 所以 $q^3=8$ 或 $q^3=1$(舍去), 于是 $q=2$.

从而 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项为 $\frac{1}{1}=1$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

其前 5 项的和 $S=\frac{1-(\frac{1}{2})^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$

答案:C

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_1=1,S_6=4S_3$, 则 $a_4=$__________.

解析: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 很明显 $q\neq1$, 则 $\frac{1-q^6}{1-q}=4\cdot\frac{1-q^3}{1-q}$, 解得 $q^3=3$, 所以 $a_4=a_1q^3=3$.

答案:3

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

已知 $\lg x+\lg x^2+\cdots+\lg x^{10}=110$, 则 $\lg x+\lg^2 x+\cdots+\lg^{10} xx=$____________.

答案:2046

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_2=2,a_5=\frac{1}{4}$, 则 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=$____________________.

解析: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 由 $a_2=2,a_5=a_2q^3=\frac{1}{4}$,

得 $q=\frac{1}{2},\therefore a_1=\frac{a_2}{q}=4$

$\because \frac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}q^2}{a_{n-1}}=q^2=\frac{1}{4}$ 为常数 ($n\geq2$),

$\therefore$ 数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 是以 $a_1a_2=4\times2=8$ 为首项, 以 $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列,

$\therefore a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}$

$=\frac{8\times[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{32}{3}(1-4^{-n})$

答案:$\frac{32}{3}(1-4^{-n})$

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

(2017 北京高考) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1, a_2+a_4=1-, b_2b_4=a_5$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求和:$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}$

解析:

答案：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $a_2+a_4=10$, 所以 $2a_1+4d=10$

解得 d=2. 所以 a_n=2n-1.

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q.

因为 b_2b_4=a_5, 所以 $b_1qb_1q^3$=9.

解得 q^2=3. 所以 b_{2n-1}=b_1q^{2n-2}=3^{n-1}.

从而 $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{2}$

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：1

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n(n\in N_+), a_1=1$, 该数列的前三项分别加上 1,1,3 后顺次成为等比数列 $\{b_n\}$ 的前三项.

(1) 求数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $T_n=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}(n\in N_+)$, 求 T_n.

解析:

答案：(1) 设 d,q 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差、等比数列 $\{b_n\}$ 的公比, 由题意知,$a_1=1, a_2=1+d, a_3=1+2d$, 分别加上 1,1,3 得 $2, 2+d, 4+2d$,

$\therefore (2+d)^2=2(4+2d), \therefore d=\pm 2$

$\because a_{n+1}>a_n, \therefore d>0, \therefore d=2$

$\therefore a_n$=2n-1$(n\in N_+)$. 由此可得 $b_1=2, b_2=4, b_3=8, \therefore q=2. \therefore b_n=2^n(n\in N_+)$.

(2)$\because T_n=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

$\therefore \frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,

由 - 得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,

$\therefore T_n = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}$
$= 3 - \frac{1}{2^{n-2}} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$

知识点：等比数列的前 n 项和
难度：2
已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则下列一定成立的是 (　　)
A. 若 $a_3>0$, 则 $a_{2017}<0$ B. 若 $a_4>0$, 则 $a_{2016}<0$
C. 若 $a_3>0$, 则 $S_{2017}>0$ D. 若 $a_4>0$, 则 $S_{2016}>0$
解析: 若 $a_3>0$, 则 $a_3=a_1q^2>0$, 因此 $a_1>0$, 当公比 $q>0$ 时, 任意 $n\in N_+, a_n>0$, 故有 $S_{2017}>0$, 当公比 $q<0$ 时, $q^{2017}<0$, 则 $S_{2017} = \frac{a_1(1-q^{2017})}{1-q} > 0$, 故答案为 C.
答案:C

知识点：等比数列的前 n 项和
难度：2
已知数列前 n 项的和 $S_n=2^n$-1, 则此数列奇数项的前 n 项的和是 (
)
A.$\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$ B.$\frac{1}{3}(2^{n+1}-2)$
C.$\frac{1}{3}(2^{2n}-1)$ D.$\frac{1}{3}(2^{2n}-2)$
解析: 由 $S_n=2^n$-1 知当 $n=1$ 时, $a_1=2^1$-1=1.
当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n$-$S_{n-1}=2^{n-1}$, 当 $n=1$ 时也适合,
$\therefore a_n=2^{n-1}$.
$\therefore$ 奇数项的前 n 项和为 $S_n = \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{1}{3}(4^n-1) = \frac{1}{3}(2^{2n}-1)$
答案:C

知识点：等比数列的前 n 项和
难度：2
等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_1,2S_2,3S_3$ 成等差数列, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比为__________.
解析: 由 $S_1,2S_2,3S_3$ 成等差数列知 $4S_2=S_1+3S_3$,
即 $4(a_1+a_2) = a_1+3(a_1+a_2+a_3)$, 整理得 $3a_3$-$a_2=0$, $\therefore \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{3}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $\frac{1}{3}$
答案:$\frac{1}{3}$

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：2

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lg x^{n+1} = 1 + \lg x_n (n \in \mathrm{N}_+)$，且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 100$，则 $x_{101} + x_{102} + \cdots + x_{200} =$__________.

解析: 由 $\lg x_{n+1} = 1 + \lg x_n$,

得 $\lg x_{n+1} = \lg(10x_n)$, 即 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 10$

故 $x_{101} + x_{102} + \cdots + x_{200} = q^{100}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}) = 10^{100} \times 100 = 10^{102}$

答案:10^{102}

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：2

已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列,S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 a_1,a_3 是方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的两个根, 则 $S_6 =$__________.

解析:$\because x^2$-$5x+4=0$ 的两根为 1 和 4,

又 $\{a_n\}$ 为递增数列,$\therefore a_1=1, a_3=4, q=2$.

$\therefore S_6 = \frac{1 \times (1-2^6)}{1-2} = 63$

答案:63

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：2

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 $S_n, a_1=t$, 点 (S_n, a_{n+1}) 在直线 $y = 3x + 1$ 上,$n \in \mathrm{N}_+$.

(1) 当实数 t 为何值时, 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 在(**??**)的结论下, 设 $b_n = \log_4 a_{n+1}, c_n = a_n + b_n, T_n$ 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n.

解析:

答案：(1)$\because$ 点 (S_n, a_{n+1}) 在直线 $y=3x+1$ 上,

$\therefore a_{n+1} = 3S_n + 1, a_n = 3S_{n-1} + 1 (n>1$, 且 $n \in \mathrm{N}_+), a_{n+1}$-$a_n = 3(S_n$-$S_{n-1}) = 3a_n$,

$\therefore a_{n+1} = 4a_n, n>1, a_2 = 3S_1 + 1 = 3a_1 + 1 = 3t + 1$,

$\therefore$ 当 $t=1$ 时,$a_2 = 4a_1$, 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

(2) 在(**??**)的结论下,$a_{n+1} = 4a_n, a_{n+1} = 4^n, b_n = \log_4 a_{n+1} = n, c_n = a_n + b_n = 4^{n-1} + n$,

$T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = (4^0 + 1) + (4^1 + 2) + \cdots + (4^{n-1} + n)$

$= (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1}) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

$= \frac{4^n-1}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$

知识点：等比数列的前 n 项和

难度：2

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 b_n=2-2S_n，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 a_5=14,a_7=20.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n=a_n \cdot b_n(n=1,2,3\ldots)$,$T_n$ 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，求 T_n.

解析:

答案：(1) 由 b_n=2-2S_n，令 n=1,

则 b_1=2-2S_1，又 $S_1=b_1$，所以 $b_1 = \frac{2}{3}$

当 $n\geq 2$ 时，由 b_n=2-2S_n 及 b_{n-1}=2-2S_{n-1},

可得 b_n-b_{n-1}=-2(S_n-S_{n-1})=-2b_n，即 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{3}$

所以 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项,$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列,

于是 $b_n = \frac{2}{3^n}$

(2) 由数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d = \frac{1}{2}(a_7 - a_5) = 3$，可得 a_n=3n-1. 从而 $c_n = a_n \cdot b_n = 2(3n-1) \cdot \frac{1}{3^n}$,

所以 $T_n = 2[2 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3^2} + 8 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots + (3n-1) \cdot \frac{1}{3^n}]$,

$\frac{1}{3}T_n = 2[2 \cdot \frac{1}{3^2} + 5 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots + (3n-4) \cdot \frac{1}{3^n} + (3n-1) \cdot \frac{1}{3^{n+1}}]$,.

- 得,

$\frac{2}{3}T_n = 2[2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots + 3 \cdot \frac{1}{3^n} - (3n-1)\frac{1}{3^{n+1}}]$

$= 2\left\{2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{\frac{1}{3^2}[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]}{1-\frac{1}{3}} - \frac{3n-1}{3^{n+1}}\right\}$

$= \frac{7}{3} - (\frac{1}{3})^{n-1} - \frac{2(3n-1)}{3^{n+1}}$

$T_n = \frac{7}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} - \frac{3n-1}{3^n}$

知识点：数列的应用

难度：1

现有 200 根相同的钢管，把它们堆成正三角形垛，要使剩余的钢管尽可能少，则剩余钢管的根数为 (　　)

A.9 B.10 C.19 D.29

解析:∵ $\frac{n(n+1)}{2} < 200$，而满足 $\frac{n(n+1)}{2} < 200$ 时,n 可取的最大值为 19. 当 n=19 时,$\frac{n(n+1)}{2} = 190$,∴200-190=10.

答案:B

知识点：数列的应用

难度：1

银行一年定期的年利率为 r, 三年定期的年利率为 q, 为吸引长期资金, 鼓励储户存三年定期存款, 则 q 的值应略大于 (　　)

A. $\sqrt{(1+r)^3-1}$ B.$\frac{1}{3}[(1+r)^3-1]$

C.$(1+r)^3-1$ D.r

解析: 设储户存 a 元, 存一年定期并自动转存, 三年后的本利和为 $a(1+r)^3$ 元. 三年定期的本利和为 $a(1+3q)$ 元. 为鼓励储户存三年定期, 则 $a(1+3q)>a(1+r)^3$, 即 $q>\frac{1}{3}[(1+r)^3-1]$

答案:B

知识点：数列的应用

难度：1

某运输卡车从材料工地运送电线杆到 500 m 以外的公路, 沿公路一侧每隔 50 m 埋一根电线杆, 又知每次最多只能运 3 根, 要完成运载 20 根电线杆的任务, 最佳方案是使运输卡车运行 (　　)

A.11700 m B.14600 m

C.14500 m D.14000 m

解析: 由近往远运送, 第一次运两根, 以后每次运三根, 这种运法最佳, 由近往远运送, 每次来回行走的米数构成一个等差数列, 记为 $\{a_n\}$, 则 a_1=1 100,d=300,n=7,

故 $S_7=7\times1100+\frac{7\times6}{2}\times300=1400$

答案:D

知识点：数列的应用

难度：1

某林厂现在的森林木材存量是 1 800 万立方米, 木材以每年 25% 的增长率生长, 而每年要砍伐固定的木材量为 x 万立方米, 为达到经两次砍伐后木材存量增加 50% 的目标, 则 x 的值是 (　　)

A.40 B.45 C.50 D.55

解析: 经过一次砍伐后, 木材存量为 $1800(1+25\%)-x=2250-x$;

经过两次砍伐后, 木材存量为 $(2250-x)\times(1+25\%)-x=2812.5-2.25x$

由题意应有 $2812.5-2.25x=1800\times(1+50\%)$,

解得 $x=50$

答案:C

知识点：数列的应用

难度：1

一个卷筒纸, 其内圆直径为 4 cm, 外圆直径为 12 cm, 一共卷了 60 层, 若把各层都视为一个同心圆,π 取 3.14, 则这个卷筒纸的长度约为__________m(精确到个位).

解析:∵ 纸的厚度相同,∴ 各层同心圆直径成等差数列.

$l=\pi d_1+\pi d_2+\cdots+\pi d_{60}=60\pi\cdot\frac{4+12}{2}=480\pi=1507.2(cm)\approx 15(m)$

答案:15

知识点：数列的应用

难度：1

一种专门占据内存的计算机病毒开始时占据内存 2 kB, 然后每 3 分钟自身复制一次, 复制后所占内存是原来的 2 倍, 那么开机后______ 分, 该病毒占据 64 MB(1 MB=2^{10} kB).

解析: 由题意可得每 3 分病毒占的内存容量构成一个等比数列, 设病毒占据 64 MB 时自身复制了 n 次, 即 $2\times2^n=64\times2^{10}=2^{16}$, 解得 n=15, 从而复制的时间为 15×3=45(分).

答案:45

知识点：数列的应用

难度：1

甲、乙两人于同一天分别携款 1 万元到银行储蓄, 甲存 5 年定期储蓄, 年利率为 2.88%, 乙存一年定期储蓄, 年利率为 2.25%, 并在每年到期时将本息续存一年期定期储蓄, 按规定每次计息时, 储户须交纳 20% 作为利息税. 若存满五年后两人同时从银行中取出存款, 则甲、乙所得利息之差为__________ 元.

解析: 由已知甲所得本息和 $a=10000+10000\times2.88\%\times5\times80\%$, 而乙实际上年利率在去掉利息税后为 $\frac{4}{5}\times2.25\%$, 故乙所得本息和应为 $b=$

$10000\times(1+\frac{4}{5}\times 2.25\%)^5$, 经计算 a-b≈219.01(元).

答案:219.01

知识点：数列的应用

难度：1

某地区有荒山 2 200 亩, 从 2015 年开始每年年初在荒山上植树造林, 第一年植树 100 亩, 以后每一年比上一年多植树 50 亩 (假定全部成活). 则至少需要几年可将荒山全部绿化?

解析:

答案：设第 n 年植树造林 a_n 亩, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,

则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其中 a_1=100,d=50,

$\therefore a_n=100+50\times(n-1)=50(n+1)$,

$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=100n+\frac{n(n-1)}{2}\times 50=25(n^2+3n)$

要将荒山全部绿化, 只要 S_n≥2 200,

即 $25(n^2+3n)\geq 2200$,

$\therefore n^2+3n-8\times 11\geq 0$, 得 n≥8,

故至少需要 8 年可将荒山全部绿化.

知识点：数列的应用

难度：1

为了加强环保建设, 提高社会效益和经济效益, 长沙市计划用若干年更换一万辆燃油型公交车, 每更换一辆新车, 则淘汰一辆旧车, 更换的新车为电力型车和混合动力型车. 今年年初投入了电力型公交车 128 辆, 混合动力型公交车 400 辆, 计划以后电力型车每年的投入量比上一年增加 50%, 混合动力型车每年比上一年多投入 a 辆.

(1) 求经过 n 年, 该市被更换的公交车总数 $S(n)$;

(2) 若该市计划用 7 年的时间完成全部更换, 求 a 的最小值.

解析:

答案：(1) 设 a_n,b_n 分别为第 n 年投入的电力型公交车、混合动力型公交车的数量, 依题意知, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 128, 公比为 $1+50\%=\frac{3}{2}$ 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 400, 公差为 a 的等差数列.

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{128\times[1-(\frac{3}{2})^n]}{1-\frac{3}{2}}=256[(\frac{3}{2})^n-1]$

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=400n+\frac{n(n-1)}{2}a$

所以经过 n 年, 该市更换的公交车总数

$S(n)=S_n+T_n=256[(\frac{3}{2})^n-1]+400n+\frac{n(n-1)}{2}a$

(2) 若用 7 年的时间完成全部更换,

则 $S(\textbf{??})\geq 10\ 000$,

即 $256[(\frac{3}{2})^7-1]+400\times 7+\frac{7\times 6}{2}a\geq 10000$,

即 $21a\geq 3\ 082$, 所以 $a\geq\frac{3082}{21}$

又 $a\in N_+$, 所以 a 的最小值为 147.

知识点：数列的应用

难度：2

通过测量知道, 温度每降低 6 ℃, 某电子元件的电子数目就减少一半. 已知在零下 34 ℃ 时, 该电子元件的电子数目为 3 个, 则在室温 27 ℃ 时, 该元件的电子数目接近 (　　)

A.860 个 B.1 730 个 C.3 072 个 D.3 900 个

解析: 由题设知, 该元件的电子数目变化为等比数列, 且 $a_1=3,q=2$, 由 $27-(-34)=61,\frac{61}{6}=10\frac{1}{6}$, 可得 $a_{11}=3\cdot 2^{10}=3072$, 故选 C.

答案:C

知识点：数列的应用

难度：2

现存入银行 8 万元, 年利率为 2.50 %, 若采用 1 年期自动转存业务, 则 5 年末的本利和是 (　　) 万元.

A.8×1.025^3 B.8×1.025^4

C.8×1.025^5 D.8×1.025^6

解析: 定期自动转存属于复利计算问题,5 年末的本利和为 $8\times(1+2.50\%)^5=8\times 1.025^5$(万元).

答案:C

知识点：数列的应用

难度：2

某企业在 2016 年年初贷款 M 万元, 年利率为 m, 从该年年末开始, 每年偿还的金额都是 a 万元, 并恰好在 10 年间还清, 则 a 的值等于 (　　)

A.$\frac{M(1+m)^{10}}{(1+m)^{10}-1}$ B.$\frac{Mm}{(1+m)^{10}}$

C.$\frac{Mm(1+m)^{10}}{(1+m)^{10}-1}$ D.$\frac{Mm(1+m)^{10}}{(1+m)^{10}-1}$

解析: 由已知条件和分期付款公式可得,$a[(1+m)^9+(1+m)^8+\cdots+(1+m)+1]=M(1+m)^{10}$,

则 $a=\frac{Mm(1+m)^{10}}{(1+m)^{10}-1}$

答案:C

知识点：数列的应用

难度：2

商家通常依据“乐观系数准则”确定商品销售价格, 即根据商品的最低销售限价 a, 最高销售限价 $b(b>a)$ 以及实数 $x(0<x<1)$ 确定实际销售价格 $c=a+x(b-a)$. 这里,x 被称为乐观系数. 经验表明, 最佳乐观系数 x 恰好使得 $(c-a)$ 是 $(b-c)$ 和 $(b-a)$ 的等比中项. 据此可得, 最佳乐观系数 x 的值等于__________.

答案:$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

知识点：数列的应用

难度：2

已知某火箭在点火第一秒通过的路程为 2 km, 以后每秒通过的路程都增加 2 km, 在达到离地面 240 km 的高度时, 火箭与飞船分离, 则这一过程大约需要的时间是__________ 秒.

解析: 设每一秒通过的路程依次为 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=2$, 公差 $d=2$ 的等差数列.

由求和公式得 $na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=240$,

即 $2n+n(n-1)=240$, 解得 $n=15$.

答案:15

知识点：数列的应用

难度：2

某企业进行技术改造, 有两种方案, 甲方案: 一次性贷款 10 万元, 第一年便可获利 1 万元, 以后每年比前一年增加 30% 的利润; 乙方案: 每年贷款 1 万元, 第一年可获利 1 万元, 以后每年比前一年增加 5 千元. 两种方案使用期都是 10 年, 到期一次性归还本息. 若银行两种形式的贷款都按年息 5% 的复利计算, 试比较两种方案中, 哪种纯获利更多?(取 $1.05^{10}\approx1.629,1.3^{10}\approx13.786,1.5^{10}\approx57.665$)

解析:

答案: 甲方案获利:$1+(1+30\%)+(1+30\%)^2+\cdots+(1+30\%)^9=\frac{1.3^{10}-1}{0.3}\approx$ 42.62(万元),

银行贷款本息:$10(1+5\%)^{10}\approx 16.29$(万元),

故甲方案纯获利:42.62-16.29=26.33(万元).

乙方案获利:$1+(1+0.5)+(1+2\times0.5)+\cdots+(1+9\times0.5)=10\times1+\frac{10\times9}{2}\times0.5=$ 32.5(万元),

银行本息和:$1.05\times[1+(1+5\%)+(1+5\%)^2+\cdots+(1+5\%)^9]=1.05\times\frac{1.05^{10}-1}{0.05}\approx$ 13.21(万元).

故乙方案纯获利:32.50-13.21=19.29(万元).

综上所述, 甲方案纯获利更多.

知识点: 数列的应用

难度: 2

某企业在第 1 年年初购买一台价值为 120 万元的设备 M,M 的价值在使用过程中逐年减少. 从第 2 年到第 6 年, 每年年初 M 的价值比上年年初减少 10 万元; 从第 7 年开始, 每年年初 M 的价值为上年年初的 75%.

(1) 求第 n 年年初设备 M 的价值 a_n 的表达式;

(2) 设 $A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 若 A_n 大于 80 万元, 则 M 继续使用, 否则须在第 n 年年初对 M 更新. 证明: 须在第 9 年年初对设备 M 更新.

解析:

答案: (1) 当 $n\leq 6$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 120, 公差为-10 的等差数列,

$a_n=120-10(n-1)=130-10n$.

当 $n\geq 7$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是以 a_7 为首项,$\frac{3}{4}$ 为公比的等比数列, 又 $a_7=70\times\frac{3}{4}$,

所以 $70\times\frac{3}{4}\times(\frac{3}{4})^{n-7}=70\times(\frac{3}{4})^{n-6}$

因此, 第 n 年年初,M 的价值 a_n 的表达式为

$$a_n=\begin{cases}130-10n, n\leq 6,\\ 70\times(\frac{3}{4})^{n-6}, n\geq 7\end{cases}$$

(2) 设 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 由等差及等比数列的求和公式得,

当 $1\leq n\leq 6$ 时,$S_n=120n-5n(n-1)$,

$A_n=120-5(n-1)=125-5n$.

当 $n\geq 7$ 时,$S_n=S_6+(a_7+a_8+\cdots+a_n)$

$=570+70\times\frac{3}{4}\times4\times[1-(\frac{3}{4})^{n-6}]$

$=780-210\times(\frac{3}{4})^{n-6}$,

$A_n = \frac{780-210\times(\frac{3}{4})^{n-6}}{n}$
易知 $\{A_n\}$ 是递减数列,
又 $A_8 = \frac{780-210\times(\frac{3}{4})^{8-6}}{8} = 82\frac{47}{64} > 80$,
$A_9 = \frac{780-210\times(\frac{3}{4})^{9-6}}{9} = 76\frac{79}{96} < 80$,
所以须在第 9 年年初对设备 M 更新.

知识点：正弦定理
难度：1
在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{b}$, 则 B 的值为 (　　)

A.30° B.45° C.60° D.90°
解析: 因为 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$, 所以 $\frac{\cos B}{b} = \frac{\sin B}{b}$,
所以 $\cos B=\sin B$, 从而 $\tan B=1$,
又 $0°<B<180°$, 所以 $B=45°$.
答案:B

知识点：正弦定理
难度：1
在 $\triangle ABC$ 中, 若 $B=45°,C=60°,c=1$, 则最短边的边长是 (　　)
A.$\frac{\sqrt{6}}{3}$ B.$\frac{\sqrt{6}}{2}$ C.$\frac{1}{2}$ D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$
解析: 由已知得 $A=75°$, 所以 B 最小, 故最短边是 b.
由 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $b = \frac{c\sin B}{\sin C} = \frac{\sin 45°}{\sin 60°} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
答案:A

知识点：正弦定理
难度：1
在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 8, c = 8\sqrt{3}, S_{\triangle ABC} = 16\sqrt{3}$, 则 A 等于 (　　)
A.30° B.60°
C.30° 或 150° D.60° 或 120°
解析: 由三角形面积公式得 $\frac{1}{2}\times 8\times 8\sqrt{3}\cdot\sin A = 16\sqrt{3}$,
于是 $\sin A = \frac{1}{2}$, 所以 $A=30°$ 或 $A=150°$.
答案:C

知识点：正弦定理

难度：1

下列条件判断三角形解的情况，正确的是（　　）

A.a=8,b=16,A=30° 有两解

B.b=9,c=20,B=60° 有一解

C.a=15,b=2,A=90° 无解

D.a=30,b=25,A=150° 有一解

解析: 对于 A, $\sin B = \frac{b}{a}\sin A = 1$, 所以 B=90°, 有一解;

对于 B,$\sin C = \frac{c}{b}\sin B = \frac{10}{9}\sqrt{3} > 1$, 所以无解;

对于 C,$\sin B = \frac{b}{a}\sin A = \frac{2}{15} < 1$,

又 A=90°, 所以有一解;

对于 D,$\sin B = \frac{b}{a}\sin A = \frac{5}{12} < 1$, 又 A=150°,

所以有一解.

答案:D

知识点：正弦定理

难度：1

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 若 $A:B = 1:2$, 且 $a:b = 1:\sqrt{3}$, 则 $\cos 2B$ 的值是（　　）

A.$-\frac{1}{2}$ B.$\frac{1}{2}$ C.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析: 由已知得 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin 2A} = \frac{\sin A}{2\sin A\cos A} = \frac{1}{2\cos A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 A=30°,B=60°, 所以 $\cos 2B = \cos 120° = \frac{1}{2}$

答案:A

知识点：正弦定理

难度：1

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = \sqrt{2}$, $A = 45°$, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为__________.

解析: 因为 $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45°} = 2$, 所以 R=1.

答案:1

知识点：正弦定理

难度：1

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $A=\frac{\pi}{6}, a=1, b=\sqrt{3}$, 则 B=__________.

解析: 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, 即 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}$, 解得 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 又因为 $b>a$, 所以 $B=\frac{\pi}{3}$ 或 $B=\frac{2\pi}{3}$

答案:$\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

知识点：正弦定理

难度：1

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A=2\sin B\cos C, \sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是__________.

解析: 由 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$, 利用正弦定理,

得 $a^2=b^2+c^2$, 故 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 且 A=90°,

所以 $B+C=90°, B=90°-C$, 所以 sin B=cos C.

由 sin A=2sin Bcos C, 可得 1=2sin^2B,

所以 $\sin^2 B=\frac{1}{2}, \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 B=45°,C=45°.

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

答案: 等腰直角三角形

知识点：正弦定理

难度：1

在 $\triangle ABC$ 中,$\sin(C-A)=1, \sin B=\frac{1}{3}$

(1) 求 sin A 的值;

(2) 设 $AC=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解析:

答案：(1) 由 sin(C-A)=1,-π<C-A<π, 知 $C=A+\frac{\pi}{2}$

又 $A+B+C=\pi$, 所以 $2A+B=\frac{\pi}{2}$,

即 $2A=\frac{\pi}{2}-B, 0<A<\frac{\pi}{4}$

故 cos 2A=sin B, 即 $1-2\sin^2 A=\frac{1}{3}, \sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) 由(**??**)得 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}, \sin C=\sin(A+\frac{\pi}{2})=\cos A$

又由正弦定理, 得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}, BC=\frac{AC\sin A}{\sin B}=3\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\cos A=3\sqrt{2}$

知识点：正弦定理

难度：1

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 角 A,B,C 成等差数列.

(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 边 a,b,c 成等比数列, 求 $\sin A\sin C$ 的值.

解析:

答案：(1) 因为角 A,B,C 成等差数列, 所以 $2B=A+C$

又 $A+B+C=\pi$, 所以 $B=\frac{\pi}{3}$, 所以 $\cos B=\frac{1}{2}$

(2) 因为边 a,b,c 成等比数列,

所以 $b^2=ac$, 根据正弦定理得 $\sin^2 B=\sin A\sin C$,

所以 $\sin A\sin C=\sin^2 B=(\sin\frac{\pi}{3})^2=\frac{3}{4}$

知识点：正弦定理

难度：2

已知在 $\triangle ABC$ 中,$a=x,b=2,B=45°$, 若三角形有两解, 则 x 的取值范围是 (　　)

A.$x>2$ B.$x<2$

C.$2<x<2\sqrt{2}$ D.$2<x<2\sqrt{3}$

解析: 由题设条件可知 $\begin{cases} x>2, \\ x\sin 45°<2 \end{cases}$, 解得 $2<x<2\sqrt{2}$.

答案:C

知识点：正弦定理

难度：2

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c. 若 $3a=2b$, 则 $\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}$ 的值为 (　　)

A.$\frac{1}{9}$ B.$\frac{1}{3}$ C.1 D.$\frac{7}{2}$

解析: 因为 $3a=2b$, 所以 $b=\frac{3}{2}a$

由正弦定理可知 $\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}=\frac{2b^2-a^2}{a^2}=\frac{2\times\frac{9}{4}a^2-a^2}{a^2}=\frac{7}{2}$

答案:D

知识点：正弦定理

难度：2

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 已知 $a=2\sqrt{3},c=2\sqrt{2},1+\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c}{b}$, 则 C=(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$ B.$\frac{\pi}{4}$ C.$\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$ D.$\frac{\pi}{3}$

解析: 由 $1+\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c}{b}$ 得 $\frac{\sin(A+B)}{\cos A\sin B}=\frac{2\sin C}{\sin B}$, 从而 $\cos A=\frac{1}{2}$, 所以 $A=\frac{\pi}{3}$, 由正弦定理得 $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, 解得 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $C\in(0,\pi)$, 所以 $C=\frac{\pi}{4}$ 或 $C=\frac{3\pi}{4}$(舍去), 选 B.

答案:B

知识点: 正弦定理

难度: 2

设 a,b,c 三边分别是 $\triangle ABC$ 中三个内角 A,B,C 所对应的边, 则直线 $x\sin(\pi-A)+ay+c=0$ 与 $bx-y\cos(\frac{\pi}{2}-B)+\sin C=0$ 的位置关系是 ( )

A. 平行 B. 重合

C. 垂直 D. 相交但不垂直

解析: 由已知得 $k_1=-\frac{\sin A}{a}, k_2=\frac{b}{\sin B}$, 因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, 所以 $k_1\cdot k_2=-\frac{\sin A}{a}\cdot\frac{b}{\sin B}=-\frac{\sin B}{b}\cdot\frac{b}{\sin B}=-1$, 所以两直线垂直, 故选 C.

答案:C

知识点: 正弦定理

难度: 2

已知在锐角三角形 ABC 中,$A=2B$,a,b,c 所对的角分别为 A,B,C, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是__________.

解析: 在锐角三角形 ABC 中,A,B,C 均小于 $90°$,

所以 $\begin{cases}0°<B<90°,\\0°<2B<90°,\\0°<180°-3B<90°\end{cases}$, 所以 $30°<B<45°$.

由正弦定理得 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$,

故 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

答案:$(\sqrt{2},\sqrt{3})$

知识点: 正弦定理

难度: 2

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin B\cdot\sin C=\cos^2\frac{A}{2}, A=120°, a=12$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为__________.

解析: 因为 $\sin B\cdot\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$, 所以 $\sin B\cdot\sin C=\frac{\cos A+1}{2}$, 所以 $2\sin B\sin C=$

$\cos A+1$

又因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\cos A=\cos(\pi-B-C)=-\cos(B+C)=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C$,

所以 $2\sin B\sin C=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C+1$,

所以 $\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C=\cos(B-C)=1$

因为 B,C 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $B=C$.

因为 $A=120°$，所以 $B=C=30°$.

由正弦定理得,$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{12\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 12\times 4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=12\sqrt{3}$

答案:$12\sqrt{3}$

知识点：正弦定理

难度：2

$\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $a^2=b(b+c)$，求证:$A=2B$.

解析:

答案：由已知及正弦定理得,$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin B\cdot\sin C$,

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin C=\sin(A+B)$,

所以 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin B\cdot\sin(A+B)$,

所以 $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin B\cdot\sin(A+B)$

因为 $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin^2 A(\sin^2 B+\cos^2 B)-\sin^2 B(\sin^2 A+\cos^2 A)=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)$,

所以 $\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)=\sin B\cdot\sin(A+B)$

因为 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角，所以 $\sin(A+B)\neq 0$,

所以 $\sin(A\text{-}B)=\sin B$，所以只能有 $A\text{-}B=B$，即 $A=2B$.

知识点：正弦定理

难度：2

在 $\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别是角 A,B,C 所对的边，已知 $\cos B=\frac{a}{2c}$,

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 若 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}, b=3$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解析：
答案：(1) 因为 $\cos B=\frac{a}{2c}$, $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,
所以 $\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$, 所以 $\sin A=2\cos B\sin C$
又 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]$
$=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,
所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\cos B\sin C$
所以 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin(B-C)=0$
所以在 $\triangle ABC$ 中,$B=C$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.
(2) 因为 $C=B$, 所以 $0<B<\frac{\pi}{2}$, $c=b=3$
因为 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$
所以 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)$
$=\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,
所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$

知识：余弦定理
难度：1
题目：在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=2,b=3,\cos C=\frac{1}{3}$, 则边 c 长为 (　　)
A.2 B.3 C. $\sqrt{11}$ D. $\sqrt{17}$
解析: 因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times\frac{1}{3}=9$, 所以 $c=3$.
答案:B
知识：余弦定理
难度：1
题目：在 $\triangle ABC$ 中, 若 $C=60°,c^2=ab$, 则三角形的形状为 (　　)
A. 直角三角形 B. 等腰三角形
C. 等边三角形 D. 钝角三角形
解析: 因为在 $\triangle ABC$ 中,$C=60°,c^2=ab$, 所以 $c^2=a^2+b^2\text{-}2ab\cos C=a^2+b^2\text{-}ab=ab$, 所以 $a=b$, 所以 $a=b=c$, 所以三角形的形状为等边三角形, 故选 C.
答案:C
知识：余弦定理
难度：1
题目：已知 $\triangle ABC$ 的三边满足 $a^2+b^2=c^2\text{-}\sqrt{3}ab$, 则 $\triangle ABC$ 的最大内角为 (　　)
A.60° B.90° C.120° D.150°

解析: 由已知得,$c^2=a^2+b^2+\sqrt{3}ab$, 所以 $c>a,c>b$, 故 C 为最大内角. 由 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $C=150°$, 故选 D.

答案:D

知识：余弦定理

难度：1

题目：在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=1,B=45°,S_{\triangle ABC}=2$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为 (　　)

A.$4\sqrt{3}$ B.6 C.$5\sqrt{2}$ D.$6\sqrt{2}$

解析: 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{4}c=2$,

所以 $c=4\sqrt{2}$.

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=1+32-2\times1\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $b=5$.

所以 $\triangle ABC$ 外接圆直径 $2R=\frac{b}{\sin B}=5\sqrt{2}$

答案:C

知识：余弦定理

难度：1

题目：已知在 $\triangle ABC$ 中,a 比 b 大 2,b 比 c 大 2, 最大角的正弦值是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 (　　)

A.$\frac{15\sqrt{3}}{4}$ B.$\frac{15}{4}$ C.$\frac{21\sqrt{3}}{4}$ D.$\frac{35\sqrt{3}}{4}$

解析: 因为 $a=b+2,b=c+2$, 所以 $a=c+4,A$ 为最大角, 所以 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $A>B>C$, 所以 $A=120°$,

所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$, 即 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$,

所以 $(c+2)^2+c^2-(c+4)^2=-c(c+2)$, 解得 $c=3$.

所以 $a=7,b=5,c=3,A=120°$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\times5\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

答案:A

知识：余弦定理

难度：1

题目：在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 若 $c=2a,b=4,\cos B=\frac{1}{4}$, 则 $c=$__________.

解析: 因为 $\cos B=\frac{1}{4}$, 由余弦定理得 $4^2=a^2+(2a)^2-2a\times2a\times\frac{1}{4}$, 解得 $a=2$, 所以 $c=4$.

答案:4

知识：余弦定理

难度：1

题目：设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对边长分别为 a,b,c, 且 $3b^2+3c^2-3a^2=4\sqrt{2}bc$, 则 $\sin A$ 的值为__________.

解析: 由已知得 $b^2+c^2-a^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}bc$, 于是 $\cos A=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}bc}{2bc}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 从而 $\sin A=\sqrt{1-\cos A^2}=\frac{1}{3}$

答案:$\frac{1}{3}$

知识：余弦定理

难度：1

题目：已知在 $\triangle ABC$ 中,$AB=7,BC=5,CA=6$, 则 $\vec{BA}\times\vec{BC}=$__________.

解析: 在 $\triangle ABC$ 中, 分别用 a,b,c 表示边 BC,CA,AB,

则 $\vec{BA}\times\vec{BC}=ca\cdot\cos B=ca\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)=\frac{1}{2}(5^2+7^2-6^2)=19.$

答案:19

知识：余弦定理

难度：1

题目：设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 且 $a+c=6,b=2,\cos B=\frac{7}{9}$.

(1) 求 a,c 的值;

(2) 求 $\sin(A-B)$ 的值.

答案：(1) 由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

得 $b^2=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$, 又 $b=2,a+c=6,\cos B=\frac{7}{9}$, 所以 $ac=9$, 解得 $a=3,c=3$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中,$\sin B=\sqrt{1-\cos B^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$,

由正弦定理得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

因为 $a=c$, 所以 A 为锐角,

所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin A^2}=\frac{1}{3}$.

因此 $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{10\sqrt{2}}{27}$.

知识点：余弦定理

难度：1

题目：已知在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 向量 p=$(\sin A-\cos A,1-\sin A)$,q=$(2+2\sin A,\sin A+\cos A)$,p 与 q 是共线向量, 且 $\frac{\pi}{6}\leq A\leq\frac{\pi}{2}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\sin C=2\sin B$, 且 $a=\sqrt{3}$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由.

答案: (1) 因为 p||q, 所以 $(\sin A-\cos A)(\sin A+\cos A)-2(1-\sin A)(1+\sin A)=-\cos 2A-2\cos^2 A=0$, 所以 $1+2\cos 2A=0$, 所以 $\cos 2A=-\frac{1}{2}$

因为 $\frac{\pi}{6}\le A\le\frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{3}\le 2A\le\pi$, 所以 $2A=\frac{2\pi}{3}$, 所以 $A=\frac{\pi}{3}$

(2)$\triangle ABC$ 是直角三角形. 理由如下:

由 $\cos A=\frac{1}{2},a=\sqrt{3}$ 及余弦定理得 $b^2+c^2-bc=3$.

又 $\sin C=2\sin B$, 由正弦定理得 $c=2b$.

联立可得 $\begin{cases} b^2+c^2-bc=3, \\ c=2b \end{cases}$, $\begin{cases} b=1, \\ c=2 \end{cases}$

所以 $a^2+b^2=(\sqrt{3})^2+1^2=4=c^2$, 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

知识点: 余弦定理

难度: 2

题目: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$, 则 $C=($　　$)$

A.$\frac{\pi}{2}$ B.$\frac{\pi}{6}$ C.$\frac{\pi}{3}$ D.$\frac{\pi}{2}$

解析: 由 $S=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$, 得 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}\times 2ab\cos C$,

所以 $\tan C=1$, 又 $C\in(0,\pi)$, 所以 $C=\frac{\pi}{4}$

答案:A

知识点: 余弦定理

难度: 2

题目: 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A-\sin A\cdot\cos C=\cos A\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 (　　)

A. 正三角形 B. 等腰三角形

C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

解析: 由正弦定理、余弦定理, 知 $\sin A-\sin A\cos C=\cos A\sin C$ 可化为 $a(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})=\frac{b^2+c^2-a^2}{abc}\times cc$, 整理, 得 $a=b$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 选 B.

答案:B

知识点: 余弦定理

难度: 2

题目: 已知 $\triangle ABC$ 各角的对边分别为 a,b,c, 满足 $\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge 1$, 则角 A 的范围是 (　　)

A.$(0,\frac{\pi}{3}]$ B.$(0,\frac{\pi}{6}]$

C.$[\frac{\pi}{3},\pi)$ D.$[\frac{\pi}{6},\pi)$

解析: 将不等式 $\frac{b}{a+c}+\frac{c+a+b}{den}\geq1$ 两边同乘以 $(a+c)(a+b)$ 整理得,$b^2+c^2-a^2\geq bc$, 所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geq\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$, 所以 $0<A\leq\frac{\pi}{3}$, 故选 A.

答案:A

知识点：余弦定理

难度：2

题目：在 $\triangle ABC$ 中, 若边长和内角满足 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc,\frac{\sin(A+B)}{\sin B}=2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, 则 $A=$__________.

解析: 因为 $\frac{\sin(A+B)}{\sin B}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}=2\sqrt{3}$,

所以 $c=2\sqrt{3}b$.

又 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc$, 所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2-\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{12b^2-6b^2}{4\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $A\in(0,\pi)$, 所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

答案:$\frac{\pi}{6}$

知识点：余弦定理

难度：2

题目：已知在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A,B,C 所对边分别为 a=3,b=4,c=6, 则 $bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C$ 的值为__________.

解析:

$$\begin{aligned}
&bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C\\
&=bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} &(1)\\
&=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2) &(2)\\
&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{61}{2} &(3)
\end{aligned}$$

答案:$\frac{61}{2}$

知识点：余弦定理

难度：2

题目：已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 且 $2a\cdot\vec{OA}+b\cdot\vec{OB}+\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\vec{OC}=0$, 则角 C 的大小是__________.

解析: 因为点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=0$,

又因为 $2a\cdot\vec{OA}+b\cdot\vec{OB}+\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\vec{OC}=0$, 所以 $2a=b=\frac{2\sqrt{3}}{3}c=k(k>0)$, 从而 $a=\frac{1}{2},b=k,c=\frac{\sqrt{3}}{2}k$, 由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{k^2}{4}+k^2\cdot\frac{3}{4}k^2}{2\cdot\frac{k}{2}\cdot k}=\frac{1}{2}$, 又因为 $C\in(0,\pi)$, 所以 $C=\frac{\pi}{3}$, 所以角 C 的大小是 $\frac{\pi}{3}$.

答案:$\frac{\pi}{3}$

知识点：余弦定理

难度：2

题目：在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 $a,b,c,\tan C=3\sqrt{7}$

(1) 求 $\cos C$ 的值;

(2) 若 $\vec{CB}\cdot\vec{CA}=\frac{5}{2}$，且 $a+b=9$，求 c.

答案：(1) 因为 $\tan C=3\sqrt{7}$，所以 $\frac{\sin C}{\cos C}=3\sqrt{7}$,

又因为 $\sin C^2+\cos C^2=1$，解得 $\cos C\pm\frac{1}{3}$,

由 $\tan C>0$ 知,C 为锐角，所以 $\cos=\frac{1}{3}$

(2) 由 $\vec{CB}\cdot\vec{CA}=\frac{3}{2}$，得 $ab\cos C=\frac{5}{2}$，即 $ab=20$.

又因为 $a+b=9$，则 $a^2+2ab+b^2=81$，所以 $a^2+b^2=41$.

由余弦定理得,$c^2=a^2+b^2\text{-}2ab\cos C=41\text{-}2\times20\times\frac{1}{8}=36$，故 $c=6$.

知识点：余弦定理

难度：2

题目：在 $\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别是角 A,B,C 的对边，且 $\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{b}{2a+c}$

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b=\sqrt{13},a+c=4$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

答案：(1) 由余弦定理知,$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

将上式代入 $\frac{\cos B}{\cos C}=-\frac{b}{2a+c}$，得 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=-\frac{b}{2a+c}$，整理得 $a^2+c^2\text{-}b^2=\text{-}ac$.

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$

因为 B 为三角形的内角，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$

(2) 将 $b=\sqrt{13},a+c=4,B=\frac{2\pi}{3}$ 代入 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $b^2=(a+c)^2\text{-}2ac\text{-}2ac\cos B$ 得,

$13=16-2ac(1-\frac{1}{2})$，所以 $ac=3$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

2.2　三角形中的几何计算

知识点：解三角形

难度：1

题目：在 $\triangle ABC$ 中，若 $A=105°,B=30°,BC=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则角 B 的平分线的长是（　　）

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ B.$2\sqrt{2}$ C.1 D.$\sqrt{2}$

解析：设角 B 的平分线与 AC 交于点 D，则在 $\triangle BCD$ 中，$\angle BDC=120°,\angle BCD=45°,BC=\frac{\sqrt{6}}{2}$，由正弦定理可知 $BD=1$.

答案:C

知识点：解三角形

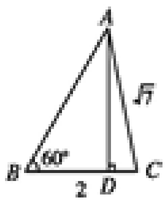
难度：1

题目：在 $\triangle ABC$ 中，若 $AC=\sqrt{7},BC=2,B=60°$，则 BC 边上的高等于（　　）

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ B.$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C.$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$ D.$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{4}$

解析：如图，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可知，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，



即 $7=AB^2+4-2\times2\times AB\times\frac{1}{2}$.

整理得 $AB^2-2AB-3=0$.

解得 $AB=3$ 或 $AB=-1$(舍去).

故 BC 边上的高 $AD=AB\cdot\sin B=3\times\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

答案:B

知识点：解三角形

难度：1

题目：若 $\triangle ABC$ 的周长等于 20，面积是 $10\sqrt{3},A=60°$，则 BC 边的长是（　　）

A.5 B.6 C.7 D.8

解析：在 $\triangle ABC$ 中，分别用 a,b,c 表示边 BC,CA,AB. 依题意及面积公式 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，得 $10\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\times\sin 60°$，即 $bc=40$.

又周长为 20, 所以 $a+b+c=20, b+c=20-a$

由余弦定理, 得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\cos 60°=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$,

所以 $a^2=(20-a)^2-120$, 解得 $a=7$.

答案:C

知识点：解三角形

难度：2

题目:在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c 且满足 $c\sin A=a\cos C$. 当 $\sqrt{3}\sin A-\cos(B+\frac{\pi}{4})$ 取最大值时,A 的大小为 (　　)

A.$\frac{\pi}{3}$ B.$\frac{\pi}{4}$

C.$\frac{\pi}{6}$ D.$\frac{2\pi}{3}$

解析: 由正弦定理得 $\sin C\sin A=\sin A\cos C$.

因为 $0<A<\pi$, 所以 $\sin A>0$,

从而 $\sin C=\cos C$.

又 $\cos C\neq0$, 所以 $\tan C=1$, 则 $C=\frac{\pi}{4}$,

所以 $B=\frac{3\pi}{4}-A$

于是

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sin A-\cos(B+\frac{\pi}{4}) &= \sqrt{3}\sin A-\cos(\pi-A)\\ &= \sqrt{3}\sin A+\cos A\\ &= 2\sin A(A+\frac{\pi}{6})\end{aligned}$$

因为 $0<A<\frac{3\pi}{4}$, 所以 $\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{12}$, 所以当 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,

即 $A=\frac{\pi}{3}$ 时,$2\sin(A+\frac{\pi}{6})$ 取最大值 2.

答案:A

知识点：解三角形

难度：1

题目：在 $\triangle ABC$ 中, 若 $C=60°, c=2\sqrt{2}$, 周长为 $2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$, 则 A 为 (　　)

A.30° B.45°

C.45° 或 75° D.60°

解析: 根据正弦定理, 得

$$\begin{aligned}2R&=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}\\&=\frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sin A+\sin B+\sin C}\\&=\frac{C}{\sin C}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=\frac{4\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

, 所以 $\sin A+\sin B+\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2\sqrt{2}}$, 所以 $\sin A+\sin B=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, 即

$$\begin{aligned}\sin A+\sin(A+C)=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}&\Rightarrow\sin(A+60^\circ)+\sin A=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\&\Rightarrow\sqrt{3}\sin(A+30^\circ)=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}\\&\Rightarrow\sin(A+30^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

, 所以 A+30°=75° 或 A+30°=105°, 所以 A=45° 或 A=75°.

答案:C

知识点: 解三角形

难度: 1

题目: 已知三角形的一边长为 7, 这条边所对的角为 60°, 另两边之比为 3:2, 则这个三角形的面积是__________.

解析: 设另两边分别为 $3x$,$2x$, 则

$\cos 60^\circ=\frac{9x^2+4x^2-49}{12x^2}$, 解得 $x=\sqrt{7}$,

故两边长为 $3\sqrt{7}$ 和 $2\sqrt{7}$,

所以 $S=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{7}\times 2\sqrt{7}\times\sin 60^\circ=\frac{21\sqrt{3}}{2}$

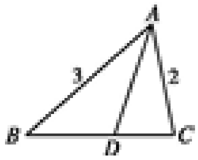
答案:$\frac{21\sqrt{3}}{2}$

知识点: 解三角形

难度: 1

题目: 已知在 $\triangle ABC$ 中,AC=2,AB=3,$\angle BAC$=60°,AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 则 AD=________.

解析: 如图,$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$,



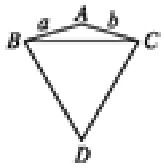
所以 $\frac{1}{2}\times3\times2\sin 60°=\frac{1}{2}\times3AD\sin 30°+\frac{1}{2}\times2AD\times\sin 30°$, 所以 $AD=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

答案:$\frac{6\sqrt{3}}{5}$

知识点：解三角形

难度：2

题目：在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB=a,AC=b,\triangle BCD$ 为等边三角形, 则当四边形 $ABDC$ 的面积最大时,$\angle BAC=$__________.



解析: 设 $\angle BAC=\theta$, 则 $BC^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$.$S_{四边形ABDC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)+ab\cdot\sin(\theta-60°)$, 即当 $\angle BAC=\theta=150°$ 时,$S_{四边形ABDC}$ 取得最大值.

答案:150°

知识点：解三角形

难度：2

题目：已知 $\triangle ABC$ 的一个内角为 120°, 并且三边长构成公差为 4 的等差数列, 则 $\triangle ABC$ 的面积为__________.

解析: 设三角形的三边依次为 a-4,a,a+4, 可得 a+4 的边所对的角为 120°.

由余弦定理得 $(a+4)^2=a^2+(a-4)^2-2a(a-4)\cdot\cos 120°$, 则 $a=10$, 所以三边长为 6,10,14,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times10\times\sin 120°=15\sqrt{3}$

答案:$15\sqrt{3}$

知识点：解三角形

难度：2

题目：已知 $\triangle ABC$ 的重心为 G, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 若 $2a\vec{GA}+\sqrt{3}b\vec{GB}+3c\vec{GC}=0$, 则 $\sin A$:$\sin B$:$\sin C$=__________.

解析: 因为 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=0$, 又 $2a\vec{GA}+\sqrt{3}b\vec{GB}+3c\vec{GC}=0$, 所以 $2a\vec{GA}+\sqrt{3}b\vec{GB}-3c(\vec{GA}+\vec{GB})=0$, 即 $(2a-3c)\vec{GA}+(\sqrt{3}b-3c)\vec{GB}=0$, 则 $\begin{cases}2a-3c=0,\\ \sqrt{3}b-3c=0.\end{cases}$ 所以 a:b:c=3:2$\sqrt{3}$:2, 由正弦定理, 得 $\sin A$:$\sin B$:$\sin C$=3:2$\sqrt{3}$:2.

答案:3:2 $\sqrt{3}$:2

知识点：解三角形

难度：1

题目：$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $\sin(A+C)=8\sin\frac{B}{2}^2$

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a+c=6$,$\triangle ABC$ 的面积为 2, 求 b.

答案：(1) 由题设及 $A+B+C=\pi$, 得 $\sin B=8\sin^2\frac{B}{2}$,

故 $\sin B=4(1-\cos B)$.

上式两边平方, 整理得 $17\cos^2 B-32\cos B+15=0$,

解得 $\cos B=1$(舍去),$\cos B=\frac{15}{17}$

(2) 由 $\cos B=\frac{15}{17}$ 得 $\sin B=\frac{8}{17}$,

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{4}{17}ac$.

又 $S_{\triangle ABC}=2$, 则 $ac=\frac{17}{2}$.

由余弦定理及 $a+c=6$ 得

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos B \\
&= (a+c)^2-2ac(1+\cos B) \\
&= 36-2\times\frac{17}{2}\times(1+\frac{15}{17}) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

所以 $b=2$.

知识点:

难度：1

题目:$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0,a=2\sqrt{7},b=2$

(1) 求 c;

(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD\perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

答案：(1) 由已知可得 $\tan A=-\sqrt{3}$, 所以 $A=\frac{2\pi}{3}$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $28=4+c^2-4c\cos\frac{2\pi}{3}$,

即 $c^2+2c-24=0$. 解得 $c=-6$(舍去),$c=4$.

(2) 由题设可得 $\angle CAD=\frac{\pi}{2}$,

所以 $\angle BAD=\angle BAC-\angle CAD=\frac{\pi}{6}$. 故 $\triangle ABD$ 面积与 $\triangle ACD$ 面积的比值为 $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}:\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD=1$

又 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}4\times2\sin\angle BAC=2\sqrt{3}$, 所以 $\triangle ABD$ 的面积为 $\sqrt{3}$

知识点：解三角形的实际应用

难度：1

题目：

如图所示, 为了测量某湖泊两侧 A,B 间的距离, 某同学首先选定了与 A,B 不共线的一点 C, 然后给出了四种测量方案:($\triangle ABC$ 的角 A,B,C 所对的边分别记为 a,b,c)

测量 A,C,b　　测量 a,b,C　　测量 A,B,a　　测量 a,b,B

则一定能确定 A,B 间距离的所有方案的序号为 (　　)

A.　B.　C.　D.

解析: 已知三角形的两角及一边, 可以确定三角形, 故　正确; 已知两边及夹角, 可以确定三角形, 故　正确; 已知两边与其中一边的对角, 满足条件的三角形可能有一个或两个, 故　错误. 故选 A.

答案:A

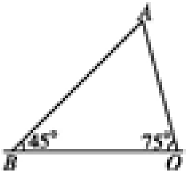
知识点：解三角形的实际应用

难度：1

题目：已知某路边一树干被台风吹断后, 树尖与地面成 45° 角, 树干也倾斜为与地面成 75° 角, 树干底部与树尖着地处相距 20 m, 则折断点与树干底部的距离是 (　　)m.

A.$\frac{20\sqrt{6}}{3}$ B.$10\sqrt{6}$

C.$\frac{10\sqrt{6}}{3}$ D.$20\sqrt{2}$



解析: 如图, 设树干底部为 O, 树尖着地处为 B, 折断点为 A, 则 $\angle ABO=45°,\angle AOB=75°$, 所以 $\angle OAB=60°$.

由正弦定理知,$\frac{AO}{\sin45°}=\frac{20}{\sin60°}$,

所以 $AO=\frac{20\sin45°}{\sin60°}=\frac{20\sqrt{6}}{3}(m)$

答案:A

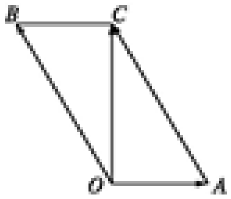
知识点：解三角形的实际应用

难度：1

题目：已知一艘船以 4 km/h 的速度与水流方向成 120° 的方向航行, 已知河水流速为 2 km/h, 则经过 $\sqrt{3}h$, 该船实际航程为 (　　)

A.2 $\sqrt{15}$km B.6 km

C.2 $\sqrt{21}$km D.8 km



解析: 如图, 因为 $|\vec{OA}| = 2km/h, |\vec{OB}| = 4km/h, \angle AOB = 120°$,

所以 $\angle OAC$=60°, $|\vec{OC}| = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \cos 60°} = 2\sqrt{3}(km/h)$

经过 $\sqrt{3}$ h, 该船的实际航程为 $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6(km)$

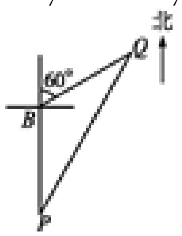
答案:B

知识点：解三角形的实际应用

难度：2

题目：甲船在 B 岛的正南方 10 km 处, 且甲船以 4 km/h 的速度向正北方向航行, 同时乙船自 B 岛出发以 6 km/h 的速度向北偏东 60° 的方向行驶, 当甲、乙两船相距最近时它们航行的时间是 (　　)

A.$\frac{150}{7}$ min B.$\frac{15}{7}$ h C.21.5 min D.2.15 h



解析: 如图, 设经过 x h 后甲船处于点 P 处, 乙船处于点 Q 处, 两船的距离为 s, 则在 $\triangle BPQ$ 中,BP=(10-4x) km,BQ=6x km,$\angle PBQ$=120°, 由余弦定理可知 $s^2=PQ^2=BP^2+BQ^2$-2$BP \cdot BQ \cdot \cos\angle PBQ$, 即 $s^2=(10\text{-}4x)^2+(6x)^2$-2(10-4$x$) · 6$x$ · cos 120°=28x^2-20x+100.

当 $x = -\frac{-20}{2\times 20} = \frac{5}{14}$ 时,s 最小, 此时 $\frac{5}{14}$ h=$\frac{150}{7}$ min.

答案:A

知识点：解三角形的实际应用

难度：2

题目：已知一货轮航行到 M 处, 测得灯塔 S 在货轮的北偏东 15°, 与灯塔 S 相距 20 海里, 随后货轮按北偏西 30° 的方向航行 30 分后, 又测得灯塔在货轮的东北方向, 则货轮的速度为 (　　)

A.20($\sqrt{2}+\sqrt{6}$) 海里/时 B.20($\sqrt{6}-\sqrt{2}$) 海里/时

C.20($\sqrt{6}+\sqrt{3}$) 海里/时 D.20($\sqrt{6}-\sqrt{3}$) 海里/时

解析: 设货轮航行 30 分后到达 N 处,

由题意可知 $\angle NMS$=45°,$\angle MNS$=105°,

则 $\angle MSN$=180°-105°-45°=30°.

而 MS=20 海里, 在 $\triangle MNS$ 中,

由正弦定理得 $\frac{MN}{\sin 30^\circ}=\frac{MS}{\sin 105^\circ}$,

即

$$\begin{aligned}MN&=\frac{20\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{10}{\sin(60^\circ+45^\circ)}\\&=\frac{10}{\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ}\\&=\frac{10}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\\&=10(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{海里}\end{aligned}$$

故货轮的速度为 $10(\sqrt{6}-\sqrt{2})\div\frac{1}{2}=20(\sqrt{6}-\sqrt{2})$(海里/时).

答案:B

知识点：解三角形的实际应用

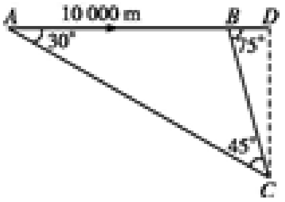
难度：1

题目：飞机沿水平方向飞行, 在 A 处测得正前下方地面目标 C 的俯角为 30°, 向前飞行 10 000 m 到达 B 处, 此时测得正前下方目标 C 的俯角为 75°, 这时飞机与地面目标的水平距离为 (　　)

A.2 500($\sqrt{3}$-1) m B.5 000 $\sqrt{2}$ m

C.4 000 m D.4 000 $\sqrt{2}$ m

解析: 如图,$\angle BAC$=30°,$\angle DBC$=75°,AB=10 000 m,



所以 $\angle ACB=45°$.

由正弦定理, 得 $\frac{10000}{\sin 45°}=\frac{BC}{\sin 30°}$,

又 $\cos 75°=\frac{BD}{BC}$,

所以 $BD=\frac{10000\cdot\sin 30°}{\sin 45°}\cdot\cos 75°=2\,500(\sqrt{3}-1)(\mathrm{m})$.

答案:A

知识点：解三角形的实际应用

难度：1

题目：台风中心从 A 地以 20 km/h 的速度向东北方向移动, 离台风中心 30 km 内的地区为危险区, 城市 B 在 A 的正东 40 km 处,B 城市处于危险区内的持续时间为 (　　)

A.0.5 h B.1 h

C.1.5 h D.2 h

解析: 设 t h 后,B 市处于危险区内, 则由余弦定理得 $(20t)^2+40^2-2\times20t\times40\cos 45°\leq30^2$.

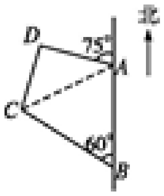
化简得 $4t^2-8\sqrt{2}t+7\leq0$, 所以 $t_1+t_2=2\sqrt{2},t_1\cdot t_2=\frac{7}{4}$

从而 $|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=1$

答案:B

知识点：解三角形的实际应用

难度：1



题目：

如图, 已知海岸线上有相距 5 n mile 的两座灯塔 A,B, 灯塔 B 位于灯塔 A 的正南方向. 海上停泊着两艘轮船, 甲位于灯塔 A 的北偏西 75° 方向, 与 A 相距 $3\sqrt{2}$ n mile 的 D 处; 乙船位于灯塔 B 的北偏西 60° 方向, 与 B 相距 5 n mile 的 C 处, 则两艘船之间的距离为__________n mile.

解析: 连接 $AC,BC=AB=5$ n mile,$\angle ABC=60°$,

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 所以 $AC=5$ n mile,

且 $\angle DAC=180°-75°-60°=45°$.

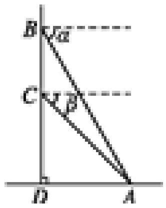
在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $CD^2=(3\sqrt{2})^2+5^2-2\times3\sqrt{2}\times5\times\cos 45°=13$, 所以 $CD=\sqrt{13}$ n mile.

故两艘船之间的距离为 $\sqrt{13}$ n mile.

答案: $\sqrt{13}$

知识点：解三角形的实际应用

难度：1



题目：

如图, 山顶上有一座电视塔, 在塔顶 B 处测得地面上一点 A 的俯角$\alpha=60°$, 在塔底 C 处测得点 A 的俯角$\beta=45°$. 已知塔高 60 m, 则山高为__________.

解析: 在 $\triangle ABC$ 中,$BC=60$ m,$\angle BAC=15°$,$\angle ABC=30°$,

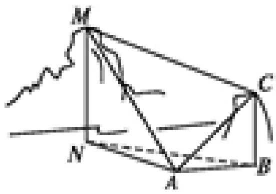
由正弦定理, 得 $AC=\frac{60\sin 30°}{\sin 15°}=30(\sqrt{6}+\sqrt{2})$(m).

所以 $CD=AC\cdot\sin 45°=30(\sqrt{3}+1)$(m).

答案:$30(\sqrt{3}+1)$m

知识点：解三角形的实际应用

难度：2



题目：

如图, 为测量山高 MN, 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从点 A 测得点 M 的仰角 $\angle MAN=60°$, 点 C 的仰角 $\angle CAB=45°$ 及 $\angle MAC=75°$, 从点 C 测得 $\angle MCA=60°$. 已知山高 $BC=50$ m, 则山高 $MN=$__________ m.

解析: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle CAB=45°$,$BC=50$ m, 所以 $AC=50\sqrt{2}$ m.

在 $\triangle AMC$ 中,$\angle MAC=75°$,$\angle MCA=60°$, 从而 $\angle AMC=45°$,

由正弦定理得,$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{AN}{\sin 60°}$, 因此 $AM=50\sqrt{3}$ m.

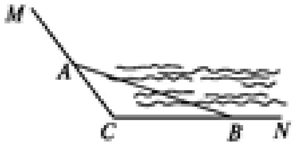
在 Rt$\triangle MNA$ 中,$AM=50\sqrt{3}$ m,$\angle MAN=60°$, 由 $\frac{MN}{AN}=\sin 60°$, 得 $MN=50\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=75$(m).

答案:75

知识点：解三角形的实际应用

难度：1

题目：



如图,CM,CN 为某公园景观湖畔的两条木栈道,$\angle MCN=120°$. 现拟在两条木栈道的 A,B 两处设置观景台, 记 $BC=a,AC=b,AB=c$(单位: 百米).

(1) 若 a,b,c 成等差数列, 且公差为 4, 求 b 的值;

(2) 已知 $AB=12$, 记 $\angle ABC=\theta$, 试用θ 表示观景路线 A-C-B 的长, 并求观景路线 A-C-B 长的最大值.

答案：(1) 因为 a,b,c 成等差数列, 且公差为 4,

所以 $a=b-4,c=b+4$,

因为 $\angle MCN=120°$,

所以由余弦定理得,$(b+4)^2=(b-4)^2+b^2-2b(b-4)\cos 120°$, 解得 $b=10$.

(2) 由题意, 得 $\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{BC}{\sin(60°-\theta)}=\frac{12}{\sin 120°}$,

所以 $AC+8\sqrt{3}\sin\theta$,$BC=8\sqrt{3}\sin(60°-\theta)$,

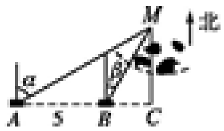
所以观景路线 A-C-B 的长 $AC+BC=8\sqrt{3}\sin\theta+8\sqrt{3}\sin(60°-\theta)=8\sqrt{3}\sin(60°+\theta)(0°<\theta<60°)$

所以当$\theta=30°$ 时, 观景路线 A-C-B 长的最大值为 $8\sqrt{3}$ 百米.

知识点：解三角形的实际应用

难度：1

题目：



如图, 一艘船由西向东航行, 测得某岛 M 的方位角为α, 前进 5 km 后测得此岛的方位角为β. 已知该岛周围 3 km 内有暗礁, 现该船继续东行.

(1) 若$\alpha=2\beta=60°$, 问该船有无触礁危险?

(2) 当α 与β 满足什么条件时, 该船没有触礁的危险?

答案：(1) 设岛 M 到直线 AB 的距离 MC 为 d km, 则

$AC=d\tan\alpha$ km,$BC=d\tan\beta$ km.

由 $AC\text{-}BC=AB$,

得 $d\tan\alpha\text{-}d\tan\beta=5, d=\frac{5}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

当$\alpha=2\beta=60°$ 时,$d=\frac{5}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}>3$,

所以此时没有触礁的危险.

(2) 方法一: 要使船没有触礁危险, 只要使 $d>3$,

即 $\frac{5}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

因为 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\tan\alpha\text{-}\tan\beta>0$,

所以 $\tan\alpha\text{-}\tan\beta<\frac{5}{3}$,

所以当α,β 满足 $\tan\alpha\text{-}\tan\beta<\frac{5}{3}$ 时, 该船没有触礁的危险.

方法二: 设 $CM=x$ km, 由 $\frac{AB}{\sin\angle AMB}=\frac{BM}{\sin\angle MAB}$,

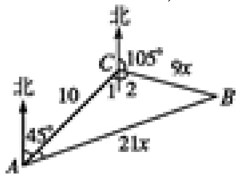
即 $\frac{5}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{x}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, 解得 $x=\frac{5\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$,

所以当 $\frac{5\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}>3$ 时没有触礁危险.

知识点：解三角形的实际应用

难度：2

13. 某海军护航舰艇在某海域执行护航任务时, 收到某渔船在航行中发出的求救信号, 海军舰艇在 A 处获悉后, 立即测出该渔船在方位角为 45°、距离 A 为 10 n mile 的 C 处, 并测得渔船正沿方位角为 105° 的方向, 以 9 n mile/h 的速度航行, 海军舰艇立即以 21 n mile/h 的速度前去营救, 试问舰艇应按照怎样的航向前进? 并求出靠近渔船所用的时间 (角度精确到 0.1°, 时间精确到 1 min).



答案：如图, 设舰艇从 A 处靠近渔船所用的时间为 x h,

则 $AB=21x$ n mile,

$BC=9x$ n mile,

$AC=10$ n mile,

$\angle ACB=\angle 1+\angle 2=45°+(180°\text{-}105°)=120°$,

根据余弦定理可得 $AB^2=AC^2+BC^2\text{-}2AC\cdot BC\cdot\cos 120°$,

即 $(21x)^2=10^2+(9x)^2\text{-}2\times10\times9x\cos 120°$,

亦即 $36x^2\text{-}9x\text{-}10=0$,

解得 $x_1=\frac{2}{3}, x_2=\text{-}\frac{5}{12}$(舍去),

所以 AB=14 n mile,BC=6 n mile.

由余弦定理可得 $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{14^2+10^2-6^2}{2\times14\times10}\approx0.9286$，所以 $\angle BAC\approx21.8°$,

所以方位角为 45°+21.8°=66.8°, 又因为 $\frac{2}{3}$ h=40 min, 所以舰艇应以北偏东 66.8° 的方向航行, 靠近渔船需要 40 min.

知识点：不等式基本性质

难度：1

题目：大桥桥头竖立的“限重 40 吨”的警示牌, 是指示司机要安全通过该桥, 应使车和货的总重量 T(吨) 满足关系为 (　　)

A. T<40 B. T>40

C. T≤40 D. T≥40

答案:C

知识点：不等式基本性质

难度：1

题目：把下列各题中的“=”全部改成“<”, 结论仍然成立的是 (　　)

A. 如果 $a=b,c=d$, 那么 $a-c=b-d$

B. 如果 $a=b,c=d$, 那么 $ac=bd$

C. 如果 $a=b,c=d$, 且 $cd\neq0$, 那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

D. 如果 $a=b$, 那么 $a^3=b^3$

解析: 由不等式性质知只有 D 选项仍然成立, 即若 $a<b$, 则 $a^3<b^3$.

答案:D

知识点：不等式基本性质

难度：1

题目：若 $a>b$, 则下列各式正确的是 (　　)

A. $a\lg x>b\lg x$ B. $ax^2>bx^2$

C. $a^2>b^2$ D. $a\cdot2^x>b\cdot2^x$

解析: 对任意的 $x,2^x>0$. 又因为 $a>b$, 所以 $a\cdot2^x>b\cdot2^x$.

答案:D

知识点：不等式基本性质

难度：1

题目：若 $a>b>c$, 则 $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$ 的值为 (　　)

A. 正数 B. 负数

C. 非正数 D. 非负数

解析: 因为 $a>b>c$, 所以 b-c>0,c-a<0,b-a<0.

所以$\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=\frac{b-a}{(b-c)(c-a)}$.

答案:A

知识点：不等式基本性质

难度：1

题目：若α,β 满足$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{pi}{2}$, 则 2$\alpha$-$\beta$ 的取值范围是 (　　)

A.-π≤2α-β<0 B.-π<2α-β<π

C.-$\frac{3\pi}{2}<2\alpha$-$\beta<\frac{\pi}{2}$ D.0<2α-β<π

解析: 由-$\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, 得-π$-\frac{\pi}{2}<\alpha$-$\beta<\frac{\pi}{2}$0,-$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

所以-$\frac{3\pi}{2}<\alpha+(\alpha$-$\beta)<\frac{\pi}{2}$,

即-$\frac{3\pi}{2}<2\alpha$-$\beta<\frac{\pi}{2}$.

答案:C

知识点：不等式基本性质

难度：1

题目：若 1<a<3,-4<b<2, 则$a-|b|$ 的取值范围是__________.

解析: 因为-4<b<2, 所以 0≤$|b|$ <4,

所以-4< $-|b|$≤0.

又因为 1<a<3, 所以-3< $a-|b|$ <3.

答案:(-3,3)

知识点：不等式基本性质

难度：1

题目：已知 1<a<b, 比较大小:$\log_a b$__________$\log_b a$(填 “>”“<” 或 “=”).

解析:$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$, 因为 1<$a$<$b$, 所以 $\log_a b$>1.

所以 $\log_b a$<1,

所以 $\log_a b$>$\log_b a$.

答案:>

知识点：不等式基本性质

难度：1

题目：已知 a>b>c>d>0, 且 a,b,c,d 成等差数列, 则 $\lg\frac{a}{b}$, $\lg\frac{b}{c}$,$\lg\frac{c}{d}$ 的大小顺序为__________.

解析: 因为 a,b,c,d 成等差数列,

所以 2b=a+c,2c=b+d.

所以 $\frac{a}{b}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b^2}{bc}=\frac{ac-(\frac{a+c}{2})^2}{bc}=-\frac{(a-c)^2}{4bc}<0$

所以 $\frac{a}{b}<\frac{b}{c}$.

同理 $\frac{b}{c}<\frac{c}{d}$, 所以 $0<\frac{a}{b}<\frac{b}{c}<\frac{c}{d}$,

所以 $\lg\frac{a}{b}<\lg\frac{b}{c}<\lg\frac{c}{d}$.

答案 $\lg\frac{a}{b}<\lg\frac{b}{c}<\lg\frac{c}{d}$

知识点：不等式基本性质

难度：1

题目：若 $a\neq-1$, 且 $a\in\mathrm{R}$, 试比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小.

答案：因为 $\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}$,

所以当 $a>-1$ 且 $a\neq0$ 时, $\frac{1}{1+a}>1-a$;

当 $a<-1$ 时, $\frac{1}{1+a}<1-a$;

当 $a=0$ 时, $\frac{1}{1+a}=1-a$.

用锤子以均匀的力敲击铁钉进入木板, 随着铁钉的深入, 铁钉所受的阻力会越来越大, 每次敲击后铁钉进入木板的长度满足后一次为前一次的 $\frac{1}{k}$. 已知一个铁钉受击三次后全部进入木板, 且第一次受击后铁钉进入木板的部分是钉长的 $\frac{4}{7}$, 请从这个实例中提炼出一个不等式组.

解由题意知, 第二次受击后铁钉没有全部进入木板; 第三次受击后铁钉全部进入木板, 所以

$$\begin{cases}\frac{4}{7}+\frac{4}{7k}<1,\\ \frac{4}{7}+\frac{4}{7k}+\frac{4}{7k^2}\geq1.\end{cases}$$

知识点：不等式基本性质

难度：2

题目：设 $a,b\in\mathrm{R}$, 若 $a-|b|>0$, 则下列不等式正确的是 (　　)

A. $b-a>0$ B. $a^3+b^3<0$

C. $b+a<0$ D. $a^2-b^2>0$

解析: 利用赋值法, 令 $a=1,b=0$, 排除 A,B,C, 故选 D.

答案:D

知识点：不等式基本性质

难度：2

题目：如果 $a>0$, 且 $a\neq1, M=\log_a(a^3+1), N=\log_a(a^2+1)$, 那么 M,N 的大小关系为 (　　)

A. $M>N$ B. $M<N$

C. $M=N$ D. 无法确定

解析: 当 $a>1$ 时,$a^3+1>a^2+1$,$y=\log_a x$ 是增加的,

所以 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$.

当 $0<a<1$ 时,$a^3+1<a^2+1$,$y=\log_a x$ 是减少的.

所以 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$.

故选 A.

答案:A

知识点：不等式基本性质

难度：2

题目：下列不等式: $^2+3>2x(x\in\mathrm{R})$; $a^3+b^3\geq a^2b+ab^2(a,b\in\mathrm{R})$; $a^2+b^2\geq 2(a-b-1)$ 中, 正确的个数为 (　　)

A.0 B.1 C.2 D.3

解析: 对于 ,$x^2+3-2x=(x-1)^2+2>0$ 恒成立, 故 正确;

对于 ,$a^3+b^3-a^2b-ab^2=a^2(a-b)+b^2(b-a)=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)$, 由 $a,b\in\mathrm{R}$, 得 $(a-b)^2\geq 0$, 而 $a+b>0$ 或 $a+b=0$ 或 $a+b<0$, 故 不正确;

对于 ,$a^2+b^2-2a+2b+2=a^2-2a+1+b^2+2b+1=(a-1)^2+(b+1)^2\geq 0$, 故 正确, 故选 C.

答案:C

知识点：不等式基本性质

难度：2

题目：下列各式中, 对任何实数 x 都成立的一个式子是 (　　)

A.$\lg(x^2+1)\geq\lg 2x$ B.$x^2+1>2x$

C.$\frac{1}{x^2+1}\leq 1$ D.$x+\frac{1}{x}\geq 2$

解析:A 中 $x>0$;B 中当 $x=1$ 时,$x^2+1=2x$;C 中对任意 x,$x^2+1\geq 1$ 恒成立, 故 $\frac{1}{x^2+1}\leq 1$ 恒成立;D 中当 $x<0$ 时,$x+\frac{1}{x}<0$.

答案:C

知识点：不等式基本性质

难度：2

题目：g 糖水中有 $a(b>a>0)$ g 糖, 若再添加 $m(m>0)$ g 糖, 则糖水就变甜了, 根据这一事实可以提炼的一个不等式是____________________.

解析: 由题意知原有的 b g 糖水中, 再添加 $m(m>0)$g 糖后, 糖水变甜了, 说明糖水中的糖的质量分数变大了, 则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}(b>a>0,m>0)$.

答案:$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}(b>a>0,m>0)$

知识点：不等式基本性质

难度：2

题目：给出三个条件: $ac^2>bc^2$; $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$; $a^2>b^2$, 其中能推出 $a>b$ 的条件有__________个.

解析: 只有　能推出 $a>b$.

答案:1

知识点：不等式基本性质

难度：2

题目：已知 $1\leq a+b\leq 4$,$-1\leq a-b\leq 2$, 求 $4a-2b$ 的取值范围.

答案：令 $4a-2b=x(a+b)+y(a-b)$,

所以 $4a-2b=(x+y)a+(x-y)b$.

所以

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 1\leqslant a+b\leqslant 4, \\ -3\leqslant 3(a-b)\leqslant 6. \end{cases}$$

所以$-2\leq 4a-2b\leq 10$.

知识点：不等式基本性质

难度：2

题目：已知 $a>0,b>0$, 且 $a\neq b$, 比较 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ 与 $a+b$ 的大小.

答案：因为

$$\begin{aligned}(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a})-(a+b)&=\frac{a^2}{b}-b+\frac{b^2}{a}-a\\&=\frac{a^2-b^2}{b}+\frac{b^2-a^2}{a}\\&=(a^2-b^2)(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})\\&=(a^2-b^2)\frac{a-b}{ab}\\&=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}\end{aligned}$$

,

又 $a>0,b>0,a\neq b$,

所以 $(a-b)^2>0,a+b>0,ab>0$.

所以 $(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a})-(a+b)>0$.

所以 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}>a+b$

实数 a,b,c,d 满足下列三个条件: $d>c$; $a+b=c+d$; $a+d<b+c$. 请将 a,b,c,d 按照从小到大的顺序排列, 并证明你的结论.

解结论是:$a<c<d<b$.

证明如下: 因为 $a+d<b+c$,

所以 $d-b<c-a$.

又因为 $a+b=c+d$, 所以 $c-a=b-d$.

所以由 , 得

$$\begin{cases}d-b<b-d,\\a-c<c-a.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d<b,\\a<c.\end{cases}$$

由 $d>c$, 得 $a<c<d<b$.

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：当$0<t<1$ 时, 不等式 $(x-t)(x-\frac{1}{t})$ 的解集为 (　　)

A.{ $x|\frac{1}{t}<x<t$ } B.{$\{x|x>\frac{1}{t}$ 或 $x<t\}$ }

C.{$\{x|x<\frac{1}{t}$ 或 $x>t\}$ } D.{$x|t<x<\frac{1}{t}$ }

解析: 因为 $t\in(0,1)$, 所以 $\frac{1}{t}>t$

所以由 $(x-t)(x-\frac{1}{t})>0$, 得 $x>\frac{1}{t}$ 或 $x<t$

答案:B

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：已知一元二次不等式 $f(x)$<0 的解集为 $\}x|x < -1$ 或 $x > \frac{1}{2}\}$, 则 $f(10^x)$>0 的解集为 (　)

A.{x|x<-1 或 x>-lg 2}

B.{x|-1<x<-lg 2}

C.{x|x>-lg 2}

D.{x|x<-lg 2}

解析: 由题意可知 $f(x)$>0 的解集为 $x|-1 < x < \frac{1}{2}$, 因为 $0 < 10^x < \frac{1}{2}$, 所以 $x < \lg \frac{1}{2=-\lg 2}$

答案:D

知识点：一元二次不等式的解法

难度：2

题目：设集合 A={x|6+5x-x^2>0},B={x|a^2-x^2<0}, 若 A∩B=∅, 则 a 的取值范围是 (　　)

A.{a|a≥6} B.{a|a>6}

C.{a|a≤-6 或 a≥6} D.{a|a≤-6}

解析: 由 6+5x-x^2>0, 得 x^2-5x-6<0, 解得-1<x<6.

由 a^2-x^2<0, 得 x>|a| 或 x<-|a|.

由 A∩B=∅, 得|a|≥6, 所以 a≥6 或 a≤-6.

答案:C

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：若对一切实数 x, 不等式 x^2+a|a|+1≥0 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 (　　)

A.(-∞,-2] B.[-2,2]

C.[-2,+∞) D.[0,+∞)

解析: 令 t=|x|, 则 t≥0, 所以 t^2+at+1≥0 对 t≥0 恒成立, 当 a≥0 时, 显然不等式恒成立.

当 a<0 时,y=t^2+at+1 在 [0,+∞) 上的最小值为 $1-\frac{a^2}{4}$, 由题意得 $1-\frac{a^2}{4} \geq 0$, 解得-2≤a≤2, 所以-2≤a<0.

综上,a≥-2, 故选 C.

答案:C

知识点：一元二次不等式的解法

难度：2

题目：已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，则对函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，下列不等式成立的是（　　）

A.$f(4)>f(0)>f(1)$ B.$f(4)>f(1)>f(0)$

C.$f(0)>f(1)>f(4)$ D.$f(0)>f(4)>f(1)$

解析：由题意知-1,3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，且 $a>0$，所以

$$\begin{cases}-1+3=-\frac{b}{a},\\ -1\times 3=\frac{c}{a}.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=-2,\\ \frac{c}{a}=-3.\end{cases}$$

对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 来说，其图像的对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}=1$，且开口向上.

由于 $|4-1|>|1-0|$，所以 $f(\mathbf{??})>f(0)>f(\mathbf{??})$.

答案:A

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：函数 $y=\log_3(9-x^2)$ 的定义域为 A，值域为 B，则 $A\cap B=$__________.

答案:(-3,2]

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：二次函数 $y=ax^2+bx+c(x\in\mathrm{R})$ 的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是______________.

解析：由表格知，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 $x_1=-2,x_2=3$，且抛物线开口向上，所以 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$.

答案:$\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：若关于 x 的不等式 $-\frac{1}{2}x^2+2x>mx$ 的解集是 $\{x|0<x<2\}$，则实数 m 的值是__________.

解析: 由已知得,0 和 2 是方程 $-\frac{1}{2}x^2+2x-mx=0$ 的两根, 代入得 m=1.

答案:1

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：若不等式 $(a$-$2)x^2$-$2(a$-$2)x$-$4<0$ 的解集为 R, 则实数 a 的取值范围是__________.

解析: 当 a-2=0, 即 a=2 时, 不等式化为-4<0, 显然恒成立;

当 a-2≠0 时, 由题意得

$$\begin{cases} a-2<0, \\ \triangle=4(a-2)^2+16(a-2)<0. \end{cases}$$

解得-2<a<2.

综上所述,a∈(-2,2].

答案:(-2,2]

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：已知 $f(x)=x^2-(a+\frac{1}{a})+1$.

(1) 当$a=\frac{1}{2}$ 时, 解不等式 $f(x)$≤0.

(2) 若 a>0, 解关于 x 的不等式 $f(x)$≤0.

答案：(1) 当$a=\frac{1}{2}$ 时, 有不等式 $f(x)=x^2-\frac{1}{2}x+1\leq 0$,

所以 $(x-\frac{1}{2})(x-2)\leq 0$, 所以 $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$.

所以不等式的解集为 $\{x|\frac{1}{2}\leq x\leq 2\}$.

(2) 不等式 $f(x)=(x-\frac{1}{a})(x-a)\leq 0$,

当 0<a<1 时,$\frac{1}{2}$>a, 所以不等式的解集为 $\{x|a\leq x\leq\frac{1}{a}\}$;

当 a>1 时,$\frac{1}{2}<a$, 所以不等式的解集为 $\{x|\frac{1}{a}\leq x\leq a\}$;

当 a=1 时, 不等式的解集为 $\{x|x=1\}$.

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：已知关于 x 的不等式 $(a^2$-$4)x^2+(a+2)x$-$1\geq 0$ 的解集是空集, 求实数 a 的取值范围.

答案：当 a^2-4=0 时,a=±2, 当 a=-2 时, 解集为 ∅;

当 a=2 时, 解集为 $\{x|x\geq\frac{1}{4}\}$, 不符合题意, 舍去.

当 a^2-4≠0 时, 要使解集为 ∅,

则有

$$\begin{cases} a^2-4<0, \\ \triangle<0. \end{cases}$$

解得-2<a< $\frac{6}{5}$.

综上,a 的取值范围是 $[-2,\frac{6}{5})$.

知识点：一元二次不等式的解法

难度：2

题目：若不等式组

$$\begin{cases} x^2-x-2>0, \\ 2x^2+(2k+5)x+5k<0 \end{cases}$$

的整数解只有-2, 求 k 的取值范围.

答案：因为 x^2-x-2>0, 所以 x>2 或 x<-1.

又 $2x^2+(2k+5)x+5k<0$,

所以 $(2x+5)(x+k)<0$.

当 k> $\frac{5}{2}$ 时,-k< $-\frac{5}{2}$,

由 得-k<x< $-\frac{5}{2}$<-2, 此时-2$\notin(-k,-\frac{5}{2})$;

当$k=\frac{5}{2}$ 时, 的解集为空集;

当 k< $\frac{5}{2}$ 时,-$\frac{5}{2}$ <-k, 由 得-$\frac{5}{2}$ <x<-k,

所以

$$\begin{cases} x<-1, \\ -\frac{5}{2}<x<-k \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x>2, \\ -\frac{5}{2}<x<-k. \end{cases}$$

因为原不等式组只有整数解-2,

所以

$$\begin{cases} k<\frac{5}{2}, \\ -k>-2, \\ -k\leq 3. \end{cases}$$

所以-3≤k<2.

综上,k 的取值范围是 [-3,2).

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{x-4}$ 的定义域为 (　　)

A.(1,4) B.[1,4)

C.(-∞,1)∪(4,+∞) D.(-∞,1]∪(4,+∞)

解析: 依题意应有 $f(x)=\lg\frac{1-x}{x-4}>0$, 即 $(x-1)(x-4)<0$, 所以 $1<x<4$.

答案:A

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：已知 $a_1>a_2>a_3>0$, 则使得 $(1-a_ix)^2<1(i=1,2,3)$ 都成立的 x 取值范围是 (　　)

A.$(0,\frac{1}{a_1})$ B.$(0,\frac{2}{a_1})$

C.$(0,\frac{1}{a_3})$ D.$(0,\frac{2}{a_3})$

解析: 由 $(1-a_ix)^2<1$, 得 $a_ix(a_ix-2)<0$,

又 $a_i>0$, 所以 $x(x-\frac{2}{a_1})$, 解得 $0<x<\frac{2}{a_1}$,

要使上式对 a_1,a_2,a_3 都成立, 则 $0<x<\frac{2}{a_1}$. 故选 B.

答案:B

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

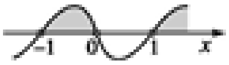
题目：不等式 $x>\frac{1}{x}$ 的解集是 (　　)

A.(1,+∞) B.(-∞,-1)∪(1,+∞)

C.(-1,0)∪(1,+∞) D.(-∞,-1)∪(0,1)

解析: 因为 $x>\frac{1}{x}$, 所以 $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$,

即 $x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)>0$.



画出示意图如图.

所以解集为 (-1,0)∪(1,+∞).

答案:C

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：对任意 $a\in[-1,1]$, 都有函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$ 的值恒大于零, 则 x 的取值范围是 (　　)

A.1<x<3 B.x<1 或 x>3

C.1<x<2 D.x<1 或 x>2

解析: 设 $g(a)=(x-2)a+(x^2-4x+4), g(a)>0$ 恒成立, 且 a∈[-1,1],

所以

$$\begin{cases} g(1)=x^2-3x+2>0, \\ g(-1)=x^2-5x+6>0, \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x<1\text{或}x>2, \\ x<2\text{或}x>3, \end{cases}$$

答案:B

知识点：一元二次不等式的解法

难度：1

题目：若关于 x 的不等式 $x^2+px+q<0$ 的解集为 {x|1<x<2}, 则关于 x 的不等式 $\frac{x^2+px+q}{x^2-5x-6}>0$ 的解集为 (　　)

A.(1,2)

B.(-∞,-1)∪(6,+∞)

C.(-1,1)∪(2,6)

D.(-∞,-1)∪(1,2)∪(6,+∞)

解析: 由已知得,$x^2+px+q=(x-1)(x-2)$,

所以 $\frac{x^2+px+q}{x^2-5x-6}>0$, 即 $\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-6)}>0$,

等价于 $(x-1)(x-2)(x+1)(x-6)>0$,

解得 x<-1 或 1<x<2 或 x>6.

答案:D

知识点：一元二次不等式的解法

难度：2

题目：不等式 $\frac{(x-2)^2(x-3)}{x+1}<0$<0 的解集为__________.

解析: 不等式等价于 $(x-2)^2(x-3)(x+1)<0$, 如图, 用穿针引线法易得-1<x<3, 且 $x\neq2$.

答案:(-1,2)∪(2,3)

知识点：一元二次不等式的解法

难度：2

题目:已知 $\frac{ax}{x-1}$<1 的解集为 $\{x|x<1$ 或 $x>2\}$, 则实数 a 的值为__________.

解析: 因为 $\frac{ax}{x-1}$<1, 所以 $\frac{ax-x+1}{x-1}$<0,

即 $[(a\text{-}1)x+1](x\text{-}1)<0$.

又不等式 $\frac{ax}{x-1}$<1 的解集为 $\{x|x<1$ 或 $x>2\}$,

所以 a-1<0, 所以 $x+\frac{1}{a-1})(x-1)>0$.

所以-$\frac{1}{a-1}$=2, 所以 $a=\frac{1}{2}$.

答案:$\frac{1}{2}$

知识点: 一元二次不等式的解法

难度: 1

题目: 如果关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x+m^2-2=0$ 的两个实根一个小于-1, 另一个大于 1, 那么实数 m 的取值范围是__________.

解析: 令 $f(x)=x^2+(m-1)x+m^2-2$, 则

$$\begin{cases} f(1)<0, \\ f(-1)<0. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} m^2+m-2<0, \\ m^2-m<0. \end{cases}$$

答案:(0,1)

知识点: 一元二次不等式的解法

难度: 1

题目: 某商家一月至五月累计销售额达 3 860 万元, 预测六月销售额为 500 万元, 七月销售额比六月递增 $x\%$, 八月销售额比七月递增 $x\%$, 九、十月销售总额与七、八月销售总额相等. 若一月至十月销售总额至少达 7 000 万元, 则 x 的最小值是__________.

解析: 由题意得,$3860+500+[500(1+x\%)+500(1+x\%)^2]\times 2\geq 7000$, 化简得 $(x\%)^2+3\cdot x\%-0.64\geq 0$,

解得 $x\%\geq 0.2$ 或 $x\%\leq -3.2$(舍去),

所以 $x\geq 20$, 即 x 的最小值为 20.

答案:20

知识点: 一元二次不等式的解法

难度: 2

题目: 解不等式.

(1) $\frac{x-1}{x-2}$≥0;　　(2) $\frac{2x-1}{3-4x}$>1.

答案：(1) 原不等式等价于

$$\begin{cases}(x-1)(x-2)\geq 0,\\ x-2\neq 0.\end{cases}$$

解得 x≤1 或 x>2, 所以原不等式的解集为 $\{x|x\leq 1$ 或 $x>2\}$.

(2) 原不等式可改写为 $\frac{2x-1}{4x-3}+1<0$, 即 $\frac{6x-4}{4x-3}<0$,

所以 $(6x-4)(4x-3)<0$, 所以$\frac{2}{3}<x<\frac{3}{4}$.

所以原不等式的解集为 $\{x|\frac{2}{3}<x<\frac{3}{4}\}$.

知识点：一元二次不等式的解法

难度：3

题目：解关于 x 的不等式 $\frac{1}{x-1}>a$.

答案：将原不等式移项、通分化为 $\frac{ax-(a+1)}{x-1}<0$.

若 $a>0$, 有 $\frac{a+1}{a}>1$, 则原不等式的解集为 $\{x|1<x<\frac{a+1}{a}\}$;

若 $a=0$, 有 $\frac{a+1}{a}<0$, 则原不等式的解集为 $\{x|x>1\}$;

若 $a<0$, 有 $\frac{a+1}{a}<1$, 则原不等式的解集为 $\{x|x<\frac{a+1}{a}或x>1\}$.

综上所述,

当 $a>0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|1<x<\frac{a+1}{a}\}$;

当 $a=0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|x>1\}$;

当 $a<0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x|x<\frac{a+1}{a}或x>1\}$.

知识点：一元二次不等式的解法

难度：2

题目：若不等式 $\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}>0$ 对任意实数 x 恒成立, 求 m 的取值范围.

答案：由于 $x^2-8x+20=(x-4)^2+4>0$ 恒成立,

因此原不等式对任意实数 x 恒成立等价于 $mx^2+2(m+1)x+9m+4>0$ 对 $x\in\mathrm{R}$ 恒成立.

(1) 当 $m=0$ 时, 不等式化为 $2x+4>0$, 不满足题意.

(2) 当 $m\neq 0$ 时, 应有

$$\begin{cases}m>0,\\ \triangle=[2(m+1)]^2-4m(9m+4)<0\end{cases}$$

解得 $m>\frac{1}{4}$.

综上, 实数 m 的取值范围是 $(\frac{1}{4},+\infty)$.

知识点：基本不等式

难度：1

题目：已知 $x,y\in$R, 下列不等关系正确的是（　　）

A.$x^2+y^2\geq 2|xy|$ B.$x^2+y^2\leq 2|xy|$

C.$x^2+y^2>2|xy|$ D.$x^2+y^2<2|xy|$

解析:$x^2+y^2=|x|^2+|y|^2\geq 2|x||y|=2|xy|$

当且仅当 $|x|=|y|$ 时等号成立.

答案:A

知识点：基本不等式

难度：1

题目：若 $x>0,y>0$, 且 $\sqrt{2xy}\geq\frac{x+2y}{2}$, 则必有（　　）

A.$2x=y$ B.$x=2y$ C.$x=y$ D.$x=4y$

解析: 因为 $x>0,y>0$, 所以 $\frac{x+2y}{2}\geq\sqrt{2xy}$, 即 $\frac{x+2y}{2}\geq\sqrt{2xy}$. 又 $\sqrt{2xy\geq\frac{x+2y}{2}}$, 所以必有 $\sqrt{2xy}=\frac{x+2y}{2}$, 所以 $x=2y$.

答案:B

知识点：基本不等式

难度：1

题目：如果正数 a,b,c,d 满足$a+b=cd=4$, 那么（　　）

A.$ab\leq c+d$, 且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

B.$ab\geq c+d$, 且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

C.$ab\leq c+d$, 且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

D.$ab\geq c+d$, 且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

解析: 因为 $a+b=cd=4,a+b\geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $\sqrt{ab}\leq 2$, 所以 $ab\leq 4$, 当且仅当 $a=b=2$ 时, 等号成立.

又 $cd\leq\frac{(c+d)^2}{4}$, 所以 $\frac{(c+d)^2}{4}\geq 4$, 所以 $c+d\geq 4$, 当且仅当 $c=d=2$ 时, 等号成立. 所以 $ab\leq c+d$, 当且仅当 $a=b=c=d=2$ 时, 等号成立, 故选 A.

答案:A

知识点：基本不等式

难度：1

题目：已知 $0<a<b$, 且$a+b=1$, 则下列不等式中, 正确的是（　　）

A.$\log_2 a>0$ B.$2^{a-b}<\frac{1}{2}$

C.$2^{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}<\frac{1}{2}$ D.$\log_2 a+\log_2 b<-2$

解析: 因为 $0<a<b$, 且$a+b=1$,

所以 $ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

所以 $\log_2 a+\log_2 b=\log_2(ab)<\log_2\frac{1}{2}=-2$.

答案:D

知识点：基本不等式

难度：1

题目：若 $a>0,b>0$, 则 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 与 $\frac{a+b}{2}$ 的大小关系是__________.

解析: 因为 $\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+b^2+a^2+b^2}{4}\geq\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{(a+b)^2}{4}$，所以 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$，当且仅当 $a=b>0$ 时, 等号成立.

答案:$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$

知识点：基本不等式

难度：1

题目：设 $a>0,b>0$, 给出下列不等式:

(1)$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq 4$;

(2)$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$;

(3)$a^2+9>6a$;

(4)$a^2+1+\frac{1}{a^2+1}>2$.

其中正确的是__________.

解析: 因为 $a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2, b+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}=2$

所以 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq 4$, 当且仅当 $a=1,b=1$ 时, 等号成立, 所以 (1) 正确;

因为 $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=1+1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$, 当且仅当 $a=b>0$ 时, 等号成立, 所以 (2) 正确;

因为 $a^2+9\geq 2\sqrt{a^2\cdot 9}=6a$, 当且仅当 $a=3$ 时, 等号成立, 所以当 $a=3$ 时,$a^2+9=6a$, 所以 (3) 不正确;

因为 $a^2+1+\frac{1}{a^2+1}\geq 2\sqrt{(a^2+1)\cdot\frac{1}{a^2+1}}$,

当且仅当 $a^2+1=\frac{1}{a^2+1}$, 即 $a=0$ 时, 等号成立, 又 $a>0$, 所以等号不成立, 所以 (4) 正确.

答案:(1)(2)(4)

知识点：基本不等式

难度：1

题目：若 a,b 为正实数,$a\neq b,x,y\in(0,+\infty)$, 则 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$, 当且仅当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ 时取等号, 利用以上结论, 函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}(x\in(0,\frac{1}{2}))$ 取得最小值时,x 的值为__________.

解析: 由题意可 $f(x)=\frac{4}{2x}+\frac{9}{1-2x}\ge\frac{(2+3)^2}{2x+(1-2x)}$, 当且仅当 $\frac{2}{2x}=\frac{3}{1-2x}$ 时, 等号成立, 解得 $x=\frac{1}{5}$.

答案:$x=\frac{1}{5}$

知识点：基本不等式

难度：1

题目：若实数 x,y 满足 $x^2+y^2+xy=1$, 求$x+y$ 的最大值.

答案：由 $x^2+y^2+xy=1$ 可得 $(x+y)^2=xy+1$,

又 $xy\le(\frac{x+y}{2})^2$,

所以 $(x+y)^2\le(\frac{x+y}{2})^2+1$, 整理得 $\frac{3}{4}(x+y)^2\le 1$,

当且仅当 $x=y$ 时取等号.

所以 $x+y\in[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}]$.

所以$x+y$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

知识点：基本不等式

难度：1

题目：已知 $a>0,b>0,a+b=1$, 求证: $\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\le 2$.

答案：因为 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}=\sqrt{1\cdot(a+\frac{1}{2})}\le\frac{1+a+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}+\frac{a}{2}$、, 当且仅当 $a=\frac{1}{2}$ 时取等号,

同理 $\sqrt{b+\frac{1}{2}}\le\frac{3}{4}+\frac{b}{2}$, 当且仅当 $b=\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\le\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+\frac{3}{4}+\frac{b}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(a+b)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$, 当且仅当 $\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}\le 2$.

知识点：基本不等式

难度：2

题目：已知 $m>0,n>0,\alpha=m+\frac{1}{m},\beta=n+\frac{1}{n},m,n$ 的等差中项为 1, 则 $\alpha+\beta$ 的最小值为 (　　)

A.3 B.4 C.5 D.6

解析: 由已知得,$m+n=2$, 所以 $\alpha+\beta=m+\frac{1}{m}+n+\frac{1}{n}=(m+n)+\frac{m+n}{mn}=2+\frac{2}{mn}$

因为 $m>0,n>0$, 所以 $mn\le(\frac{m+n}{2})^2=1$.

所以 $\alpha+\beta\ge 2+\frac{2}{1}=4$.

当且仅当 $m=n=1$ 时, 等号成立.

所以$\alpha+\beta$ 的最小值为 4.

答案:B

知识点：基本不等式

难度：2

题目：给出下列四个命题：若 $a<b$, 则 $a^2<b^2$；若 $a\geq b>-1$, 则 $\frac{a}{1+a}\geq\frac{b}{1+b}$；若正整数 m 和 n 满足 $m<n$, 则 $\sqrt{m(n-m)}\leq\frac{n}{2}$；若 $x>0$, 且 $x\neq1$, 则 $\ln x+\frac{1}{\ln x}\geq 2$, 其中真命题的序号是 (　　)

A.　B.　C.　D.

解析：当 $a=-2,b=1$ 时,$a<b$, 但 $a^2>b^2$, 故　不成立;

对于　,$\frac{a}{1+a}-\frac{b}{1+b}=\frac{a(1+b)-b(1+a)}{(1+a)(1+b)}=\frac{a-b}{(1+a)(1+b)}$, 因为 $a\geq b>-1$, 所以 $\frac{a}{1+a}-\frac{b}{1+b}\geq0$, 故　正确;

对于　,$\sqrt{m(n-m)}\leq\frac{m+n\cdot m}{2}=\frac{n}{2}$($m<n$, 且 m,n 为正整数), 当且仅当 $m=n-m$, 即 $m=\frac{n}{2}$ 时, 等号成立, 故　正确;

对于　, 当 $0<x<1$ 时,$\ln x<0$, 故　不成立. 故选 B.

答案:B

知识点：基本不等式

难度：2

题目：在算式 4× +△=30 的 、△ 中, 分别填入一个正整数使算式成立, 并使填入的正整数的倒数之和最小, 则这两个正整数构成的数对 (,△) 应为 (　　)

A.(4,14) B.(6,6) C.(3,18) D.(5,10)

解析：可设　中的正整数为 x,△ 中的正整数为 y, 则由已知可得 $4x+y=30$.

因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{30}(\frac{4x+y}{x}+\frac{4x+y}{y})=\frac{1}{30}(5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y})\geq(5+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}})=\frac{3}{10}$, 当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$, 即 $y=2x$ 时, 等号成立, 又 $4x+y=30$, 所以 $x=5,y=10$, 故选 D.

答案:D

知识点：基本不等式

难度：2

题目：当 $x>3$ 时,$x+\frac{1}{x-3}\geq a$ 恒成立, 则 a 的最大值为__________.

解析：因为 $x>3$, 所以 $x+\frac{1}{x-3}=x-3+\frac{1}{x-3}+3\geq2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{1}{x-3}}+3=5$

当且仅当 $x-3=\frac{1}{x-3}$, 即 $x=4$ 时, 等号成立.

所以由题意可知 $a\leq5$.

答案:5

知识点：基本不等式

难度：2

题目：若 $a>1,0<b<1$, 则 $\log_a b+\log_b a$ 的取值范围是________.

解析: 因为 a>1,0<b<1, 所以 $\log_a b$<0,$\log_b a$<0,

所以-($\log_a b$+$\log_b a$)=(-$\log_a b$)+(-$\log_b a$)≥2,

当且仅当-$\log_a b$=-$\log_b a$, 即 a>1,0<b<1,ab=1 时, 等号成立. 所以 $\log_a b$+$\log_b a$≤-2.

答案:(-∞,-2]

知识点：基本不等式

难度：2

题目：已知 a,b,c 为不全相等的正数, 求证:$\frac{b+c\cdot a}{a}+\frac{c+a\cdot b}{b}+\frac{a+b\cdot c}{c}$>3.

答案：

$$\begin{aligned}\frac{b+c\cdot a}{a}+\frac{c+a\cdot b}{b}+\frac{a+b\cdot c}{c} &= \frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-3\\ &= (\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})-3\end{aligned}$$

因为 a>0,b>0,c>0,

所以 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$≥2,$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$≥2,$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$≥2.

又 a,b,c 不全相等,

所以 $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$>6.

所以 $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$-3>6-3=3.

故原不等式成立.

知识点：基本不等式

难度：2

题目：已知 a>b>c, 且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{n}{a-c}$ 恒成立. 求 n 的最大值.

答案：因为 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{n}{a-c}$,$a$>$b$>$c$,

所以 $(a-c)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})\geq n$

又

$$\begin{aligned}(a-c)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}) &= (a-b+b-c)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})\\ &= 2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geq 2+2\sqrt{\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b-c}}=4\\ &= 2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geq 2+2\sqrt{\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b-c}}=4\end{aligned}$$

当且仅当 a-b=b-c, 即 a+c=2b 时, 等号成立.

由 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{n}{a-c}$ 恒成立, 得 n≤4, 所以 n 的最大值为 4.

知识点：基本不等式

难度：1

题目：若 $a>0,b>0$, 且 $\ln(a+b)=0$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值是 (　　)

A.$\frac{1}{4}$B.1 C.4 D.8

解析: 由 $a>0,b>0,\ln(a+b)=0$, 得

$$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ a + b = 1. \end{cases}$$

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=4$

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 4.

答案:C

知识点：基本不等式

难度：1

题目：若 $x>4$, 则函数 $y=-x+\frac{1}{4-x}$(　　)

A. 有最大值-6 B. 有最小值 6

C. 有最大值-2 D. 有最小值 2

解析: 因为 $x>4$, 所以 $x-4>0$.

所以 $y=-x+\frac{1}{4-x}=-[(x-4)+\frac{1}{4-x}]-4\leq-2-4=-6$, 当且仅当 $x-4=\frac{1}{4-x}$, 即 $x=5$ 时, 等号成立.

答案:A

知识点：基本不等式

难度：1

题目：已知 $x>1,y>1$, 且 $\frac{1}{4}\ln x,\frac{1}{4},\ln y$ 成等比数列, 则 xy 有 (　　)

A. 最小值 e B. 最小值 $\sqrt{e}$

C. 最大值 e D. 最大值 $\sqrt{e}$

解析: 因为 $x>1,y>1$, 且 $\frac{1}{4}\ln x,\frac{1}{4},\ln y$ 成等比数列,

所以 $\frac{1}{4}\ln x\cdot\ln y=(\frac{1}{4})^2$.

所以 $\frac{1}{4}=\ln x\cdot\ln y\leq(\frac{\ln x+\ln y}{2})^2$, 当且仅当 $x=y=\sqrt{e}$ 时, 等号成立, 所以 $\ln x+\ln y\geq1$, 即 $\ln xy\geq1$, 所以 $xy\geq e$.

答案:A

知识点：基本不等式

难度：1

题目：已知函数 $f(x)=|\lg x|$, 若 $a\neq b$, 且 $f(a)=f(b)$, 则$a+b$ 的取值范围是（　　）

A.$(1,+\infty)$ B.$[1,+\infty)$

C.$(2,+\infty)$ D.$[2,+\infty)$

解析: 由已知得 $|\lg a|=|\lg b|$,$a>0$,$b>0$,

所以 $\lg a=\lg b$ 或 $\lg a=-\lg b$.

因为 $a\neq b$, 所以 $\lg a=\lg b$ 不成立,

所以只有 $\lg a=-\lg b$,

即 $\lg a+\lg b=0$, 所以 $ab=1$,$b=\frac{1}{a}$.

又 $a>0$,$a\neq b$, 所以$a+b=a+\frac{1}{a}>2$. 故选 C.

答案:C

知识点：基本不等式

难度：1

题目：若 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$, 则$a+b$ 的最小值是（　　）

A.$6+2\sqrt{3}$ B.$7+2\sqrt{3}$

C.$6+4\sqrt{3}$ D.$7+4\sqrt{3}$

解析: 由题意得

$$\begin{cases}\sqrt{ab}>0,\\ 3a+4b>0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}a>0,\\ b>0.\end{cases}$$

又 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$,

所以 $\log_4(3a+4b)=\log_4 ab$.

所以 $3a+4b=ab$, 所以 $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1$.

所以 $a+b=(a+b)(\frac{4}{a}+\frac{3}{b})=7+\frac{3a}{b}+\frac{4b}{a}\geq 7+2\sqrt{\frac{3a}{b}+\frac{4b}{a}}=7+4\sqrt{3}$, 当且仅当 $\frac{3a}{b}=\frac{4b}{a}$, 即 $a=4+2\sqrt{3}, b=3+2\sqrt{3}$ 时取等号, 故选 D.

答案:D

知识点：基本不等式

难度：1

题目：若正数 a,b,c 满足 $c^2+4bc+2ac+8ab=8$, 则 $a+2b+c$ 的最小值为（　　）

A. $\sqrt{3}$ B.2 $\sqrt{3}$ C.2 D.2 $\sqrt{3}$

解析: 方法一:$c^2+4bc+2ac+8ab=(c+2a)(c+4b)=8$,

因为 a,b,c 均为正数, 所以由基本不等式得 $(c+2a)(c+4b)\le(\frac{c+2a+c+4b}{den})^2$, 所以 $a+2b+c\ge 2\sqrt{2}$

当且仅当 $c+2a=c+4b$, 即 $a=2b$ 时, 等号成立.

方法二:$(a+2b+c)^2=a^2+4b^2+c^2+4ab+2ac+4bc$,

因为 $c^2+4bc+2ac+8ab=(c+2a)(c+4b)=8$, 所以 $(a+2b+c)^2=a^2+4b^2-4ab+8=(a-2b)^2+8\ge 8$, 所以 $a+2b+c\ge 2\sqrt{2}$

答案:D

知识点：基本不等式

难度：2

题目:若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$ 过点 (1,2), 则 $2a+b$ 的最小值为__________.

解析:∵ 直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 过点 (1,2),∴$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$.

$\because a>0,b>0,\therefore 2a+b=(2a+b)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})=4+(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b})\ge 4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=8$

当且仅当 $b=2a$ 时 “=” 成立.

答案:8

知识点：基本不等式

难度：2

题目：若 $a,b\in\mathrm{R},ab>0$, 则 $\frac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为__________.

解析:∵$a,b\in\mathrm{R}$, 且 $ab>0$,

$\therefore\ \frac{a^4+4b^4+1}{ab}\ge\frac{4a^2b^2+1}{ab}=4ab+\frac{1}{ab}\ge 4$

(当且仅当 $\begin{cases}a^2=2b^2,\\4ab=\frac{1}{ab}\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2=\frac{\sqrt{2}}{2},\\b^2=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$ 时取等号)

答案:4

知识点：基本不等式

难度：1

题目：已知 $x>0,y>0$, 且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$, 若 $x+2y>m^2+2m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是__________.

解析: 因为 $x>0,y>0$, 且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$,

所以 $x+2y=(x+2y)(\frac{2}{x}+\frac{1}{y})=4+(\frac{4y}{x}+\frac{x}{y})\ge 4+2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=8$

, 当且仅当 $\frac{4y}{x}=\frac{x}{y}$, 即 $x=4,y=2$ 时,$x+2y$ 取得最小值 8,

所以 $m^2+2m<8$, 解得$-4<m<2$.

答案:(-4,2)

知识点：基本不等式

难度：1

题目：已知正常数 a,b 和正变数 x,y, 满足 $a+b=10,\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,x+y$ 的最小值为 18, 求 a,b 的值.

答案：由已知得 $x+y=(x+y)\cdot=(x+y)\cdot(\frac{a}{x}+\frac{b}{y})=a+b+\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y}\geq a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

当且仅当 $\begin{cases}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,\\ \frac{ay}{x}+\frac{bx}{y},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=a+\sqrt{ab},\\ y=b+\sqrt{ab}\end{cases}$ 时等号成立, 所以 $x+y$ 的最小值为 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=18$

又 $a+b=10$, 所以 $ab=16$.

所以 a,b 是方程 x^2-$10x+16=0$ 的两根, 所以 $a=2,b=8$ 或 $a=8,b=2$.

知识点：基本不等式

难度：2

题目：已知 a,b 都是正实数, 且 $a+b=1$.

(1) 求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 4$;

(2) 求 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$ 的最小值.

答案：(1) 证明因为 $a+b=1,a>0,b>0$,

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立. 所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 4$.

(2) 解因为 $a+b=1,a>0,b>0$,

所以 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq 2\cdot(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2})^2=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{ab})^2$

又 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, 所以 $0<ab\leq\frac{1}{4}$, 即 $\frac{1}{ab}\geq 4$,

所以 $1+\frac{1}{ab}\geq 5$

所以 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

所以 $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$ 的最小值为 $\frac{25}{2}$.

知识点：基本不等式

难度：1

题目：某单位用 2 160 万元购得一块空地, 计划在该块地上建造一栋至少 10 层, 每层 2 000 平方米的楼房. 经测算, 若将楼房建为 $x(x\geq 10)$ 层, 则每平方米的平均建筑费用为 $560+48x$(单位: 元). 为了使楼房每平方米的平均综合费用最少, 该楼房应建为多少层?

注: 平均综合费用 = 平均建筑费用 + 平均购地费用, 平均购地费用 =

答案：设楼房每平方米的平均综合费用为 $f(x)$ 元,

则 $f(x)=560+48x+\frac{2160\times10000}{2000x}$

$=560+48x+\frac{10800}{x}(x\geq10,x\in N_+)$,

所以 $f(x)=560+48x+\frac{10800}{x}$

$\geq560+2\sqrt{48x\frac{10800}{x}}=2\ 000$,

当且仅当 $48x=\frac{10800}{x}$, 即 $x=15$ 时, 等号成立.

因此, 当 $x=15$ 时,$f(x)$ 取最小值 2 000.

答: 为了使楼房每平方米的平均综合费用最少, 该楼房应建为 15 层.

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：1

题目：不等式 $2x+y+1<0$ 表示的平面区域在直线 $2x+y+1=0$ 的 (　　)

A. 右上方 B. 右下方 C. 左上方 D. 左下方

答案:D

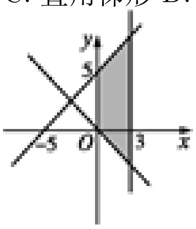
知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：1

题目：不等式组 $\begin{cases}x-y+5\geq0,\\0\leq x\leq3,\\x+y\geq\end{cases}$ 表示的平面区域是 (　　)

A. 矩形 B. 三角形

C. 直角梯形 D. 等腰梯形



解析: 画出平面区域 (如图阴影部分), 该区域是等腰梯形.

答案:D

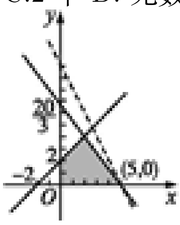
知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：1

题目：直线 $2x+y$-10=0 与不等式组 $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x - y \ge -2, \\ 4x + 3y \le 20. \end{cases}$ 表示的平面区域的公共点有 (　　)

A.0 个 B.1 个

C.2 个 D. 无数个



解析: 如图所示, 不等式组表示的平面区域为阴影部分, 直线与阴影只有一个公共点 (5,0).

答案:B

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：1

题目：若不等式组 $\begin{cases} x \le 1, \\ y \le 3, \\ 2x - y + \lambda - 1 \ge 0 \end{cases}$ 表示的平面区域经过四个象限, 则实数λ 的取值范围是 (　　)

A.(-∞,4) B.[1,2]

C.(1,4) D.(1,+∞)

答案:D

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：1

题目：若点 A(3,3),B(2,-1) 在直线 x+y-a=0 的两侧, 则 a 的取值范围是______.

解析: 由题意得 (3+3-a)(2-1-a)<0, 解得 1<a<6.

答案:(1,6)

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：1

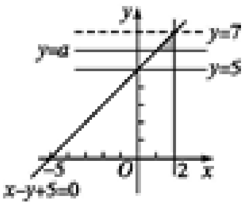
题目：若用三条直线 $x+2y=2,2x+y=2,x-y=3$ 围成一个三角形，则三角形内部区域 (不包括边界) 可用不等式 (组) 表示为__________.

答案: $\begin{cases} x+2y<2, \\ 2x+y>2, \\ x-y<3 \end{cases}$

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：1

题目：若不等式组 $\begin{cases} x-y+5\geq 0, \\ y\geq a, \\ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形，则 a 的取值范围是__________.



解析: 如图, 当直线 $y=a$ 位于直线 $y=5$ 和 $y=7$ 之间 (不含 $y=7$) 时满足条件, 故 a 的取值范围应是 $5\leq a<7$.

答案:[5,7)

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：1

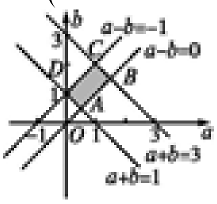
题目：设 $f(x)=x^2+ax+b$, 若 $1\leq f(-1)\leq 2,2\leq f(1)\leq 4$, 试求点 (a,b) 构成的平面区域的面积.

答案：$f(-1)=1-a+b,f(1)=1+a+b$,

由 $\begin{cases} 1\leq f(-1)\leq 2, \\ 2\leq f(1)\leq 4. \end{cases}$

得不等式组 $\begin{cases} 1\leq 1-a+b\leq 2, \\ 2\leq 1+a+b\leq 4, \end{cases}$

即 $\begin{cases} a-b \le 0, \\ a-b \ge -1, \\ a+b \ge 1, \\ a+b \le 3. \end{cases}$



作出不等式组表示的平面区域 (如图阴影部分所示).

可知平面区域为矩形 $ABCD,|AB| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},|BC| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以所求区域面积为 $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：1

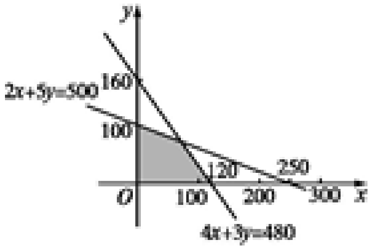
题目：某工厂生产甲、乙两种产品，需要经过金工和装配两个车间加工，有关数据如下表:

加工时间/(小时/件)		产品		总有效工时/小时
		甲	乙	
车间	金工	4	3	480
	装配	2	5	500

列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域.

答案：设分别生产甲、乙两种产品 x 件和 y 件，于是满足条件 $\begin{cases} 4x+3y \le 480, \\ 2x+5y \le 500, \\ x \in N, \\ y \in N, \end{cases}$

所以满足的生产条件是图中阴影部分中的整数点.



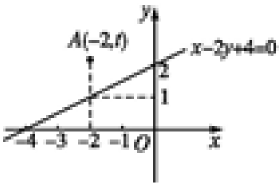
知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：2

题目：在平面直角坐标系中, 若点 $A(-2,t)$ 在直线 x-2y+4=0 的上方, 则 t 的取值范围是 (　　)

A.(-∞,1) B.(1,+∞)

C.(-1,+∞) D.(0,1)



解析: 在直线方程 x-2y+4=0 中, 令 x=-2, 则 y=1, 则点 (-2,1) 在直线 x-2y+4=0 上, 又点 (-2,t) 在直线 x-2y+4=0 的上方, 由图可知,t 的取值范围是 t>1, 故选 B.

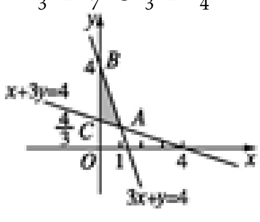
答案:B

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：2

题目：若不等式组 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x+3y \geq 4, \\ 3x+y \leq 4 \end{cases}$ 所表示的平面区域被直线$y=kx+\frac{4}{3}$分为面积相等的两部分, 则 k 的值是 (　　)

A.$\frac{7}{3}$ B.$\frac{3}{7}$ C.$\frac{4}{3}$ D.$\frac{3}{4}$



解析: 不等式组表示的平面区域是如图所示阴影部分的 △ABC.

由 $\begin{cases} x+3y=4, \\ 3x+y=4. \end{cases}$ 得 $A(1,1)$,

又 $B(0,4),C(0,\frac{4}{3})$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(4-\frac{4}{3})\times 1=\frac{4}{3}$

设$y=kx+\frac{4}{3}$ 与 $3x+y=4$ 的交点为 $D(x_D,y_D)$,

则 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}$,

所以 $x_D=\frac{1}{2}$, 所以 $y_D=\frac{5}{2}$,

所以 $\frac{5}{2}=k\times\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$, 所以 $k=\frac{7}{3}$

答案:A

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：2

题目：已知点 (1,2) 和点 (-1,3) 在直线 $2x+ay-1=0$ 的同一侧, 则实数 a 的取值范围是________________.

解析: 因为 $(2a+1)(3a-3)>0$,

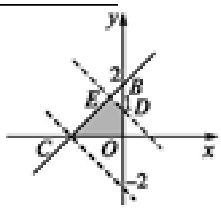
所以 $a<-\frac{1}{2}$ 或 $a>1$

答案:$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：2

题目：若区域 A 为不等式组 $\begin{cases} x\le 0, \\ y\ge 0, \\ y-x\le 2 \end{cases}$ 表示的平面区域, 则当 a 从-2 连续变化到 1 时, 动直线$x+y=a$ 扫过 A 中的那部分区域的面积为__________.



解析: 如图, 区域 A 表示的平面区域为 $\triangle OBC$ 内部及其边界组成的图形, 当 a 从-2 连续变化到 1 时扫过的区域为四边形 $ODEC$ 所围成的区域.

又 $D(0,1),B(0,2),E(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}),C(-2,0)$.

所以 $S_{\text{四边形 ODEC}}=S_{\triangle OBC}-S_{\triangle BDE}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

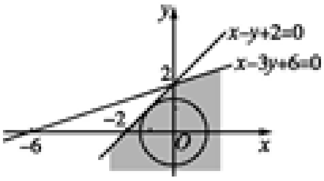
答案:$\frac{7}{4}$

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：2

题目：以原点为圆心的圆全部在不等式组 $\begin{cases} x-3y+6\geq 0, \\ x-y+2\geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域的内部, 则圆的面积的最大值为__________.

解析: 根据条件画出平面区域如图中阴影所示, 要使以原点为圆心的圆面积最大, 则圆与直线 x-y+2=0 相切. 此时半径 $r=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 此时圆面积为 $S=\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$

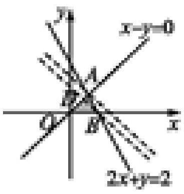


答案:2π

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：2

题目：若不等式组 $\begin{cases} x-y\geq 0, \\ 2x+y\leq 2, \\ y\geq 0, \\ x+y\leq a. \end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值范围是______________.



解析: 不等式表示的平面区域如图,

当 x+y=a 过 $A(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 时, 表示的区域是 $\triangle AOB$, 此时 a=$\frac{4}{3}$

当 a> $\frac{4}{3}$ 时, 表示区域是三角形.

当 x+y=a 过 B(1,0) 时, 表示的区域是 $\triangle DOB$, 此时 a=1; 当 0<a<1 时, 表示区域是三角形; 当 a<0 时, 不表示任何区域, 当 1<a< $\frac{4}{3}$ 时, 表示区域是四边形.

故当 0<a≤1 或 $a\geq\frac{4}{3}$ 时, 表示的平面区域为三角形.

答案:$(0,1]\cup[\frac{4}{3},+\infty)$

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：2

题目：已知点 $P(1,-2)$ 及其关于原点对称点均在不等式 $2x+by+1>0$ 表示的平面区域内, 求 b 的取值范围.

答案：点 $P(1,-2)$ 关于原点对称点为 $P'(-1,2)$,

由题意知 $\begin{cases} 2-2b+1>0, \\ -2+2b+1>0, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<b<\frac{3}{2}$

故满足条件的 b 的取值范围 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

知识点：二元一次不等式 (组) 的解集

难度：2

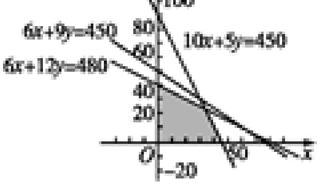
题目：一个小型家具厂计划生产两种类型的桌子 A 和 B. 每类桌子都要经过打磨、着色、上漆三道工序. 桌子 A 需要 10 min 打磨,6 min 着色,6 min 上漆; 桌子 B 需要 5 min 打磨,12 min 着色,9 min 上漆. 如果一个工人每天打磨和上漆分别至多工作 450 min, 着色每天至多工作 480 min, 请列出满足生产条件的数学关系式, 并在直角坐标系中画出每天生产两类桌子数量的允许范围.

答案：设家具厂每天生产 A 类桌子 x 张,B 类桌子 y 张.

对于 A 类 x 张桌子需要打磨 $10x$ min, 着色 $6x$ min, 上漆 $6x$ min; 对于 B 类 y 张桌子需要打磨 $5y$ min, 着色 $12y$ min, 上漆 $9y$ min.

所以题目中包含的限制条件为 $\begin{cases} 10x+5y\le 450, \\ 6x+12y\le 480, \\ 6x+9y\le 450, \\ x\in N, \\ y\in N. \end{cases}$

上述条件表示的平面区域如图中阴影部分所示, 每天生产两类桌子数量的允许范围为阴影内的整数点.



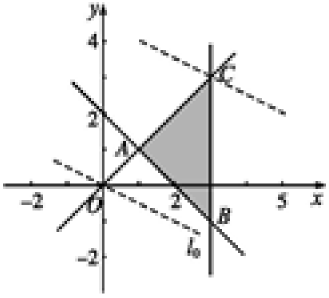
知识点：简单线性规划

难度：1

题目：若 x,y 满足 $\begin{cases} x \le 3, \\ x + y \ge 2, \\ y \le x. \end{cases}$ 则 x+2y 的最大值为 (　　)

A.1 B.3 C.5 D.9

解析: 由题意画出可行域 (如图).



设 z=x+2y, 则 z=x+2y 表示斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的一组平行线, 当过点 C(3,3) 时, 目标函数取得最大值 z_{max}=3+2×3=9. 故选 D.

答案:D

知识点：简单线性规划

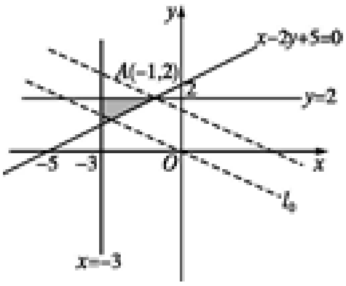
难度：1

题目：已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y + 5 \le 0, \\ x + 3 \ge 0, \\ y \le 2 \end{cases}$ 则 z=x+2y 的最大值是 (　　)

A.-3 B.-1

C.1 D.3

解析: 可行域为如图所示阴影部分 (包括边界).



把 z=x+2y 变形为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$, 作直线 l_0:$y = -\frac{1}{2}x$ 并向上平移, 当直线

过点 A 时,z 取最大值, 易求点 A 的坐标为 (-1,2), 所以 z_{max}=-1+2×2=3.

答案:D

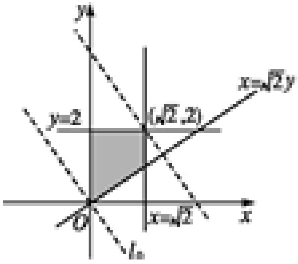
知识点：简单线性规划

难度：1

题目:已知在平面直角坐标系 xOy 内的区域 D 由不等式组 $\begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{2}, \\ y \le 2, \\ x \le \sqrt{2}y \end{cases}$ 给定. 若 $M(x,y)$ 为 D 上的动点, 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$, 则 $z = \vec{OM} \cdot \vec{OA}$ 的最大值为 (　　)

A.4 $\sqrt{2}$ B.3 $\sqrt{2}$ C.4 D.3

解析: 画出可行域, 而 $z = \vec{OM} \cdot \vec{OA} = \sqrt{2}(x+y)$, 所以 $y = -\sqrt{2}x + z$ 令 l_0:$y = -\sqrt{2}x$, 将 l_0 平移到过点 $(\sqrt{2},2)$ 时, 截距 z 有最大值, 故 z_{max}= $\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 2 = 4$



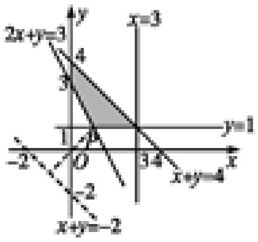
答案:C

知识点：简单线性规划

难度：1

题目：已知 x,y 满足 $\begin{cases} x + y \le 4, \\ 2x + y \ge 3, \\ 0 \le x \le 3, \\ y \ge 1. \end{cases}$ 则点 $P(x,y)$ 到直线 $x + y = -2$ 的距离的最小值为 (　　)

A. $\sqrt{2}$ B.2 $\sqrt{2}$ C.$\frac{\sqrt{2}}{2}$ D.$\frac{5\sqrt{2}}{2}$



解析: 不等式组

$\begin{cases} x+y\le 4, \\ 2x+y\ge 3, \\ 0\le x\le 3, \\ y\ge 1. \end{cases}$ 所表示的可行域如图阴影部分.

其中点 $P(1,1)$ 到直线的距离最短, 其最小值为 $\frac{2+2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. 故选 B.

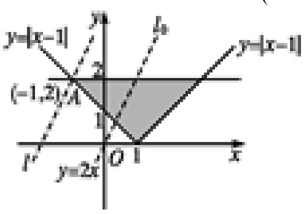
答案:B

知识点：简单线性规划

难度：1

题目：若点 (x,y) 位于曲线 $y=|x-1|$ 与 y=2 所围成的封闭区域, 则 $2x$-y 的最小值为__________.

解析: 由 $y=|x-1|=\begin{cases} x-1, x\ge 1, \\ -x+1, x<1 \end{cases}$ 及 y=2 画出可行域如图阴影部分.



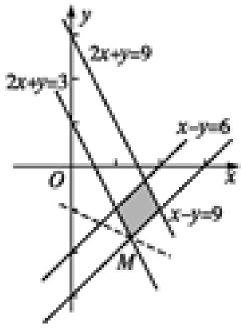
令 $2x$-y=z, 则 y=$2x$-z, 画直线 l_0:y=$2x$ 并平移到过点 A(-1,2) 时,-z 最大, 即 z_{min}=2×(-1)-2=-4.

答案:-4

知识点：简单线性规划

难度：1

题目：若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} 3\le 2x+y\le 9, \\ 6\le x-y\le 9. \end{cases}$ 则 z=x+$2y$ 的最小值为__________.



解析: 根据 $\begin{cases}3 \le 2x + y \le 9,\\ 6 \le x - y \le 9\end{cases}$ 得可行域如图, 根据 $z = x + 2y$, 得 $y = -\frac{x}{2} + \frac{z}{2}$, 平移直线 $y = -\frac{1}{2}$, 在点 M 处 z 取得最小值.

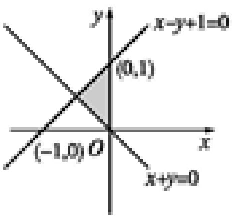
由 $\begin{cases}x - y = 9,\\ 2x + y = 3\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x = 4,\\ y = -5\end{cases}$ 此时 $z_{min} = 4 + 2 \times (-5) = -6$

答案:-6

知识点: 简单线性规划

难度: 1

题目:若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x - y + 1 \ge 0,\\ x + y \ge 0,\\ x \le 0\end{cases}$ 则 $z=3^{x+2y}$ 的最小值为__________.



解析: 不等式组所表示的可行域如图阴影部分.

令 $t = x + 2y$, 则当直线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}t$ 经过原点 $O(0,0)$ 时,$\frac{1}{2}t$ 取最小值, 即 t 的最小值为 0, 则 $z=3^{x+2y}$ 的最小值为 $3^0=1$.

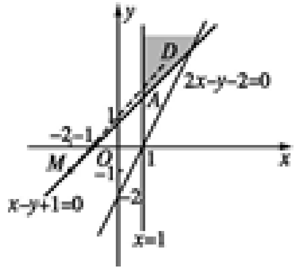
答案:1

知识点: 简单线性规划

难度: 1

题目：若实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x-y+1 \leq 0, \\ 2x-y-2 \leq 0 \end{cases}$，则 $(x+2)^2+(y+1)^2$ 的最小值为__________.

解析: 画出不等式组表示的平面区域, 如图阴影部分.



$\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}$ 表示可行域内的点 $D(x,y)$ 与定点 $M(-2,-1)$ 间的距离. 显然当点 D 在点 $A(1,2)$ 时,$|DM|$ 最小, 这时 $|DM|=3\sqrt{2}$, 故 $(x+2)^2+(y+1)^2$ 的最小值是 18.

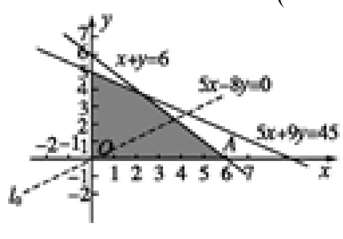
答案:18

知识点：简单线性规划

难度：1

题目：已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 6, \\ 5x+9y \leq 45, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$ 求 $z=5x-8y$ 的最大值.

答案：作出不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 6, \\ 5x+9y \leq 45, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$ 表示的可行域, 如图阴影部分.



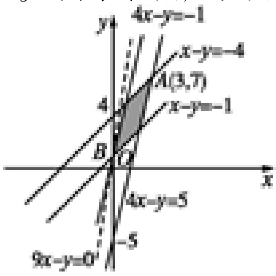
作直线 l_0:$5x-8y=0$, 平移直线 l_0, 由图可知, 当直线平移到经过 A 点时,z 取最大值. 解方程组 $\begin{cases} x+y=6, \\ y=0 \end{cases}$ 得 $A(6,0)$, 所以 $z_{max}=5\times6-8\times0=30$.

知识点：简单线性规划

难度：1

题目：已知-4≤a-b≤-1,-1≤4a-b≤5, 求 9a-b 的取值范围.

答案：如图所示, 令 a=x,b=y,z=9a-b, 即已知-4≤x-y≤-1,-1≤4x-y≤5, 求 z=9x-y 的取值范围, 画出不等式表示的可行域如图阴影部分.



由 z=9x-y, 得 y=9x-z, 当直线过点 A 时,z 取最大值, 当直线过点 B 时,z 取最小值.

由 $\begin{cases}4x-y=5,\\x-y=-4\end{cases}$ 得 A(3,7),

由 $\begin{cases}4x-y=-1,\\x-y=-1\end{cases}$ 得 B(0,1),

所以 z_{max}=9×3-7=20,z_{min}=-1,

所以 9a-b 的取值范围是 [-1,20].

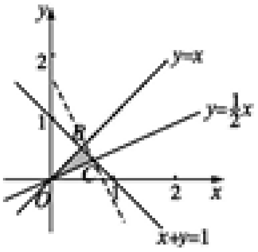
知识点：简单线性规划

难度：2

题目：在约束条件 $\begin{cases}y\le x,\\y\ge \frac{1}{2}x,\\x+y\le 1\end{cases}$ 下, 目标函数 $z=x+\frac{1}{2}y$ 的最大值为 (
)

A.$\frac{1}{4}$ B.$\frac{3}{4}$ C.$\frac{5}{6}$ D.$\frac{5}{3}$

解析: 由 $z=x+\frac{1}{2}y$, 得 $y=-2x+2z$



作出可行域如图阴影部分, 平移直线 y=-2x+2z, 当直线经过点 C 时, 直线 y=-2x+2z 在 y 轴上的截距最大, 此时 z 最大.

由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x, \\ x + y = 1 \end{cases}$ 解得点 C 坐标为 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, 代入 $z = x + \frac{1}{2}y$, 得 $z = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

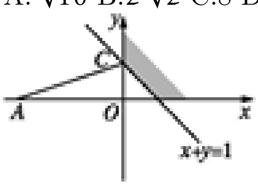
答案:C

知识点：简单线性规划

难度：2

题目：已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \geq 1 \end{cases}$ 则 $(x+3)^2 + y^2$ 的最小值为(　　)

A. $\sqrt{10}$ B.2 $\sqrt{2}$ C.8 D.10



解析: 画出可行域 (如图).

$(x+3)^2 + y^2$ 表示点 A(-3,0) 与可行域内点 (x,y) 间距离的平方. 显然 $|AC|$ 长度最小,

所以 $|AC|^2 = (0+3)^2 + (1-0)^2 = 10$

答案:D

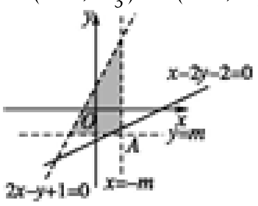
知识点：简单线性规划

难度：2

题目：若关于 x,y 的不等式组 $\begin{cases}2x-y+1>0,\\x+m<0,\\y-m>0\end{cases}$ 表示的平面区域内存在点 $P(x_0,y_0)$, 满足 x_0-2y_0=2. 则 m 的取值范围是 (　　)

A.$(-\infty,\frac{4}{3})$ B.$(-\infty,\frac{1}{3})$

C.$(-\infty,-\frac{2}{3})$ D.$(-\infty,-\frac{5}{3})$



解析: 由线性约束条件可画出如图所示的可行域, 要使可行域内存在点 $P(x_0,y_0)$, 使 x_0-2y_0=2 成立, 只需点 A(-m,m) 在直线 x-2y-2=0 的下方即可,

即-m-2m-2>0, 解得 $m<-\frac{2}{3}$. 故选 C.

答案:C

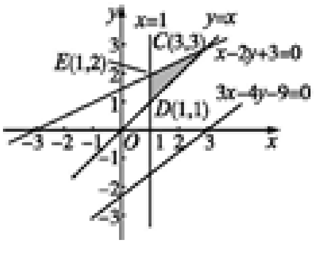
知识点：简单线性规划

难度：2

题目：设不等式组 $\begin{cases}x\geq 1,\\x-2y+3\geq 0,\\y\geq x\end{cases}$ 所表示的平面区域是Ω_1, 平面区域Ω_2 与Ω_1 关于直线 3x-4y-9=0 对称. 对于Ω_1 中的任意点 A 与Ω_2 中的任意点 B, 则 $|AB|$ 的最小值为 (　　)

A.$\frac{28}{5}$ B.4 C.$\frac{12}{5}$ D.2

解析: 如图所示. 由约束条件作出可行域, 得 D(1,1),E(1,2),C(3,3).



要求 $|AB|_{min}$, 可通过求可行域内的点到直线 3x-4y-9=0 距离最小值的 2 倍来求得.

经分析, 点 D(1,1) 到直线 3x-4y-9=0 的距离 $d=\frac{|3\times 1+4\times 1-9|}{5}=2$ 最小, 故

$|AB|_{min}=4.$

答案:B

知识点：简单线性规划

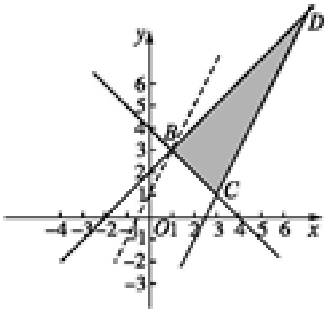
难度：2

题目：已知实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases} x-y+2\geq 0, \\ x+y-4\geq 0, \\ 2x-y-5\leq 0 \end{cases}$ 若目标函数 $z=y-ax$ 取得最大值时的唯一解是 (1,3), 则实数 a 的取值范围为 (　　)

A.(-∞,-1) B.(0,1)

C.[1,+∞) D.(1,+∞)

解析: 作出不等式组对应的平面区域如图阴影部分所示, 由 $z=y-ax$, 得 $y=ax+z$, 要使目标函数 $y=ax+z$ 仅在点 (1,3) 处取最大值, 则只需直线 $y=ax+z$ 仅在点 $B(1,3)$ 处的截距最大, 由图像可知 $a>k_{BD}$, 因为 $k_{BD}=1$, 所以 $a>1$, 即 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.



答案:D

知识点：简单线性规划

难度：2

题目：设实数 x,y 满足 $\begin{cases} x-y-2\leq 0, \\ x+2y-5\geq 0, \\ y-2\leq 0 \end{cases}$，则 $z=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$ 的取值范围是____________.

解析: 令 $k=\frac{y}{x}$, 则 $y=kx$. 因为 $x\neq 0$, 所以 k 存在, 直线 $y=kx$ 恒过原点, 而在可行域 $\begin{cases} x-y-2\leq 0, \\ x+2y-5\geq 0, \\ y-2\leq 0 \end{cases}$ 中, 当直线过边界点 (1,2) 时, 斜率有最

大值,k=2; 当直线过边界点 (3,1) 时, 斜率有最小值,$k=\frac{1}{3}$, 所以斜率 k 的取值范围是 $[\frac{1}{3},2]$, 又 $z=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=k+\frac{1}{k}$, 利用函数单调性的定义可知 $k\in[\frac{1}{3},1]$ 时,$z=k+\frac{1}{4}$ 为减函数;$k\in[1,2]$ 时,$z=k+\frac{1}{4}$ 为增函数, 可得 z 的取值范围为 $[2,\frac{10}{3}]$.

答案:$[2,\frac{10}{3}]$

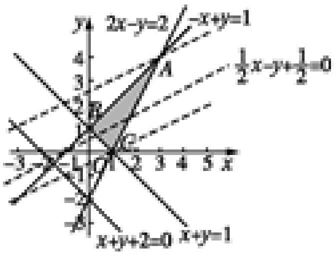
知识点：简单线性规划

难度：2

题目：若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geq 1,\\ -x+y\leq 1,\\ 2x-y\leq 2\end{cases}$ (1) 求目标函数 $z=\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}$ 的最值;

(2) 求点 $P(x,y)$ 到直线 y=-x-2 的距离的最大值.

答案：(1) 根据约束条件, 作出可行域如图, 则直线 $x+y=1$,$-x+y=1$,$2x-y=2$ 的交点分别为 $A(3,4)$,$B(0,1)$,$C(1,0)$.



平移直线 $\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}=0$, 由图像可知过点 A 时,z 取得最小值,

z_{min}=$\frac{1}{2}\times 3-4+\frac{1}{2}=-2$,

过点 C 时,z 取得最大值,z_{max}+$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

故 z 的最大值为 1, 最小值为-2.

(2) 由图像可知, 所求的最大值即是点 A 到直线 $x+y+2=0$ 的距离, 则 $d=\frac{|3+4+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

1	2	5		
2	0	2	3	3
3	1	2	3	

知识点：简单线性规划

难度：2

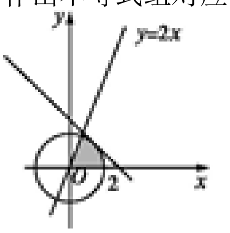
题目：导学号 33194074 在直角坐标系 xOy 中,O 为坐标原点, 点 M 的横、纵坐标分别为茎叶图中的中位数和众数, 若点 $N(x,y)$ 的

坐标满足 $\begin{cases} x^2+y^2\le 4, \\ 2x-y\ge 0, \\ y\ge 0 \end{cases}$，求 $\vec{OM}\cdot\vec{ON}$ 的最大值.

答案：由茎叶图可得中位数为 23, 众数为 23, 所以点 M 为 (23,23),

所以 $\vec{OM}\cdot\vec{ON}=23x+23y$ 设 $z=23x+23y$

作出不等式组对应的平面区域如图.



作一平行于 $z=23x+23y$ 的直线, 当直线和圆相切时,$z=23x+23y$ 取得最大值.

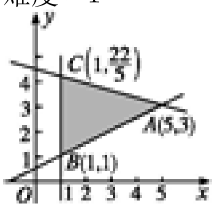
由圆心到直线的距离 $d=\frac{|z|}{\sqrt{23^2+23^2}}=\frac{|z|}{23\sqrt{2}}=2$,

解得 $|z|=46\sqrt{2}$ 所以 $z=46\sqrt{2}$ 或 $z=-46\sqrt{2}$(舍去),

故 $\vec{OM}\cdot\vec{ON}$ 的最大值是 $46\sqrt{2}$

知识点：简单线性规划

难度：1



题目：已知点 (x,y) 构成的平面区域如图阴影部分,$z=mx+y$(m 为常数) 在平面区域内取得最大值的最优解有无数多个, 则 m 的值为 (　　)

A.$-\frac{7}{20}$ B.$\frac{7}{20}$

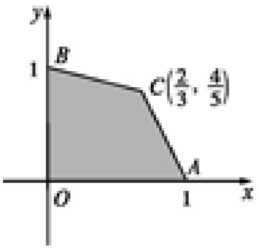
C.$\frac{1}{2}$ D.$\frac{7}{20}$ 或 $\frac{1}{2}$

解析: 观察平面区域可知直线 $y=-mx+z$ 与直线 AC 重合, 则 $-m=k_{AC}=\frac{\frac{22}{5}-3}{1-5}=-\frac{7}{20}$, 解得 $m=\frac{7}{20}$

答案:B

知识点：简单线性规划

难度：1



题目：如图，目标函数 z=ax-y 的可行域为四边形 $OACB$(含边界)，若 $C(\frac{2}{3},\frac{4}{5})$ 是该目标函数 z=ax-y 唯一的最优解，则 a 的取值范围是 (　　)

A.$(-\frac{10}{3},-\frac{5}{12})$

B.$(-\frac{12}{5},-\frac{3}{10})$

C.$(\frac{3}{10},\frac{12}{5})$

D.$(\frac{12}{5},\frac{3}{10})$

解析: 最优解为点 C, 则目标函数表示的直线斜率在直线 BC 与 AC 的斜率之间.

因为 $K_{BC}=-\frac{3}{10}$,$k_{AC}=-\frac{12}{5}$, 所以 $a\in(-\frac{12}{5},-\frac{3}{10})$

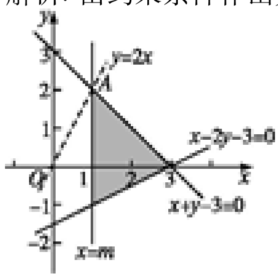
答案:B

知识点：简单线性规划

难度：1

题目：若直线 y=$2x$ 上存在点 (x,y) 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-3\le 0,\\ x-2y-3\le 0,\\ x\ge m.\end{cases}$ 则实数 m 的最大值为__________.

解析: 由约束条件作出其可行域如图.



由图可知，当直线 x=m 过直线 y=$2x$ 与 x+y-3=0 的交点 (1,2) 时,m 取得最大值，此时 m=1.

答案:1

知识点：简单线性规划

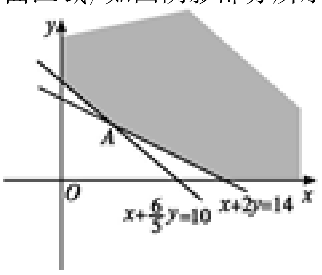
难度：1

题目：某公司租赁甲、乙两种设备生产 A,B 两类产品, 甲种设备每天能生产 A 类产品 5 件和 B 类产品 10 件, 乙种设备每天能生产 A 类产品 6 件和 B 类产品 20 件. 已知设备甲每天的租赁费为 200 元, 设备乙每天的租赁费为 300 元. 现该公司至少要生产 A 类产品 50 件,B 类产品 140 件, 则所需租赁费最少为__________ 元.

解析: 设甲种设备需要生产 x 天, 乙种设备需要生产 y 天, 此时该公司所需租赁费为 z 元,

则 z=200x+300y.

又因为 $\begin{cases} 5x+6y\geq 50, \\ 10x+20y\geq 140, \\ x\in N, \\ y\in N \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+\frac{6}{5}y\geq 10, \\ x+2y\geq 14, \\ x\in N, \\ y\in N. \end{cases}$ 画出该不等式组表示的平面区域, 如图阴影部分所示.



解 $\begin{cases} x+\frac{6}{5}y=10, \\ x+2y=14. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=4, \\ y=5 \end{cases}$ 即点 $A(4,5)$.

由 $z=200x+300y$,

得直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{300}$ 过点 $A(4,5)$ 时,

z=200x+300y 取得最小值, 为 2 300 元.

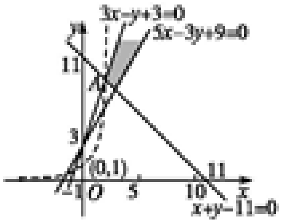
答案:2 300

知识点：简单线性规划

难度：1

题目：设不等式组 $\begin{cases} x+y-11\geq 0, \\ 3x-y+3\geq 0, \\ 5x-3y+9\leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D. 若指数函数 $y=a^x$ 的图像上存在区域 D 上的点, 则 a 的取值范围是__________.

解析: 画出可行域如图阴影部分, 易知当 $a\in(0,1)$ 时不符合题意, 故 $a>1$.



由 $\begin{cases} x+y-11=0, \\ 3x-y+3=0 \end{cases}$ 得交点 $A(2,9)$.

由图像可知, 当 $y=a^x$ 的图像经过该交点 A 时,a 取最大值, 此时 $a^2=9$, 所以 $a=3$.

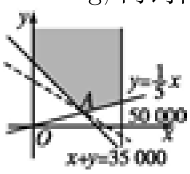
故 $a\in(1,3]$.

答案:(1,3]

知识点：简单线性规划

难度：1

题目：某养鸡场有 1 万只鸡, 用动物饲料和谷物饲料混合喂养. 每天每只鸡平均吃混合饲料 0.5 kg, 其中动物饲料不能少于谷物饲料的 $\frac{1}{5}$. 动物饲料每千克 0.9 元, 谷物饲料每千克 0.28 元, 饲料公司每周仅保证供应谷物饲料 50 000 kg, 问饲料怎样混合, 才使成本最低?



答案：设每周需用谷物饲料 x kg, 动物饲料 y kg, 每周总的饲料费用为 z 元, 则 $\begin{cases} x+y\geq 3500, \\ y\geq \frac{1}{5}x, \\ 0\leq x\leq 50000, \\ y\geq 0 \end{cases}$

而 $z=0.28x+0.9y$, 如图, 作出不等式组所表示的平面区域, 即可行域. 作一组平行直线 $0.28x+0.9y=t$ 其中经过可行域内的点 A 时,z 最小, 又直线 $x+y=35\ 000$ 和直线 $y=\frac{1}{5}x$ 的交点 $A(\frac{87500}{3},\frac{17500}{3})$

即 $x=\frac{87500}{3}$,$y=\frac{17500}{3}$ 时, 饲料费用最低.

答: 谷物饲料和动物饲料应按 5:1 的比例混合, 此时成本最低.

知识点：简单线性规划

难度：2

题目：某学校用 800 元购买 A,B 两种教学用品,A 种用品每件 100 元,B 种用品每件 160 元, 两种用品至少各买一件, 要使剩下的钱最少,A,B 两种用品应各买的件数为 (　　)

A.1 件,4 件 B.3 件,3 件

C.4 件,2 件 D. 不确定

解析: 设买 A 种用品 x 件,B 种用品 y 件, 剩下的钱为 z 元,

则 $\begin{cases} x \geq 1, x \in N, \\ y \geq 1, y \in N, \\ 100x + 160 \leq 800. \end{cases}$

求 z=800-100x-160y 取得最小值时的整数解 (x,y), 用图解法求得整数解为 (3,3).

答案:B

知识点：简单线性规划

难度：2

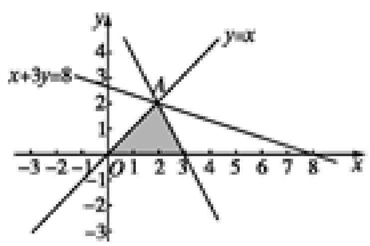
题目：已知 x,y 满足条件 $\begin{cases} y \geq 0, \\ y \leq x, \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数), 若目标函数 $z = x + 3y$ 的最大值为 8, 则 k=(　　)

A.-16 B.-6 C.$-\frac{8}{3}$ D.6

解析: 由 $z = x + 3y$ 得 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{z}{3}$

先作出 $\begin{cases} y \geq 0, \\ y \leq x \end{cases}$ 的图像, 因为目标函数 $z = x + 3y$ 的最大值为 8,

所以直线 $2x + y + k = 0$ 过直线 $x + 3y = 8$ 与直线 y=x 的交点 A, 由 $\begin{cases} x + 3y = 8, \\ y = x \end{cases}$ 解得 $A(2,2)$, 代入直线 $2x + y + k = 0$, 得 k=-6. 故选 B.



答案:B

知识点：简单线性规划

难度：2

题目：已知在图中的可行域内 (阴影部分, 且包括边界), 目标函数 $z = x + ay$ 取得最小值的最优解有无数个, 则 a 的值为 (　　)

A.-3 B.3

C.-1 D.1

解析: 当 a=0 时,z=x. 仅当直线 x=z 过点 $A(1,1)$ 时,

目标函数 z 有最小值 1, 与题意不符.

当 a>0 时,$y = -\frac{1}{a}x + \frac{z}{a}$

斜率 $k = -\frac{1}{a} < 0$, 仅当直线 $z = x + ay$ 过点 $A(1,1)$ 时, 直线在 y 轴的截距最小, 此时 z 也最小,

与目标函数取得最小值的最优解有无数个矛盾.

当 $a < 0$ 时,$y = -\frac{1}{a} + \frac{z}{a}$, 斜率 $k = -\frac{1}{a} > 0$,

为使目标函数 z 取得最小值的最优解有无数个,

当且仅当斜率 $-\frac{1}{a} = k_{AO}$, 即 $-\frac{1}{a} = \frac{1}{3}$, 故 $a = -3$

答案:A

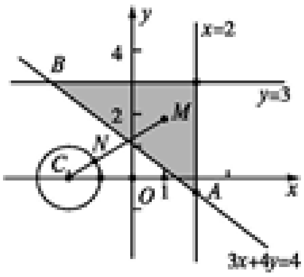
知识点：简单线性规划

难度：2

题目：已知点 M 在不等式组 $\begin{cases} x - 2 \le 0, \\ 3x + 4y \ge 4, \\ y - 3 \le 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域上, 点 N 在曲线 $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 上, 则 $|MN|$ 的最小值是 (　　)

A.$\frac{1}{2}$ B.1 C.$\frac{2\sqrt{10}}{3} - 1$ D.$\frac{2\sqrt{10}}{3}$

解析: 如图, 画出平面区域 (阴影部分所示),



由圆心 C(-2,0) 向直线 $3x$+$4y$-4=0 作垂线, 圆心 C(-2,0) 到直线 $3x$+$4y$-4=0 的距离为 $\frac{|3\times(-2)+4\times0-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$, 又圆的半径为 1, 所以可求得 $|MN|$ 的最小值是 1. 故选 B.

答案:B

知识点：简单线性规划

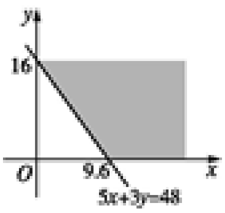
难度：2

题目：毕业庆典活动中, 某班团支部决定组织班里 48 名同学去水上公园坐船观赏风景, 于是先派一人去了解船只的租金情况, 看到的租金价格如下表, 则他们合理设计租船方案后, 所付租金最少为__________ 元.

船型	每只船限载人数	租金/(元/只)
大船	5	12
小船	3	8

解析: 设租大船 x 只, 小船 y 只,

则 $\begin{cases} x\in N, \\ y\in N, \\ 5x+3y\geq 48. \end{cases}$ 租金 $z=12x+8y$,



作出可行域如图, 由图可知, 当直线 $z=12x+8y$ 经过点 (9.6,0) 时,z 取最小值, 但 $x,y\in$N, 所以当 x=9,y=1 时,z_{min}=116.

答案:116

知识点：简单线性规划

难度：2

题目：铁矿石 A 和 B 的含铁率 a, 冶炼每万吨铁矿石的 CO_2 的排放量 b 及每万吨铁矿石的价格 c 如表:

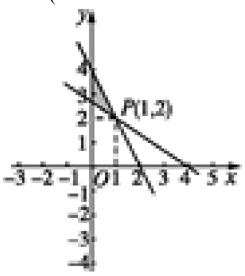
	a	b/万吨	c/百万元
A	50%	1	3
B	70%	0.5	6

某冶炼厂至少要生产 1.9 万吨铁, 若要求 CO_2 的排放量不超过 2 万吨, 则购买铁矿石的最少费用为__________ 百万元.

解析: 设购买铁矿石 A,B 分别为 x 万吨和 y 万吨,

购买铁矿石的费用为 z 百万元,

则 $\begin{cases} 0.5x+0.7y\geq 1.9, \\ x+0.5y\leq 2, \\ x\geq 0, \\ y\geq 0 \end{cases}$



目标函数 z=$3x$+$6y$, 作出可行域如图.

由 $\begin{cases} 0.5x+0.7y=1.9, \\ x+0.5y=2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

记 $P(1,2)$, 当目标函数 $z=3x+6y$ 过点 $P(1,2)$ 时,z 取到最小值 15.

答案:15

知识点：简单线性规划

难度：2

题目：电视台播放甲、乙两套连续剧, 每次播放连续剧时, 需要播放广告. 已知每次播放甲、乙两套连续剧时, 连续剧播放时长、广告播放时长、收视人次如下表所示:

	连续剧播放时长 (分钟)	广告播放时长 (分钟)	收视人次 (万)
甲	70	5	60
乙	60	5	25

已知电视台每周安排的甲、乙连续剧的总播放时间不多于 600 分钟, 广告的总播放时间不少于 30 分钟, 且甲连续剧播放的次数不多于乙连续剧播放次数的 2 倍. 分别用 x,y 表示每周计划播出的甲、乙两套连续剧的次数.

(1) 用 x,y 列出满足题目条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;

(2) 问电视台每周播出甲、乙两套连续剧各多少次, 才能使总收视人次最多?

答案:(1) 由已知,x,y 满足的数学关系式为 $\begin{cases}70x+60y\le 600,\\5x+5y\ge 30,\\x\le 2y,\\x\ge 0,\\y\ge 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}7x+6y\le 60,\\x+y\ge 6,\\x-2y\le 0,\\x\ge 0,\\y\ge 0.\end{cases}$

该二元一次不等式组所表示的平面区域为图 1 中的阴影部分:

(2) 设总收视人次为 z 万, 则目标函数为 $z=60x+25y$

考虑 $z=60x+25y$, 将它变形为 $y=-\frac{12}{5}x+\frac{z}{25}$, 这是斜率为 $-\frac{12}{5}$, 随 z 变化的一族平行直线.

$-\frac{z}{25}$ 为直线在 y 轴上的截距, 当 $\frac{z}{25}$ 取得最大值时,z 的值最大.

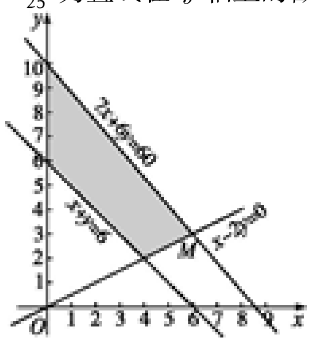


图 1

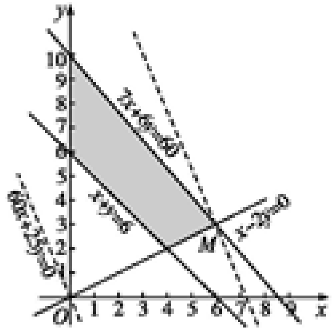


图 2

又因为 x,y 满足约束条件, 所以由图 2 可知, 当直线 $z=60x+25y$ 经过可行域上的点 M 时, 截距 $\frac{z}{25}$ 最大, 即 z 最大.

解方程组 $\begin{cases} 7x+6y=60, \\ x-2y=0. \end{cases}$ 得点 M 的坐标为 $(6,3)$.

所以, 电视台每周播出甲连续剧 6 次, 乙连续剧 3 次时才能使总收视人次最多.