

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Градимиp Бoжилoвић

Драган Олћан

Антоније Ђорђевић

# **ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ**

**Други деo**

**Сталне струје**

Треће издање

Академска мисаo  
Београд 2016.

Градимиr Божиловић, Драган Олћан, Антоније Ђорђевић

**ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ОСНОВА ЕЛЕКТРОТЕХНИКЕ**

**Други део**

**Сталне струје**

Треће издање

Рецензенти

др Владимир Петровић

др Милан Илић

|   |
|---|
| Одлуком Наставно-научног већа Електротехничког факултета<br>број 2898 од 20. октобра 2009. године ова књига је одобрена као<br>наставни материјал на Електротехничком факултету у Београду. |
|---|

Издавачи

Академска мисао

Електротехнички факултет

Београд

Дизајн корица

Зорица Марковић, академски сликар

Штампа

Академска мисао, Београд

Тираж 500 примерака

ИСБН 978-86-7466-622-7

## Предговор

Збирка задатака из Основа електротехнике, Сталне струје, излази као други од четири дела збирке која је намењена предметима групе Основи електротехнике, који се предају по наставном плану прве године Основних академских студија електротехнике и рачунарства на Електротехничком факултету Универзитета у Београду. Ти предмети су Основи електротехнике 1 и 2, Практикум из Основа електротехнике 1 и 2, и Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Овај помоћни уџбеник је проистекао из нарасле потребе за обједињеном збирком питања и задатака која са већ постојећим уџбеником „Основи електротехнике“ А. Ђорђевића (који је иницирао писање ове збирке) представља потребну и довољну литературу за предмете Основи електротехнике 1 и 2. Збирка у потпуности покрива градиво које се ради на вежбама, обезбеђује материјал за самостални рад студената, укључујући и проверу знања на задацима тежине испитних задатака и питања, а садржи и додатни материјал за проширивање знања.

Као и уџбеник „Основи електротехнике“, збирка је подељена у четири дела. Први део покрива електростатичко поље, други део поља и кола сталних струја, трећи део збирке обухвата стална магнетска поља и променљива електромагнетска поља, а четврти део се бави колима временски променљивих струја.

Задаци без звездице су уводни и основни, а заједно са тежим задацима, означеним једном звездицом, одговарају предметима Основи електротехнике 1 и 2. Задаци са две и три звездице представљају материјал за продубљивање знања, а део тих задатака је намењен и Практикумима из Основа електротехнике. Једноставнија питања и задаци покривају и тематске јединице које се обрађују на предмету Лабораторијске вежбе из Основа електротехнике.

Аутори се захваљују рецензентима ове збирке, предавачима на предметима Основи електротехнике 1 и 2, професору др инж. Владимиру Петровићу и професору др инж. Милану Илићу, на корисним сугестијама. Аутори се посебно захваљују професору др инж. Предрагу Пејовићу на сугестијама у вези са појединим поглављима збирке. Милан Ромић, студент Енергетског одсека и демонстратор при Лабораторији за Основе електротехнике, и Марија Јанковић, победница Електријаде 2007. године из Основа електротехнике, учествовали су у провери решења једног дела задатака из збирке, па им се аутори на томе захваљују.

Београд, септембар 2009.

Аутори

## Предговор другом издању

У овом издању су исправљене уочене грешке. Аутори се захваљује асистенту Слободану Савићу који је детаљно прочитао збирку и указао на неке од тих грешака.

Београд, август 2013.

Аутори

## Предговор трећем издању

У овом издању су исправљене уочене грешке.

Београд, август 2016.

Аутори

## Садржај

|  |     |
|--|-----|
| 1. Стално струјно поље .....                   | 1   |
| 2. Једноставна електрична кола .....           | 31  |
| 3. Сложена електрична кола .....               | 54  |
| 3.1. Кирхофови закони .....                    | 54  |
| 3.2. Метод контурних струја .....              | 85  |
| 3.3. Метод потенцијала чворова .....           | 98  |
| 3.4. Трансфигурације мрежа отпорника .....     | 116 |
| 4. Теореме .....                               | 131 |
| 4.1. Линеарност и суперпозиција .....          | 131 |
| 4.2. Компензација .....                        | 136 |
| 4.3. Тевененова и Нортонова теорема .....      | 151 |
| 4.4. Премештање генератора .....               | 193 |
| 4.5. Реципроцитет .....                        | 201 |
| 4.6. Прилагођење по снази .....                | 206 |
| 4.7. Симетрија и бисекција .....               | 218 |
| 5. Четворополи и контролисани генератори ..... | 235 |
| 5.1. Четворополи .....                         | 235 |
| 5.2. Контролисани генератори .....             | 261 |
| 6. Нелинеарна кола .....                       | 278 |
| 7. Кола са кондензаторима .....                | 287 |
| Литература .....                               | 347 |



## 1. Стално струјно поље

1. У дугачком хомогеном бакарном жичаном проводнику површине попречног пресека  $S = 50 \text{ mm}^2$  успостављена је стална струја густине  $J = 2,5 \text{ A/mm}^2$ . Специфична електрична проводност бакра је  $\sigma = 58 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ , атомска маса<sup>1</sup>  $A_{\text{Cu}} = 63,546 \text{ u}$  и специфична густина  $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \text{ g/cm}^3$ . Сматрајући да у електричној струји учествује по један електрон<sup>2</sup> сваког атома бакра, израчунати (а) средњу брзину кретања електрона услед деловања електричног поља, (б) јачину струје проводника, (в) јачину електричног поља у проводнику, (г) запреминску густину снаге Џулових губитака и (д) подужну густину снаге Џулових губитака у жици.

### РЕШЕЊЕ

(а) Вектор густине струје је  $\mathbf{J} = N' Q_e \mathbf{v}$ , где је  $N'$  концентрација, а  $\mathbf{v}$  макроскопска средња брзина кретања слободних носилаца (електрона). Одавде је  $|\mathbf{v}| = \frac{J}{N' e}$ . Концентрација слободних носилаца је у посматраном случају  $N' = N'_{\text{Cu}}$ , где је  $N'_{\text{Cu}}$  концентрација атома бакра. Како је проводник хомоген, то је  $N'_{\text{Cu}} = \frac{(N_{\text{Cu}})_u \Delta v}{\Delta v} = \frac{(m_{\text{Cu}})_u \Delta v}{A_{\text{Cu}} \Delta v} = \frac{\rho_{\text{Cu}} \Delta v}{A_{\text{Cu}} \Delta v} = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{A_{\text{Cu}}}$ , где је  $m_{\text{Cu}}$  маса бакра у запремини  $\Delta v$  па је  $N' = 8,44 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$  и  $|\mathbf{v}| = 0,185 \text{ mm/s}$ .

(б) Јачина струје проводника је  $I = JS = 125 \text{ A}$ .

(в) Из Омовог закона у локалном облику ( $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ), који представља конститутивну релацију за струјно поље, произилази  $E = \frac{J}{\sigma} = 43,1 \text{ mV/m}$ .

<sup>1</sup> Атомска јединица масе је  $u \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

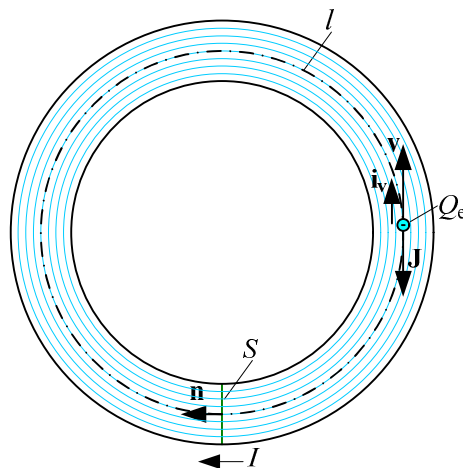
<sup>2</sup> Наелектрисање електрона је  $Q_e = -e \approx -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

(г) Запреминска густина снаге Џулових губитака одређена је Џуловим законом у локалном облику,  $\frac{dP_J}{dv} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{J^2}{\sigma} = \sigma E^2 \approx 108 \frac{\text{kW}}{\text{m}^3}$ .

(д) Подужна густина снаге Џулових губитака је  $P'_J = \frac{dP_J}{dv} S \approx 5,4 \frac{\text{W}}{\text{m}}$ .

Колика је снага губитака у целом проводнику ако је његова дужина  $l = 1 \text{ km}$  ?

2. У танкој торусној цеви, дужине средње линије  $l = 12 \text{ m}$  и површине попречног пресека  $S = 10 \text{ cm}^2$ , остварено је кружно кретање електрона паралелно средњој линији торуса, сталном брзином  $v = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . У току једног периода кретања електрона, кроз попречни пресек цеви прође  $N = 6 \cdot 10^{11}$  електрона. Израчунати (а) вектор густине електричне струје у цеви и (б) јачину струје у цеви.



Слика 2.1.

#### РЕШЕЊЕ

(а) Уз претпоставку да су електрони равномерно распоређени у цеви и да су им брзине једнаке, вектор густине електричне струје образоване кретањем електрона је  $\mathbf{J} = N' Q_e \mathbf{v}$ . Концентрација електрона је  $N' = \frac{N}{Sl} = 5 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$ , па је  $\mathbf{J} \approx -1,6 \frac{\text{kA}}{\text{m}^2} \mathbf{i}_v$ , где је  $\mathbf{i}_v$  орт вектора брзине,  $\mathbf{i}_v = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ , који је тангенцијалан на средњу линију торуса (слика 2.1).

Линије вектора густине струје су концентричне кружнице паралелне средњој линији торуса. Струјнице немају ни почетак, ни крај, већ се затварају саме у себе, па је поље вектора  $\mathbf{J}$  безизворно.

(б) Јачина струје у цеви је  $I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} S$  јер је, по претпоставци, струјно поље хомогено у сваком попречном пресеку цеви, односно  $I = 1,6 \text{ A}$  у односу на референтни смер одређен ортом  $\mathbf{n}$ .

3. У посуди за електролизу налази се нормални раствор сребро нитрата ( $\text{AgNO}_3$ ) у води. На једновалентне јоне  $\text{Ag}^+$  и  $\text{NO}_3^-$  су се разложили сви молекули  $\text{AgNO}_3$ . Када се у раствору успостави стална електрична струја, под утицајем електричног поља јони



имају средње брзине  $|\mathbf{v}_+| = 0,007 \text{ mm/s}$  и  $|\mathbf{v}_-| = 0,009 \text{ mm/s}$ . Израчунати вектор густине успостављене електричне струје.

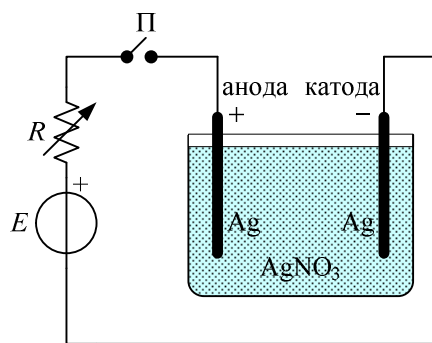
#### РЕШЕЊЕ

Како у раствору постоје две врсте покретних носилаца електрицитета, то је вектор густине електричне струје  $\mathbf{J} = N'_+ Q_+ \mathbf{v}_+ + N'_- Q_- \mathbf{v}_-$ , при чему су наелектрисања јона  $Q_+ = -Q_- = +1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Вектори  $\mathbf{v}_+$  и  $\mathbf{v}_-$  имају исти правац као вектор електричног поља у раствору. Вектор  $\mathbf{v}_+$  има исти смер као вектор електричног поља, а вектор  $\mathbf{v}_-$  има супротан смер.

Нормални раствор је онај код кога се у  $1 \text{ dm}^3$  раствора налази један мол раствора<sup>3</sup>. Концентрације јона су стога  $N'_+ = N'_- = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ dm}^{-3}$ .

Густина струје је  $\mathbf{J} = 1,54 \frac{\text{mA}}{\text{mm}^2} \mathbf{i}_E$ , где је  $\mathbf{i}_E$  орт вектора електричног поља у раствору.

**\*\*4.** У посуду за електролизу, чије су анода и катода од сребра, налази се раствор сребро нитрата у води (слика 4.1)<sup>4</sup>. Затварањем прекидача П успоставља се стална струја  $I$  у колу и почне електролиза. Израчунати јачину струје при којој ће се за време  $\Delta t = 12 \text{ h}$  на катода издвојити сребро масе  $m = 25 \text{ g}$ . Атомска маса сребра је  $A_{\text{Ag}} = 107,87 \text{ u}$ , а валентност  $z_{\text{Ag}} = 1$ .



Слика 4.1.

#### РЕШЕЊЕ

У посуду за електролизу са раствором сребро нитрата у води и електродама од сребра, молекули раствора ( $\text{AgNO}_3$ ) разлажу се на јоне,  $\text{AgNO}_3 \rightarrow \text{Ag}^+ + \text{NO}_3^-$ . По успостављању струје у електролиту, јони сребра ( $\text{Ag}^+$ ) одлазе на катоду, а јони  $\text{NO}_3^-$  на аноду. На електродама се придошли јони неутрализују. Неутрализовано сребро таложи се на катода, а  $\text{NO}_3$  група реагује на аноди са сребром и формира сребро нитрат, који се

<sup>3</sup> Један мол ( $1 \text{ mol}$ ) је количина супстанце која садржи исти број молекула (или атома) те супстанце колико има молекула у  $12 \text{ g}$  угљеника C-12. Тај број је Авогадрова константа (Авогадров број),  $N_A = 6,02214179 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \approx 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Између атомске јединице масе и Авогадрове константе важи релација  $uN_A = 1 \text{ g/mol}$ .

<sup>4</sup> Овакав уређај (волтаметар) употребљавао се за мерење протекле количине електрицитета на основу мерења масе издвојеног сребра, а тиме и за мерење јачине сталне струје.

потом раствара и дисоцира. На тај начин долази до транспорта сребра са аноде на катоду. Сребро наталожено на катоди је скоро потпуно чисто.

Први Фарадејев закон електролизе установљава да је маса супстанце која се при електролизи издваја на електроди, линеарно пропорционална количини електрицитета која протекне кроз електролит ( $q$ ).

Други Фарадејев закон електролизе установљава да је, за задату количину електрицитета, маса издвојене супстанце сразмерна њеном хемијском еквиваленту<sup>5</sup>.

Оба закона се могу исказати формулом,

$$m = \frac{q}{F} \frac{M}{z}, \quad (4.1)$$

где је  $\frac{M}{z}$  хемијски еквивалент, а  $F$  Фарадејева константа. Та константа се назива фарадеј и износи  $F = N_A e = 96485,3399 \text{ C/mol} \approx 96500 \text{ C/mol}$ , где је  $N_A$  Авогадрова константа, а  $e$  елементарно наелектрисање.

Из формуле (4.1) произилази да количина електрицитета од  $96500 \text{ C}$  издвоји на катоди масу једног мола једновалентног метала, масу једне половине мола двовалентног метала, масу једне трећине мола тровалентног метала итд.

Формула (4.1) се пише и у облику

$$m = aq, \quad (4.2)$$

где је  $a = \frac{1}{F} \frac{M}{z}$  електрохемијски еквивалент супстанце<sup>6</sup>. Према подацима из текста

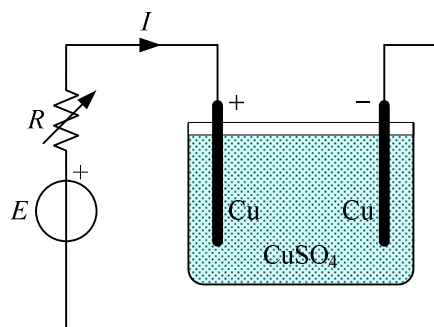
задатка, електрохемијски еквивалент сребра је  $a_{\text{Ag}} = \frac{1}{F} \frac{M_{\text{Ag}}}{z_{\text{Ag}}} \approx 0,001118 \text{ g/C}$ .

На основу (4.2), количина електрицитета потребна да издвоји сребро масе  $m = 25 \text{ g}$  је  $q = \frac{m}{a_{\text{Ag}}} \approx 22,36 \text{ kC}$ . Како је, по претпоставци задатка, јачина струје у електролиту стална, то је потребна јачина струје  $I = \frac{q}{\Delta t} \approx 0,518 \text{ A}$ .

<sup>5</sup> Хемијски еквивалент неке супстанце је количник моларне масе ( $M$ ) и валентности јона те супстанце ( $z$ ), односно  $M/z$ . Моларна маса (маса једног мола) обично се изражава у грамима по молу, што је нумерички исто као и молекулска (односно атомска) маса те супстанце ( $A$ ) изражена у атомским јединицама масе ( $u$ ).

<sup>6</sup> Електрохемијски еквивалент је маса коју издвоји протекло наелектрисање од  $1 \text{ C}$ .

**\*\*5.** У ћелији за електролизу са електродама од бакра налази се раствор бакар сулфата ( $\text{CuSO}_4$ ) у води (слика 5.1). Израчунати јачину  $I$  потребне сталне струје при којој ће се за  $\Delta t = 24 \text{ h}$  на катоди издвојити бакар масе  $m = 30 \text{ kg}$ . Атомска маса бакра је  $A_{\text{Cu}} = 63,546 \text{ u}$ , а валентност  $z_{\text{Cu}} = 2$ .



Слика 5.1.

РЕШЕЊЕ

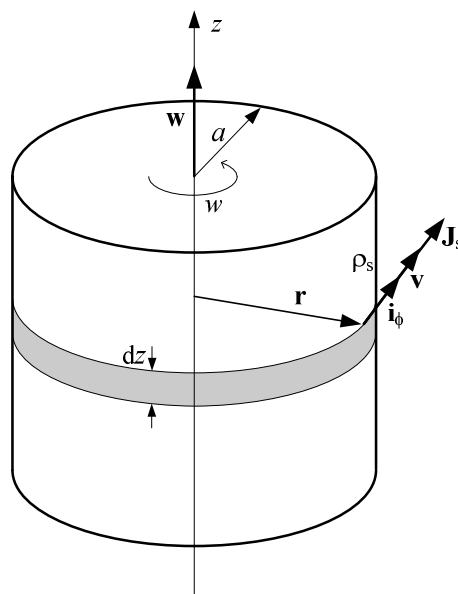
При дисоцијацији у води, молекули бакар сулфата се разлажу на јоне,  $\text{CuSO}_4 \rightarrow \text{Cu}^{++} + \text{SO}_4^{--}$ . По успостављању сталне струје, јони бакра ( $\text{Cu}^{++}$ ) се неутрализују таложе на катоди. Јони  $\text{SO}_4^{--}$  групе се неутрализују на аноди. Међутим, неутрализовани јони  $\text{SO}_4$  не могу постојати у слободном стању, па ступају у секундарну хемијску реакцију на аноди, градећи бакар сулфат,  $\text{SO}_4 + \text{Cu} = \text{CuSO}_4$ , који се потом разлаже у раствору. Као последица овог процеса, концентрација бакар сулфата у електролиту остаје стална, а при електролизи се бакар преноси са аноде на катоду. Овим се врши и електрохемијско пречишћавање бакра, јер је бакар наталожен на катоди скоро потпуно чист. Примесе бакра које постоје у аноди, таложе се на дну ћелије за електролизу.

Према Фарадејевим законима електролизе, односно формули (4.1), количина електрицитета потребна за издвајање масе  $m$  бакра је  $q = \frac{Fzm}{M} = 91,1 \text{ MC}$ . Потребна јачина струје у електролиту је  $I = \frac{q}{\Delta t} = 1,054 \text{ kA}$ . Овај резултат указује на то да су за електролизу у индустријске сврхе потребе веома јаке сталне струје.

**\*6.** Веома дугачак врло танак метални цилиндар полупречника  $a$  и подужне густине наелектрисања  $Q'$  ротира у ваздуху око своје осе сталном угаоном брзином  $\omega$ . Одредити подужну густину овако образоване површинске струје.

РЕШЕЊЕ

Наелектрисање проводног цилиндра је локализовано на његовој површи. Сматрајући да је наелектрисање равномерно расподељено по површи цилиндра, површинска густина наелектрисања је  $\rho_s = \frac{Q'}{2\pi a}$ . Вектор подужне густине површинске електричне струје коју својим кретањем образује ово наелектрисање је, према слици 6.1,  $\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v} = \rho_s \mathbf{w} \times \mathbf{r}$ , где је  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$  вектор периферијске брзине кретања наелектрисања, а  $\mathbf{r}$  потег у односу на осу  $z$  ( $|\mathbf{r}| = a$ ). Вектор брзине  $\mathbf{v}$  колинеаран је са ортом  $\mathbf{i}_\phi$  цилиндричног координатног система, а интензитет му је  $v = aw$ . Стога је интензитет вектора густине струје  $J_s = \rho_s aw$ , па је  $\mathbf{J}_s = \frac{Q'w}{2\pi} \mathbf{i}_\phi$ .



Слика 6.1.

До решења се може доћи и полазећи од брзине протицања електрицитета. Посматрајмо прстен ширине  $dz$ , приказан на слици 6.1. Прстен се обрће равномерно, па је јачина струје прстена  $dI = \frac{(dQ)_u T}{T}$ , где је  $(dQ)_u T = \rho_s 2\pi a dz$  наелектрисање прстена, а  $T = \frac{2\pi}{w}$  период обртања цилиндра. Одавде је  $dI = \rho_s a w dz = \frac{Q'}{2\pi} w dz$ , па је подужна густина струје  $J_s = \frac{dI}{dz} = \frac{Q'w}{2\pi}$ .

**\*7.** Ваљак од стиропора, полупречника  $a$ , дужине  $l$  и релативне пермитивности  $\epsilon_r \approx 1$ , равномерно је наелектрисан по запремини наелектрисањем запреминске густине  $\rho$ . Ваљак ротира у ваздуху око своје осе сталном угаоном брзином  $w$  (слика 7.1). Одредити јачину овако образоване електричне струје кроз површ  $S$  приказану на слици.

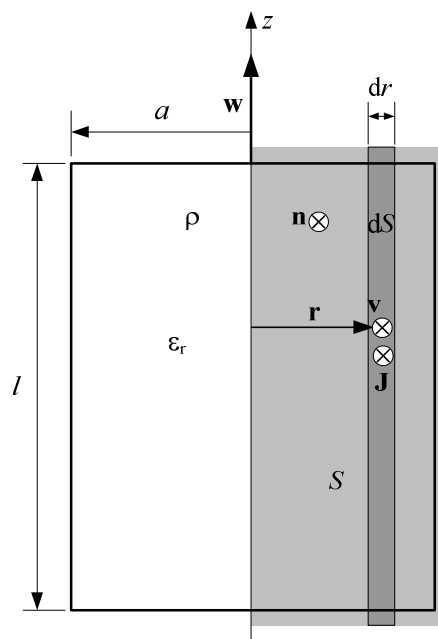
РЕШЕЊЕ

Како је релативна пермитивност стиропора блиска јединици ( $\epsilon_r \approx 1$ ), то у ваљку и на његовој површи практично нема везаног наелектрисања, па струју образује само кретање слободних наелектрисања. Вектор густине струје је  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ , где је  $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$  периферијска брзина кретања наелектрисања. Линије вектора  $\mathbf{J}$  су концентричне кружнице у равнима управним на осу ваљка, а интензитет му је  $J(r) = \rho |\mathbf{v}| = \rho w r$ ,  $r \in [0, a]$ .

Према слици 7.1, јачина струје кроз елементарну површ  $dS$  је  $dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J l dr = \rho w r l dr$ , па је јачина струје кроз површ  $S$

$$I = \int_{r=0}^a dI = \rho w l \int_{r=0}^a r dr = \frac{1}{2} \rho w a^2 l.$$

Задатак се може решити и посматрањем брзине протицања наелектрисања кроз површ  $S$ . Током једног периода обртања цилиндра, кроз површ  $S$  прође целокупно наелектрисање цилиндра ( $Q = \rho \pi a^2 l$ ), па је  $I = \frac{Q}{T} = \frac{1}{2} \rho w a^2 l$ .



Слика 7.1.

**\*\*8.** Поновити претходни задатак ако је релативна пермитивност ваљка  $\epsilon_r > 1$  иста у целом ваљку. Сматрати да је  $l \gg a$ , тако да се ивични ефекти могу занемарити.

РЕШЕЊЕ

Електрично поље ваљка при ротацији исто је као и електростатичко поље на исти начин распоређених статичких наелектрисања, па је иста и расподела везаних наелектрисања ваљка. На основу уопштеног Гаусовог закона је  $\mathbf{D} = \frac{\rho r}{2} \mathbf{i}_r$ ,  $0 \leq r \leq a$ , где је  $\mathbf{i}_r$  орт радијалан у односу на осу ваљка, па је вектор поларизације у ваљку  $\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\rho r}{2} \mathbf{i}_r$ . Површинска густина везаних наелектрисања на омотачу ваљка<sup>7</sup> је

<sup>7</sup> Површинска везана наелектрисања постоје и на базисима ваљка, али их, на основу услова  $l \gg a$ , занемарујемо. На основу тог услова такође сматрамо да густина везаних наелектрисања на омотачу ваљка не зависи од координате  $z$ .

$\rho_{ps} = P(a^-) = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{\rho a}{2}$ , а запреминска густина везаних наелектрисања у ваљку је  $\rho_p = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \rho$  јер је диелектрик хомоген.

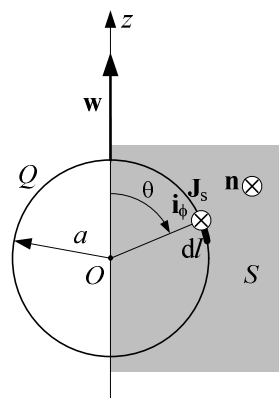
Услед ротације ваљка, површинска везана наелектрисања образују површинску струју подужне густине (на основу задатка 6)  $\mathbf{J}_s = \rho_{ps} \mathbf{w} \times (a \mathbf{i}_r) = \frac{(\epsilon_r - 1)}{2\epsilon_r} \rho w a^2 \mathbf{i}_\phi$ .

Допринос површинске струје струји кроз површ  $S$  је  $I_1 = J_s l = \frac{(\epsilon_r - 1)}{2\epsilon_r} \rho w a^2 l$ .

Запреминска слободна и везана наелектрисања својим кретањем образују запреминску струју. Укупна густина слободних и везаних запреминских наелектрисања је  $\rho_t = \rho + \rho_p = \frac{\rho}{\epsilon_r}$ , па је густина запреминске струје у ваљку  $\mathbf{J} = \rho_t \mathbf{v} = \rho_t \mathbf{w} \times \mathbf{r}$  (слика 7.1). Допринос ове струје струји кроз површ  $S$  одређује се на исти начин као у задатку 6 и износи  $I_2 = \frac{1}{2} \rho_t w a^2 l = \frac{1}{2\epsilon_r} \rho w a^2 l$ .

Укупна струја кроз површ  $S$  је  $I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \rho w a^2 l$ , што је исти резултат као у задатку 7. Резултат је очекиван. Током једног периода обртања цилиндра, кроз површ  $S$  прође целокупно слободно и везано наелектрисање цилиндра, али је укупно везано наелектрисање једнако нули. У збиру остаје само слободно наелектрисање, које је исто као у задатку 7.

**\*9.** Метална лопта полупречника  $a$  и наелектрисања  $Q$  ротира у ваздуху око једног свог пречника сталном угаоном брзином  $\mathbf{w}$  (слика 9.1). Одредити (а) густину овако образоване површинске струје и (б) јачину струје кроз површ  $S$  приказану на слици.



Слика 9.1.

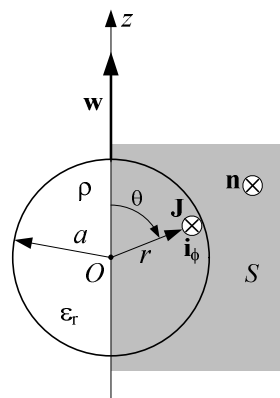
#### РЕШЕЊЕ

(а) Наелектрисање је равномерно расподељено по површи лопте, а површинска густина му је  $\rho_s = \frac{Q}{4\pi a^2}$ . Подужна густина површинске струје је (слика 9.1)

$$\mathbf{J}_s = \frac{Qw}{4\pi a} \sin \theta \mathbf{i}_\phi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \text{где су } \theta \text{ и } \phi \text{ углови сферног координатног система.}$$

(б) Према слици 9.1 је  $dI = J_s dl = J_s a d\theta = \frac{Qw}{4\pi} \sin \theta d\theta$ , па је  $I = \int_{\theta=0}^{\pi} dI = \frac{Qw}{2\pi}$ . До истог резултата се може доћи и на основу закључка да целокупно наелектрисање лопте ( $Q$ ) прође једном кроз површ  $S$  током једног периода ротације лопте  $T = \frac{2\pi}{w}$ .

**\*10.** У лопти од стиропора, полупречника  $a$  и релативне пермитивности  $\epsilon_r \approx 1$ , равномерно су распоређена наелектрисања запреминске густине  $\rho$  (слика 10.1). Лопта ротира сталном угаоном брзином  $w$  око једног свог пречника. Одредити (а) густину овако образоване струје и (б) јачину струје кроз површ  $S$  приказану на слици 10.1.



Слика 10.1.

РЕЗУЛТАТ

(а) Према сферном координатном систему са слике 10.1, вектор густине струје је  $\mathbf{J} = \rho w r \sin \theta \mathbf{i}_\phi$ .

(б) Јачина струје кроз осенчену површ са слике 10.1 је  $I = \frac{2}{3} \rho w a^3$ .

**\*\*11.** Поновити претходни задатак ако је лопта начињена од хомогеног диелектрика релативне пермитивности  $\epsilon_r > 1$ .

РЕЗУЛТАТ

(а) Површинска везана наелектрисања образују површинску струју густине  $\mathbf{J}_s = \frac{(\epsilon_r - 1) \rho w a^2}{\epsilon_r} \sin \theta \mathbf{i}_\phi$ . Запреминска слободна и везана наелектрисања образују запреминску струју густине  $\mathbf{J} = \frac{1}{\epsilon_r} \rho w r \sin \theta \mathbf{i}_\phi$ .

(б) Јачина струје кроз осенчену површ са слике 10.1 иста је као у задатку 10,  $I = \frac{2}{3} \rho w a^3$ .

12. Укупно наелектрисање обухваћено затвореном површи  $S$  зависи од времена ( $t > 0$ ) као  $Q(t) = Q_0 \exp(-t/\tau)$ , где су  $Q_0$  и  $\tau$  позитивне константне величине. Колика је јачина струје кроз ту површ?

РЕШЕЊЕ

Вишак наелектрисања ( $Q$ ) у домену ограниченом затвореном површи  $S$  и јачина струје кроз ту површ ( $i$ ) у односу на референтни смер упоље (слика<sup>8</sup> 12.1) повезани су једначином континуитета,

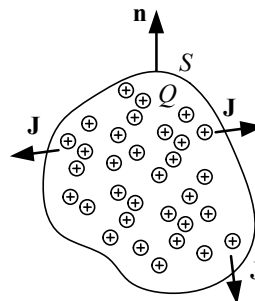
$$i = -\frac{dQ}{dt}. \quad (12.1)$$

где је  $i = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$  и  $\mathbf{J}$  вектор густине струје на површи, односно

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}. \quad (12.2)$$

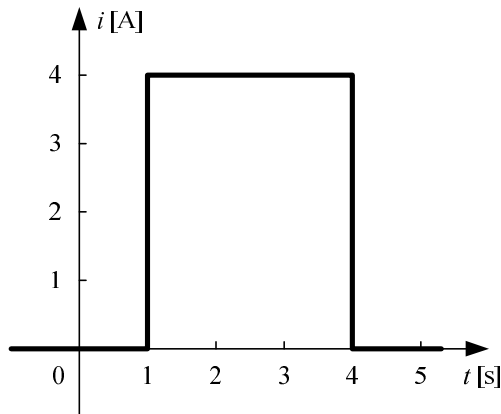
Ова једначина проистиче из одржања укупног наелектрисања у природи. Из једначине (12.1) је тражена јачина струје  $i(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ,  $t > 0$  (у односу на референтни смер упоље).

Читаоцу се препоручује да скицира функције  $Q(t)$  и  $i(t)$  за  $t > 0$ , као и да понови задатак ако је  $Q(t) = Q_0(1 - \exp(-t/\tau))$ ,  $t > 0$ .



Слика 12.1.

13. Јачина струје отпорника отпорности  $R = 10 \Omega$  зависи од времена као на слици 13.1. Израчунати (а) количину електрицитета која протекне кроз отпорник од тренутка  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 5 \text{ s}$  и (б) електрични рад претворен у топлоту у отпорнику у том интервалу времена.



Слика 13.1.

<sup>8</sup> Слика је нацртана под претпоставком да се крећу позитивни слободни носиоци.



РЕШЕЊЕ

(а) Из дефиниције јачине струје као брзине протицања електрицитета,  $i = \frac{dq}{dt}$ , следи да је наелектрисање протекло у интервалу времена  $t \in (t_1, t_2)$  дато интегралом  $q = \int_{t_1}^{t_2} i dt$ .

У посматраном случају је  $q = 12 \text{ C}$ .

Ако су слободни носиоци у отпорнику електрони, колико је електрона протекло кроз попречни пресек отпорника у том интервалу?

(б) Тренутна снага Џулових губитака у отпорнику је  $p_J = Ri^2$ , па је укупан рад претворен у топлоту у интервалу времена  $t \in (t_1, t_2)$  дат интегралом

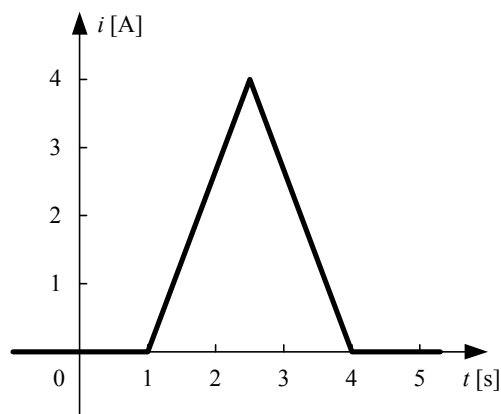
$$A_J = \int_{t_1}^{t_2} p_J dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt, \text{ односно } A_J = 480 \text{ J}.$$

**\*14.** Поновити претходни задатак ако је јачина струје отпорника функција времена као на слици 14.1.

РЕЗУЛТАТ

(а) Протекло наелектрисање је  $q = 6 \text{ C}$ .

(б) Рад претворен у топлоту је  $A_J = 160 \text{ J}$ .



Слика 14.1.

**15.** Грејач отпорности  $R = 20 \Omega$  прикључен је на сталан напон  $U = 200 \text{ V}$ . Израчунати (а) количину електрицитета која протекне кроз попречни пресек грејача током  $\Delta t = 2 \text{ h}$ , (б) електричну снагу грејача и (в) електрични рад претворен у топлоту у том интервалу времена.

РЕЗУЛТАТ

(а) Протекла количина електрицитета је  $q = 72 \text{ kC}$ .

(б) Снага грејача је  $P = 2 \text{ kW}$ .

(в) Електрични рад претворен у топлоту је<sup>9</sup>  $A_J = 14,4 \text{ MJ} = 4 \text{ kWh} \approx 3440 \text{ kcal}$ .

Ако овај грејач загрева  $80 \text{ l}$  воде чија је почетна температура  $15^\circ\text{C}$ , колика је температура воде после  $2 \text{ h}$ ? Занемарити топлотне губитке.

<sup>9</sup> Постоји више дефиниција калорије које се крећу у распону од  $4,182 \text{ J}$  до  $4,204 \text{ J}$ .

\*16. Поновити претходни задатак ако је грејач прикључен на променљив (простопериодичан) напон  $u(t) = 200\sqrt{2} \cos(2\pi ft)$  V, где је  $f = 50$  Hz.

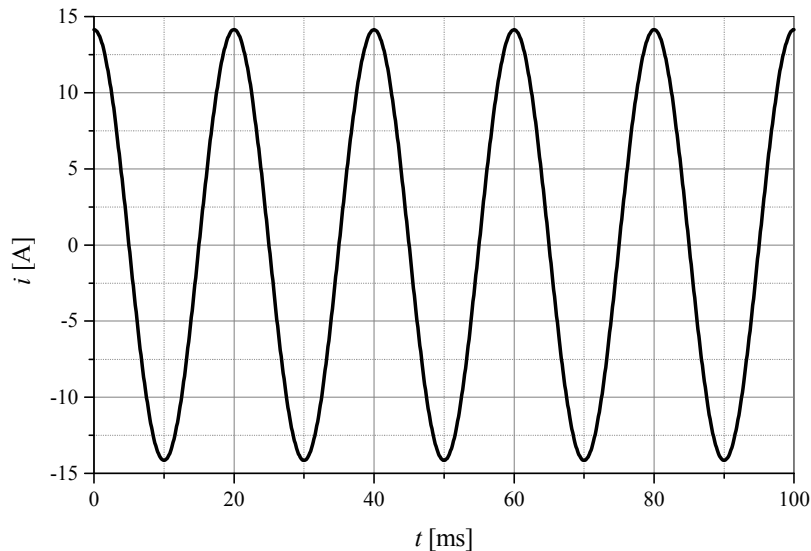
РЕШЕЊЕ

(а) Посматрамо интервал времена  $t \in (0, 7200 \text{ s})$ . Сматрајући да је грејач отпорник отпорности  $R = 20 \Omega$ , јачина струје грејача је  $i(t) = \frac{u(t)}{R} = 10\sqrt{2} \cos(2\pi ft)$  A (слика 16.1).

Струја је периодична функција времена са периодом  $T = \frac{1}{f} = 20 \text{ ms}$ . Протекло

наелектрисање током једног периода је  $q_T = \int_0^T i \, dt = 0$ . Посматрани интервал времена,

$t \in (0, 7200 \text{ s})$ , садржи  $N = 360000$  (целих) периода, па је протекло наелектрисање током тог интервала такође нула.



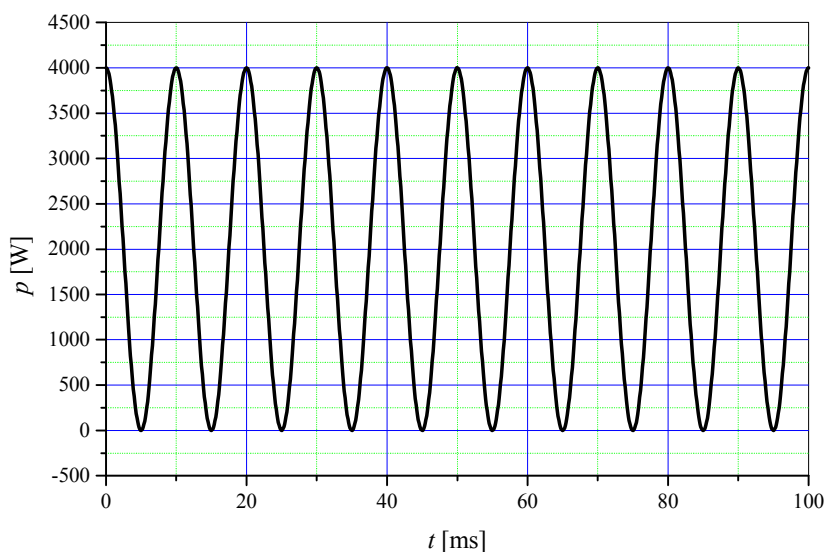
Слика 16.1.

(б) Тренутна снага грејача је  $p_J(t) = R(i(t))^2 = 4(\cos(2\pi ft))^2 \text{ kW}$  (слика 16.2). Тренутна снага је периодична функција времена са периодом  $T_1 = 10 \text{ ms}$ . Средња снага

током тог интервала времена је  $P_J = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} p_J(t) \, dt = 2 \text{ kW}$ , па је и средња снага грејача

током интервала времена  $\Delta t = 2 \text{ h}$  такође  $P_J = 2 \text{ kW}$ .

(в) Електрични рад претворен у топлоту током  $\Delta t = 2 \text{ h}$  је  $A_J = P_J \Delta t = 4 \text{ kWh}$ .



Слика 16.2.

17. Жица грејача израђена је од цекаса<sup>10</sup>, чија је специфична проводност  $\sigma = 1 \text{ MS/m}$ . Пречник жице је  $d = 0,5 \text{ mm}$ . Грејач је прикључен на стални напон  $U = 200 \text{ V}$ , при чему је снага грејача  $P = 2 \text{ kW}$ . Колика је дужина жице грејача?

РЕШЕЊЕ

Снага грејача је  $P = \frac{U^2}{R}$ , одакле је отпорност грејача  $R = \frac{U^2}{P} = 20 \Omega$ . Отпорност жичаног проводника дужине  $l$ , површине попречног пресека  $S$  и специфичне проводности  $\sigma$  је, по Омовој формули,  $R = \frac{l}{\sigma S}$ , где је  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ . Одавде је дужина жице

$$l = R \sigma \frac{\pi d^2}{4} = 3,93 \text{ m}.$$

18. У табели 18.1 приказана је највећа допуштена јачина сталне струје у бакарним проводницима у електричним инсталацијама<sup>11</sup> ( $I_{\text{max}}$ ), а у зависности од површине попречног пресека жице ( $S$ ). Допунити ову таблицу подацима о одговарајућем пречнику проводника, густини струје, подужној отпорности жице и подужној снази Џулових губитака. Сматрати да је специфична проводност бакра  $\sigma = 58 \text{ MS/m}$ .

<sup>10</sup> Цекас је легура никла, хрома и гвожђа. Температурски сачинилац специфичне отпорности му је  $\alpha = 8 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ , а радна температура до  $1100^\circ\text{C}$ .

<sup>11</sup> Подаци се односе на усамљене монофазне водове на зиду или у зиду, са ПВЦ изолацијом, при температури околине од  $30^\circ\text{C}$ .

Табела 18.1.

| $S \text{ [mm}^2\text{]}$ | $I_{\max} \text{ [A]}$ |
|---------------------------|------------------------|
| 1,5                       | 19,5                   |
| 2,5                       | 27                     |
| 4                         | 36                     |
| 6                         | 46                     |
| 10                        | 63                     |
| 16                        | 85                     |
| 25                        | 112                    |
| 35                        | 138                    |
| 50                        | 168                    |
| 70                        | 213                    |
| 95                        | 258                    |
| 120                       | 299                    |

РЕЗУЛТАТ

У табели 18.2 дати су пречник жице,  $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$ , подужна отпорност жице,  $R' = \frac{1}{\sigma S}$ , густина струје при максимално допуштеној струји,  $J_{\max} = \frac{I_{\max}}{S}$ , и подужна снага Џулових губитака,  $P'_{\max} = R' I_{\max}^2$ .

Табела 18.2.

| $S \text{ [mm}^2\text{]}$ | $d \text{ [mm]}$ | $R' \text{ [m}\Omega/\text{m]}$ | $I_{\max} \text{ [A]}$ | $J_{\max} \text{ [A/mm}^2\text{]}$ | $P'_{\max} \text{ [W/m]}$ |
|---------------------------|------------------|---------------------------------|------------------------|------------------------------------|---------------------------|
| 1,5                       | 1,38             | 11,49                           | 19,5                   | 13,0                               | 4,4                       |
| 2,5                       | 1,78             | 6,90                            | 27                     | 10,8                               | 5,0                       |
| 4                         | 2,26             | 4,31                            | 36                     | 9,0                                | 5,6                       |
| 6                         | 2,76             | 2,87                            | 46                     | 7,7                                | 6,1                       |
| 10                        | 3,57             | 1,72                            | 63                     | 6,3                                | 6,8                       |
| 16                        | 4,51             | 1,08                            | 85                     | 5,3                                | 7,8                       |
| 25                        | 5,64             | 0,69                            | 112                    | 4,5                                | 8,7                       |
| 35                        | 6,68             | 0,49                            | 138                    | 3,9                                | 9,4                       |
| 50                        | 7,98             | 0,34                            | 168                    | 3,4                                | 9,7                       |
| 70                        | 9,44             | 0,25                            | 213                    | 3,0                                | 11,2                      |
| 95                        | 11,00            | 0,18                            | 258                    | 2,7                                | 12,1                      |
| 120                       | 12,36            | 0,14                            | 299                    | 2,5                                | 12,8                      |

**19.** Попречни пресек бакарног проводника на штампаној плочи је правоугаоник ширине  $w = 3 \text{ mm}$  и висине  $t = 36 \text{ }\mu\text{m}$ . Израчунати (а) подужну отпорност проводника и (б) највећу допуштену јачину струје проводника под условом да подужна снага Џулових

губитака у проводнику не буде већа од  $P'_{\text{Jmax}} = 20 \text{ mW/mm}$ . Температура проводника је  $\theta = 20^\circ\text{C}$ , при којој је специфична отпорност бакра  $\rho = 17 \text{ n}\Omega\text{m}$ .

#### РЕШЕЊЕ

(а) Ако је дужина штампаног проводника  $l$ , отпорност проводника је  $R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho l}{wt}$ , где је  $S = wt$  површина попречног пресека. Подужна отпорност проводника је  $R' = \frac{R}{l} = \frac{\rho}{wt} = 0,157 \Omega/\text{m}$ .

(б) Снага Џулових губитака у отпорнику је  $P_J = RI^2 = R'I^2 = P'_J l$ , где је  $P'_J = \frac{P_J}{l}$  подужна снага губитака. На основу услова задатка, највећа допуштена јачина струје је  $I_{\text{max}} = \sqrt{\frac{P'_{\text{Jmax}}}{R'}} = 11,3 \text{ A}$ .

**20.** Услед Џулових губитака, температура бакарног проводника из претходног задатка порасла је за  $\Delta\theta = 40^\circ\text{C}$ . Колика је при томе (а) подужна отпорност проводника и (б) највећа допуштена јачина струје под истим условом као у претходном задатку? Температурски сачинилац специфичне отпорности бакра је  $\alpha = 0,00427/^\circ\text{C}$ .

#### РЕШЕЊЕ

(а) Специфична електрична отпорност материјала мења се са температуром и код метала расте са порастом температуре. Аналитичка зависност  $\rho = \rho(\theta)$  се најчешће апроксимира степеним редом (полиномом). За мале распоне температура близу  $0^\circ\text{C}$ , најчешће је довољна апроксимација полиномом првог реда, који се пише у облику  $\rho(\theta) = \rho_0(1 + \alpha\theta)$ , где је  $\rho_0$  специфична отпорност на  $0^\circ\text{C}$ , а  $\alpha$  температурни сачинилац отпорности. На температурама  $\theta_1$  и  $\theta_2$  је  $\rho_1 = \rho_0(1 + \alpha\theta_1)$  и  $\rho_2 = \rho_0(1 + \alpha\theta_2)$ , па је  $\rho_2 = \rho_1 \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 + \alpha\theta_1}$ . Отпорност тракастог или жичаног отпорника дата је изразом  $R = \rho \frac{l}{S}$ .

Са променом температуре постоје термичке дилатације и дужине  $l$ , и површине попречног пресека  $S$ , али је код бакарних проводника утицај промене специфичне отпорности много изразитији. Због тога је  $R_2 \approx R_1 \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 + \alpha\theta_1}$ . Исти закључак важи и за

подужну отпорност,  $R' = \frac{\rho}{S}$ , односно  $R'_2 \approx R'_1 \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 + \alpha\theta_1} = 0,182 \Omega/\text{m}$ , где је

$R'_1 = 0,157 \Omega/\text{m}$  подужна отпорност на  $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$  израчуната у претходном задатку.

Температурни сачинилац је мали, па је за температуре  $\theta$  блиске  $0^\circ\text{C}$   $\alpha\theta \ll 1$ . Због тога је  $\rho_2 = \rho_1 \frac{1 + \alpha\theta_2}{1 + \alpha\theta_1} \approx \rho_1(1 + \alpha\theta_2)(1 - \alpha\theta_1) \approx \rho_1(1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1)) = \rho_1(1 + \alpha\Delta\theta)$ , па је и  $R_2 \approx R_1(1 + \alpha\Delta\theta)$ , односно  $R'_2 \approx R'_1(1 + \alpha\Delta\theta) = 0,184 \Omega/\text{m}$ .

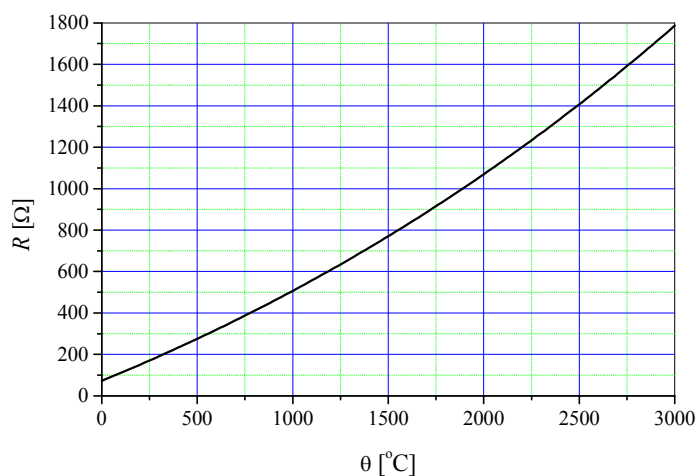
(б) Највећа допуштена јачина струје је  $I_{\max} = \sqrt{\frac{P'_{\max}}{R_2}} = 10,5 \text{ A}$ .

**\*21.** Сијалица је предвиђена за стални напон  $U = 250 \text{ V}$ , при чему јој је снага  $P = 50 \text{ W}$ . Отпорност сијалице на собној температури ( $\theta = 20^\circ\text{C}$ ) је  $R_{20} = 80 \Omega$ . Вlakно сијалице је од волфрама, чији су температурски сачиниоци специфичне отпорности  $\alpha = 5,238 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$ ,  $\beta = 7 \cdot 10^{-7} / (^\circ\text{C})^2$  и  $\gamma = 6,2 \cdot 10^{-11} / (^\circ\text{C})^3$ . Колика је радна температура влакна?

#### РЕШЕЊЕ

Када се влакно загреје до радне температуре, отпорност влакна је  $R = \frac{U^2}{P} = 1250 \Omega$ .

Зависност специфичне отпорности волфрама од температуре апроксимира се изразом  $\rho(\theta) = \rho_0(1 + \alpha\theta + \beta\theta^2 + \gamma\theta^3)$ . Ако се занемаре промене димензија жице са температуром, онда се отпорност влакна мења у зависности од температуре као  $R(\theta) = R_0(1 + \alpha\theta + \beta\theta^2 + \gamma\theta^3)$ , што је приказано на слици 21.1. Са слике се види да је температура влакна око  $2300^\circ\text{C}$ .



Слика 21.1.

Колика је јачина струје сијалице када је влакно сијалице хладно (непосредно по укључивању)? Колика је јачина струје при радној температури?

**\*\*** Да ли се сијалица може сматрати линеарним отпорником? Како се сијалица понаша ако јој се јачина струје споро мења, тако да се може сматрати да је стално успостављена топлотна равнотежа са околином? А како ако се мења врло брзо, тако да се може сматрати да се температура влакна не мења? Да ли се сијалица може сматрати линеарним отпорником при малим снагама (без обзира на брзину промене струје)?

22. Вlakно аутомобилске сијалице је од волфрама. Радни напон је  $U = 12 \text{ V}$ , а снага  $P = 45 \text{ W}$ . Радна температура влакна је  $\theta = 2450^\circ\text{C}$ . Колика је отпорност сијалице на температури  $273 \text{ K}$ ? Подаци за волфрам дати су у претходном задатку.

РЕЗУЛТАТ

Отпорност хладне сијалице (на  $0^\circ\text{C}$ ) је  $R = 0,17 \Omega$ .

23. Написати интегралне једначине сталног струјног поља које одговарају (а) првом и (б) другом Кирхофовом закону.

РЕЗУЛТАТ

(а) Првом Кирхофовом закону одговара једначина континуитета за сталне струје,

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (23.1)$$

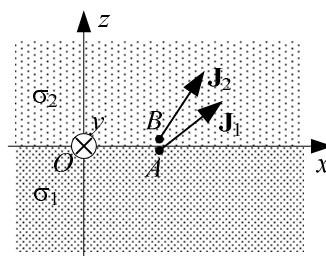
која проистиче из општег облика (12.2), односно из закона одржања наелектрисања.

(б) Другом Кирхофовом закону одговара закон о циркулацији вектора електричног поља,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (23.2)$$

који проистиче из конзервативног карактера сталног електричног поља, односно из закона одржања енергије.

24. Раздвојна површ два несавршена хомогена диелектрика, специфичних проводности  $\sigma_1$ , односно  $\sigma_2$ , поклапа се са  $Oxy$  равни координатног система, као на слици 24.1. Вектор густине струје у тачки  $A$  која је непосредно испод раздвојне површи је  $\mathbf{J}_1 = a\mathbf{i}_x + b\mathbf{i}_y + c\mathbf{i}_z$ . Одредити вектор густине струје  $\mathbf{J}_2$  у тачки  $B$  која је непосредно изнад раздвојне површи.



Слика 24.1.

РЕШЕЊЕ

Из граничних услова,

$$J_{1n} = J_{2n} \text{ и} \quad (24.1)$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (24.2)$$

произилази  $\mathbf{J}_{2n} = c\mathbf{i}_z$  и  $\mathbf{J}_{2t} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mathbf{J}_{1t} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (a\mathbf{i}_x + b\mathbf{i}_y)$ , па је  $\mathbf{J}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (a\mathbf{i}_x + b\mathbf{i}_y) + c\mathbf{i}_z$ .

25. На површи додира олова, специфичне отпорности  $\rho_1 = 210 \text{ n}\Omega\text{m}$ , и месинга, специфичне отпорности  $\rho_2 = 3,5 \text{ }\mu\Omega\text{cm}$ , приказаној на слици 24.1, вектор густине струје у олову је  $\mathbf{J}_1 = (2\mathbf{i}_x + 4\mathbf{i}_z) \text{ A/mm}^2$ . Одредити вектор густине струје у месингу.

#### РЕШЕЊЕ

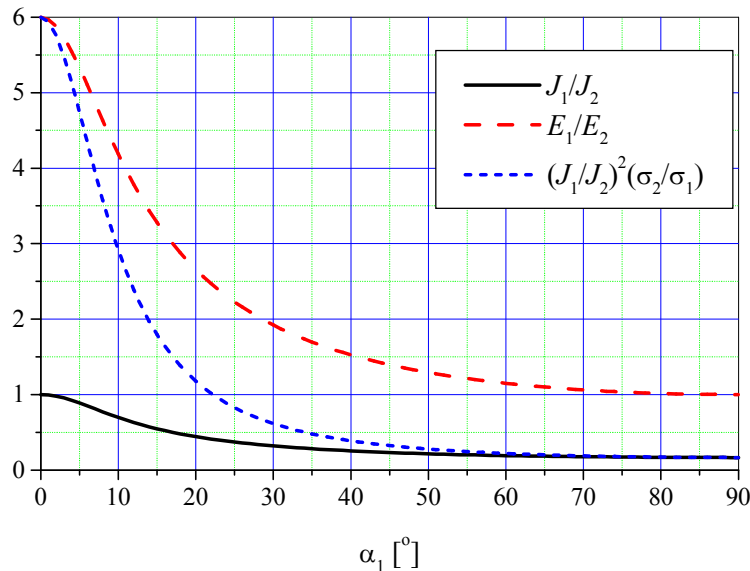
На основу резултата претходног задатка, вектор густине струје у месингу је  $\mathbf{J}_2 = (12\mathbf{i}_x + 4\mathbf{i}_z) \text{ A/mm}^2$  јер је  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{210 \cdot 10^{-9} \text{ }\Omega\text{m}}{3,5 \cdot 10^{-8} \text{ }\Omega\text{m}} = 6$ .

Читаоцу се препоручује да одреди угао између вектора  $\mathbf{J}_1$  и нормале на граничну површ ( $\alpha_1$ ), као и угао између вектора  $\mathbf{J}_2$  и нормале ( $\alpha_2$ ), и провери да ли ти углови задовољавају закон преламања струјница,  $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ .

\*26. На површи додира олова и месинга описаној у претходном задатку интензитет вектора густине струје у олову је  $|\mathbf{J}_1| = 1 \text{ A/mm}^2$ . Израчунати количник (а) густина струје, (б) јачина електричног поља и (в) запреминских густина снаге Џулових губитака у олову и месингу, у функцији угла између вектора  $\mathbf{J}_1$  и нормале на површ додира.

#### РЕЗУЛТАТ

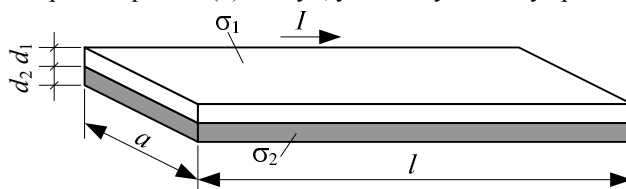
На слици 26.1 приказани су тражени односи, у функцији угла  $\alpha_1$  између вектора  $\mathbf{J}_1$  и z-осе.



Слика 26.1.



**27.** Биметална трака, приказана на слици 27.1, састоји се од две спојене траке, од којих је једна од бакра, специфичне проводности  $\sigma_1 = 58 \text{ MS/m}$ , а друга од челика, специфичне проводности  $\sigma_2 = 10 \text{ MS/m}$ . Дебљине трака су  $d_1 = d_2 = 0,2 \text{ mm}$ , а ширина  $a = 5 \text{ mm}$ . Дужина биметалне траке је  $l = 5 \text{ cm}$ . Јачина укупне струје траке је  $I = 10 \text{ A}$ . Израчунати (а) отпорност траке и (б) снагу Цулових губитака у траци.



Слика 27.1.

РЕЗУЛТАТ

(а) Отпорност траке је  $R = 735 \mu\Omega$ .

(б) Снага Цулових губитака је  $P = 73,5 \text{ mW}$ .

**\*28.** Жица од бакра, специфичне проводности  $\sigma_1 = 58 \text{ MS/m}$ , дужине  $l = 1 \text{ m}$  и површине попречног пресека  $S = 0,2 \text{ mm}^2$ , и жица од гвожђа, специфичне проводности  $\sigma_2 = 10 \text{ MS/m}$ , истих димензија као бакарна жица, везане су на ред и прикључене на сталан напон  $U = 1 \text{ V}$ . Израчунати (а) јачине електричних поља и (б) снаге Цулових губитака у жицама.

РЕЗУЛТАТ

(а) Јачина електричног поља у бакарној жици је  $E_1 = \frac{\sigma_2 U}{l(\sigma_1 + \sigma_2)} = 147 \text{ mV/m}$ , а јачина електричног поља у гвозденој жици је  $E_2 = \frac{\sigma_1 U}{l(\sigma_1 + \sigma_2)} = 853 \text{ mV/m}$ .

(б) Снага Цулових губитака у бакарној жици је  $P_1 = \sigma_1 E_1^2 S l = 0,25 \text{ W}$ , а снага Цулових губитака у гвозденој жици је  $P_2 = \sigma_2 E_2^2 S l = 1,46 \text{ W}$ .

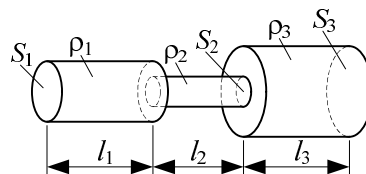
**\*29.** Поновити претходни задатак ако су жице везане паралелно.

РЕЗУЛТАТ

(а) Јачина електричног поља у жицама је  $E_1 = E_2 = \frac{U}{l} = 1 \text{ V/m}$ .

(б) Снага Цулових губитака у бакарној жици је  $P_1 = 11,6 \text{ W}$ , а снага Цулових губитака у гвозденој жици је  $P_2 = 2 \text{ W}$ .

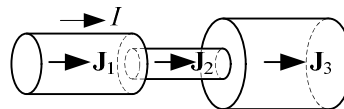
**30.** Танак метални проводник састоји се од три дела, површина попречних пресека  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , дужина  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , и специфичних отпорности  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_3$ , као на слици 30.1. У проводнику је успостављена стална електрична струја јачине  $I$ . Сматрајући да је струја равномерно расподељена по попречном пресеку сваког дела проводника, одредити (а) запреминске густине снаге Цулових губитака у сваком делу проводника и (б) одговарајуће подужне густине снаге губитака.



Слика 30.1.

РЕШЕЊЕ

(а) Запреминска густина снаге Цулових губитака је одређена изразом  $\frac{dP_J}{dv} = \rho J^2$ . С обзиром на то да је густина струје константна у сваком делу проводника (слика 30.2), запреминске густине снаге у деловима проводника су  $\frac{dP_{J1}}{dv} = \rho_1 \left( \frac{I}{S_1} \right)^2$ ,



Слика 30.2.

$$\frac{dP_{J2}}{dv} = \rho_2 \left( \frac{I}{S_2} \right)^2 \text{ и } \frac{dP_{J3}}{dv} = \rho_3 \left( \frac{I}{S_3} \right)^2.$$

(б) Подужне густине снаге Цулових губитака су  $P'_{J1} = \rho_1 J^2 S_1 = \frac{\rho_1}{S_1} I^2$ ,  $P'_{J2} = \frac{\rho_2}{S_2} I^2$  и

$$P'_{J3} = \frac{\rho_3}{S_3} I^2.$$

У посебном случају када је  $S_2 \ll S_1, S_3$  и  $\rho_2 \geq \rho_1, \rho_3$ , тада је  $\frac{\rho_2}{S_2} \gg \frac{\rho_1}{S_1}, \frac{\rho_3}{S_3}$ .

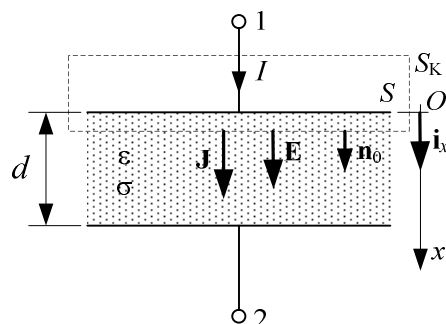
Подужна густина снаге је највећа у средњем делу проводника, али се тај део најслабије хлади јер му је спољашња површина најмања. Стога је повећање температуре средњег дела највеће, па ће он прегорети при јакој струји. На описаној појави заснива се рад топљивих осигурача.

**\*31.** Плочасти кондензатор, површине електрода  $S$  и међусобног растојања  $d$ , има између електрода линеаран хомоген несавршен диелектрик пермитивности  $\epsilon$  и мале специфичне проводности  $\sigma$ . Специфична проводност електрода је много већа од специфичне проводности диелектрика. У прикључним проводницима је успостављена стална струја јачине  $I$ . (а) Одредити расподелу слободних и везаних наелектрисања у кондензатору. (б) Користећи се идеалним елементима, нацртати еквивалентну шему кондензатора и одредити параметре употребљених елемената.

РЕШЕЊЕ

(а) Због симетрије, поље вектора густине струје  $\mathbf{J}$  је хомогено, а из једначине континуитета (односно првог Кирхофовог закона у интегралном облику) примењене на затворену површ  $S_K$  која обухвата једну электроду (слика 31.1), следи  $-I + JS = 0$ ,

одакле је  $\mathbf{J} = \frac{I}{S} \mathbf{i}_x$ . Конститутивне релације за диелектрик посматраног кондензатора гласе  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  и  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ , па је  $\mathbf{D} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \mathbf{J} = \frac{\varepsilon I}{\sigma S} \mathbf{i}_x$ . Вектор поларизације је  $\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \mathbf{D} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)I}{\sigma S} \mathbf{i}_x$ .



Слика 31.1.

У електродама је електрично поље ( $\mathbf{E}$ ) веома мало, а поларизације ( $\mathbf{P}$ ) нема. Стога је у тим проводницима вектор електричне индукције ( $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ) занемарљив. Из граничних услова примењених на раздвојну површ електроде и диелектрика следи да су површинске густине слободних наелектрисања горње и доње електроде  $\rho_{s1} = D = \frac{\varepsilon I}{\sigma S}$ ,

односно  $\rho_{s2} = -D = -\frac{\varepsilon I}{\sigma S}$ .

С обзиром на то да је диелектрик кондензатора хомоген, уопштени Гаусов закон примењен на произвољну затворену површ ( $S_G$ ) која у потпуности лежи у диелектрику даје  $\oint_{S_G} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_G} \frac{\varepsilon}{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \oint_{S_G} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$  јер је  $\oint_{S_G} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$ . До истог резултата се долази и

на основу тога што је вектор  $\mathbf{D}$  исти у свим тачкама диелектрика:  $\oint_{S_G} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{D} \cdot \oint_{S_G} d\mathbf{S} = 0$

јер је увек  $\oint_{S_G} d\mathbf{S} = 0$ . Стога у диелектрику нема слободних наелектрисања ( $\rho = 0$ ).

Површинске густине везаних наелектрисања уз електроде су  $\rho_{ps1} = -P = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)I}{\sigma S}$  и  $\rho_{ps2} = P = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)I}{\sigma S}$ . С обзиром на то да је вектор  $\mathbf{P}$  исти у свим тачкама, по запремини диелектрика нема везаних наелектрисања ( $\rho_p = 0$ ).

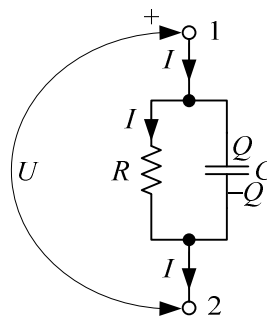
(б) Напон између електрода кондензатора је  $U = Ed = \frac{Id}{\sigma S}$ . Проводност је  $G = \frac{I}{U} = \frac{\sigma S}{d}$  и она успоставља везу између јачине струје кондензатора и напона на који

је кондензатор прикључен. Отпорност посматраног кондензатора је  $R = \frac{d}{\sigma S} = \rho \frac{d}{S}$ , где је  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  специфична електрична отпорност диелектрика.

Слободна наелектрисања постоје само на електродама кондензатора,  $Q_1 = \rho_{s1} S = DS = \frac{\varepsilon}{\sigma} I$  и  $Q_2 = \rho_{s2} S = -DS = -\frac{\varepsilon}{\sigma} I$ , па се може писати  $U = RI = \frac{d}{\sigma S} \frac{\sigma}{\varepsilon} Q_1 = \frac{d}{\varepsilon S} Q_1 = \frac{Q_1}{C}$ , при чему је  $C = \frac{\varepsilon S}{d}$  капацитивност кондензатора. Она успоставља везу између слободних наелектрисања електрода и напона на који је кондензатор прикључен. У посматраном примеру, диелектрик је хомоген, а капацитивност је иста као да је диелектрик савршен (непроводан).

Када се кондензатор прикључи на генератор напона  $U$ , у кондензатору се успостави струја, па у диелектрику постоје Џулови губици. У диелектрику постоји електрично поље, па у њему постоји и акумулирана електрична енергија.

Раздвајањем Џуловог и капацитивног ефекта, може се формирати еквивалентна шема посматраног кондензатора која се састоји од паралелне везе идеалног отпорника (без капацитивних ефеката), проводности  $G = \frac{\sigma S}{d}$ , односно отпорности  $R = \frac{d}{\sigma S}$ , и идеалног кондензатора (без струје и Џулових губитака), капацитивности  $C = \frac{\varepsilon S}{d}$ , као на слици 31.2. За ту еквивалентну шему важи  $U = RI = \frac{Q}{C}$ .



Слика 31.2.

Напоменимо да се оваква еквивалентна шема може формирати за било који кондензатор који има линеаран хомоген несавршен диелектрик. При томе увек важи релација  $\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ . Ако је диелектрик нехомоген, у општем случају оваква шема се не може формирати.

**\*\*32.** На слици 32.1 приказан је плочасти кондензатор површине електроде  $S$  са два линеарна хомогена несавршена диелектрика, дебљина  $d_1$  и  $d_2$ , пермитивности  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и малих специфичних проводности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . У прикључним проводницима кондензатора успостављена је стална струја јачине  $I$ . (а) Одредити векторе густине струје, електричног поља, електричне индукције и поларизације у кондензатору. (б) Одредити густине слободних и везаних наелектрисања у кондензатору и њихове количине. (в) Користећи се идеалним отпорницима и кондензаторима, нацртати еквивалентну шему посматраног реалног кондензатора и одредити параметре употребљених елемената.

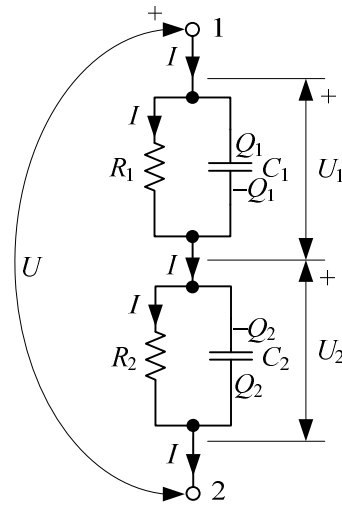


слободно наелектрисање на раздвојној површи два диелектрика је  $Q_{12} = \rho_{s12} \cdot S = \left( \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) I$ . Из претходног произилази  $Q_1 + Q_2 + Q_{12} = 0$ .

Везаних наелектрисања нема по запреминама диелектрика, већ само на граничним површима. Површинска густина везаних наелектрисања у првом диелектрику на граници са горњом електродом је  $\rho_{ps11} = -P_1 = -\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) I}{\sigma_1 S}$ , док је на граници са другим диелектриком  $\rho_{ps12} = -\rho_{ps11} = P_1$ . У другом диелектрику, на граници са првим диелектриком је  $\rho_{ps21} = -P_2 = -\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) I}{\sigma_2 S}$ , док је на граници са доњом електродом  $\rho_{ps22} = -\rho_{ps21} = P_2$ . Укупно везано наелектрисање сваког диелектрика је нула.

(в) Еквипотенцијалне површи у кондензатору паралелне су електродама. Ако се у једну еквипотенцијалну површ убаци танка метална фолија (еквипотенцијална површ се металнује), структура поља у кондензатору неће се променити. Посебно, ако се металнује раздвојна површ два диелектрика на слици 32.2, добијају се два редно везана кондензатора, од којих је сваки сличан ономе на слици 31.1. Напони тих кондензатора су  $U_1 = E_1 d_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 S} I = \frac{d_1}{\epsilon_1 S} Q_1$ , односно  $U_2 = E_2 d_2 = \frac{d_2}{\sigma_2 S} I = \frac{d_2}{\epsilon_2 S} (-Q_2)$ . Како је  $Q_{12} = -Q_1 - Q_2$ , може се формирати еквивалентна шема као на слици 32.3, при чему је  $R_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 S}$ ,

$$R_2 = \frac{d_2}{\sigma_2 S}, C_1 = \frac{\epsilon_1 S}{d_1} \text{ и } C_2 = \frac{\epsilon_2 S}{d_2}.$$

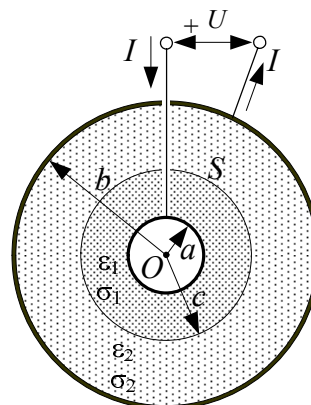


Слика 32.3.

Како је  $U_{12} = U_1 + U_2$ , може се написати  $I = \frac{\sigma_1 \sigma_2 S}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} U = \frac{U}{R_1 + R_2}$ , што указује на линеарну зависност струје и напона у стационарном стању као да се ради о два редно везана отпорника. Међутим, у стационарном стању, оптерећености кондензатора нису једнаке, па се систем са слике 32.2 не може посматрати као два редно везана кондензатора<sup>12</sup>.

<sup>12</sup> У случају да је струја кондензатора са слике 32.1 променљива и да су те промене довољно брзе, систем се приближно понаша као два редно везана кондензатора. Прецизније, то ће бити случај ако је струја простопериодична функција времена учестаности  $f$  и ако су испуњени услови  $2\pi f C_1 \gg G_1$  и  $2\pi f C_2 \gg G_2$ .

**\*\*33.** Сферни кондензатор са два несавршена концентрична диелектрика приказан је на слици 33.1. Познато је  $a, b, c, \epsilon_1, \epsilon_2$  и специфичне проводности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , при чему су  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  врло мали у односу на специфичну проводност електрода кондензатора. (а) Одредити израз за јачину струје у прикључним проводницима кондензатора када је између електрода кондензатора стални напон  $U$ . (б) Колика је електрична отпорност овог кондензатора?



Слика 33.1.

РЕШЕЊЕ

(а) Вектор густине струје је радијалан у целом кондензатору,  $\mathbf{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{i}_r$ ,  $a < r < b$ . Вектори јачине електричног поља су  $\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{J}}{\sigma_1} = \frac{I}{4\pi\sigma_1 r^2} \mathbf{i}_r$ ,  $a < r < c$ , односно  $\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}}{\sigma_2} = \frac{I}{4\pi\sigma_2 r^2} \mathbf{i}_r$ ,  $c < r < b$ . Напон између електрода кондензатора је  $U = \int_a^c E_1(r) dr + \int_c^b E_2(r) dr = \frac{I}{4\pi} \left( \frac{1}{\sigma_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\sigma_2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right)$ , па је јачина струје кондензатора  $I = \frac{4\pi U}{\frac{c-a}{\sigma_1 ac} + \frac{b-c}{\sigma_2 bc}}$ .

(б) Електрична отпорност кондензатора је  $R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{c-a}{\sigma_1 ac} + \frac{b-c}{\sigma_2 bc} \right)$ .

Читаоцу се препоручује да одреди расподелу слободних и везаних наелектрисања у кондензатору и да покаже да између јачине струје и наелектрисања унутрашње електроде важи релација  $Q = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} I$ .

**\*\*34.** Коаксијални вод полупречника електрода  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ) и дужине  $h$  има између електрода линеаран хомоген несавршен диелектрик пермитивности  $\epsilon$  и мале специфичне проводности  $\sigma$ . На једном свом крају вод је прикључен на генератор сталног напона  $U$ , а други крај вода је отворен. Одредити проводност вода сматрајући да су му електроде савршено проводне.

РЕЗУЛТАТ

Проводност (одводност) вода је  $G = \frac{2\pi\sigma h}{\ln \frac{b}{a}}$ .

**\*\*35.** Одредити подужну снагу губитака коаксијалног вода полупречника проводника  $a$  и  $b > a$  са хомогеним несавршеним диелектриком пермитивности  $\epsilon$  и мале специфичне проводности  $\sigma$ , при сталном напону  $U$  између проводника вода.

РЕЗУЛТАТ

Подужна снага губитака је  $P_J' = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}} U^2 = G' U^2$ .

**\*\*36.** Сферни кондензатор полупречника електрода  $a$  и  $b > a$  испуњен је линеарним хомогеним несавршеним диелектриком пермитивности  $\epsilon$  и мале специфичне проводности  $\sigma$ . Електроде кондензатора су савршено проводне, а прикључене су на стални напон  $U$ . Одредити снагу губитака услед Џуловог ефекта у кондензатору.

РЕШЕЊЕ

Због симетрије, поља вектора  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}$  су радијална, при чему је  $\mathbf{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{i}_r$  и  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \mathbf{i}_r$ ,  $a < r < b$ . Како је  $U = \int_a^b E(r) dr = \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{b-a}{ab}$ , то је  $J(r) = \frac{ab\sigma U}{(b-a)r^2}$ .

Запреминска густина снаге Џулових губитака одређена је са  $\frac{dP_J}{dv} = \frac{J^2}{\sigma}$ . Ако се за елементарну запремину узме сферна љуска полупречника  $r$  и дебљине  $dr$  ( $dv = 4\pi r^2 dr$ ), снага Џулових губитака у њој је  $dP_J = \left(\frac{abU}{b-a}\right)^2 \frac{\sigma}{r^4} 4\pi r^2 dr = 4\pi\sigma \left(\frac{abU}{b-a}\right)^2 \frac{dr}{r^2}$ . Укупна снага Џулових губитака је  $P_J = \int_{r=a}^b dP_J = 4\pi\sigma \frac{ab}{b-a} U^2$ . Како је проводност сферног кондензатора  $G = 4\pi\sigma \frac{ab}{b-a}$ , то је  $P_J = GU^2 = \frac{U^2}{R}$ , уз  $RG = 1$ .

**\*37.** Полупречници проводника ваздушног бакарног двожишног вода су  $a = 5 \text{ mm}$ , међусобно растојање проводника је  $d = 50 \text{ cm}$ , а специфична проводност



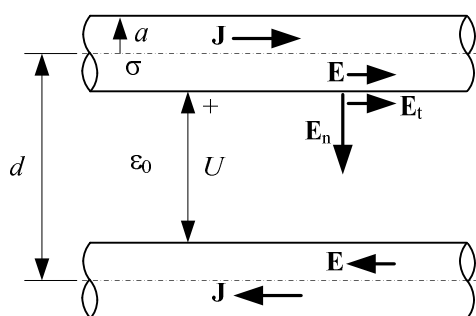
$\sigma = 58 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ . При сталном напону између проводника вода  $U = 600 \text{ V}$ , у воду је успостављена струја густине  $J = 2 \text{ A/mm}^2$ . Израчунати (а) јачину електричног поља у проводницима вода, (б) јачину електричног поља у ваздуху уз површ проводника вода и (в) површинску густину наелектрисања на површи проводника вода.

## РЕШЕЊЕ

(а) На слици 37.1 је приказан део посматраног вода. Електрично поље у проводницима је аксијално, јачине

$$E = \frac{J}{\sigma} = 34,5 \frac{\text{mV}}{\text{m}}.$$

(б) Тангенцијална компонента електричног поља у ваздуху ( $E_t$ ), на самој површи проводника вода, добија се из граничног услова  $E_t = E = 34,5 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$ .



Слика 37.1.

Нормална компонента електричног поља у ваздуху ( $E_n$ ) много је већа од тангенцијалне компоненте. Стога је, изван проводника вода, структура електричног поља практично иста као у одговарајућем електростатичком случају, па је  $U = \frac{Q'}{\pi \epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$ ,

где је  $Q'$  подужно наелектрисање једног проводника вода (други проводник је наелектрисан са  $-Q'$ ). На површи проводника вода електрично поље је

$$E_n = \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0 a} = \frac{U}{2a \ln \frac{d}{a}} \approx 13 \frac{\text{kV}}{\text{m}}. \text{ Очигледно је }^{13} E_n \gg E_t.$$

(в) Површинска густина наелектрисања једног проводника вода је

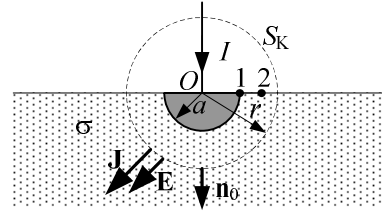
$$\rho_s = \frac{Q'}{2\pi a} = \epsilon_0 E_n \approx 115 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}, \text{ а другог је } -\rho_s.$$

**\*\*38.** Уземљење електроенергетског постројења може се апроксимирати металном полусфером полупречника  $a = 10 \text{ m}$ . Специфична проводност земље око уземљивача је  $\sigma = 10^{-2} \text{ S/m}$  и много је мања од специфичне проводности метала уземљивача. Израчунати (а) отпорност уземљивача и (б) највећу разлику потенцијала корака када је јачина струје уземљивача  $I = 3 \text{ kA}$ . Сматрати да је дужина корака  $d_k = 1 \text{ m}$ . Рачун спровести као да је струја стална.

<sup>13</sup> Из овог примера се може закључити да је у ваздуху занемарљива лонгитудинална компонента електричног поља (компонента у правцу дуж вода), а да преовлађује трансверзална компонента поља (компонента у равни попречног пресека вода).

РЕШЕЊЕ

(а) Због симетрије, струјнице у земљи око уземљивача су радијалне. Применом првог Кирхофовог закона,  $\oint_S \mathbf{J} d\mathbf{S} = 0$ , на сферу  $S_K$  полупречника  $r > a$  (слика 38.1) добија се  $-I + J2\pi r^2 = 0$ , одакле је густина струје у тлу  $J(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$ ,  $r > a$ . Из Омовог закона у локалном облику,  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , добија се јачина електричног поља у земљи око уземљивача,  $E(r) = \frac{J(r)}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2}$ ,  $r > a$ .



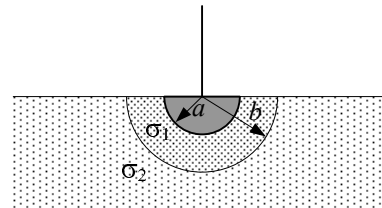
Слика 38.1.

На површи земље линије вектора јачине електричног поља су радијалне, па је потенцијал уземљивача у односу на далеке тачке  $V_a = \int_a^\infty E(r) dr = \frac{I}{2\pi\sigma a}$ . Отпорност уземљивача је  $R_{uz} = \frac{V_a}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma a} = 1,592 \Omega$ .

(б) Разлика потенцијала корака је напон између две тачке на земљи које се налазе на истој линији електричног поља, а између којих растојање одговара дужини човечијег корака ( $d_k = 1 \text{ m}$ ). Највећи напон корака је од тачке на уземљивачу (тачка 1,  $r_1 = a$ ) до тачке удаљене радијално за  $d_k = 1 \text{ m}$  (тачка 2,  $r_2 = a + d_k$ ) од уземљивача,

$$(U_{\text{koraka}})_{\text{max}} = \int_a^{a+d_k} E(r) dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d_k} \right) = 434 \text{ V}.$$

**\*\*39.** На слици 39.1 приказан је полусферни уземљивач полупречника  $a$  и велике специфичне проводности, закопан у земљу специфичне проводности  $\sigma_1$  за  $a < r < b$  и  $\sigma_2$  за  $r > b$ . Одредити отпорност овог уземљивача.

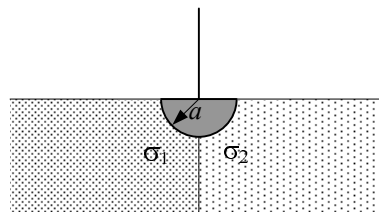


Слика 39.1.

РЕЗУЛТАТ

Отпорност уземљивача је  $R_{uz} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\sigma_1 a} + \frac{1}{b} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) \right)$ .

**\*\*40.** На слици 40.1 приказан је полусферни уземљивач полупречника  $a$  и веома велике специфичне проводности, чија се једна половина налази у земљи специфичне проводности  $\sigma_1$ , а друга половина у земљи специфичне проводности  $\sigma_2$ . Одредити отпорност овог уземљивача.



Слика 40.1.

РЕЗУЛТАТ

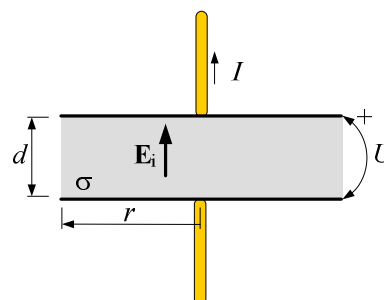
Отпорност уземљивача је  $R_{uz} = \frac{1}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)a}$ .

**41.** На слици 41.1 приказан је генератор у облику танког диска. Базис је круг полупречника  $r = 5 \text{ mm}$ , а дебљина диска је  $d = 0,5 \text{ mm}$ . У генератору постоји хомогено побудно поље интензитета  $E_i = 3 \text{ kV/m}$ . Вектор  $E_i$  је нормалан на базисе диска, као на слици. Специфична проводност материјала у генератору је  $\sigma = 10 \text{ S/m}$ , а губици у прикључним проводницима су занемарљиви. (а) Која релација постоји између вектора густине струје и вектора електричног поља у генератору? (б) Колики је напон празног хода генератора? (в) Која релација постоји између напона и струје генератора за референтне смерове приказане на слици 41.1?

РЕЗУЛТАТ

(а) Релација између вектора густине струје и вектора електричног поља је конститутивна релација за струјно поље у генератору и гласи  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$ .

(б) Напон празног хода генератора (електромоторна сила генератора, емс) је  $U_0 = E_i d = 1,5 \text{ V}$ . Референтни смер емс је нагоре на слици 41.1.



Слика 41.1.

(в) Веза између напона и струје генератора је  $U = E_i d - \frac{d}{\sigma S} I$ , што се може написати и у облику  $U = U_0 - R_g I$ , где је  $R_g = \frac{d}{\sigma S} = 0,6366 \Omega$  унутрашња отпорност генератора.

Колика је јачина струје генератора у празном ходу? Колика је при томе снага Цулових губитака у генератору?

Колика је јачина струје кратког споја генератора? Колика је при томе снага генератора?

**\*\*Шта би било да побудно електрично поље није хомогено, већ се мења (а) у правцу вектора  $E_i$  са слике 41.1 и (б) у правцу нормалном на вектор  $E_i$  са слике 41.1?**

**42.** Генератор из претходног задатка везан је у коло и у његовим прикључцима постоји стална струја  $I = 100 \text{ mA}$ . Израчунати (а) напон генератора, (б) снагу страних сила у генератору, (в) снагу генератора и (г) снагу Џулових губитака у генератору.

РЕЗУЛТАТ

(а) Напон генератора је  $U = E - R_g I = 1,436 \text{ V}$ .

(б) Снага страних сила је  $P_i = EI = 150 \text{ mW}$ .

(в) Снага генератора је  $P_g = UI = 143,6 \text{ mW}$ .

(г) Снага Џулових губитака у генератору је  $P_{Jg} = R_g I^2 = 6,4 \text{ mW}$ .

Ако је на генератор везан само отпорник, колика је отпорност  $R$  тог отпорника (за  $I = 100 \text{ mA}$ )? Колика је снага Џулових губитака у том отпорнику ( $P_R$ )? Какве везе постоје између снага  $P_i$ ,  $P_g$ ,  $P_{Jg}$  и  $P_R$ ?

**43.** За генератор из претходног задатка израчунати (а) густину струје у генератору, (б) запреминску густину снаге страних сила и (в) запреминску густину снаге Џулових губитака.

РЕЗУЛТАТ

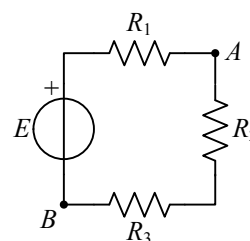
(а) Густина струје је  $J = \frac{I}{\pi r^2} = 1,27 \text{ kA/m}^2$ , а вектор  $\mathbf{J}$  има правац и смер вектора  $\mathbf{E}_i$ .

(б) Запреминска густина снаге страних сила је  $\frac{dP_i}{dv} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} = 3,82 \text{ MW/m}^3$ .

(в) Запреминска густина снаге Џулових губитака је  $\frac{dP_J}{dv} = \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} = 162 \text{ kW/m}^3$ .

## 2. Једноставна електрична кола

44. Генератор сталне електромоторне силе  $E = 12 \text{ V}$ , занемарљиве унутрашње отпорности, и отпорници  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$  и  $R_3 = 150 \Omega$  образују просто електрично коло, као на слици 44.1. Израчунати (а) јачину струје у колу, (б) напоне свих елемената, (в) напон између тачака  $A$  и  $B$  и (г) снаге свих елемената овог кола.

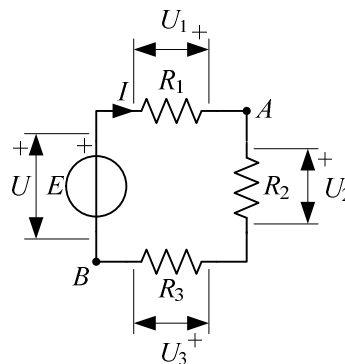


Слика 44.1.

### РЕШЕЊЕ

(а) У простом колу које чине један генератор и више пријемника у редној вези, струју одржава само емс генератора. Због тога су емс и струја истог смера, па су на слици 44.2, природно, усвојени исти референтни смерови за емс и струју у колу.

Јачина струје у простом колу одређује се из релације  $I = \frac{E}{\sum R}$ , где је  $\sum R$  збир свих отпорности у колу. У посматраном случају је

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{12}{300} = 40 \text{ mA}.$$


Слика 44.2.

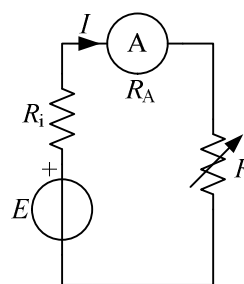
(б) Напони елемената кола су  $U = +E = 12 \text{ V}$ ,  $U_1 = -R_1 I = -2 \text{ V}$  (референтни смерови за напон и струју отпорника  $R_1$  су неусаглашени),  $U_2 = +R_2 I = +4 \text{ V}$  и  $U_3 = +R_3 I = +6 \text{ V}$  (референтни смерови за напон и струју отпорника  $R_2$  и  $R_3$  су усаглашени).

(в) Напон између тачака  $A$  и  $B$  је  $U_{AB} = \sum_B^A (E, -RI) = +E - R_1 I = 10 \text{ V}$ . До истог резултата се може доћи и другим путем,  $U_{AB} = (R_3 + R_2)I = 10 \text{ V}$ , због конзервативног карактера електричног поља (који је исказан другим Кирхофовим законом).

(г) Снаге отпорника су  $P_{R_1} = R_1 I^2 = 80 \text{ mW}$ ,  $P_{R_2} = R_2 I^2 = 160 \text{ mW}$  и  $P_{R_3} = R_3 I^2 = 240 \text{ mW}$ . Снага коју развија емс  $E$  одређује се производом емс и струје генератора рачунатих према истом референтном смеру. У задатом случају је  $P_E = EI = 480 \text{ mW} > 0$  јер уређај ради као генератор.

Очигледно је  $P_E = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3}$ , што произилази из закона одржања рада и енергије.

**45.** Ради одређивања емс и унутрашње отпорности генератора, формирано је просто коло које чине генератор, амперметар унутрашње отпорности  $R_A = 0,1 \Omega$  и отпорник променљиве отпорности (слика 45.1). При отпорности променљивог отпорника  $R_1 = 2,5 \Omega$ , јачина струје у колу је  $I_1 = 2 \text{ A}$ , а при отпорности  $R_2 = 3,5 \Omega$ , јачина струје је  $I_2 = 1,5 \text{ A}$ . Колике су емс  $E$  и унутрашња отпорност  $R_i$  генератора?



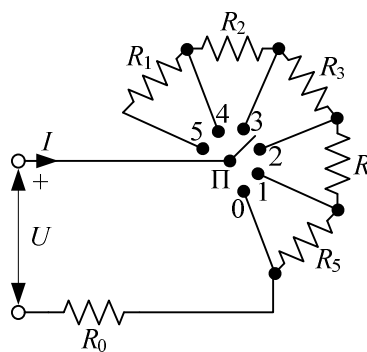
Слика 45.1.

## РЕШЕЊЕ

Полазећи од израза за јачину струје посматраног кола,  $I = \frac{E}{R_i + R_A + R}$ , добија се

$$E = \frac{I_1 I_2}{I_1 - I_2} (R_2 - R_1) = 6 \text{ V} \text{ и } R_i = \frac{(R_2 + R_A)I_2 - (R_1 + R_A)I_1}{I_1 - I_2} = 0,4 \Omega.$$

**46.** Ради регулисања јачине струје пријемника  $R_0$  у опсегу од  $50 \text{ A}$  до  $300 \text{ A}$ , при константном напону генератора  $U = 600 \text{ V}$ , на ред са пријемником везан је реостат  $\Pi$  као на слици<sup>14</sup> 46.1. Израчунати отпорност пријемника и отпорности појединих секција реостата тако да се померањем ручице реостата јачина струје повећава за по  $50 \text{ A}$  почевши од положаја 5.



Слика 46.1.

<sup>14</sup> Шема као на слици 46.1 употребљавала се за регулацију погона код старих трамваја и тролејбуса.

РЕШЕЊЕ

Јачина струје у посматраном колу дата је изразом  $I = \frac{U}{R_0 + \sum_{k=1}^n R_{6-k}}$ , где

$n = 0, 1, \dots, 5$  означава положај ручице реостата<sup>15</sup>. Одавде се добија:

- П у положају 0:  $I_0 = \frac{U}{R_0} = 300 \text{ A}$ , одакле је  $R_0 = 2 \Omega$ ;
- П у положају 1:  $I_1 = \frac{U}{R_0 + R_5} = 250 \text{ A}$ , одакле је  $R_5 = 0,4 \Omega$ ;
- П у положају 2:  $I_2 = \frac{U}{R_0 + R_5 + R_4} = 200 \text{ A}$ , одакле је  $R_4 = 0,6 \Omega$ ;
- П у положају 3:  $I_3 = \frac{U}{R_0 + R_5 + R_4 + R_3} = 150 \text{ A}$ , одакле је  $R_3 = 1 \Omega$ ;
- П у положају 4:  $I_4 = \frac{U}{R_0 + R_5 + R_4 + R_3 + R_2} = 100 \text{ A}$ , одакле је  $R_2 = 2 \Omega$ ;
- П у положају 5:  $I_5 = \frac{U}{R_0 + R_5 + R_4 + R_3 + R_2 + R_1} = 50 \text{ A}$ , одакле је  $R_1 = 6 \Omega$ .

**47.** Када је реални напонски генератор у празном ходу, напон између његових прикључака је  $U_0 = 12,5 \text{ V}$ . Када се на генератор прикључи потрошач отпорности  $R = 1,2 \Omega$ , напон генератора је  $U = 12,0 \text{ V}$ . Израчунати унутрашњу отпорност генератора.

РЕШЕЊЕ

Напон празног хода једнак је емс генератора, па је емс  $E = 12,5 \text{ V}$ . Када се прикључи пријемник, јачина струје у колу је  $I = \frac{E}{R_g + R}$ , а напон генератора је

$$U = RI = \frac{RE}{R_g + R}. \text{ Одавде је унутрашња отпорност генератора } R_g = \frac{R(E - U)}{U} = 50 \text{ m}\Omega.$$

**48.** Када је на реални напонски генератор прикључен потрошач отпорности  $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ , напон генератора је  $U_1 = 4 \text{ V}$ , а када је прикључен потрошач отпорности  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ , напон генератора је  $U_2 = 2,5 \text{ V}$ . Израчунати емс и унутрашњу отпорност генератора.

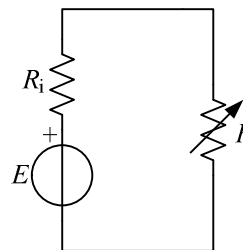
---

<sup>15</sup> Када је  $n = 0$ , тада је  $\sum_{k=1}^0 R_{6-k} = 0$ .

РЕЗУЛТАТ

Емс генератора је  $E = 5 \text{ V}$ , а унутрашња отпорност је  $R_g = 1 \text{ k}\Omega$ .

**\*49.** Реални напонски генератор, непознате емс  $E$  и непознате унутрашње отпорности  $R_i$ , и отпорник променљиве отпорности  $R$  образују просто коло као на слици 49.1. Снага,  $P$ , отпорника променљиве отпорности  $R$  је иста при отпорностима  $R_1$  и  $R_2$ . Одредити јачину струје кратког споја реалног напонског генератора.

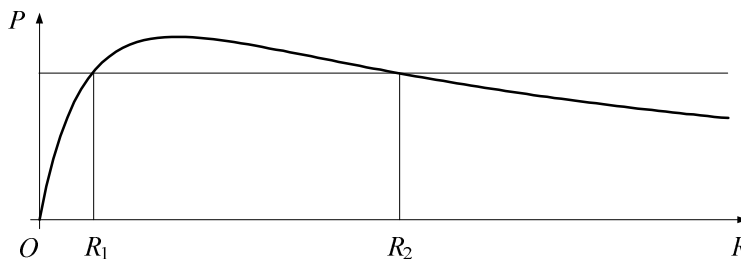


Слика 49.1.

РЕШЕЊЕ

Снага отпорника променљиве отпорности  $R$  је  $P(R) = \frac{RE^2}{(R + R_i)^2}$ . На слици 49.2 је

приказан график те снаге. Са графика се закључује да функција  $P(R)$  има један максимум и нуле за  $R = 0$  (што одговара кратком споју генератора) и  $R \rightarrow \infty$  (што одговара празном ходу генератора). Постављени услов једнаких снага  $P$  може се остварити ако је једна отпорност ( $R_1$ ) мања, а друга отпорност ( $R_2$ ) већа од отпорности при којој је снага максимална.

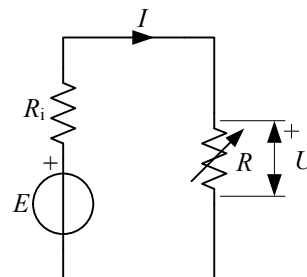


Слика 49.2.

Из израза  $P = \frac{R_1 E^2}{(R_1 + R_i)^2}$  и  $P = \frac{R_2 E^2}{(R_2 + R_i)^2}$  добија се  $R_i = \sqrt{R_1 R_2}$  и  $E = \pm \sqrt{P}(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})$ . Јачина струје кратког споја генератора је  $I_0 = \frac{E}{R_i} = \pm \frac{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})\sqrt{P}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}} \right) \sqrt{P}$ .



**50.** Реалан напонски генератор, непознате емс  $E$  и непознате унутрашње отпорности  $R_i$ , и пријемник променљиве отпорности образују просто електрично коло, као на слици 50.1. При два различита отпорности променљивог отпорника снага отпорника је иста и износи  $P_0$ , а одговарајући напони између његових крајева су  $U_1$  и  $U_2$ . Одредити емс  $E$  и унутрашњу отпорност  $R_i$  генератора.



Слика 50.1.

РЕШЕЊЕ

Снага променљивог отпорника је  $P = UI = U \frac{E - U}{R_i}$ . Према условима задатка је

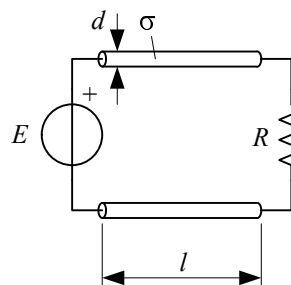
$$P_0 = \frac{(E - U_1)U_1}{R_i} \text{ и } P_0 = \frac{(E - U_2)U_2}{R_i}, \text{ одакле је } E = U_1 + U_2 \text{ и } R_i = \frac{U_1 U_2}{P_0}.$$

**51.** Површина попречног пресека проводника ваздушног двожишног вода је  $S$ , а специфична отпорност је  $\rho$ . На једном крају вод је прикључен на генератор сталног напона  $U$ . Због квара, проводници вода су међусобно кратко спојени на непознатом растојању од генератора. У циљу локализације квара, амперметром унутрашње отпорности  $R_A$  измерена је јачина струје у воду,  $I$ . Одредити растојање од почетка вода од места кратког споја.

РЕШЕЊЕ

Јачина струје вода је  $I = \frac{U}{R_A + 2R}$ , где је  $R$  отпорност једног проводника вода од почетка до места кратког споја. Користећи се изразом за отпорност танког жичаног проводника,  $R = \rho \frac{l}{S}$ , за растојање до места кратког споја добија се  $l = \frac{S}{2\rho} \left( \frac{U}{I} - R_A \right)$ .

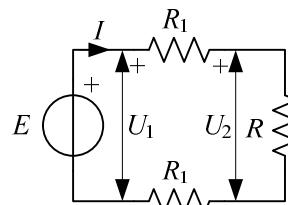
**52.** Генератор електромоторне силе  $E = 400 \text{ V}$  и пријемник отпорности  $R = 2 \Omega$  повезани су бакарним двожишним водом дужине  $l = 500 \text{ m}$ , као на слици 52.1. Пречник проводника вода је  $d = 10 \text{ mm}$ , а специфична проводност  $\sigma = 58 \text{ MS/m}$ . Израчунати (а) јачину струје пријемника, (б) пад напона дуж вода и (в) снагу губитака у воду. Занемарити струје одводности у воду.



Слика 52.1.

РЕШЕЊЕ

Еквивалентна шема кола са слике 52.1 приказана је на слици 52.2. У том простом колу, сваки отпорник отпорности  $R_1 = \frac{l}{\sigma S} = 0,11 \Omega$  моделује по један проводник двожишног вода.



Слика 52.2.

(а) Јачина струје у колу је  $I = \frac{E}{2R_1 + R} \approx 180 \text{ A}$ , што је истовремено и тражена јачина струје пријемника.

(б) Напон на почетку вода је  $U_1 = E = 400 \text{ V}$ , а напон пријемника је  $U_2 = RI = 360 \text{ V}$ . Пад напона дуж вода је  $\Delta U = U_1 - U_2 \approx 40 \text{ V}$ .

(в) Снага Џулових губитака у проводницима вода је  $P_{\text{жв}} = 2R_1 I^2 = 7,13 \text{ kW}$ .

Читаоцу се препоручује да израчуна коефицијент корисног дејства овог система за пренос енергије,  $\eta = \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{г}}}$ , где је  $P_{\text{г}}$  снага генератора, а  $P_{\text{п}}$  снага пријемника (отпорника отпорности  $R$ ).

**53.** Генератор емс  $E = 22 \text{ V}$ , занемарљиве унутрашње отпорности, отпорник непроменљиве отпорности  $R_1 = 10 \Omega$  и отпорник од бакарне жице образују просто коло. На собној температури,  $\theta_1 = 18^\circ \text{C}$ , одмах по успостављању струје, јачина струје у колу је  $I_1 = 1,1 \text{ A}$ . Јачина струје се, затим, устали на  $I_2 = 1 \text{ A}$ . Израчунати нову температуру бакарног жичаног отпорника. Температурни сачинилац бакра је  $\alpha = 4,3 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ \text{C}}$ .

РЕШЕЊЕ

Јачина струје у колу је  $I = \frac{E}{R_1 + R(\theta)}$ , па је  $R(\theta) = \frac{E}{I} - R_1$ , односно  $R(\theta_1) = 10 \Omega$  и  $R(\theta_2) = 12 \Omega$ . Нова температура отпорника је  $\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{R(\theta_2)}{R(\theta_1)} - 1 \right) \approx 64,5^\circ \text{C}$ .

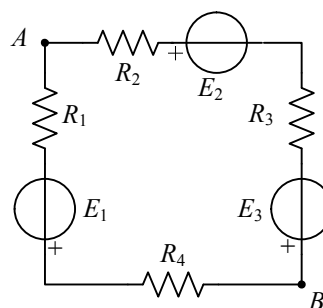
**54.** Ради температурске стабилизације, на ред са отпорником од легуре никла и хрома, температурног сачиниоца  $\alpha_{\text{NiCr}} = 11 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ \text{C}}$ , везан је графитни отпорник чији је температурни сачинилац  $\alpha_{\text{C}} = -2 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^\circ \text{C}}$ . Отпорност редне везе на собној температури треба да буде  $R = 2 \text{ k}\Omega$ . Израчунати отпорности графитног отпорника и никл-хром отпорника на собној температури.

РЕШЕЊЕ

Под претпоставком да се оба употребљена отпорника загреју до исте температуре,  $\theta_2$ , отпорности отпорника су  $R_{\text{NiCr}}(\theta_2) = R_{\text{NiCr}}(\theta_1)(1 + \alpha_{\text{NiCr}}\Delta\theta)$  и  $R_C(\theta_2) = R_C(\theta_1)(1 + \alpha_C\Delta\theta)$ , где је  $\theta_1$  собна температура. Еквивалентна отпорност редне везе је  $R = R_{\text{NiCr}}(\theta_2) + R_C(\theta_2) = R_{\text{NiCr}}(\theta_1) + R_C(\theta_1) + (\alpha_{\text{NiCr}}R_{\text{NiCr}}(\theta_1) + \alpha_C R_C(\theta_1))\Delta\theta$ . Да би се остварила независност отпорности редне везе од температуре, потребно је да буде  $\alpha_{\text{NiCr}}R_{\text{NiCr}}(\theta_1) + \alpha_C R_C(\theta_1) = 0$ . Тада је  $R = R_{\text{NiCr}}(\theta_1) + R_C(\theta_1) = R_{\text{NiCr}}(\theta_1)\left(1 - \frac{\alpha_{\text{NiCr}}}{\alpha_C}\right)$ ,

одакле је  $R_{\text{NiCr}}(\theta_1) = \frac{R}{1 - \frac{\alpha_{\text{NiCr}}}{\alpha_C}} \approx 1,29 \text{ k}\Omega$  и  $R_C(\theta_1) \approx 707 \Omega$ .

**55.** Генератори електромоторних сила  $E_1 = -12 \text{ V}$ ,  $E_2 = 6 \text{ V}$  и  $E_3 = -2 \text{ V}$  и отпорници  $R_1 = 15 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$  и  $R_4 = 20 \Omega$  образују просто коло као на слици 55.1. Израчунати интензитет струје у колу, напоне елемената кола, напон између тачака  $A$  и  $B$  и снаге елемената кола.



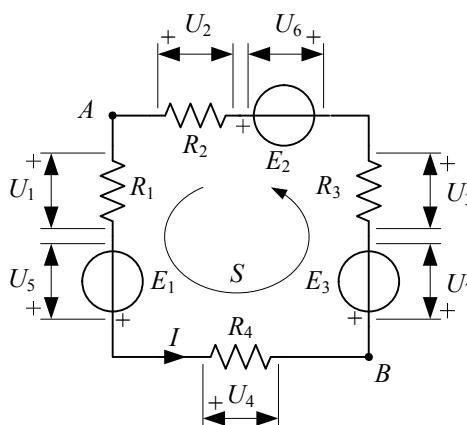
Слика 55.1.

РЕШЕЊЕ

Уопштени Омов закон одређује струју у простом колу сачињеном од више генератора и више отпорника у редној вези (слика 55.2),

$$I = \frac{\sum E}{\sum R}, \quad (55.1)$$

где је  $\sum E$  алгебарски збир емс у колу формиран према (произвољно) усвојеном референтном смеру у односу на који се одређује струја  $I$ , а  $\sum R$  је збир свих отпорности у колу. За коло са слике 55.2 је  $I = \frac{E_1 - E_3 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$ . Заменом бројних вредности у SI систему јединица добија се  $I = \frac{(-12) - (-2) + (+6)}{15 + 10 + 5 + 20} \text{ A} = -0,08 \text{ A} = -80 \text{ mA}$ .



Слика 55.2.

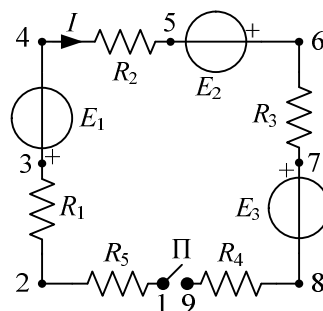
Напони елемената кола су  $U_1 = R_1 I = -1,2 \text{ V}$ ,  $U_2 = -R_2 I = +0,8 \text{ V}$ ,  $U_3 = -R_3 I = +0,4 \text{ V}$ ,  $U_4 = R_4 I = -1,6 \text{ V}$ ,  $U_5 = E_1 = -12 \text{ V}$ ,  $U_6 = -E_2 = -6 \text{ V}$  и  $U_7 = E_3 = -2 \text{ V}$ . Као провера, сумирајући дуж затворене путање (контуре)  $S$  (слика 55.2) чија се оријентација поклапа са усвојеним референтним смером струје, алгебарски збир напона у колу је  $-U_1 + U_5 - U_4 - U_7 + U_3 - U_6 + U_2 = 0$ , односно задовољен је други Кирхофов закон.

Напон између тачака  $A$  и  $B$  је  $U_{AB} = \sum_B^A (E, -RI) = -E_3 - R_3 I + E_2 - R_2 I = 9,2 \text{ V}$ , а може се израчунати и као  $U_{AB} = R_4 I - E_1 + R_1 I = 9,2 \text{ V}$ .

Снаге отпорника (снаге Џулових губитака) су  $P_{R_1} = R_1 I^2 = 96 \text{ mW}$ ,  $P_{R_2} = R_2 I^2 = 64 \text{ mW}$ ,  $P_{R_3} = R_3 I^2 = 32 \text{ mW}$  и  $P_{R_4} = R_4 I^2 = 128 \text{ mW}$ . Укупна снага Џулових губитака у колу је  $P_{Ruk} = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) I^2 = 320 \text{ mW}$ .

Снаге идеалних напонских генератора су  $P_{E_1} = E_1 I = 960 \text{ mW} > 0$  (уређај ради као генератор),  $P_{E_2} = E_2 I = -480 \text{ mW} < 0$  (уређај ради као пријемник) и  $P_{E_3} = -E_3 I = -160 \text{ mW} < 0$  (уређај ради као пријемник). Очигледно је  $P_{E_1} + P_{E_2} + P_{E_3} = P_{Ruk}$ .

**56.** За просто коло приказано на слици 56.1 је  $E_1 = 6 \text{ V}$ ,  $E_2 = 12 \text{ V}$ ,  $E_3 = 18 \text{ V}$ ,  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $R_3 = 15 \Omega$ ,  $R_4 = 20 \Omega$  и  $R_5 = 6 \Omega$ . Нацртати дијаграм потенцијала за коло када је прекидач  $\Pi$  (а) отворен и (б) затворен. За референтну тачку узети тачку 1.



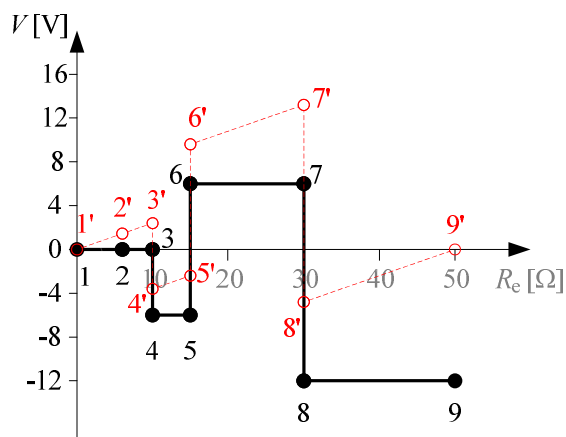
Слика 56.1.

#### РЕШЕЊЕ

(а) При отвореном прекидачу  $\Pi$  у колу нема струје, па су потенцијали тачака  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 0$ ,  $V_3 = 0$ ,  $V_4 = -E_1 = -6 \text{ V}$ ,  $V_5 = V_4 = -6 \text{ V}$ ,  $V_6 = V_5 + E_2 = +6 \text{ V}$ ,  $V_7 = V_6 = +6 \text{ V}$ ,  $V_8 = V_7 - E_3 = -12 \text{ V}$  и  $V_9 = V_8 = -12 \text{ V}$ , што је приказано пуном линијом на слици 56.2. Дијаграм је нацртан тако да је на апсцису нанет збир отпорности ( $R_e$ ) свих отпорника од тачке 1 до посматране тачке.

(б) Када је прекидач  $\Pi$  затворен, у колу се успоставља струја интензитета  $I = \frac{-E_1 + E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = -0,24 \text{ A}$ , па су потенцијали тачака  $V'_1 = 0$ ,  $V'_2 = -R_5 I = 1,44 \text{ V}$ ,  $V'_3 = V'_2 - R_1 I = 2,4 \text{ V}$ ,  $V'_4 = V'_3 - E_1 = -3,6 \text{ V}$ ,  $V'_5 = V'_4 - R_2 I = -2,4 \text{ V}$ ,

$V'_6 = V'_5 + E_2 = 9,6 \text{ V}$ ,  $V'_7 = V'_6 - R_3 I = 13,2 \text{ V}$ ,  $V'_8 = V'_7 - E_3 = -4,8 \text{ V}$  и  $V'_9 = V'_8 - R_4 I = 0$ .  
Дијаграм потенцијала за овај случај приказан је испрекиданом линијом на слици 56.2.



Слика 56.2.

**57.** Отпорници отпорности  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$  и  $R_3 = 500 \Omega$  тако су направљени, да су њихове максималне допустиве снаге  $P_{1\max} = 1 \text{ W}$ ,  $P_{2\max} = 0,75 \text{ W}$  и  $P_{3\max} = 0,5 \text{ W}$ , респективно. Колика је максимална допустива снага редне везе ових отпорника?

РЕШЕЊЕ

Полазећи од Џуловог закона,  $P = RI^2$ , за максималне допустиве јачине струја појединих отпорника добија се  $I_{1\max} = \sqrt{\frac{P_{1\max}}{R_1}} = \frac{\sqrt{2}}{20} \text{ A} \approx 70,7 \text{ mA}$ ,  
 $I_{2\max} = \sqrt{\frac{P_{2\max}}{R_2}} = 50 \text{ mA}$  и  $I_{3\max} = \sqrt{\frac{P_{3\max}}{R_3}} = \frac{\sqrt{10}}{100} \text{ A} \approx 31,6 \text{ mA}$ . Када се отпорници вежу на ред, јачина струје свих отпорника је иста. Због тога је  $I_{\max} = \min\{I_{1\max}, I_{2\max}, I_{3\max}\} = I_{3\max} = \frac{\sqrt{10}}{100} \text{ A}$ , па је највећа допустива снага редне везе ових отпорника  $P_{\max} = (R_1 + R_2 + R_3)I_{\max}^2 = 1 \text{ W}$ .

**58.** Поновити претходни задатак ако су отпорници везани паралелно.

РЕШЕЊЕ

Када су отпорници везани паралелно, напон им је заједнички ( $U$ ). Снага отпорника, изражена преко напона, је  $P = \frac{U^2}{R}$ . Највећи допустив напон првог отпорника је

$U_{1\max} = \sqrt{P_{1\max} R_1} = R_1 I_{1\max} = 10\sqrt{2} \text{ V} \approx 14,14 \text{ V}$ , другог  $U_{2\max} = 15 \text{ V}$ , а трећег  $U_{3\max} = 5\sqrt{10} \text{ V} \approx 15,81 \text{ V}$ . Одавде је максимални напон паралелне везе ових отпорника  $U_{\max} = 10\sqrt{2} \text{ V}$ , а највећа допустива снага  $P_{\max} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U_{\max}^2 \approx 2,07 \text{ W}$ .

Да ли нека мешовита веза ова три отпорника има још већу допустиву снагу?

**59.** Поновити задатак 57 ако су, уместо максималних допустивих снага, познати максимални допустиви напони отпорника,  $U_{1\max} = U_{2\max} = U_{3\max} = 15 \text{ V}$ .

#### РЕЗУЛТАТ

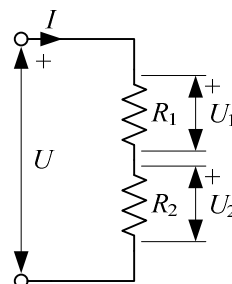
Максимална допустива снага редне везе је  $P_{\max} = 0,9 \text{ W}$ .

**60.** Поновити задатак 58 ако су, уместо максималних допустивих снага, познате максималне допустиве струје отпорника,  $I_{1\max} = I_{2\max} = I_{3\max} = 60 \text{ mA}$ .

#### РЕЗУЛТАТ

Максимална допустива снага паралелне везе је  $P_{\max} = 1,488 \text{ W}$ .

**61.** На слици 61.1 приказан је део кола сталне струје који се назива и отпорнички разделник напона. Сматрајући познатим напон  $U$  и отпорности  $R_1$  и  $R_2$ , извести обрасце за напоне отпорника,  $U_1$  и  $U_2$ . Генерализати обрасце за  $n$  редно везаних отпорника.



Слика 61.1.

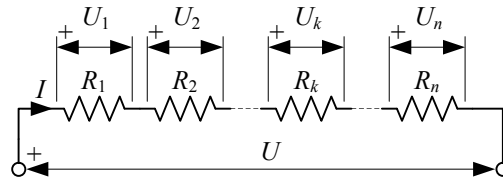
Према ознакама на слици 61.1 је  $U_1 = R_1 I$  и  $U_2 = R_2 I$ , па је  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$  и

$U = U_1 + U_2$ . Одавде произилазе обрасци  $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$  и  $U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$ .

За општи случај приказан на слици 61.2 је  $U_k = R_k I$ ,  $k = 1, \dots, n$ , и  $U = \sum_{j=1}^n U_j = I \sum_{j=1}^n R_j$ , па је  $U_k = \frac{R_k}{\sum_{j=1}^n R_j} U$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Очигледно, напони отпорника су

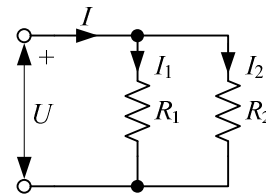
сразмерни одговарајућим отпорностима.

Читаоцу се препоручује да изведе обрасце у којима фигуришу проводности отпорника (уместо отпорности).



Слика 61.2.

62. На слици 62.1 приказан је део кола сталне струје који се назива и отпорнички разделник струје. Сматрајући познатим јачину струје напојне гране  $I$  и отпорности паралелних грана  $R_1$  и  $R_2$ , извести обрасце за јачине струја отпорника,  $I_1$  и  $I_2$ . Генералисати обрасце за  $n$  паралелно везаних отпорника.



Слика 62.1.

РЕШЕЊЕ

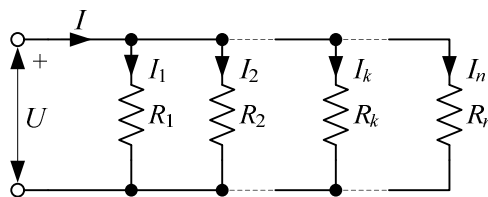
Према Кирхофовим законима је  $I = I_1 + I_2$  и  $U = R_1 I_1 = R_2 I_2$ , одакле се добијају обрасци  $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$  и  $I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$ . Преко проводности отпорника, ови обрасци гласе  $I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I$  и  $I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I$ .

За уопштавање је природније радити са проводностима него са отпорностима грана.

За паралелну везу са слике 62.2 је  $I_k = G_k U$ ,  $k = 1, \dots, n$ , и  $I = \sum_{j=1}^n I_j = U \sum_{j=1}^n G_j$ , па је

$$I_k = \frac{G_k}{\sum_{j=1}^n G_j} I, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad \text{Струје отпорника су сразмерне одговарајућим}$$

проводностима грана.



Слика 62.2.

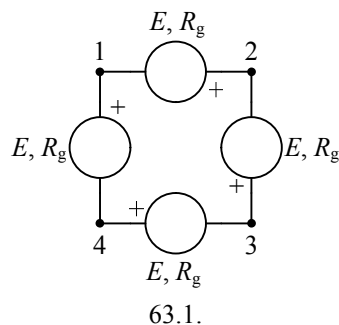
**63.** Четири идентична реална напонска генератора, сваки електромоторне силе  $E = 10 \text{ V}$  и унутрашње отпорности  $R_g = 1 \Omega$ , везани су у коло као на слици 63.1. Израчунати (а) јачину струје у колу и (б) напоне  $U_{jk}$ ,  $j = 1, \dots, 3$ ,  $k = j + 1, \dots, 4$ .

#### РЕЗУЛТАТ

(а) У односу на референтни смер који се поклапа са смером кретања казаљке часовника, јачина струје у колу је  $I = \frac{4E}{4R_g} = 10 \text{ A}$ .

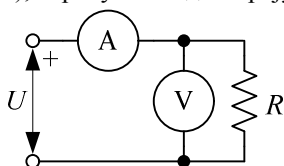
(б) Сви напони једнаки су нули јер је  $E - R_g I = 0$ .

Читаоцу се препоручује да задатак генерализује на случај  $n$  идентичних редно везаних генератора.

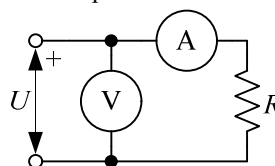


63.1.

**\*64.** Потрошач отпорности  $R = 100 \Omega$  прикључен је на сталан напон  $U = 100 \text{ V}$ . На располагању стоје волтметар унутрашње отпорности  $R_V = 10 \text{ k}\Omega$  и амперметар унутрашње отпорности  $R_A = 10 \text{ m}\Omega$ . (а) Колика је систематска грешка мерења снаге (преко производа  $UI$ ) ако се волтметар и амперметар вежу према шеми на слици 64.1, односно 64.2? (б) Ако се те две шеме употребе за мерење отпорности потрошача (преко количника  $U/I$ ), израчунати одговарајуће систематске грешке.



Слика 64.1.



Слика 64.2.

#### РЕШЕЊЕ

Пре везивања инструмената, напон потрошача је  $U_0 = 100 \text{ V}$ , јачина струје је  $I_0 = 1 \text{ A}$ , а снага је  $P_0 = \frac{U^2}{R} = 100 \text{ W}$ .

У колу са слике 64.1 јачина струје амперметра је  $I_1 = \frac{U_0}{R_A \oplus R_V \parallel R} = 1,0099 \text{ A}$ , а напон волтметра је  $U_1 = \frac{R_V \parallel R}{R_A \oplus R_V \parallel R} U_0 = 99,9899 \text{ V}$ . Снага потрошача је  $P_1 = \frac{U_1^2}{R} = 99,98 \text{ W}$ , а производ напона који мери волтметар и струје коју мери амперметар је  $P'_1 = U_1 I_1 = 100,98 \text{ W}$ . Стварна снага потрошача је за 0,02% мања него пре укључивања инструмената, али је измерена снага за 1% већа. Отпорност потрошача



мерена према овој шеми је  $R_1 = \frac{U_1}{I_1} = 99,01 \Omega$ , што је за око 1% мање од стварне отпорности.

У колу са слике 64.2 напон волтметра је  $U_2 = U_0 = 100 \text{ V}$ , а јачина струје амперметра је  $I_2 = \frac{U_0}{R_A + R} = 0,9999 \text{ A}$ . Снага потрошача је  $P_2 = RI_2^2 = 99,98 \text{ W}$ , а производ напона који мери волтметар и струје коју мери амперметар је  $P'_2 = U_2 I_2 = 99,99 \text{ W}$ . Стварна снага потрошача је за 0,02% мања него пре укључивања инструмената, а измерена снага је за 0,01% мања. Отпорност потрошача мерена према овој шеми је  $R_2 = \frac{U_2}{I_2} = 100,01 \Omega$ , што је за 0,01% веће од стварне отпорности.

Читаоцу се препоручује да понови задатак под претпоставком да је  $R = 10 \Omega$  и да закључи под којим је условима погоднија шема са слике 64.1, а под којим са слике 64.2.

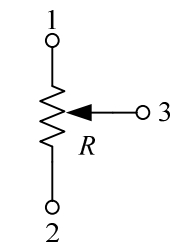
**65.** Отпорност једног отпорника мери се помоћу шеме приказане на слици 64.2. Отпорност амперметра је  $R_A = 1 \Omega$ , а волтметра  $R_V = 1 \text{ k}\Omega$ . Показивања инструмената су 100 mA и 10 V, респективно. Колика је мерена отпорност?

#### РЕЗУЛТАТ

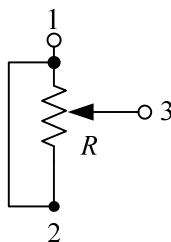
Мерена отпорност је  $R = 99 \Omega$ .

Повити задатак под претпоставком да је мерење извршено помоћу шеме приказане на слици 64.1.

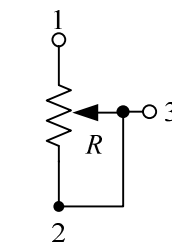
**66.** Отпорност потенциометра приказаног на слици 66.1 је  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . У којим је границама отпорност између тачака 1 и 3 (а) на слици 66.2 и (б) на слици 66.3?



Слика 66.1.



Слика 66.2.



Слика 66.3.

#### РЕЗУЛТАТ

(а) Отпорност између тачака 1 и 3 на слици 66.2 је у границама  $0 \leq R_{13} \leq 0,25 \text{ k}\Omega$ . Највећа је када је клизач потенциометра на средини, а најмања када је на једном од крајева.

(б) Отпорност између тачака 1 и 3 на слици 66.3 је у границама  $0 \leq R_{13} \leq 1 \text{ k}\Omega$ . Најмања је када је клизач у горњем положају, а највећа је када је у доњем положају.

**\*67.** Отпорности три отпорника од цекаса су  $R_1 = 50\Omega$ ,  $R_2 = 100\Omega$  и  $R_3 = 200\Omega$ . Израчунати све могуће снаге које се добијају када се ти отпорници прикључе на извор сталног напона  $U = 200\text{ V}$ . Сматрати да се отпорности отпорника не мењају са температуром.

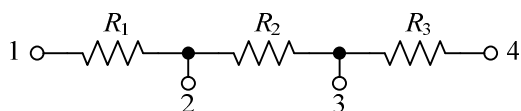
#### РЕЗУЛТАТ

Тражене снаге су приказане у табели 67.1.

Табела 67.1.

| Веза                              | $P [\text{W}]$ |
|-----------------------------------|----------------|
| $R_1 \parallel R_2 \parallel R_3$ | 1400           |
| $R_1 \parallel R_2$               | 1200           |
| $R_1 \parallel R_3$               | 1000           |
| $R_1 \parallel (R_2 \oplus R_3)$  | 933            |
| $R_1$                             | 800            |
| $R_2 \parallel R_3$               | 600            |
| $R_2 \parallel (R_1 \oplus R_3)$  | 560            |
| $R_3 \parallel (R_1 \oplus R_2)$  | 467            |
| $R_2$                             | 400            |
| $R_1 \oplus (R_2 \parallel R_3)$  | 343            |
| $R_2 \oplus (R_1 \parallel R_3)$  | 286            |
| $R_1 \oplus R_2$                  | 267            |
| $R_3$                             | 200            |
| $R_3 \oplus (R_1 \parallel R_2)$  | 171            |
| $R_1 \oplus R_3$                  | 160            |
| $R_2 \oplus R_3$                  | 133            |
| $R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$       | 114            |

Читаоцу се препоручује да понови задатак ако су отпорници нераскидиво везани на ред, као на слици 67.1, а прикључци 1, 2, 3 и 4 се на разне начине везују на генератор.



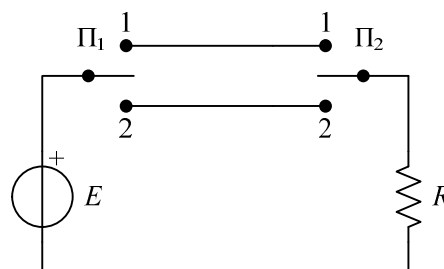
Слика 67.1.

Такође, читаоцу се препоручује да понови задатак ако се отпорници прикључе на извор сталне струје  $I = 1\text{ A}$ .

**68.** На слици 68.1 приказано је коло које се састоји од напонског генератора, пријемника и два преклопника („наизменична прекидача“). При којим положајима преклопника постоји струја у овом колу, а при којим положајима не постоји?

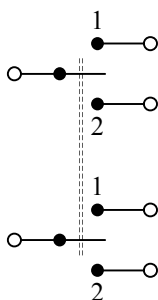
РЕЗУЛТАТ

Када су оба преклопника у горњем положају (1), или оба у доњем положају (2), постоји струја. Када је један преклопник у горњем положају, а други у доњем, струје нема. Шема као на слици 68.1 употребљава се, на пример, да се омогући независно паљење и гашење осветљења са два места.

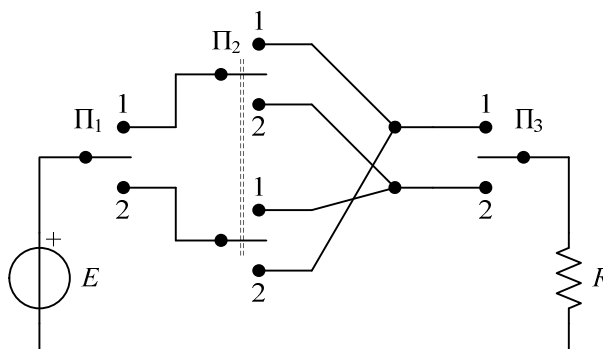


Слика 68.1.

**\*69.** На слици 69.1 приказан је такозвани унакрсни прекидач. Он се састоји од два преклопника који се истовремено пребацују у положај (1) или у положај (2). На слици 69.2 приказано је коло које се састоји од генератора, пријемника, два преклопника и једног унакрсног прекидача. У којим положајима прекидача постоји, а у којима не постоји струја кроз отпорник отпорности  $R$  ?



Слика 69.1.



Слика 69.2.

РЕЗУЛТАТ

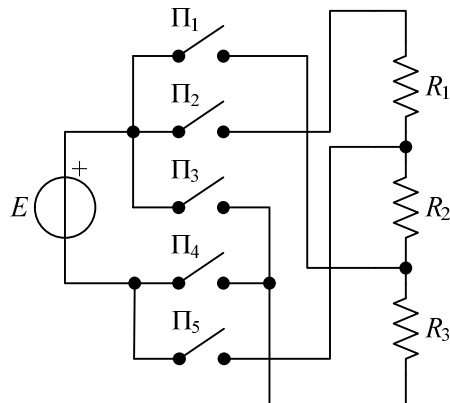
Постоји 8 различитих комбинација стања преклопника и прекидача, од којих у 4 случаја постоји, а у 4 не постоји струја пријемника (табела 69.1).

Табела 69.1.

| $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | струја |
|---------|---------|---------|--------|
| 1       | 1       | 1       | има    |
| 1       | 1       | 2       | нема   |
| 1       | 2       | 1       | нема   |
| 1       | 2       | 2       | има    |
| 2       | 1       | 1       | нема   |
| 2       | 1       | 2       | има    |
| 2       | 2       | 1       | има    |
| 2       | 2       | 2       | нема   |

За шта се може применити шема са слике 69.2? Читаоцу се препоручује да генерализује ту шему додавањем још неколико унакрсних прекидача.

**\*70.** На слици 70.1 приказана је шема која одговара једној плочи електричног штедњака. Познато је  $E = 210 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_3 = 51 \Omega$  и  $R_2 = 144 \Omega$ . Прекидачи имају 7 различитих стања, према табели 70.1, у којој "0" значи да је прекидач отворен, а "1" да је затворен. Израчунати укупну снагу отпорника у сваком од ових стања. Сматрати да се отпорности отпорника не мењају са температуром.



Слика 70.1.

Табела 70.1.

| Стање | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | $\Pi_4$ | $\Pi_5$ |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 1     | 0       | 1       | 0       | 1       | 0       |
| 2     | 0       | 0       | 1       | 0       | 1       |
| 3     | 1       | 0       | 0       | 0       | 1       |
| 4     | 1       | 0       | 0       | 1       | 0       |
| 5     | 1       | 0       | 0       | 1       | 1       |
| 6     | 1       | 1       | 0       | 1       | 1       |

**РЕЗУЛТАТ**

Укупна снага отпорника дата је у табели 70.2.

Табела 70.2.

| Стање | $P [\text{W}]$ |
|-------|----------------|
| 0     | 0              |
| 1     | 179            |
| 2     | 226            |
| 3     | 306            |
| 4     | 865            |
| 5     | 1171           |
| 6     | 2036           |

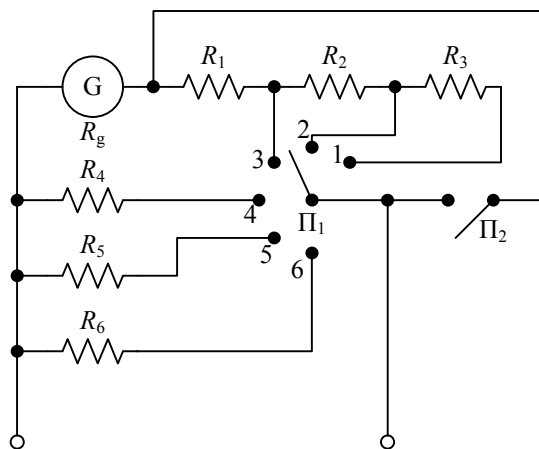
**\*\*71.** Нацртати шему једноставног универзалног инструмента (унимера) за сталну струју који може да ради као волтметар (за опсеге 1 V, 10 V и 100 V) и као амперметар за опсеге (1 mA, 10 mA и 100 mA). На располагању је галванометар отпорности  $R_g = 1 \text{ k}\Omega$  и пуног скретања 100 mV.

РЕШЕЊЕ

Да би се добио волтметар чије је пуно скретање  $U$ , на ред са галванометром треба везати отпорник отпорности  $R_r = \left( \frac{U}{U_0} - 1 \right) R_g$ , где је  $U_0 = 100 \text{ mV}$  напон пуног скретања галванометра.

При пуном скретању галванометра, струја галванометра је  $I_0 = \frac{U_0}{R_g} = 100 \text{ }\mu\text{A}$ . Да би се добио амперметар чије је пуно скретање  $I$ , паралелно са галванометром треба везати отпорник (шант) отпорности  $R_p = \frac{R_g}{\frac{I}{I_0} - 1}$ .

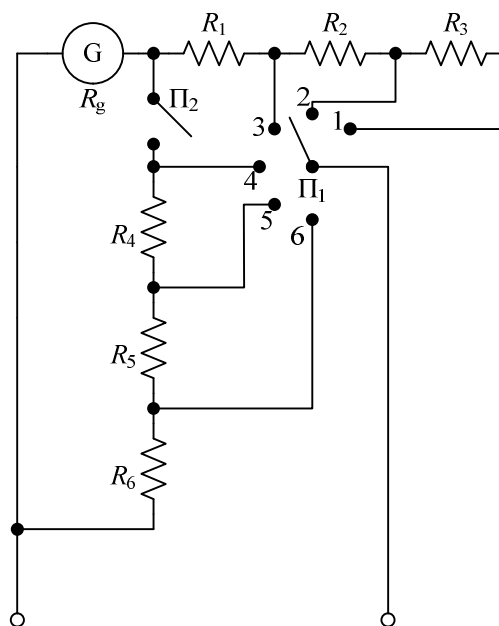
Једна од могућих шема универзалног инструмента приказана је на слици 71.1. Отпорности отпорника су  $R_1 = 9 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 900 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = \frac{1000}{9} \Omega$ ,  $R_5 = \frac{1000}{99} \Omega$  и  $R_6 = \frac{1000}{999} \Omega$ . Када инструмент ради као волтметар, прекидач  $\Pi_2$  је отворен, а преклопник  $\Pi_1$  може бити у положају 1 (за опсег од 100 V), 2 (10 V) или 3 (1 V). Када инструмент ради као амперметар, прекидач  $\Pi_2$  је затворен, а преклопник  $\Pi_1$  може бити у положају 4 (за опсег од 1 mA), 5 (10 mA) или 6 (100 mA).



Слика 71.1.

Шема са слике 71.1 има недостатак. Када инструмент ради као амперметар, при пребацивању преклопника  $\Pi_1$  из положаја 4 у 5, или из 5 у 6, галванометар краткотрајно остаје без шанта, па лако може прегорети. Шема са слике 71.2 нема тај недостатак јер се приликом пребацивања преклопника струјно коло краткотрајно прекида. Отпорности отпорника у шеми на слици 71.2 су  $R_1 = 9 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 900 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 100 \Omega$ ,  $R_5 = 10 \Omega$  и  $R_6 = \frac{10}{9} \Omega$ .

Читаоцу се оставља да израчуна отпорности овако добијеног волтметра, односно амперметра, за обе шеме и за све опсеге.



Слика 71.2.

\*72. У колу приказаном на слици<sup>16</sup> 72.1 је  $E = 2 \text{ V}$ ,  $R = 50 \Omega$ ,  $U_1 = 1 \text{ V}$  и  $U_2 = 1/3 \text{ V}$ . Израчунати отпорности  $R_1$  и  $R_2$ .

## РЕШЕЊЕ

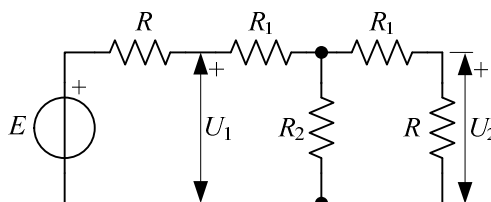
Усвојимо референтне смерове струја као на слици 72.2. Из  $U_1 = E - RI_1$  следи

$$I_1 = \frac{E - U_1}{R} = 20 \text{ mA}, \quad \text{а из } U_2 = RI_3$$

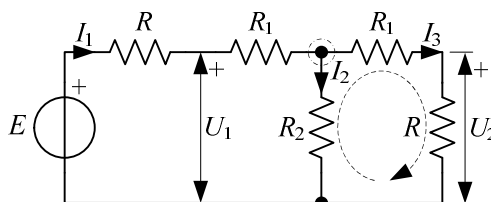
добија се  $I_3 = \frac{U_2}{R} = \frac{20}{3} \text{ mA}$ . С обзиром на то да је  $U_1 = U_2 + R_1 I_3 + R_1 I_1$ , добија се

$$R_1 = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_3} = 25 \Omega.$$

Из првог Кирхофовог закона примењеног на затворену површ која обухвата горњи чвор добија се  $I_2 = I_1 - I_3 = \frac{40}{3} \text{ mA}$ . Применом другог Кирхофовог закона на десну контуру добија се  $R_2 I_2 - R_1 I_3 - RI_3 = 0$ , одакле је  $R_2 = (R_1 I_3 + RI_3) / I_2 = 37,5 \Omega$ .



Слика 72.1.



Слика 72.2.

<sup>16</sup> Овакво коло се употребљава као ослабљивач (атенуатор) у микроталасној техници.

73. У „црној кутији“ приказаној на слици 73.1 налази се реални генератор. Измерен је напон празног хода генератора,  $U_0 = 20 \text{ V}$ , и струја кратког споја,  $I_{ks} = 100 \text{ mA}$ . Израчунати параметре тог генератора ако је генератор (а) напонски и (б) струјни.

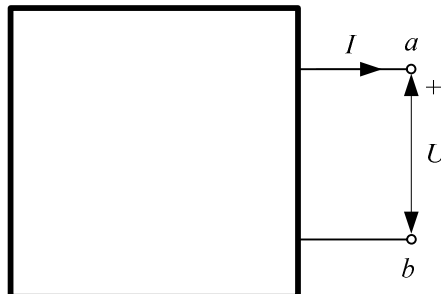
## РЕШЕЊЕ

(а) Према шеми на слици 73.2, напон празног хода реалног напонског генератора је  $U_0 = E$  јер је у празном ходу  $I = 0$ . Одавде је емс генератора  $E = U_0 = 20 \text{ V}$ . Када се прикључи генератора кратко споје (испрекидана линија на слици 73.2), тада је  $I = I_{ks} = \frac{E}{R_g}$ , одакле је унутрашња отпорност генератора  $R_g = \frac{E}{I_{ks}} = 200 \Omega$ .

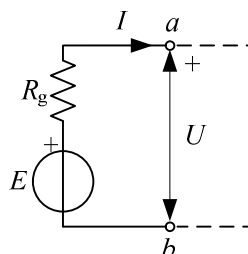
(б) Према шеми на слици 73.3, струја кратког споја реалног струјног генератора је  $I_{ks} = I_g$ , па је  $I_g = I_{ks} = 100 \text{ mA}$ . Напон празног хода је  $U_0 = R_g I_g$ , одакле је  $R_g = \frac{U_0}{I_g} = 200 \Omega$ .

Реални напонски генератор са слике 73.2 и реални струјни генератор са слике 73.3 еквивалентни су, односно исто се понашају у односу на остатак кола.

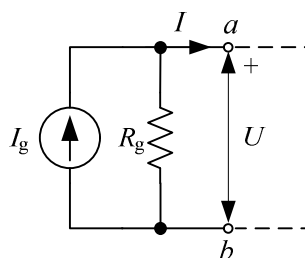
Колика је проводност ( $G_g$ ) отпорника са слике 73.3?



Слика 73.1.



Слика 73.2.



Слика 73.3.

\*74. За реални генератор са слике 73.1 израчунати снагу генератора, снагу страних сила и снагу губитака у генератору када је генератор у празном ходу, у кратком споју и када је на генератор прикључен отпорник отпорности  $R = R_g = 200 \Omega$ . Задатак решити када је генератор (а) напонски и (б) струјни.

## РЕШЕЊЕ

(а) Ако је генератор напонски, еквивалентна шема му је приказана на слици 73.2, а параметри генератора су израчунати у решењу задатка 73. Снага генератора (снага коју генератор даје остатку кола) је  $P_g = UI$ . Снага страних сила је, према тој шеми, снага

коју развија идеални напонски генератор,  $P_1 = P_E = EI$ . Снага губитака у генератору је снага губитака у отпорнику  $R_g$  са слике 73.2 и износи  $P_{gub} = R_g I^2$ .

Када је генератор у празном ходу, тада је  $I = 0$ , а  $U = E = 20 \text{ V}$ . Када је генератор кратко спојен, тада је  $I = \frac{E}{R_g} = 0,1 \text{ A}$  и  $U = 0$ . Када је на генератор везан отпорник, тада је  $I = \frac{E}{R_g + R} = \frac{E}{2R_g} = 0,05 \text{ A}$  и  $U = E - R_g I = RI = \frac{E}{2} = 10 \text{ V}$ . Тражене снаге су приказане у табели 74.1.

(б) Ако је генератор струјни, еквивалентна шема му је приказана на слици 73.3, а параметри генератора су такође израчунати у решењу задатка 73. Снага генератора је, као у случају (а),  $P_g = UI$ . Снага страних сила је снага коју развија идеални струјни генератор,  $P_1 = P_{I_g} = UI_g$ . Снага губитака у генератору је снага губитака у отпорнику

$R_g$ ,  $P_{gub} = \frac{U^2}{R_g}$ . Напон између прикључака и струја прикључака генератора исти су као

у случају (а) јер се оба генератора еквивалентно понашају у односу на спољашњи део кола, па су снаге генератора у одговарајућим случајевима једнаке (табела 74.1). Међутим, снаге страних сила и снаге губитака у генераторима разликују се у општем случају<sup>17</sup>.

Табела 74.1.

|             | Реални напонски генератор |                  |                      | Реални струјни генератор |                  |                      |
|-------------|---------------------------|------------------|----------------------|--------------------------|------------------|----------------------|
|             | $P_g [\text{W}]$          | $P_1 [\text{W}]$ | $P_{gub} [\text{W}]$ | $P_g [\text{W}]$         | $P_1 [\text{W}]$ | $P_{gub} [\text{W}]$ |
| Празан ход  | 0                         | 0                | 0                    | 0                        | 2                | 2                    |
| Кратак спој | 0                         | 2                | 2                    | 0                        | 0                | 0                    |
| Отпорник    | 0,5                       | 1                | 0,5                  | 0,5                      | 1                | 0,5                  |

<sup>17</sup> Снаге страних сила реалног напонског и реалног струјног генератора, односно снаге губитака, једнаке су само ако је отпорност прикљученог отпорника  $R = R_g$ .



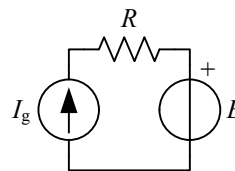
\*75. У колу на слици 75.1 је  $I_g = 10 \text{ A}$  и  $R = 1 \Omega$ . У којим границама треба да буде електромоторна сила идеалног напонског генератора,  $E$ , да би идеални струјни генератор радио као пријемник?

## РЕШЕЊЕ

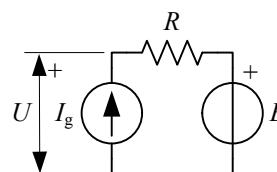
Према слици 75.2, напон идеалног струјног генератора је  $U = E + RI_g$ . Референтни смерови тог напона и струје струјног генератора су неусклађени гледано према том генератору (природни за генератор), па је  $P_{I_g} = UI_g$  снага коју даје идеални струјни генератор. Да би се струјни генератор понашао као пријемник, треба да буде  $P_{I_g} < 0$ . С обзиром на то да је  $I_g = 10 \text{ A} > 0$ , тај услов ће бити испуњен ако је  $U < 0$ , односно ако је  $E < -RI_g = -10 \text{ V}$ .

Ако је  $E > -10 \text{ V}$ , струјни генератор се понаша као генератор.

Колика треба да буде емс  $E$  да би се идеални напонски генератор понашао као пријемник? У ком опсегу емс  $E$  се оба идеална генератора понашају као генератори?

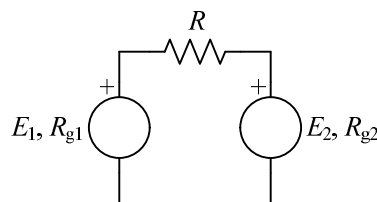


Слика 75.1.



Слика 75.2.

\*76. У колу на слици 76.1 је  $E_1 = 20 \text{ V}$ ,  $R_{g1} = 1 \Omega$ ,  $R_{g2} = 2 \Omega$  и  $R = 3 \Omega$ . У којим границама треба да буде електромоторна сила другог генератора,  $E_2$ , да би тај генератор радио као пријемник?



Слика 76.1.

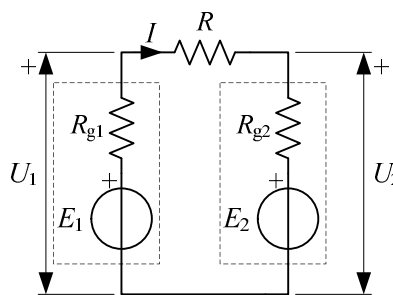
## РЕШЕЊЕ

Коло са слике 76.1 може се еквивалентно представити као на слици 76.2. Јачина струје у

колу је  $I = \frac{E_1 - E_2}{R_{g1} + R_{g2} + R} = \frac{E_1 - E_2}{R_e}$ , где је

$R_e = R_{g1} + R_{g2} + R = 6 \Omega$ . Референтни смерови

напона  $U_2$  и струје  $I$  су усклађени гледано према другом генератору (природни су за пријемник), па је снага коју прима тај генератор  $P_{g2} = U_2 I$ , где је  $U_2 = E_2 + R_{g2} I$ .



Слика 76.2.

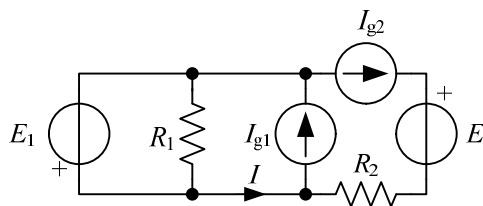
Даље је  $U_2 = E_2 + R_{g2} \frac{E_1 - E_2}{R_e} = \frac{R_{g2}E_1 + (R_{g1} + R)E_2}{R_e}$ , па се снага коју прима други генератор може изразити у функцији емс  $E_2$  као  $P_{g2}(E_2) = \frac{(R_{g2}E_1 + (R_{g1} + R)E_2)(E_1 - E_2)}{R_e^2}$ . Та функција је квадратна и има максимум. Нуле функције су  $E_2^{(1)} = -\frac{R_{g2}E_1}{R_{g1} + R} = -10 \text{ V}$  (при чему је  $U_2 = 0$ ) и  $E_2^{(2)} = E_1 = 20 \text{ V}$  (када је  $I = 0$ ). Између тих нула, односно за  $-10 \text{ V} < E_2 < 20 \text{ V}$ , је  $P_{g2}(E_2) > 0$  ( $U_2$  и  $I$  су истог знака), па се други генератор понаша као пријемник.

Читаоцу се препоручује да нацрта функцију  $P_{g2}(E_2)$  и одреди њен максимум.

Да ли се у целом интервалу  $E_2 \in (-10 \text{ V}, 20 \text{ V})$  идеални напонски генератор емс  $E_2$  у колу на слици 76.2 понаша као пријемник?

За који опсег емс  $E_2$  се оба реална напонска генератора понашају као генератори? За који опсег емс  $E_2$  се први генератор понаша као пријемник?

77. У колу на слици 77.1 је  $E_1 = E_2 = 1 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = I_{g2} = 1 \text{ A}$  и  $R_1 = R_2 = 1 \Omega$ . Израчунати (а) струју  $I$ , (б) снагу идеалног напонског генератора  $E_1$  и (в) снагу идеалног струјног генератора  $I_{g2}$ .



Слика 77.1.

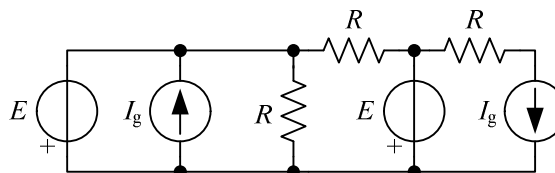
#### РЕЗУЛТАТ

(а) Јачина струја кратког споја је  $I = 0$ .

(б) Снага коју развија идеални напонски генератор емс  $E_1$  је  $P_{E_1} = 1 \text{ W}$ .

(в) Снага идеалног струјног генератора  $I_{g2}$  је  $P_{I_{g2}} = 3 \text{ W}$ .

78. У колу сталне струје приказаном на слици 78.1 је  $E = 1 \text{ kV}$ ,  $I_g = 1 \text{ A}$  и  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Израчунати (а) укупну снагу Џулових губитака у отпорницима и (б) укупну снагу идеалних струјних генератора.



Слика 78.1.

#### РЕЗУЛТАТ

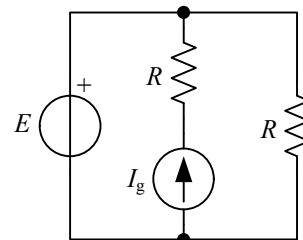
(а) Укупна снага Џулових губитака у отпорницима је  $P_J = 2 \text{ kW}$ .

(б) Укупна снага идеалних струјних генератора је  $P_{I_g} = 1 \text{ kW}$ .

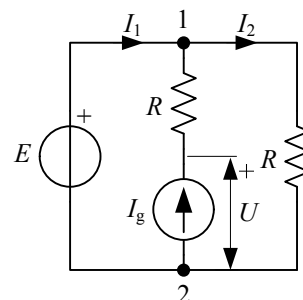
**\*79.** У колу сталне струје приказаном на слици 79.1 је  $I_g = 1 \text{ A}$  и  $R = 100 \Omega$ . Израчунати електромоторну силу идеалног напонског генератора ( $E$ ) тако да снаге које развијају идеални напонски генератор и идеални струјни генератор буду једнаке.

#### РЕШЕЊЕ

Према ознакама на слици 79.2, снага коју даје идеални напонски генератор је  $P_E = EI_1$ , где је, на основу првог Кирхофовог закона,  $I_1 = I_2 - I_g$ . Како је  $U_{12} = E = RI_2$ , то је  $P_E = E\left(\frac{E}{R} - I_g\right)$ . Напон идеалног струјног генератора је  $U = E + RI_g$ , а снага коју даје тај генератор је  $P_{I_g} = UI_g = (E + RI_g)I_g$ . Из услова  $P_E = P_{I_g}$  добија се квадратна једначина  $E^2 - 2ERI_g - R^2I_g^2 = 0$ , чија су решења  $E_{1,2} = 100(1 \pm \sqrt{2}) \text{ V}$ .



Слика 79.1.



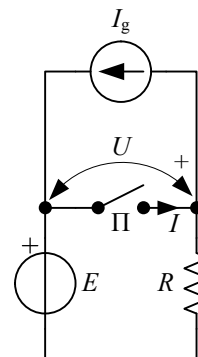
Слика 79.2.

**80.** У колу на слици 80.1 је  $E = 1 \text{ V}$ ,  $I_g = 1 \text{ A}$  и  $R = 1 \Omega$ . Израчунати напон и струју прекидача када је прекидач (а) отворен и (б) затворен.

#### РЕЗУЛТАТ

(а) Када је прекидач отворен, тада је  $U = -2 \text{ V}$  и  $I = 0$

(б) При затвореном прекидачу је  $U = 0$  и  $I = 2 \text{ A}$ .

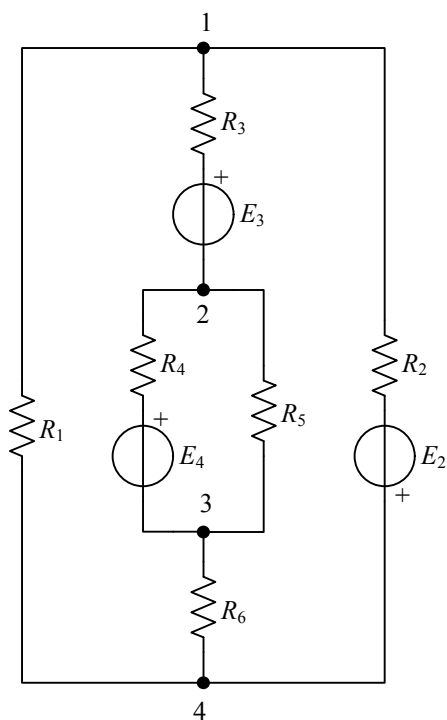


Слика 80.1.

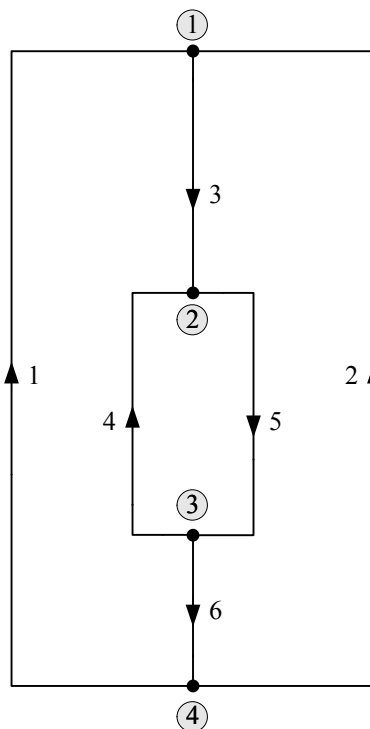
### 3. Сложена електрична кола

#### 3.1. Кирхофови закони

81. На слици 81.1 приказана је електрична шема сложеног кола сталне струје. (а) Нацртати граф кола и оријентисати гране. (б) Написати табло систем једначина узимајући чворне пресеке као независне пресеке, а окца (елементарне петље) као независне контуре.



Слика 81.1.

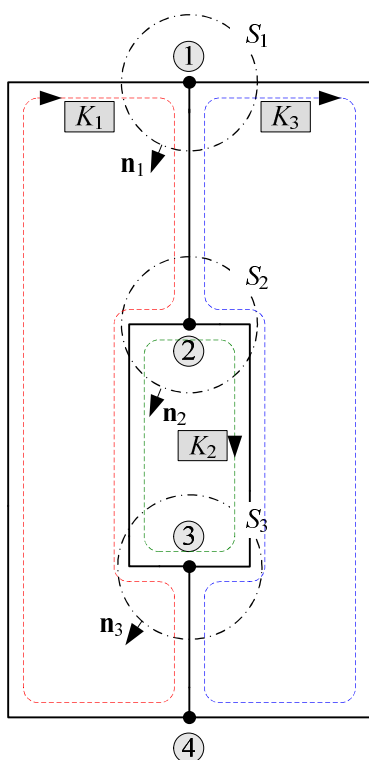


Слика 81.2.

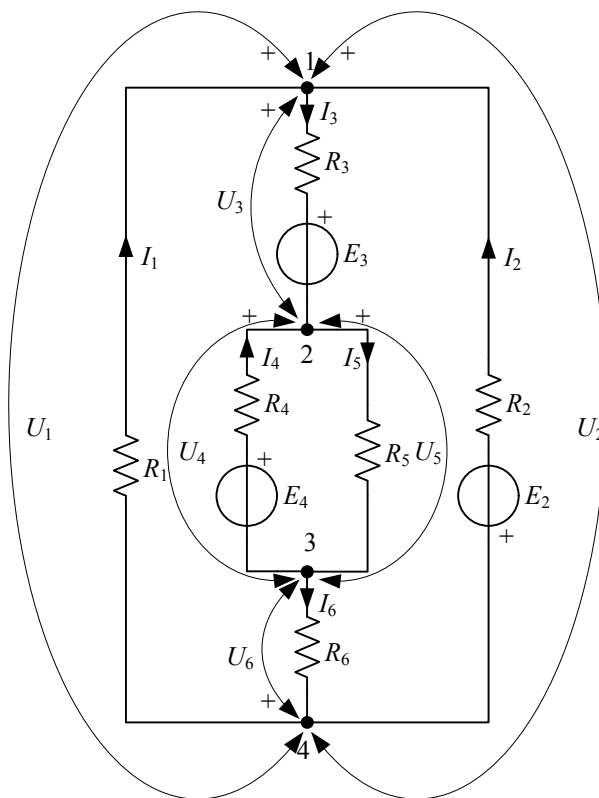
РЕШЕЊЕ

(а) Представљајући гране линијским сегментима, а чворове тачкама, добија се граф кола приказан на слици 81.2. Задато коло је планарно и има  $n_g = 6$  грана и  $n_\zeta = 4$  чвора. На слици 81.2 гране графа су оријентисане произвољно.

(б) За коло треба изабрати  $n_\zeta - 1 = 3$  чворна пресека и  $n_g - (n_\zeta - 1) = 3$  окца (елементарне контуре). На слици 81.3 приказан је граф кола са означеним чворним пресецима и окцима<sup>18</sup>.



Слика 81.3.



Слика 81.4.

Да би се написао табло систем једначина, неопходно је усвојити референтне смерове струја и напона грана. Референтни смерови струја (грана) одговарају оријентацији грана графа са слике 81.2. Оријентације напона су узете произвољно<sup>19</sup> (слика 81.4).

<sup>18</sup> Уобичајено је (мада није неопходно) да се сви чворни пресеци оријентишу од чвора, а сва окца оријентишу на исти начин – или у смеру кретања казаљке на часовнику, или у супротном смеру.

<sup>19</sup> У теорији кола обично се узимају усаглашени (усклађени) референтни смерови напона и струја грана.

Табло систем сачињавају једначине написане по првом Кирхофовом закону ( $n_{\Sigma} - 1$  једначина), по другом Кирхофовом закону ( $n_k = n_g - (n_{\Sigma} - 1)$  једначина) и једначине које повезују напон и струју сваке гране ( $n_g$  једначина).

Једначине по првом Кирхофовом закону имају општи облик

$$\sum_{S_k} I_j = 0. \quad (81.1)$$

Збир је алгебарски, а у збиру се јављају струје оних грана које сече (чворни) пресек  $S_k$ .

Једначине по другом Кирхофовом закону имају општи облик

$$\sum_{K_k} U_j = 0. \quad (81.2)$$

И овај збир је алгебарски, а у збиру се јављају напони оних грана које обухвата контура  $K_k$ .

Једначина која повезује напон и струју гране зависи од тога који се елементи налазе у грани.

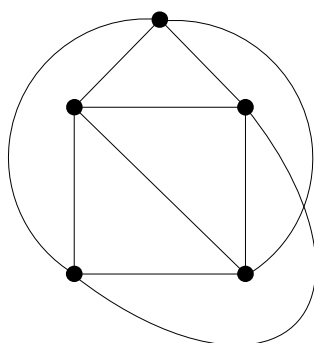
За коло са слике 81.4 табло систем једначина гласи:

- по првом Кирхофовом закону:
  - пресек  $S_1$ :  $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$ ,
  - пресек  $S_2$ :  $-I_3 - I_4 + I_5 = 0$ ,
  - пресек  $S_3$ :  $I_4 - I_5 + I_6 = 0$ ;
- по другом Кирхофовом закону:
  - контура  $K_1$ :  $U_1 - U_3 - U_4 + U_6 = 0$ ,
  - контура  $K_2$ :  $U_4 - U_5 = 0$ ,
  - контура  $K_3$ :  $U_3 - U_2 - U_6 + U_5 = 0$ ;
- везе између напона и струја грана:
  - грана 1:  $U_1 = -R_1 I_1$ ,
  - грана 2:  $U_2 = -E_2 - R_2 I_2$ ,
  - грана 3:  $U_3 = E_3 + R_3 I_3$ ,
  - грана 4:  $U_4 = E_4 - R_4 I_4$ ,
  - грана 5:  $U_5 = R_5 I_5$ ,
  - грана 6:  $U_6 = -R_6 I_6$ .

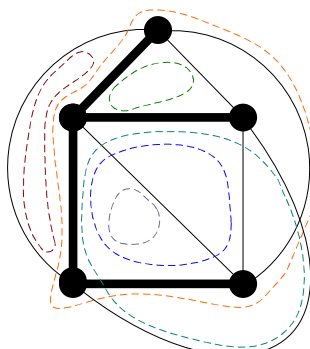
Овим је добијен скуп од  $2n_g = 12$  једначина у којима су непознати напони и струје грана (табло). Мада су ове једначине независне и сагласне (непротивречне), ретко се

употребљавају у сврху решавања кола из два разлога. Први је несистематско формирање једначина. Други је сувише велики број једначина које треба симултано решавати.

**82.** За коло чији је граф приказан на слици 82.1 одабрати једно стабло и уцртати одговарајући систем независних контура.



Слика 82.1.



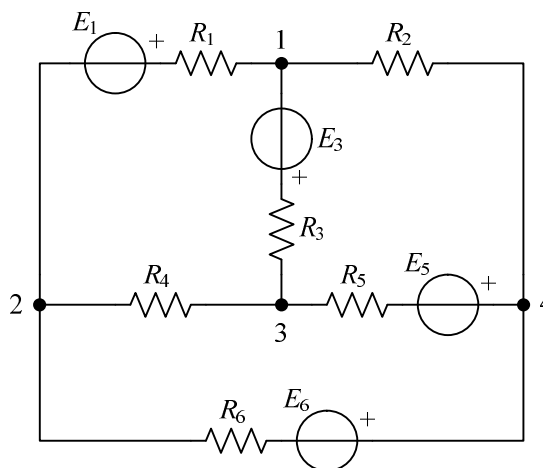
Слика 82.2.

#### РЕШЕЊЕ

Посматрано коло има  $n_g = 10$  грана и  $n_\zeta = 5$  чворова. Број грана стабла је  $n_\zeta - 1 = 4$ . На слици 82.2 гране стабла су означене дебљим линијама, а спојнице (гране које не припадају стаблу) означене су тањим линијама. Број спојница је  $n_k = n_g - (n_\zeta - 1) = 6$ . На слици 82.2 уцртане су и одговарајуће контуре (главне контуре). Свака контура обухвата једну и само једну спојницу, а остале гране су гране стабла.

Да ли је граф са слике 82.1 планаран?

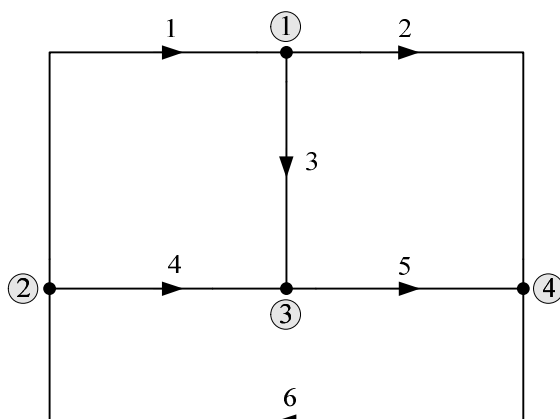
**83.** На слици 83.1 приказана је електрична шема кола сталне струје. (а) Нацртати граф кола и оријентисати гране. (б) Изабрати једно стабло графа. (в) За изабрано стабло означити главне (основне) контуре. (г) За чворне пресеке и одабране главне контуре, написати табло систем једначина.



Слика 83.1.

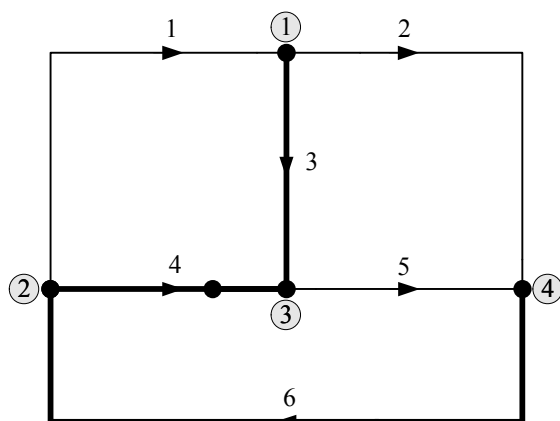
РЕШЕЊЕ

(а) Граф кола је приказан на слици 83.2. Посматрано коло има  $n_g = 6$  грана и  $n_\zeta = 4$  чвора. Референтни смерови грана усвојени су произвољно.



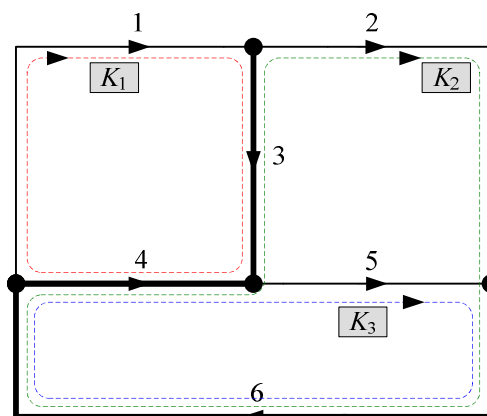
Слика 83.2.

(б) Стабло графа има  $n_\zeta - 1 = 3$  гране. На слици 83.3 је дебљим линијама приказано стабло које чине гране 3, 4 и 6. Гране 1, 2 и 5 (које не припадају стаблу) су спојнице.



Слика 83.3.

(в) Свака главна контура (петља) садржи једну и само једну спојницу<sup>20</sup>, а остале гране су гране стабла. На слици 83.4 означене су главне петље за изабрано стабло: контура 1 одговара спојници 1, контура 2 спојници 2, а контура 3 спојници 5.

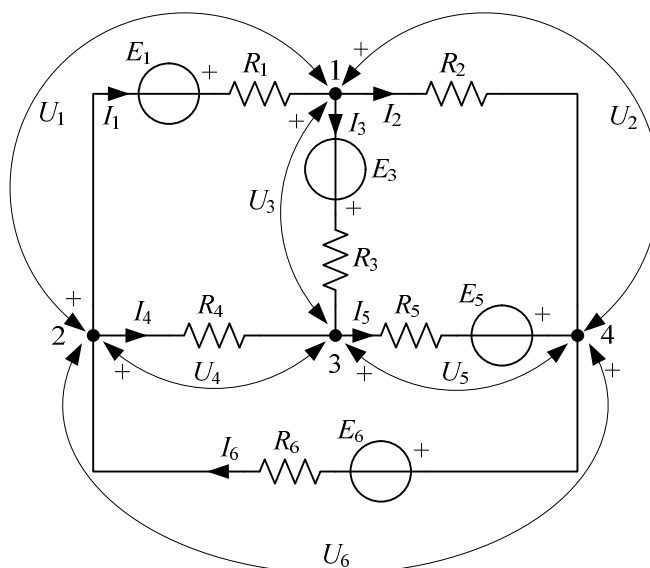


Слика 83.4.

<sup>20</sup> У теорији кола се главна петља оријентише на исти начин као одговарајућа спојница. Промена оријентације петље уноси само промену знака свих чланова у одговарајућој једначини по другом Кирхофовом закону.



(г) Једначине по првом Кирхофовом закону ћемо написати за чворове 1, 2 и 3, а једначине по другом Кирхофовом закону за главне петље (слика 83.4). Референтни смер напона сваке гране усвајамо тако да је усаглашен са референтним смером струје, као на слици 83.5.



Слика 83.5.

Табло систем једначина за посматрано коло гласи:

- једначине по првом Кирхофовом закону:

$$\text{чвор 1: } -I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

$$\text{чвор 2: } I_1 + I_4 - I_6 = 0,$$

$$\text{чвор 3: } -I_3 - I_4 + I_5 = 0;$$

- једначине по другом Кирхофовом закону:

$$\text{контура 1: } -U_1 - U_3 + U_4 = 0,$$

$$\text{контура 2: } -U_2 - U_6 - U_4 + U_3 = 0,$$

$$\text{контура 3: } -U_5 - U_6 - U_4 = 0;$$

- везе између напона и струје грана:

$$\text{грана 1: } U_1 = R_1 I_1 - E_1,$$

$$\text{грана 2: } U_2 = R_2 I_2,$$

$$\text{грана 3: } U_3 = R_3 I_3 - E_3,$$

$$\text{грана 4: } U_4 = R_4 I_4,$$

$$\text{грана 5: } U_5 = -E_5 + R_5 I_5,$$

$$\text{грана 6: } U_6 = R_6 I_6 + E_6.$$

**\*\*84.** За коло са слике 83.1, у односу на стабло са слике 83.3, означити главне (основне) пресеке. За тако одабране пресеке и за контуре са слике 83.4, написати табло систем једначина.

#### РЕШЕЊЕ

Сваки главни пресек сече једну и само једну грану стабла графа<sup>21</sup>, а остале пресечене гране су спојнице. На слици 84.1 приказани су главни пресеци графа посматраног кола: пресек  $S_1$  одговара грани стабла 3, пресек  $S_2$  грани 4, а пресек  $S_3$  грани 6.

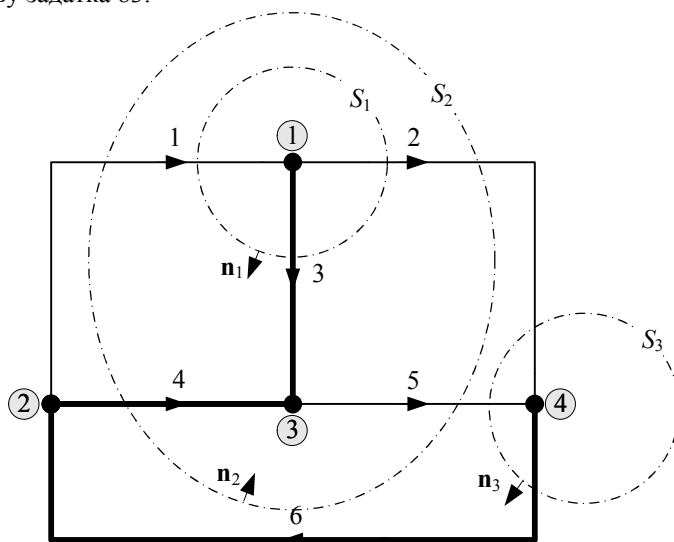
За оријентације грана као на слици 84.1 (које се поклапају са оријентацијама из задатка 83), једначине по првом Кирхофовом закону гласе:

$$\text{пресек } S_1: -I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

$$\text{пресек } S_2: I_1 + I_4 - I_5 - I_2 = 0,$$

$$\text{пресек } S_3: -I_2 - I_5 + I_6 = 0.$$

Једначине по другом Кирхофовом закону, као и везе између напона и струја грана, исте су као у решењу задатка 83.

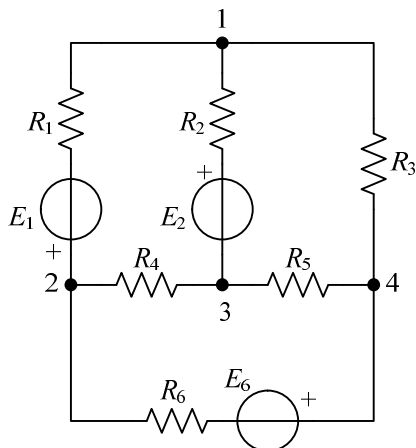


Слика 84.1.

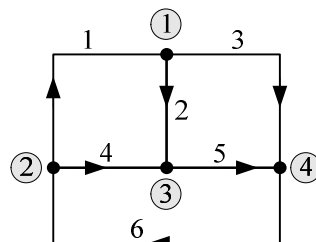
**\*\*85.** На слици 85.1 приказана је електрична шема кола сталне струје. (а) Нацртати граф кола. Хеуристичким поступцима одредити (б) један скуп независних контура и

<sup>21</sup> У теорији кола се главни пресек оријентише на исти начин као одговарајућа грану стабла. Овим се одступа од правила да се затворена површ на коју се примењује једначина континуитета оријентише увек упоље. Промена оријентације затворене површи мења предзнак свих чланова у одговарајућој једначини по првом Кирхофовом закону, што одговара множењу те једначине са  $-1$ .

(в) један скуп независних пресека. (г) За тако изабране независне пресеке и независне контуре написати табло систем једначина.



Слика 85.1.

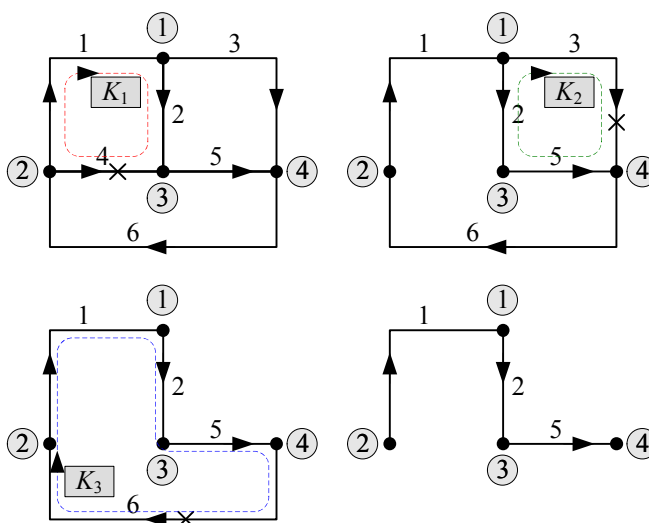


Слика 85.2.

**РЕШЕЊЕ**

(а) Граф кола је приказан на слици 85.2. Оријентација грана је усвојена произвољно.

(б) Независне петље се могу одредити хеуристичким методом кидања (уклањања) грана. У графу се одабере једна петља, па се она разори кидањем једне њене гране. Та грана се уклони из графа. У преосталом графу се изабере нова петља, која се такође раскине укидањем једне њене гране. Поступак се понавља све док се не исцрпе све петље, односно док од полазног графа не остане само стабло<sup>22</sup>. За задато коло је број независних петљи  $n_g - (n_\Sigma - 1) = 3$ .



Слика 85.3.

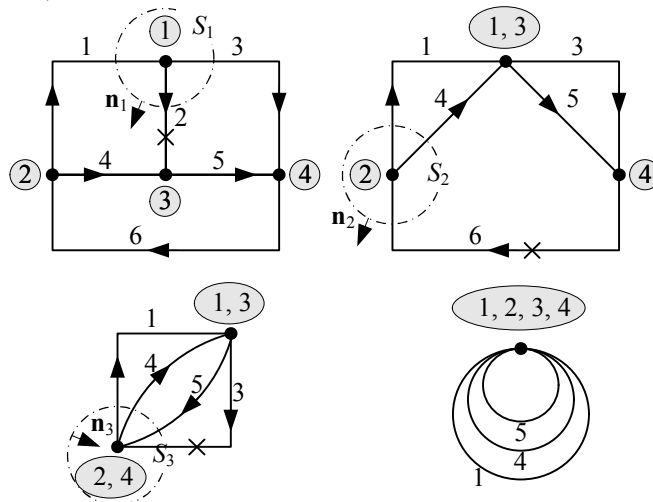
Процедура избора је приказана на слици<sup>23</sup> 85.3, при чему су прекинуте гране означене са X. Прва петља ( $K_1$ ) обухвата гране 4, 1 и 2 (кида се грана 4), друга ( $K_2$ )

<sup>22</sup> Добијени систем независних контура се у општем случају не подудара са системом главних контура који одговара том стаблу.

<sup>23</sup> У циљу систематичности, петље се обично оријентишу на исти начин као одговарајућа грана која се кида, али су на слици 85.3 петље оријентисане произвољно.

гране 3, 5 и 2 (кида се грана 3), а трећа петља ( $K_3$ ) гране 6, 1, 2 и 5 (кида се грана 6, после чега не остаје ниједна петља).

(в) Независни пресеци се могу одредити хеуристичким методом спајања чворова, који је дуалан методу кидања грана. У графу се одабере један пресек, па се сажме једна грана из тог пресека спајањем чворова те гране. Та грана се уклони из графа. У преосталом графу се бира нови пресек, у коме се затим сажме једна грана. Поступак се понавља све док се граф не сведе на један чвор<sup>24</sup>. За задато коло је број независних пресека  $n_{\Sigma} - 1 = 3$ .



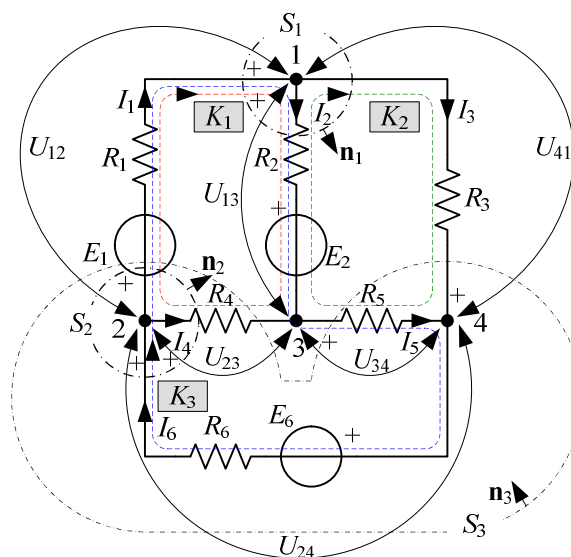
Слика 85.4.

Процедура сажимања је приказана на слици<sup>25</sup> 85.4, а сажете гране су означене са  $\times$ . Први пресек ( $S_1$ ) сече гране 2, 1 и 3 (сажима се грана 2), други ( $S_2$ ) гране 6, 4 и 1 (сажима се грана 6), а трећи ( $S_3$ ) гране 3, 5, 4 и 1 (сажима се грана 3, после чега остаје само један чвор).

<sup>24</sup> Сажете гране представљају једно стабло посматраног графа, а гране које преостану на крају су одговарајуће спојнице. Међутим, добијени систем независних пресека у општем случају се не подудара са системом главних пресека који одговара том стаблу.

<sup>25</sup> У циљу систематичности, пресеци се оријентишу на исти начин као одговарајућа грана која се сажима, али су на слици 85.4 пресеци оријентисани произвољно.

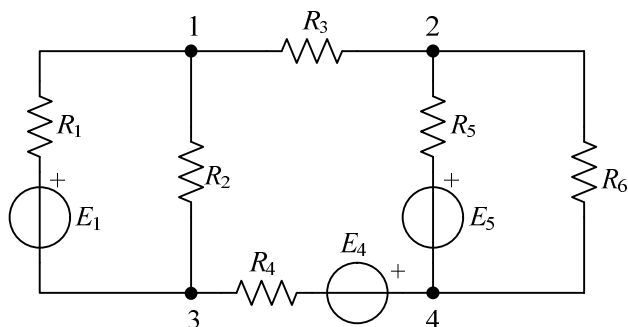
(г) На слици 85.5 су означени изабрани независни пресеци и независне контуре. Референтни смерови напона грана дефинисани су индексима одговарајућих чворова, а редослед чворова је узет произвољно. Табло систем једначина за посматрано коло гласи:



Слика 85.5.

- по првом Кирхофовом закону:  
 пресек  $S_1$ :  $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ ,  
 пресек  $S_2$ :  $I_1 + I_4 - I_6 = 0$ ,  
 пресек  $S_3$ :  $-I_1 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$ ;
- по другом Кирхофовом закону:  
 контура  $K_1$ :  $U_{12} - U_{13} + U_{23} = 0$ ,  
 контура  $K_2$ :  $U_{13} + U_{41} + U_{34} = 0$ ,  
 контура  $K_3$ :  $U_{12} - U_{13} - U_{34} + U_{24} = 0$ ;
- везе између напона и струја грана:  
 грана 1:  $U_{12} = -E_1 - R_1 I_1$ ,  
 грана 2:  $U_{13} = E_2 + R_2 I_2$ ,  
 грана 3:  $U_{41} = -R_3 I_3$ ,  
 грана 4:  $U_{23} = R_4 I_4$ ,  
 грана 5:  $U_{34} = R_5 I_5$ ,  
 грана 6:  $U_{24} = -E_6 - R_6 I_6$ .

**86.** За коло сталне струје приказано на слици 86.1 написати редуковани систем једначина по Кирхофовим законима.

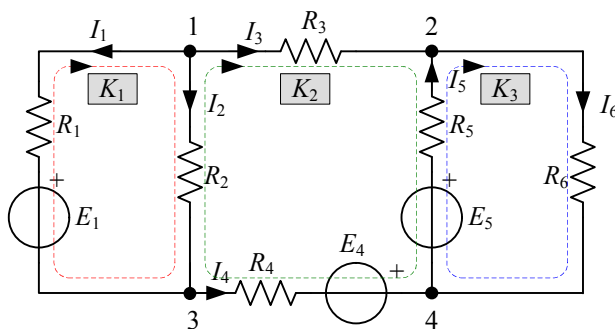


Слика 86.1.

### РЕШЕЊЕ

Редуковани систем једначина по Кирхофовим законима изводи се тако што се формира табло систем једначина, па се везе напона и струја грана убаце у једначине по другом Кирхофовом закону. На тај начин се елиминишу напони грана, а у резултујућем систему једначина јављају се само струје грана. Број једначина редукованог система једнак је броју грана.

Усвојимо оријентације грана као на слици 86.2. У редукованом систему једначина по Кирхофовим законима, једначине по првом Кирхофовом закону исте су као код табло система једначина. Усвојимо чворне пресеке за чворове 1, 2 и 4 (који нису учртани на слици 86.2 због прегледности), односно једначине ћемо написати за све чворове осим чвора 3:



Слика 86.2.

$$\text{чвор 1: } I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (86.1)$$

$$\text{чвор 2: } -I_3 - I_5 + I_6 = 0, \quad (86.2)$$

$$\text{чвор 4: } I_5 - I_4 - I_6 = 0. \quad (86.3)$$

Ако се коло састоји само од идеалних напонских генератора и отпорника (што је случај са колом са слике 86.1), једначине по другом Кирхофовом закону у редукованом облику у општем случају гласе  $\sum_{K_k} (E_j, -R_j I_j) = 0$ . Ако за систем независних контура

усвојимо окца, као на слици 86.2, одговарајуће једначине гласе:

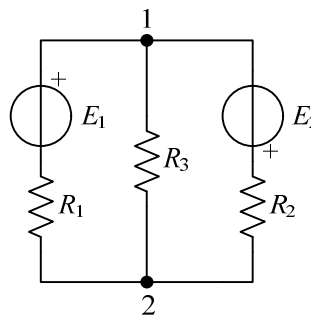
$$\text{контура } K_1: E_1 + R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0, \quad (86.4)$$

$$\text{контура } K_2: -R_3 I_3 + R_5 I_5 - E_5 - E_4 + R_4 I_4 + R_2 I_2 = 0, \quad (86.5)$$

$$\text{контура } K_3: E_5 - R_5 I_5 - R_6 I_6 = 0. \quad (86.6)$$

Једначине (86.1)-(86.6) чине тражени редуковани систем једначина по Кирхофовим законима. У тим једначинама не јављају се напони грана, већ само струје грана.

**87.** За коло сталне струје са слике 87.1 познато је  $E_1 = 24 \text{ V}$ ,  $E_2 = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ . За дато коло (а) написати редуковани систем једначина по Кирхофовим законима и (б) израчунати струје и напоне грана.



Слика 87.1.

## РЕШЕЊЕ

(а) На слици 87.2 приказане су усвојене оријентације грана и означене јачине струја. По првом Кирхофовом закону треба поставити само једну једначину (јер је број чворова  $n_\Sigma = 2$ ), на пример, за први чвор. Усвојимо окца као систем независних контура (укупно  $n_g - (n_\Sigma - 1) = 2$  контуре) и оријентишимо их као на слици 87.2.

Једначине по Кирхофовим законима (у редукованом облику) за коло са слике 87.2 гласе:

- по првом Кирхофовом закону:

$$\text{чвор 1: } I_1 + I_2 - I_3 = 0; \quad (87.1)$$

- по другом Кирхофовом закону:

$$\text{контура } K_1: R_1 I_1 + E_1 + R_3 I_3 = 0, \quad (87.2)$$

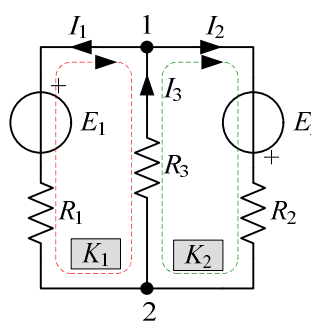
$$\text{контура } K_2: E_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0. \quad (87.3)$$

(б) Уврштавањем бројних вредности (електромоторних сила у волтима, а отпорности у килоомима) у систем (87.1)-(87.3), добија се нумерички облик тог система:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad (87.4)$$

$$0,1 I_1 + 24 + I_3 = 0, \quad (87.5)$$

$$10 - 1,5 I_2 - I_3 = 0, \quad (87.6)$$



Слика 87.2.

где су јачине струја у милиамперима<sup>26</sup>.

Систем (87.4)-(87.6) може се решити на разне начине. Мањи системи једначина (од 2 или 3 једначине) могу се решити помоћу детерминанти, док је за решавање произвољног система једначина погодан Гаусов метод елиминације. У сваком случају, први корак је да се систем једначина напише у таквом облику да су непознате величине (јачине струја) са леве стране, а познате величине (електромоторне силе) са десне стране. Тиме се добија систем

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad (87.7)$$

$$0,1I_1 + I_3 = -24, \quad (87.8)$$

$$-1,5I_2 - I_3 = -10. \quad (87.9)$$

По Гаусовом методу елиминације, у првом кораку једначина (87.7) се множи са 0,1 и одузима од (87.8). С обзиром на то да у једначини (87.9) не фигурише непозната  $I_1$ , нема потребе за даљом елиминацијом у овом кораку, а решавани систем поприма облик

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad (87.10)$$

$$-0,1I_2 + 1,1I_3 = -24, \quad (87.11)$$

$$-1,5I_2 - I_3 = -10. \quad (87.12)$$

У другом кораку елиминације, једначина (87.11) се множи са  $\frac{-1,5}{-0,1} = 15$  и одузима од (87.12). Тиме се добија систем

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad (87.13)$$

$$-0,1I_2 + 1,1I_3 = -24, \quad (87.14)$$

$$-17,5I_3 = 350. \quad (87.15)$$

Из (87.15) је  $I_3 = -20 \text{ mA}$ . Заменом у (87.14) добија се  $-0,1I_2 - 22 = -24$ , одакле је  $I_2 = 20 \text{ mA}$ . Најзад, после замене  $I_2$  и  $I_3$  у (87.13), добија се  $I_1 = -40 \text{ mA}$ .

Све три гране кола са слике 87.1 везане су паралелно, па су напони све три гране једнаки,  $U_{12} = R_1 I_1 + E_1 = -R_3 I_3 = R_2 I_2 - E_2 = 20 \text{ V}$ .

<sup>26</sup> Волт, милиампер и килоом чине кохерентан систем јединица. Употребом кохерентног система избегавају се нумерички фактори. На пример, да су струје у милиамперима, а отпорности у омима, уз нумеричку вредност струје морао би да дође фактор  $10^{-3}$ .





$$I_4 = I_6 - I_1. \quad (88.9)$$

Замена (88.7)-(88.9) у (88.4)-(88.6) и сређивање дају

$$(R_1 + R_2 + R_4)I_1 - R_2I_3 - R_4I_6 = -E_1 - E_2, \quad (88.10)$$

$$-R_2I_1 + (R_2 + R_3 + R_5)I_3 - R_5I_6 = E_2 + E_3, \quad (88.11)$$

$$-R_4I_1 - R_5I_3 + (R_4 + R_5 + R_6)I_6 = E_6. \quad (88.12)$$

Заменом бројних вредности задатих величина у јединицама SI система, добија се:

$$1900 I_1 - 1000 I_3 - 100 I_6 = -70, \quad (88.13)$$

$$-1000 I_1 + 3500 I_3 - 500 I_6 = 40, \quad (88.14)$$

$$-100 I_1 - 500 I_3 + 800 I_6 = 55. \quad (88.15)$$

Решавањем овог система добија се  $I_1 = -25 \text{ mA}$ ,  $I_3 = 15 \text{ mA}$  и  $I_6 = 75 \text{ mA}$ . Струје осталих грана су  $I_2 = -40 \text{ mA}$ ,  $I_4 = 100 \text{ mA}$  и  $I_5 = -60 \text{ mA}$ .

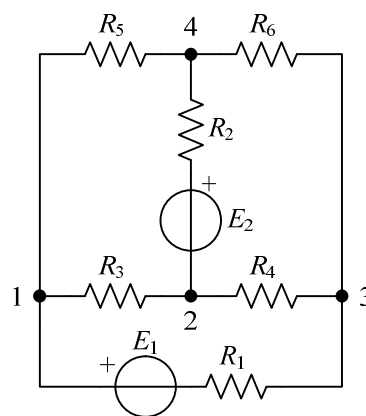
Напони грана, у односу на референтне смерове усаглашене са референтним смеровима струја, су  $U_1 = E_1 + R_1I_1 = 20 \text{ V}$ ,  $U_2 = E_2 + R_2I_2 = -10 \text{ V}$ ,  $U_3 = R_3I_3 - E_3 = 20 \text{ V}$ ,  $U_4 = R_4I_4 = 10 \text{ V}$ ,  $U_5 = R_5I_5 = -30 \text{ V}$  и  $U_6 = -E_6 + R_6I_6 = -40 \text{ V}$ .

**89.** За коло сталне струје са слике 89.1 познато је  $E_1 = 24 \text{ V}$ ,  $E_2 = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = 30 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $R_3 = 12 \Omega$ ,  $R_4 = 30 \Omega$ ,  $R_5 = 20 \Omega$  и  $R_6 = 70 \Omega$ . Израчунати (а) напоне и струје грана и (б) укупну снагу Џулових губитака у колу.

#### РЕЗУЛТАТ

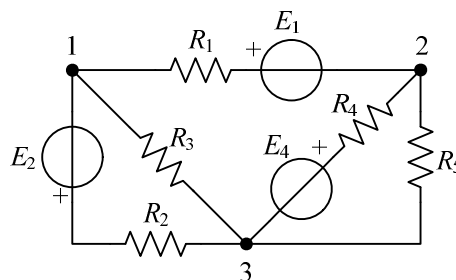
(а) Напони грана су  $U_{12} = 6 \text{ V}$ ,  $U_{13} = 12 \text{ V}$ ,  $U_{14} = -2 \text{ V}$ ,  $U_{23} = 6 \text{ V}$ ,  $U_{24} = -8 \text{ V}$  и  $U_{34} = -14 \text{ V}$ . Струје грана су  $I_{12} = 0,5 \text{ A}$ ,  $I_{13} = -0,4 \text{ A}$ ,  $I_{14} = -0,1 \text{ A}$ ,  $I_{23} = 0,2 \text{ A}$ ,  $I_{24} = 0,3 \text{ A}$  и  $I_{34} = -0,2 \text{ A}$ .

(б) Укупна снага Џулових губитака у колу је  $P_J = 15,6 \text{ W}$ .



Слика 89.1.

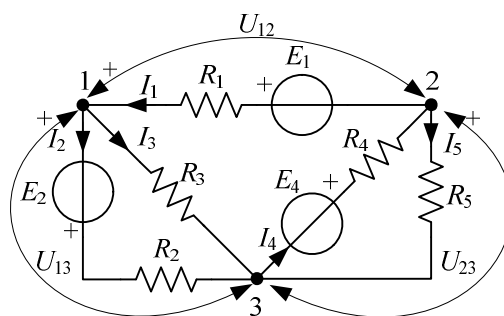
90. За коло сталне струје са слике 90.1 познато је  $E_1 = 200 \text{ V}$ ,  $E_2 = -10 \text{ V}$ ,  $E_4 = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2,5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$ . Израчунати напоне и струје свих грана.



Слика 90.1.

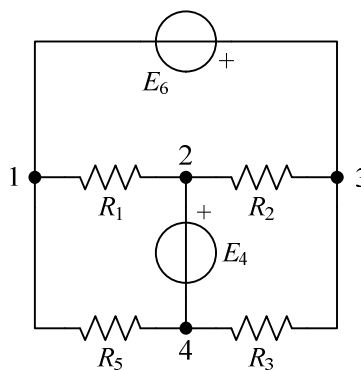
РЕЗУЛТАТ

Према ознакама на слици 90.2, напони грана су  $U_{12} = 50 \text{ V}$ ,  $U_{13} = 20 \text{ V}$  и  $U_{23} = -30 \text{ V}$ . Струје грана су  $I_1 = 60 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 50 \text{ mA}$ ,  $I_3 = 10 \text{ mA}$ ,  $I_4 = 30 \text{ mA}$  и  $I_5 = -30 \text{ mA}$ .



Слика 90.2.

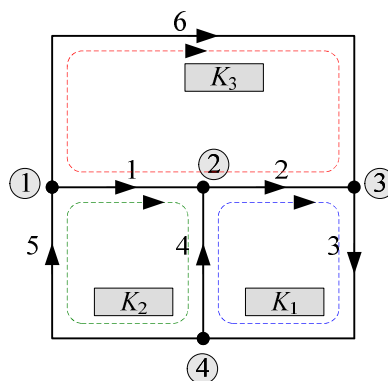
91. За коло са слике 91.1 је  $E_4 = 2 \text{ V}$ ,  $E_6 = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $R_3 = 40 \Omega$  и  $R_5 = 10 \Omega$ . Написати редуковани систем једначина по Кирхофовим законима, па израчунати струје и напоне свих грана кола.



Слика 91.1.

**РЕШЕЊЕ**

Посматрано коло има  $n_g = 6$  грана и  $n_{\Sigma} = 4$  чвора. Једначине по првом Кирхофовом закону ћемо написати за чворове 1, 3 и 4, а једначине по другом Кирхофовом закону за окца (слика 91.2). По првом Кирхофовом закону је:



Слика 91.2.

$$\text{чвор 1: } I_1 - I_5 + I_6 = 0, \quad (91.1)$$

$$\text{чвор 3: } -I_2 + I_3 - I_6 = 0, \quad (91.2)$$

$$\text{чвор 4: } -I_3 + I_4 + I_5 = 0. \quad (91.3)$$

По другом Кирхофовом закону је:

$$\text{контура } K_1: -R_3 I_3 + E_4 - R_2 I_2 = 0, \quad (91.4)$$

$$\text{контура } K_2: -R_5 I_5 - R_1 I_1 - E_4 = 0, \quad (91.5)$$

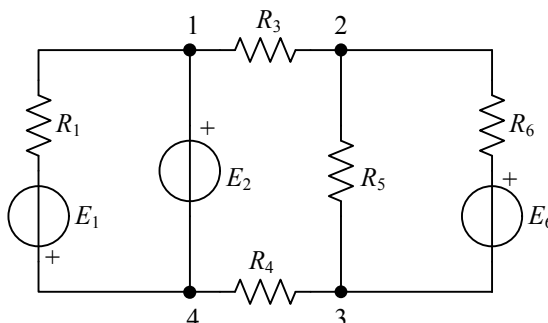
$$\text{контура } K_3: E_6 + R_2 I_2 + R_1 I_1 = 0. \quad (91.6)$$

Решавањем система (91.1)-(91.6) добија се  $I_1 = -0,48 \text{ A}$ ,  $I_2 = -0,68 \text{ A}$ ,  $I_3 = 0,56 \text{ A}$ ,  $I_4 = -0,2 \text{ A}$ ,  $I_5 = 0,76 \text{ A}$  и  $I_6 = 1,24 \text{ A}$ .

Напони грана, у односу на референтне смерове усаглашене са референтним смеровима струја, су  $U_1 = R_1 I_1 = -9,6 \text{ V}$ ,  $U_2 = R_2 I_2 = -20,4 \text{ V}$ ,  $U_3 = R_3 I_3 = 22,4 \text{ V}$ ,  $U_4 = -E_4 = -2 \text{ V}$ ,  $U_5 = R_5 I_5 = 7,6 \text{ V}$  и  $U_6 = -E_6 = -30 \text{ V}$ .

Читаоцу се препоручује да за ово коло напише табло систем једначина, уочи да су напони две гране већ познати јер су одређени електромоторним силама  $E_4$  и  $E_6$ , па реши тај систем једначина.

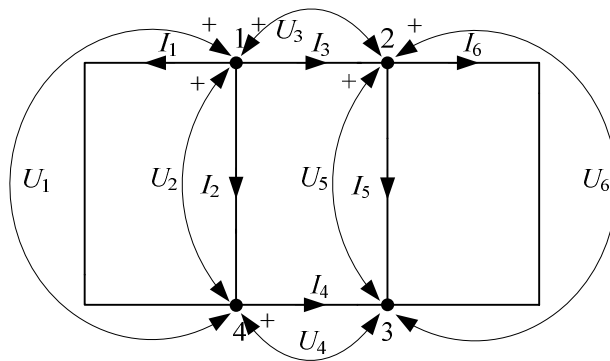
**92.** За коло сталне струје са слике 92.1 познато је  $E_1 = 7 \text{ V}$ ,  $E_2 = 1 \text{ V}$ ,  $E_6 = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1,6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 400 \Omega$ ,  $R_4 = 200 \Omega$ ,  $R_5 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_6 = 500 \Omega$ . Израчунати напоне и струје свих грана.



Слика 92.1.

РЕЗУЛТАТ

Према референтним смеровима на слици 92.2, напони грана су  $U_1 = U_2 = E_2 = 1 \text{ V}$ ,  $U_3 = -2,8 \text{ V}$ ,  $U_4 = 1,4 \text{ V}$  и  $U_5 = U_6 = 5,2 \text{ V}$ . Струје грана су  $I_1 = 5 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 2 \text{ mA}$ ,  $I_3 = -7 \text{ mA}$ ,  $I_4 = 7 \text{ mA}$ ,  $I_5 = 2,6 \text{ mA}$  и  $I_6 = -9,6 \text{ mA}$ .

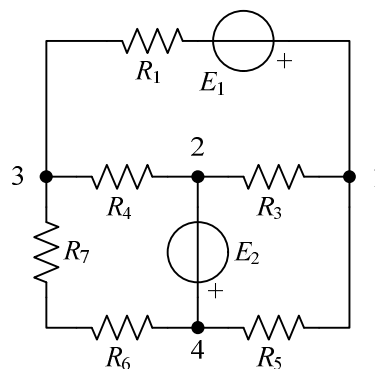


Слика 92.2.

93. За коло сталне струје са слике 93.1 познато је  $E_1 = 24 \text{ V}$ ,  $E_2 = 8 \text{ V}$ ,  $R_1 = 30 \Omega$ ,  $R_3 = 12 \Omega$ ,  $R_4 = 30 \Omega$ ,  $R_5 = 20 \Omega$ ,  $R_6 = 50 \Omega$  и  $R_7 = 20 \Omega$ . Израчунати напоне и струје свих грана кола.

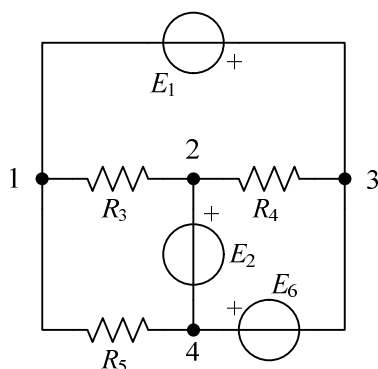
РЕЗУЛТАТ

Напони грана су  $U_{12} = 6 \text{ V}$ ,  $U_{13} = 12 \text{ V}$ ,  $U_{14} = -2 \text{ V}$ ,  $U_{23} = 6 \text{ V}$ ,  $U_{24} = -8 \text{ V}$  и  $U_{34} = -14 \text{ V}$ . Струје грана су  $I_{12} = 0,5 \text{ A}$ ,  $I_{13} = -0,4 \text{ A}$ ,  $I_{14} = -0,1 \text{ A}$ ,  $I_{23} = 0,2 \text{ A}$ ,  $I_{24} = 0,3 \text{ A}$  и  $I_{34} = -0,2 \text{ A}$ .

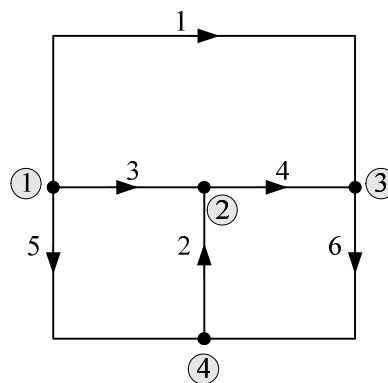


Слика 93.1.

94. За коло са слике 94.1 познато је  $E_1 = -12 \text{ V}$ ,  $E_2 = -8 \text{ V}$ ,  $E_6 = 14 \text{ V}$ ,  $R_3 = 1,2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 3 \text{ k}\Omega$  и  $R_5 = 2 \text{ k}\Omega$ . Одредити напоне и струје свих грана.



Слика 94.1.



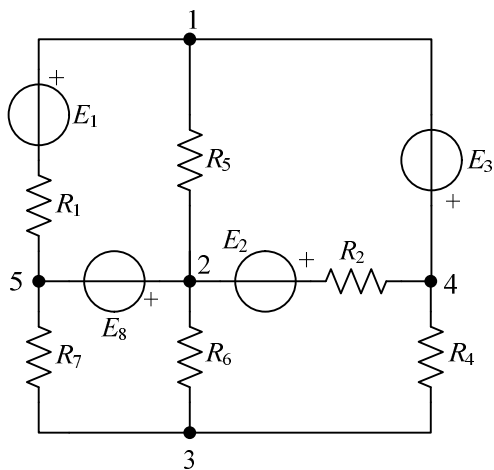
Слика 94.2.

**РЕЗУЛТАТ**

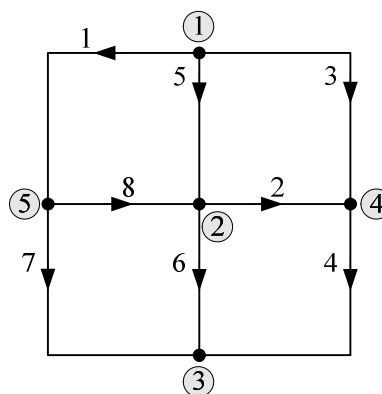
Упутство. Напони грана 1, 2 и 6 одређени су одговарајућим електромоторним силама, па се решење лако добија из табла система једначина.

У односу на референтне смерове са слике 94.2, струје грана су  $I_1 = -4 \text{ mA}$ ,  $I_2 = -3 \text{ mA}$ ,  $I_3 = 5 \text{ mA}$ ,  $I_4 = 2 \text{ mA}$ ,  $I_5 = -1 \text{ mA}$  и  $I_6 = -2 \text{ mA}$ . У односу на референтне смерове напона усаглашене са референтним смеровима струја, напони грана су  $U_1 = 12 \text{ V}$ ,  $U_2 = 8 \text{ V}$ ,  $U_3 = 6 \text{ V}$ ,  $U_4 = 6 \text{ V}$ ,  $U_5 = -2 \text{ V}$  и  $U_6 = -14 \text{ V}$ .

**95.** За коло сталне струје са слике 95.1 познато је  $E_1 = 4 \text{ V}$ ,  $E_2 = 32,5 \text{ V}$ ,  $E_3 = 14 \text{ V}$ ,  $E_8 = 3 \text{ V}$ ,  $R_1 = 40 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 40 \Omega$ ,  $R_5 = 30 \Omega$ ,  $R_6 = 100 \Omega$  и  $R_7 = 20 \Omega$ . Израчунати струје свих грана кола.



Слика 95.1.

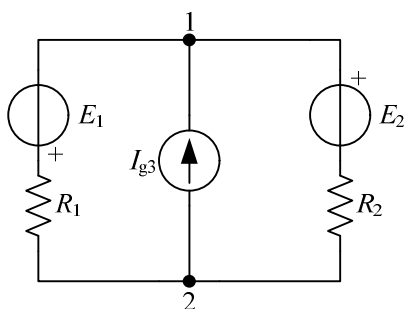


Слика 95.2.

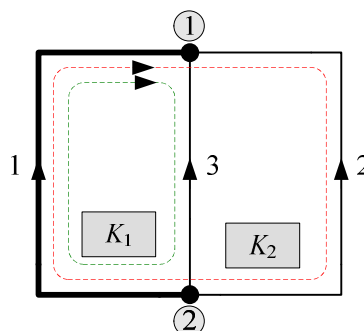
РЕЗУЛТАТ

У односу на референтне смерове са слике 95.2, струје грана су  $I_1 = 0,2 \text{ A}$ ,  $I_2 = 0,95 \text{ A}$ ,  $I_3 = -0,5 \text{ A}$ ,  $I_4 = 0,45 \text{ A}$ ,  $I_5 = 0,3 \text{ A}$ ,  $I_6 = -0,05 \text{ A}$ ,  $I_7 = -0,4 \text{ A}$  и  $I_8 = 0,6 \text{ A}$ .

96. За коло са слике 96.1 је  $E_1 = 36 \text{ V}$ ,  $E_2 = 30 \text{ V}$ ,  $I_{g3} = 15 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 400 \Omega$  и  $R_2 = 600 \Omega$ . Израчунати струје и напоне свих грана кола.



Слика 96.1.



Слика 96.2.

РЕШЕЊЕ

С обзиром на то да је у средњој грани идеални струјни генератор, окца се не могу узети као независне контуре за формирање једначина по Кирхофовим законима у редукованом облику. Уместо тога, одаберимо стабло графа као на слици 96.2, при чему је грана са идеалним струјним генератором спојница, и уочимо одговарајући систем главних контура. Према оријентацијама грана са слике 96.2, једначина по првом Кирхофовом закону за доњи чвор гласи:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (96.1)$$

где је

$$I_3 = I_{g3} = 15 \text{ mA} . \quad (96.2)$$

Једначина по другом Кирхофовом закону у редукованом облику не може да се напише за прву контуру, а једначина за другу контуру гласи:

$$-R_1 I_1 - E_1 - E_2 + R_2 I_2 = 0 . \quad (96.3)$$

Заменом (96.2) у (96.1) и сређивањем, систем једначина (96.1)-(96.3) се своди на

$$I_1 + I_2 = -I_{g3} , \quad (96.4)$$

$$-R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 + E_2 . \quad (96.5)$$

За задате податке, решење система једначина (96.4) и (96.5) је  $I_1 = -75 \text{ mA}$  и  $I_2 = 60 \text{ mA}$ . Напони све три гране су једнаки (јер су гране везане паралелно),  $U_{21} = E_1 + R_1 I_1 = -E_2 + R_2 I_2 = 6 \text{ V}$ .

**\*\***Задатак се може решити и тако да се најпре, на основу другог Кирхофовог закона, или на основу чињенице да су гране везане паралелно, уочи да су напони све три гране једнаки ( $U_{21}$ ). Једначина по првом Кирхофовом закону је (96.1). Везе између напона и струја грана су (96.2) и

$$U_{21} = E_1 + R_1 I_1, \quad (96.6)$$

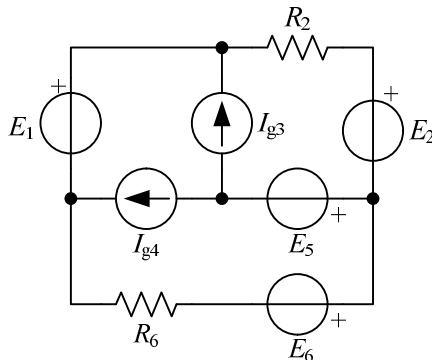
$$U_{21} = -E_2 + R_2 I_2. \quad (96.7)$$

Заменом  $I_1$  из (96.6),  $I_2$  из (96.7) и  $I_3$  из (96.2) у (96.1), добија се  $\frac{U_{21} - E_1}{R_1} + \frac{U_{21} + E_2}{R_2} + I_{g3} = 0$ , односно, после сређивања,

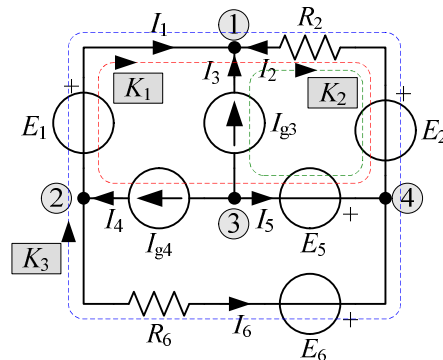
$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_{21} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - I_{g3}. \quad (96.8)$$

Одавде је  $U_{21} = 6 \text{ V}$ , а јачине струја  $I_1$  и  $I_2$  се добијају из (96.6), односно (96.7).

**97.** За коло сталне струје на слици 97.1 усвојити једно стабло, означити одговарајући систем основних контура и написати одговарајуће једначине по Кирхофовим законима, и то (а) табло систем и (б) редуковани систем.



Слика 97.1.



Слика 97.2.

#### РЕШЕЊЕ

(а) Гране 3 и 4 не смеју припадати стаблу графа. Усвојимо, стога, да стабло графа чине гране 1, 2 и 5. Одговарајући систем основних контура приказан је на слици 97.2. За чворне пресеке и референтне смерове струја са те слике, табло систем једначина гласи:

$$\text{чвор 1: } -I_1 - I_2 - I_3 = 0,$$

$$\text{чвор 2: } I_1 - I_4 + I_6 = 0,$$

$$\text{чвор 3: } I_3 + I_4 + I_5 = 0,$$

$$\text{контура } K_1: U_{12} - U_{14} + U_{34} + U_{23} = 0,$$



$$\text{контура } K_2: -U_{14} + U_{34} + U_{13} = 0,$$

$$\text{контура } K_3: U_{12} - U_{14} + U_{24} = 0,$$

$$\text{грана 1: } U_{12} = E_1,$$

$$\text{грана 2: } U_{14} = E_2 - R_2 I_2,$$

$$\text{грана 3: } I_3 = I_{g3},$$

$$\text{грана 4: } I_4 = I_{g4},$$

$$\text{грана 5: } U_{34} = -E_5,$$

$$\text{грана 6: } U_{24} = -E_6 + R_6 I_6.$$

(б) Према ознакама на слици 97.2, једначине по Кирхофовим законима у редукованом облику гласе:

$$\text{чвор 1: } -I_1 - I_2 - I_3 = 0,$$

$$\text{чвор 2: } I_1 - I_4 + I_6 = 0,$$

$$\text{чвор 3: } I_3 + I_4 + I_5 = 0,$$

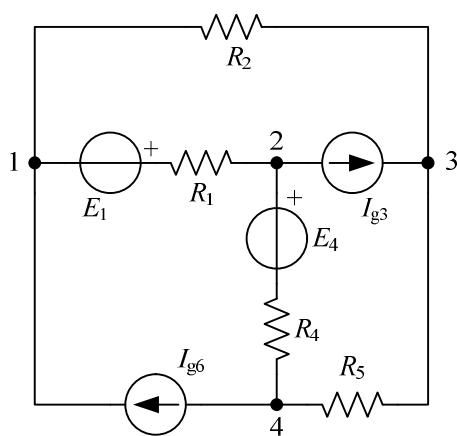
$$\text{контура } K_1: I_4 = I_{g4},$$

$$\text{контура } K_2: I_3 = I_{g3},$$

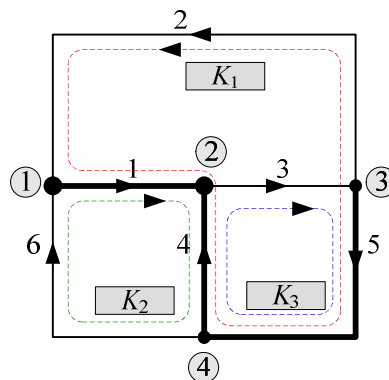
$$\text{контура } K_3: E_1 + R_2 I_2 - E_2 - E_6 + R_6 I_6 = 0.$$

Уместо да уводимо ознаке струја грана  $I_3$  и  $I_4$ , струје струјних генератора могу се одмах уврстити у једначине по првом Кирхофовом закону, а једначине за контуре  $K_1$  и  $K_2$  елиминисати, чиме се систем једначина упрошћава.

**98.** За коло са слике 98.1 је  $E_1 = 60 \text{ V}$ ,  $E_4 = -20 \text{ V}$ ,  $I_{g3} = 10 \text{ mA}$ ,  $I_{g6} = 30 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 160 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_4 = 1,5 \text{ k}\Omega$  и  $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$ . Написати редуковани систем једначина по Кирхофовим законима, па израчунати струје и напоне свих грана.



Слика 98.1.



Слика 98.2.

РЕЗУЛТАТ

За оријентације грана и стабло као на слици 98.2, тражене једначине су:

$$\text{чвор 1: } I_1 - I_2 - I_{g6} = 0,$$

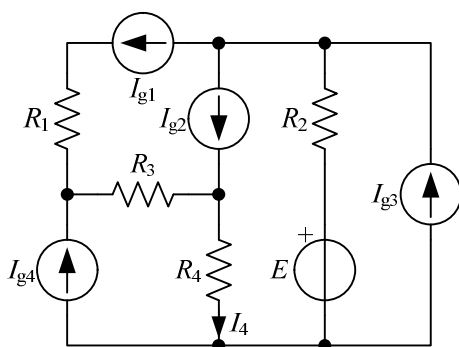
$$\text{чвор 2: } -I_1 - I_4 + I_{g3} = 0,$$

$$\text{чвор 3: } I_2 - I_{g3} + I_5 = 0,$$

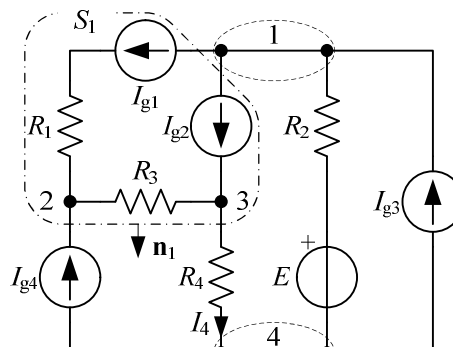
$$\text{контура } K_1: -R_2 I_2 + E_1 - R_1 I_1 - E_4 + R_4 I_4 + R_5 I_5 = 0.$$

Јачине струја грана су  $I_1 = 50 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 20 \text{ mA}$ ,  $I_3 = I_{g3} = 10 \text{ mA}$ ,  $I_4 = -40 \text{ mA}$ ,  $I_5 = -10 \text{ mA}$  и  $I_6 = I_{g6} = 30 \text{ mA}$ . За усаглашене референтне смерове, напони грана су  $U_1 = -52 \text{ V}$ ,  $U_2 = 2 \text{ V}$ ,  $U_3 = -U_4 - U_5 = 50 \text{ V}$ ,  $U_4 = -40 \text{ V}$ ,  $U_5 = -10 \text{ V}$  и  $U_6 = -U_1 + U_4 = 12 \text{ V}$ .

**99.** У колу приказаном на слици 99.1 је  $E = 3 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 10 \text{ mA}$ ,  $I_{g2} = 20 \text{ mA}$ ,  $I_{g3} = 30 \text{ mA}$ ,  $I_{g4} = 40 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $R_3 = 300 \Omega$  и  $R_4 = 400 \Omega$ . Израчунати струју  $I_4$ .



Слика 99.1.



Слика 99.2.

РЕШЕЊЕ

Применом првог Кирхофовог закона на пресек  $S_1$  (слика 99.2) добија се  $I_4 = I_{g1} + I_{g2} + I_{g4} = 70 \text{ mA}$ .

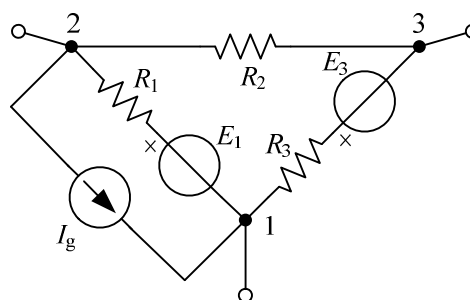
Да ли јачина струје у грани са струјним генератором  $I_{g1}$  зависи од отпорности  $R_1$ ?

Колико чворова има коло са слике 99.1? Колика је јачина струје кратког споја између два горња чвора на слици 99.2? Да ли ће се нешто променити у колу ако та два чвора стопе у један, и ако се доња два чвора стопе у један?

Читаоцу се препоручује да одреди систем основних контура за коло са слике 99.1 тако да гране са струјним генераторима не буду у стаблу. Колико је таквих стабала могуће уочити у задатом колу?

Колико једначина по другом Кирхофовом закону у редукованом облику може да се напише за задато коло? Да ли се тај број слаже са бројем грана, чворова и идеалних струјних генератора?

**100.** За део кола сталне струје са слике 100.1 познато је  $E_1 = 6 \text{ V}$ ,  $E_3 = 24 \text{ V}$ ,  $I_g = 0,2 \text{ A}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 4 \Omega$ ,  $U_{12} = -5 \text{ V}$  и  $U_{13} = 20 \text{ V}$ . Израчунати струје свих грана тог дела кола.



Слика 100.1.

РЕШЕЊЕ

Према референтним смеровима струја  
 грана са слике 100.2, из веза напона и  
 струја грана је  $I_1 = \frac{U_{12} + E_1}{R_1} = 0,5 \text{ A}$ ,

$$I_2 = \frac{U_{32}}{R_2} = \frac{U_{12} - U_{13}}{R_2} = -2,5 \text{ A} \quad \text{и}$$

$$I_3 = \frac{-U_{13} + E_3}{R_3} = 1 \text{ A} . \quad \text{Из првог}$$

Кирхофовог закона за чворне пресеке 1, 2  
 и 3 је  $I_4 = I_g - I_1 + I_3 = 0,7 \text{ A}$ ,

$$I_5 = -I_2 - I_3 = 1,5 \text{ A} \quad \text{и}$$

$$I_6 = I_1 + I_2 - I_g = -2,2 \text{ A} .$$

Колики је збир  $I_4 + I_5 + I_6$ ? Зашто?

**101.** За део кола сталне струје са  
 слике 101.1 познато је  $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  
 $E_3 = 12 \text{ V}$ ,  $I_g = 10 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 500 \Omega$ ,  
 $R_3 = 600 \Omega$  и потенцијали чворова према  
 референтној тачки 0 (уземљењу)  
 $V_1 = 12 \text{ V}$ ,  $V_2 = -8 \text{ V}$  и  $V_3 = 24 \text{ V}$ .  
 Израчунати струје свих грана приказаног  
 дела кола.

РЕШЕЊЕ

Тражене струје су

$$I_1 = \frac{U_{21} + E_1}{R_1} = \frac{V_2 - V_1 + E_1}{R_1} = -20 \text{ mA} ,$$

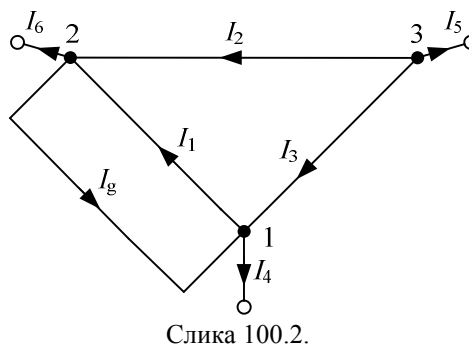
$$I_3 = \frac{U_{13} - E_3}{R_3} = \frac{V_1 - V_3 - E_3}{R_3} = -40 \text{ mA} , \quad I_4 = I_1 - I_3 = 20 \text{ mA} , \quad I_5 = I_3 + I_g = -30 \text{ mA} \quad \text{и}$$

$$I_6 = I_1 + I_g = -10 \text{ mA} .$$

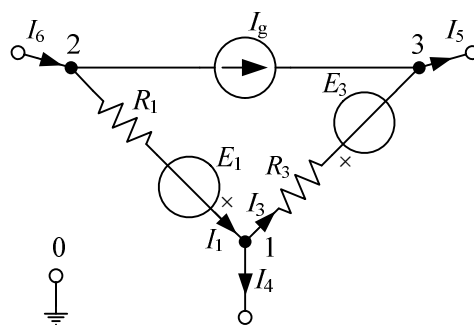
**102.** На слици 102.1 приказан је део кола  
 сталне струје. Познати су потенцијали  $V_A = 20 \text{ V}$   
 и  $V_B = 10 \text{ V}$ , јачина струје  $I = 5 \text{ mA}$  и отпорност  
 $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Израчунати емс  $E$ .

РЕЗУЛТАТ

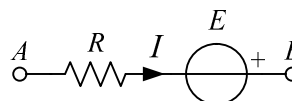
Тражена емс је  $E = V_B - V_A + RI = -5 \text{ V}$ .



Слика 100.2.



Слика 101.1.

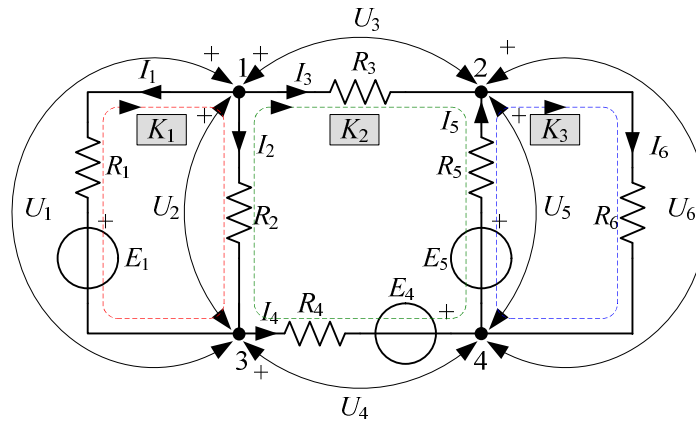


Слика 102.1.

**\*\*103.** За коло сталне струје приказано на слици 86.1 редуковати табло систем једначина тако да се елиминишу струје грана.

РЕШЕЊЕ

Усвајајући исте оријентације грана и исте пресеке као у задатку 86, једначине по првом Кирхофовом закону дате су изразима (86.1)-(86.3).



Слика 103.1.

Усвојимо референтне смерове напона као на слици 103.1. Везе између напона и струја грана су:

$$\text{грana 1: } I_1 = \frac{U_1 - E_1}{R_1}, \quad (103.1)$$

$$\text{грana 2: } I_2 = \frac{U_2}{R_2}, \quad (103.2)$$

$$\text{грana 3: } I_3 = \frac{U_3}{R_3}, \quad (103.3)$$

$$\text{грana 4: } I_4 = \frac{U_4 + E_4}{R_4}, \quad (103.4)$$

$$\text{грana 5: } I_5 = \frac{-U_5 + E_5}{R_5}, \quad (103.5)$$

$$\text{грana 6: } I_6 = \frac{U_6}{R_6}. \quad (103.6)$$

После замене (103.1)-(103.6) у једначине (86.1)-(86.3) и сређивања, добијају се једначине по првом Кирхофовом закону у којима се јављају напони грана:

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} = \frac{E_1}{R_1}, \quad (103.7)$$

$$-\frac{U_3}{R_3} + \frac{U_5}{R_5} + \frac{U_6}{R_6} = \frac{E_5}{R_5}, \quad (103.8)$$

$$-\frac{U_4}{R_4} - \frac{U_5}{R_5} - \frac{U_6}{R_6} = \frac{E_4}{R_4} - \frac{E_5}{R_5}. \quad (103.9)$$

За одабрани систем независних контура (окца), једначине по другом Кирхофовом закону гласе:

$$\text{контура } K_1: U_1 - U_2 = 0, \quad (103.10)$$

$$\text{контура } K_2: -U_3 - U_5 + U_4 + U_2 = 0, \quad (103.11)$$

$$\text{контура } K_3: U_5 - U_6 = 0. \quad (103.12)$$

Тражени редуковани систем једначина чине једначине (103.7)-(103.12). У тим једначинама не фигуришу струје грана, већ само напони грана.

Систем једначина (103.7)-(103.12) се може даље поједноставити имајући у виду да су напони паралелно везаних грана једнаки (или супротни, зависно од усвојених референтних смерова). У посматраном случају, из једначина (103.10) и (103.12) произилази  $U_1 = U_2$  и  $U_5 = U_6$ , па се систем своди на

$$U_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{U_3}{R_3} = \frac{E_1}{R_1} \quad (103.13)$$

$$-\frac{U_3}{R_3} + U_5 \left( \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) = \frac{E_5}{R_5} \quad (103.14)$$

$$-\frac{U_4}{R_4} - U_5 \left( \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) = \frac{E_4}{R_4} - \frac{E_5}{R_5} \quad (103.15)$$

$$U_1 - U_3 + U_4 - U_5 = 0. \quad (103.16)$$

Добијени систем једначина (103.13)-(103.16) може се још више поједноставити уколико се напони грана изразе преко потенцијала чворова. За референтни чвор (чвор нултог потенцијала) узмемо чвор 3, за који нисмо писали једначину по првом Кирхофовом закону. Тада је  $U_1 = V_1 - V_3 = V_1$  (јер је  $V_3 = 0$ ),  $U_2 = V_1$ ,  $U_3 = V_1 - V_2$ ,  $U_4 = -V_4$ ,  $U_5 = V_2 - V_4$  и  $U_6 = V_2 - V_4$ . Једначина (103.16) је сада аутоматски задовољена, а једначине (103.13)-(103.15) добијају облик

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_1 - \frac{V_2}{R_3} = \frac{E_1}{R_1}, \quad (103.17)$$

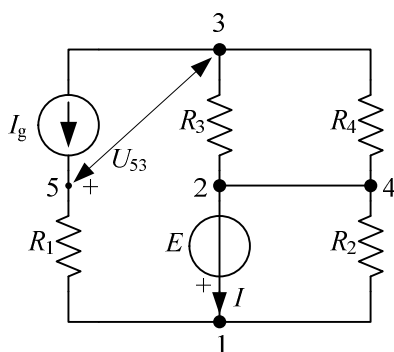
$$-\frac{V_1}{R_3} + \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) V_2 - \left( \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) V_4 = \frac{E_5}{R_5}, \quad (103.18)$$

$$-\left( \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) V_2 + \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) V_4 = \frac{E_4}{R_4} - \frac{E_5}{R_5}. \quad (103.19)$$

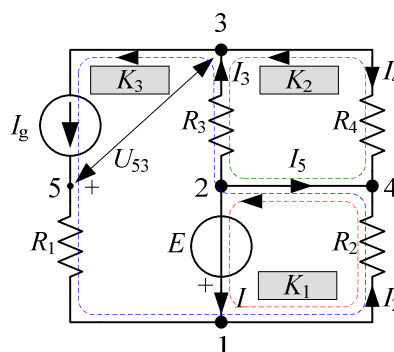
Тиме смо добили једначине по методу потенцијала чворова, који је обрађен у одељку 3.3. Решавањем система једначина (103.17)-(103.19) добијају се потенцијали чворова, из њих напони грана, а струје грана се добијају из (103.1)-(103.6).

Читаоцу се препоручује да и задатке 90-95 уради елиминишући струје грана у табло систему једначина.

**104.** За коло сталне струје са слике 104.1 познато је  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$  и  $R_4 = 20 \Omega$ . Користећи се Кирхофовим законима, израчунати емс  $E$  и струју  $I_g$  тако да буде  $I = 0,2 \text{ A}$  и  $U_{53} = 7 \text{ V}$ .



Слика 104.1.



Слика 104.2.

**РЕШЕЊЕ**

Према ознакама са слике 104.2, непознате величине су  $E$ ,  $I_g$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  и  $I_5$ , па треба поставити шест једначина по Кирхофовим законима. По првом Кирхофовом закону постављају се  $n_\epsilon - 1 = 3$  једначине. Бирајући чворне пресеке, те једначине су:

$$\text{чвор 1: } -I_g - I + I_2 = 0, \quad (104.1)$$

$$\text{чвор 2: } I + I_3 + I_5 = 0, \quad (104.2)$$

$$\text{чвор 4: } -I_2 - I_4 - I_5 = 0. \quad (104.3)$$

По другом Кирхофовом закону треба изабрати  $n_g - (n_\epsilon - 1) = 3$  независне контуре и написати једначине. За стабло које чине гране 3, 5 и 2, систем основних контура је приказан на слици 104.2, а одговарајуће једначине су:

$$\text{контура } K_1: E - R_2 I_2 = 0, \quad (104.4)$$

$$\text{контура } K_2: R_3 I_3 + R_4 I_4 = 0, \quad (104.5)$$

$$\text{контура } K_3: U_{53} - R_1 I_g - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0. \quad (104.6)$$

Сабирањем (104.1)-(104.3) добија се  $-I_g + I_3 - I_4 = 0$ , а из (104.5) је  $I_3 = -\frac{R_4}{R_3} I_4$ , па је  $I_3 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} I_g$ , што се могло добити и на основу једначине отпорничког разделника струје који образују отпорници  $R_3$  и  $R_4$ . Из (104.1) је

$$I_2 = I + I_g. \quad (104.7)$$

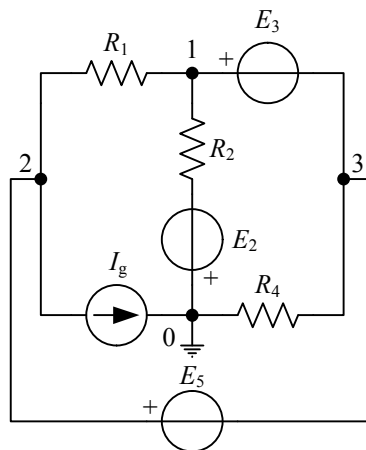
Заменом израза за  $I_2$  и  $I_3$  у (104.6) добија се  $I_g = \frac{U_{53} - R_2 I}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = 0,1 \text{ A}$ . Из (104.4)

је  $E = R_2 I_2$ , па је, на основу (104.7),  $E = R_2 (I + I_g) = 6 \text{ V}$ .

**105.** За коло приказано на слици 105.1 познато је  $E_2 = 6 \text{ V}$ ,  $E_3 = 20 \text{ V}$ ,  $E_5 = 10 \text{ V}$ ,  $I_g = 20 \text{ mA}$ ,  $V_1 = 0$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  и  $R_4 = 500 \Omega$ . Израчунати отпорност  $R_2$ .

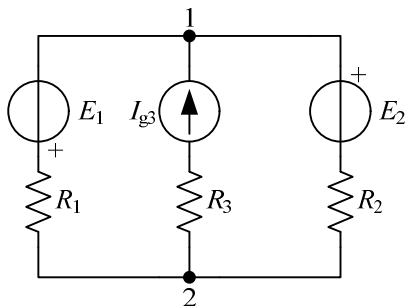
#### РЕЗУЛТАТ

Тражена отпорност је  $R_2 = 300 \Omega$ .

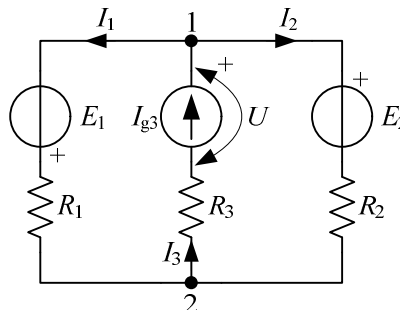


Слика 105.1.

**106.** За коло са слике 106.1 је  $E_1 = 7 \text{ V}$ ,  $E_2 = 18 \text{ V}$ ,  $I_{g3} = -55 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 0,2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 0,4 \text{ k}\Omega$ . Израчунати снаге свих грана у колу и утврдити да ли идеални генератори у том колу раде као генератори или као пријемници.



Слика 106.1.



Слика 106.2.



РЕШЕЊЕ

Према првом Кирхофовом закону (за чвор 1), према ознакама на слици 106.2, је

$$-I_3 + I_1 + I_2 = 0. \quad (106.1)$$

Гране су везане паралелно, па су напони све три гране једнаки ( $U_{12}$ ). Веза између напона и струје прве гране је  $U_{12} = R_1 I_1 - E_1$ , односно  $I_1 = \frac{U_{12} + E_1}{R_1}$ . Слично томе, за

другу грану је  $I_2 = \frac{U_{12} - E_2}{R_2}$ . За трећу грану је  $I_3 = I_{g3}$ . Уврштавањем ових релација у

$$(106.1), \text{ добија се } I_{g3} = \frac{U_{12} + E_1}{R_1} + \frac{U_{12} - E_2}{R_2}, \text{ одакле је } U_{12} = \frac{I_{g3} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = -12 \text{ V}.$$

На основу тога су струје грана  $I_1 = -25 \text{ mA}$  и  $I_2 = -30 \text{ mA}$ , а напон идеалног струјног генератора је  $U = R_3 I_{g3} + U_{12} = -34 \text{ V}$ .

Снага коју грана прима одређује се као производ напона и струје, рачунатих према усаглашеним референтним смеровима у односу на грану<sup>27</sup>. Снага коју прима грана 1 је  $P_1 = U_{12} I_1 = 300 \text{ mW} > 0$ , па се грана понаша као пријемник. Снага Џулових губитака у грани је  $P_{R_1} = R_1 I_1^2 = 125 \text{ mW}$ . Снага коју развија идеални напонски генератор у тој грани је  $P_{E_1} = E_1 I_1 = -175 \text{ mW} < 0$ , па тај генератор ради као пријемник.

Снага коју прима грана 2 је  $P_2 = U_{12} I_2 = 360 \text{ mW}$ . И та грана је пријемник. Снага Џулових губитака у грани је  $P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 900 \text{ mW}$ . Идеални напонски генератор у тој грани развија снагу  $P_{E_2} = -E_2 I_2 = 540 \text{ mW} > 0$ , па он ради као генератор.

Снага коју прима грана 3 је  $P_3 = -U_{12} I_g = -660 \text{ mW} < 0$ , односно грана ради као генератор. Снага Џулових губитака у грани је  $P_{R_3} = R_3 I_g^2 = 1,21 \text{ W}$ . Идеални струјни генератор развија снагу  $P_{I_g} = U I_g = 1,87 \text{ W} > 0$  и ради као генератор.

Из претходног произилази и  $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ , што потврђује теорему одржања снаге у колу.

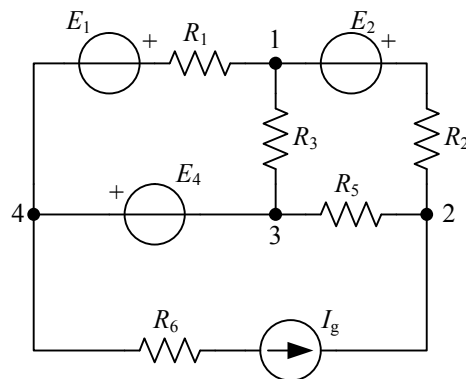
Читаоцу се оставља да провери да ли је збир снага идеалних генератора у колу са слике 106.1 једнак збиру снага отпорника.

<sup>27</sup> У теорији кола је уобичајено да се под термином „снага гране“ подразумева снага коју грана прима.

**107.** За коло сталне струје са слике 107.1 познато је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_2 = 10 \text{ V}$ ,  $E_4 = 25 \text{ V}$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 8 \text{ k}\Omega$  и  $R_6 = 10 \text{ k}\Omega$ . Израчунати отпорност  $R_1$  и струју струјног генератора  $I_g$  тако да буде  $I_{41} = 10 \text{ mA}$  и  $U_{21} = 50 \text{ V}$ .

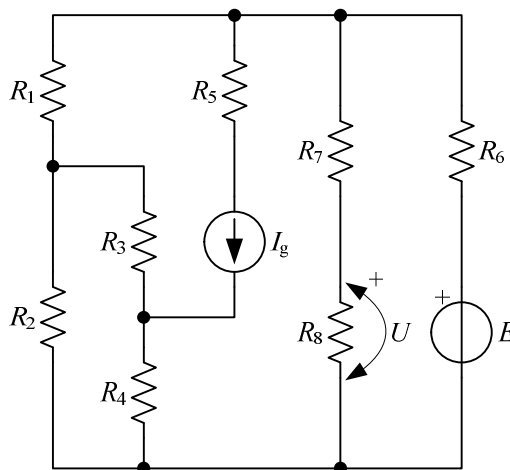
#### РЕЗУЛТАТ

Тражена отпорност је  $R_1 = 700 \Omega$ , а струја струјног генератора је  $I_g = 30 \text{ mA}$ .



Слика 107.1.

**108.** За коло са слике 108.1 познато је  $E = 45 \text{ V}$ ,  $I_g = 9 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = 11 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = R_5 = R_6 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_7 = 25 \text{ k}\Omega$  и  $R_8 = 8 \text{ k}\Omega$ . Израчунати отпорност  $R_4$  тако да буде  $U = 8 \text{ V}$ .



Слика 108.1.

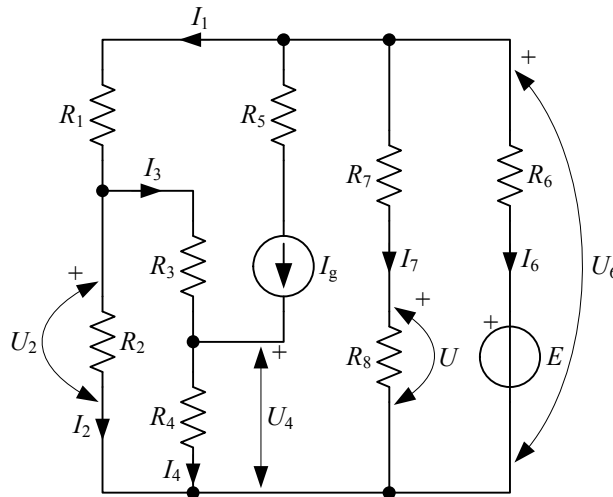
#### РЕШЕЊЕ

Уведимо референтне смерове струја и напона као на слици 108.2. По Омовом закону је  $I_7 = \frac{U}{R_8} = 1 \text{ mA}$ . За отпорнички разделник напона који чине отпорници  $R_7$  и

$R_8$  је  $U = \frac{R_8}{R_7 + R_8} U_6$ , одакле је  $U_6 = 33 \text{ V}$ . Напон гране 6 је  $U_6 = E + R_6 I_6$ , одакле је

$$I_6 = \frac{U_6 - E}{R_6} = -12 \text{ mA}.$$

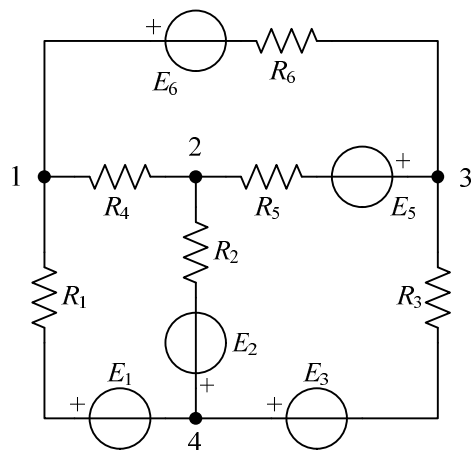
Из првог Кирхофовог закона је  $I_1 = -I_g - I_7 - I_6 = 2 \text{ mA}$ , па је  $U_2 = U_6 - R_1 I_1 = 11 \text{ V}$ . Даље је  $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 1 \text{ mA}$ ,  $I_3 = I_1 - I_2 = 1 \text{ mA}$ ,  $I_4 = I_3 + I_g = 10 \text{ mA}$  и  $U_4 = U_2 - R_3 I_3 = 10 \text{ V}$ , па је тражена отпорност  $R_4 = \frac{U_4}{I_4} = 1 \text{ k}\Omega$ .



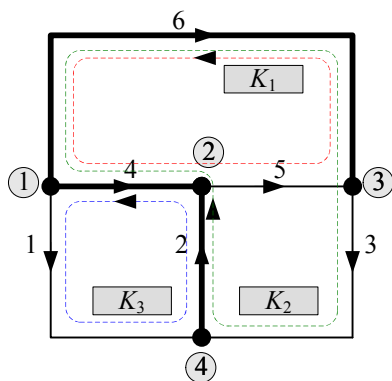
Слика 108.2.

### 3.2. Метод контурних струја

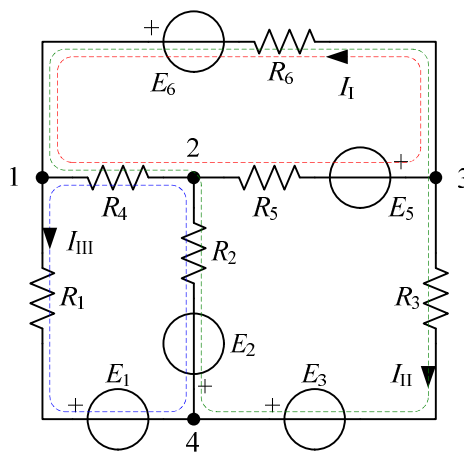
**109.** За разгранато коло са слике 109.1 познато је  $E_1 = 60 \text{ V}$ ,  $E_2 = 62 \text{ V}$ ,  $E_3 = 30 \text{ V}$ ,  $E_5 = 26 \text{ V}$ ,  $E_6 = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 0,4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 0,2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 0,1 \text{ k}\Omega$  и  $R_6 = 2 \text{ k}\Omega$ . (а) Одредити једно стабло графа и за то стабло означити основне контуре. (б) За одабране основне контуре, написати систем једначина по методу контурних струја. (в) Решити постављени систем једначина контурних струја и израчунати струје свих грана кола. (г) Израчунати напоне свих грана кола.



Слика 109.1.



Слика 109.2.



Слика 109.3.

РЕШЕЊЕ

(а) Задато коло има  $n_g = 6$  грана и  $n_c = 4$  чвора, па се стабло састоји од  $n_c - 1 = 3$  гране, а број спојница је  $n_g - n_c + 1 = 3$ . На слици 109.2 су, за усвојено стабло, означене  $n_k = n_g - n_c + 1 = 3$  основне контуре, оријентисане према одговарајућим спојницама.

(б) За коло без струјних генератора које има  $n_k = 3$  контуре, систем једначина контурних струја у општем облику гласи:

$$R_{11}I_I + R_{12}I_{II} + R_{13}I_{III} = E_I, \quad (109.1)$$

$$R_{21}I_I + R_{22}I_{II} + R_{23}I_{III} = E_{II}, \quad (109.2)$$

$$R_{31}I_I + R_{32}I_{II} + R_{33}I_{III} = E_{III}, \quad (109.3)$$

где су  $I_I$ ,  $I_{II}$  и  $I_{III}$  струје контура  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$ , респективно. Према слици 109.3 су:

- сопствене отпорности контура:

$$R_{11} = R_4 + R_5 + R_6 = 2,3 \text{ k}\Omega,$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + R_6 = 3,6 \text{ k}\Omega,$$

$$R_{33} = R_1 + R_2 + R_4 = 3,2 \text{ k}\Omega.$$

- међусобне отпорности контура:

$$R_{12} = R_{21} = -(R_4 + R_6) = -2,2 \text{ k}\Omega,$$

$$R_{13} = R_{31} = -R_4 = -0,2 \text{ k}\Omega,$$

$$R_{23} = R_{32} = R_2 + R_4 = 1,2 \text{ k}\Omega.$$

- електромоторне силе контура:

$$E_I = E_5 + E_6 = 46 \text{ V},$$

$$E_{II} = E_3 - E_2 - E_6 = -52 \text{ V},$$

$$E_{III} = -E_1 - E_2 = -122 \text{ V}.$$

У јединицама  $SI$  система, једначине (109.1)-(109.3) гласе:

$$2,3 \cdot 10^3 I_I - 2,2 \cdot 10^3 I_{II} - 0,2 \cdot 10^3 I_{III} = 46,$$

$$-2,2 \cdot 10^3 I_I + 3,6 \cdot 10^3 I_{II} + 1,2 \cdot 10^3 I_{III} = -52,$$

$$-0,2 \cdot 10^3 I_I + 1,2 \cdot 10^3 I_{II} + 3,2 \cdot 10^3 I_{III} = -122.$$

Изражавајући струје у  $mA$ , овај систем једначина добија облик:

$$2,3 I_I - 2,2 I_{II} - 0,2 I_{III} = 46, \quad (109.4)$$

$$-2,2 I_I + 3,6 I_{II} + 1,2 I_{III} = -52, \quad (109.5)$$

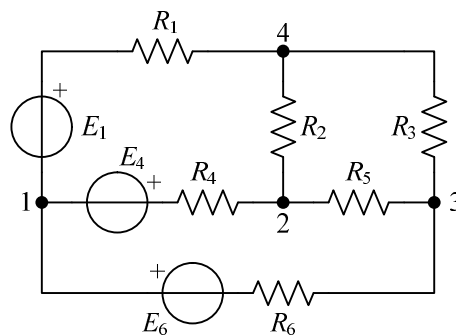
$$-0,2 I_I + 1,2 I_{II} + 3,2 I_{III} = -122. \quad (109.6)$$

(в) Решење система једначина (109.4)-(109.6) је  $I_I = 40 \text{ mA}$ ,  $I_{II} = 25 \text{ mA}$  и  $I_{III} = -45 \text{ mA}$ . На основу слике 109.2, струје грана кола су  $I_1 = I_{14} = +I_{III} = -45 \text{ mA}$ ,  $I_2 = I_{42} = I_{III} + I_{II} = -20 \text{ mA}$ ,  $I_3 = I_{34} = I_{II} = 25 \text{ mA}$ ,  $I_4 = I_{12} = I_I - I_{II} - I_{III} = 60 \text{ mA}$ ,  $I_5 = I_{23} = I_I = 40 \text{ mA}$  и  $I_6 = I_{13} = I_{II} - I_I = -15 \text{ mA}$ .

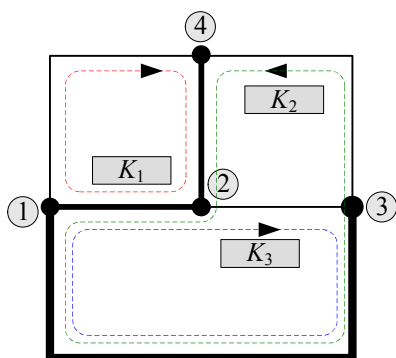
(г) Напони грана, према смеровима усаглашеним са оријентацијама грана, су  $U_1 = U_{14} = E_1 + R_1 I_{14} = -30 \text{ V}$ ,  $U_2 = U_{42} = R_2 I_{42} + E_2 = 42 \text{ V}$ ,  $U_3 = U_{34} = -E_3 + R_3 I_{34} = -20 \text{ V}$ ,  $U_4 = U_{12} = R_4 I_{12} = 12 \text{ V}$ ,  $U_5 = U_{23} = -E_5 + R_5 I_{23} = -22 \text{ V}$  и  $U_6 = U_{13} = R_6 I_{13} + E_6 = -10 \text{ V}$ .

Читаоцу се оставља да провери да ли добијени напони и струје грана задовољавају Кирхофове законе.

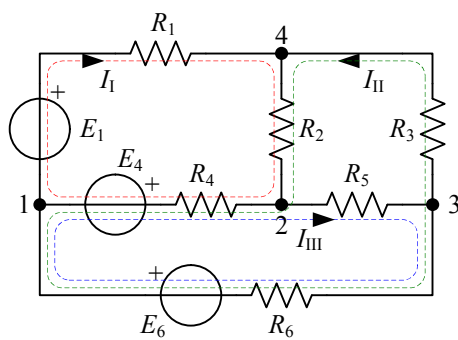
**110.** За коло са слике 110.1 познато је  $E_1 = 6 \text{ V}$ ,  $E_4 = 9 \text{ V}$ ,  $E_6 = 2,4 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 60 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 5 \Omega$ ,  $R_5 = 120 \Omega$  и  $R_6 = 20 \Omega$ . (а) Изабрати један систем основних контура. (б) За изабране контуре поставити систем једначина по методу контурних струја. (в) Решити систем једначина и израчунати струје и напоне свих грана. (г) Утврдити како се понашају идеални напонски генератори у колу. (д) Израчунати укупну снагу Џулових губитака у колу.



Слика 110.1.



Слика 110.2.



Слика 110.3.

РЕШЕЊЕ

(а) Независних контура има  $n_g - (n_\Sigma - 1) = 3$ . На слици 110.2 приказано је једно стабло и одговарајући систем основних контура.

(б) Према слици 110.3, систем једначина по методи контурних струја је

$$(R_1 + R_2 + R_4)I_1 + (R_2 + R_4)I_2 - R_4I_3 = E_1 - E_4, \quad (110.1)$$

$$(R_2 + R_4)I_1 + (R_2 + R_3 + R_4 + R_6)I_2 - (R_4 + R_6)I_3 = -E_4 - E_6, \quad (110.2)$$

$$-R_4I_1 - (R_4 + R_6)I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 = E_4 + E_6. \quad (110.3)$$

(в) Заменом бројних вредности задатих величина изражених јединицама СИ система, из система једначина (110.1)-(110.3) добија се

$$85 I_1 + 65 I_2 - 5 I_3 = -3, \quad (110.4)$$

$$65 I_1 + 115 I_2 - 25 I_3 = -11,4, \quad (110.5)$$

$$-5 I_1 - 25 I_2 + 145 I_3 = 11,4. \quad (110.6)$$

Овај систем линеарних једначина може се решити помоћу детерминанти. Детерминанта

система је  $D = \begin{vmatrix} 85 & 65 & -5 \\ 65 & 115 & -25 \\ -5 & -25 & 145 \end{vmatrix} = 765000$ . Кофактори су  $D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 65 & -5 \\ -11,4 & 115 & -25 \\ 11,4 & -25 & 145 \end{vmatrix} = 45900$ ,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 85 & -3 & -5 \\ 65 & -11,4 & -25 \\ -5 & 11,4 & 145 \end{vmatrix} = -91800 \quad \text{и} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 85 & 65 & -3 \\ 65 & 115 & -11,4 \\ -5 & -25 & 11,4 \end{vmatrix} = 45900. \quad \text{На основу тога,}$$

контурне струје су  $I_1 = \frac{D_1}{D} = 60 \text{ mA}$ ,  $I_2 = \frac{D_2}{D} = -120 \text{ mA}$  и  $I_3 = \frac{D_3}{D} = 60 \text{ mA}$ .

Струје грана су  $I_1 = I_{14} = I_1 = 60 \text{ mA}$ ,  $I_2 = I_{42} = I_1 + I_2 = -60 \text{ mA}$ ,  $I_3 = I_{34} = I_2 = -120 \text{ mA}$ ,  $I_4 = I_{12} = -I_1 - I_2 + I_3 = 120 \text{ mA}$ ,  $I_5 = I_{23} = I_3 = 60 \text{ mA}$  и  $I_6 = I_{13} = I_2 - I_3 = -180 \text{ mA}$ .

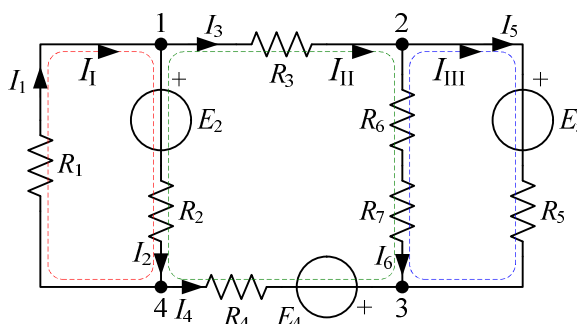
Напони грана су  $U_1 = U_{14} = R_1 I_{14} - E_1 = -4,8 \text{ V}$ ,  $U_2 = U_{24} = -R_2 I_{42} = 3,6 \text{ V}$ ,  $U_3 = U_{34} = R_3 I_{34} = -3,6 \text{ V}$ ,  $U_4 = U_{12} = R_4 I_{12} - E_4 = -8,4 \text{ V}$ ,  $U_5 = U_{23} = R_5 I_{23} = 7,2 \text{ V}$  и  $U_6 = U_{13} = R_6 I_{13} + E_6 = -1,2 \text{ V}$ .

(г) Снаге које развијају идеални напонски генератори су  $P_{E_1} = E_1 I_{14} = 360 \text{ mW} > 0$  (ради као генератор),  $P_{E_4} = E_4 I_{12} = 1080 \text{ mW} > 0$  (ради као генератор) и  $P_{E_6} = E_6 I_{31} = 432 \text{ mW} > 0$  (ради као генератор).

(д) Укупна снага Џулових губитака у колу једнака је збиру снага свих отпорника,  $P_{\text{Juk}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = 1,872 \text{ W}$ . Ова снага је једнака укупној снази свих генератора,  $P_E = P_{E_1} + P_{E_4} + P_{E_6} = 1,872 \text{ W}$ , што и мора бити на основу теореме одржања снаге.

Читаоцу се препоручује да одабере други систем независних контура (окца, систем основних контура за друго стабло, или систем добијен хеуристичким поступком), реши коло и упореди решења.

**111.** За коло приказано на слици 111.1 је  $E_2 = 10 \text{ V}$ ,  $E_4 = 10,4 \text{ V}$ ,  $E_5 = 16 \text{ V}$ ,  $R_1 = 300 \Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_4 = 400 \Omega$ ,  $R_5 = 300 \Omega$ ,  $R_6 = 200 \Omega$  и  $R_7 = 60 \Omega$ . Користећи се елементарним контурама (окцима) са слике 111.1, израчунати струје и напоне свих грана кола.



Слика 111.1.

РЕШЕЊЕ

Једначине контурних струја за задато коло су

$$(R_1 + R_2)I_I - R_2 I_{II} = -E_2, \quad (111.1)$$

$$-R_2 I_I + (R_2 + R_3 + R_4 + R_6 + R_7)I_{II} - (R_6 + R_7)I_{III} = E_2 - E_4, \quad (111.2)$$

$$-(R_6 + R_7)I_{II} + (R_5 + R_6 + R_7)I_{III} = -E_5. \quad (111.3)$$

Заменом бројних вредности се добија систем

$$1,3 I_I - I_{II} = -10, \quad (111.4)$$

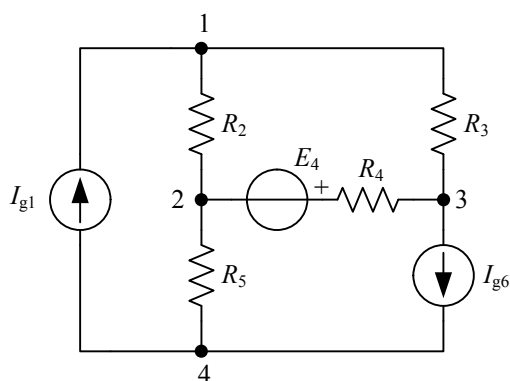
$$-I_I + 1,86 I_{II} - 0,26 I_{III} = -0,4, \quad (111.5)$$

$$-0,26 I_{II} + 0,56 I_{III} = -16, \quad (111.6)$$

где су контурне струје у  $\text{mA}$ . Систем једначина (111.4)-(111.6) може се решити на следећи начин. Из једначине (111.4) је  $I_I = \frac{I_{II} - 10}{1,3}$ , а из једначине (111.6) је  $I_{III} = \frac{0,26 I_{II} - 16}{0,56}$ . Заменом ових израза у једначину (111.5) добија се  $I_{II} = -16 \text{ mA}$ , на основу чега је  $I_I = -20 \text{ mA}$  и  $I_{III} = -36 \text{ mA}$ .

Према референтним смеровима са слике 111.1, струје грана су  $I_1 = I_I = -20 \text{ mA}$ ,  $I_2 = I_I - I_{II} = -4 \text{ mA}$ ,  $I_3 = +I_{II} = -16 \text{ mA}$ ,  $I_4 = -I_{II} = 16 \text{ mA}$ ,  $I_5 = I_{III} = -36 \text{ mA}$  и  $I_6 = I_{II} - I_{III} = +20 \text{ mA}$ . Напони грана су  $U_{14} = -R_1 I_1 = 6 \text{ V}$ ,  $U_{12} = R_3 I_3 = -3,2 \text{ V}$ ,  $U_{34} = -R_4 I_4 + E_4 = 4 \text{ V}$  и  $U_{23} = (R_6 + R_7) I_6 = 5,2 \text{ V}$ .

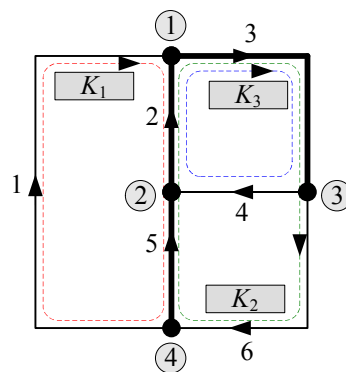
**112.** За коло са слике 112.1 познато је  $E_4 = 8 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 40 \text{ mA}$ ,  $I_{g6} = 20 \text{ mA}$ ,  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $R_3 = 50 \Omega$ ,  $R_4 = 200 \Omega$  и  $R_5 = 75 \Omega$ . Методом контурних струја израчунати струје и напоне свих грана, снаге идеалних генератора и укупну снагу Џулових губитака у колу.



Слика 112.1.

## РЕШЕЊЕ

Задато коло има  $n_k = n_g - n_\zeta + 1 = 3$  независне контуре. С обзиром на то да у колу постоје идеални струјни генератори, контуре се морају одабрати тако да је сваки струјни генератор обухваћен само једном контуром. У ту сврху, погодно је да се узме систем основних контура, при чему гране са идеалним струјним генераторима морају бити спојнице. На слици 112.2 је приказан граф кола са назначеним стаблом, спојницама и независним контурама.



Слика 112.2.

Систем једначина по методу контурних струја гласи:

$$I_I = I_{g1},$$

$$I_{II} = I_{g6},$$

$$-R_2 I_I + (R_2 + R_3) I_{II} + (R_2 + R_3 + R_4) I_{III} = -E_4,$$



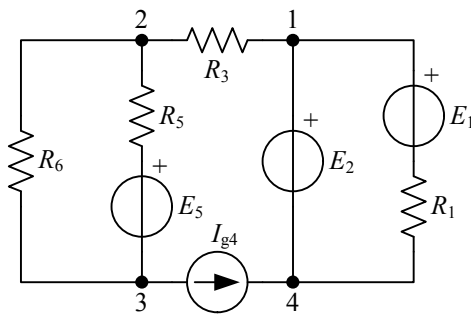
одакле је  $I_{\text{III}} = \frac{-E_4 + R_2 I_{\text{g1}} - (R_2 + R_3) I_{\text{g6}}}{R_2 + R_3 + R_4} = -30 \text{ mA}$ .

Струје грана су  $I_{21} = -50 \text{ mA}$ ,  $I_{13} = -10 \text{ mA}$ ,  $I_{32} = -30 \text{ mA}$  и  $I_{42} = -20 \text{ mA}$ . Напони грана су  $U_{12} = -R_2 I_{21} = 1,5 \text{ V}$ ,  $U_{13} = R_3 I_{13} = -0,5 \text{ V}$ ,  $U_{23} = -R_4 I_{32} - E_4 = -2 \text{ V}$ ,  $U_{24} = -R_5 I_{42} = 1,5 \text{ V}$ ,  $U_{14} = U_{12} + U_{24} = 3 \text{ V}$  и  $U_{34} = -U_{23} + U_{24} = 3,5 \text{ V}$ .

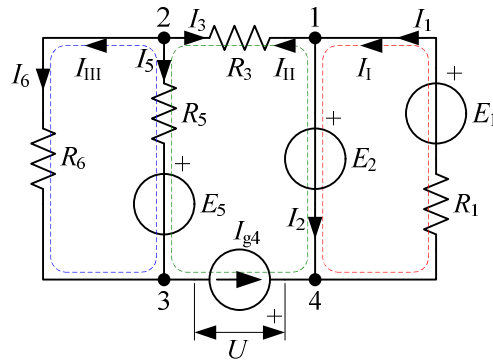
Снаге које развијају идеални генератори у колу су  $P_{E_4} = -E_4 I_{32} = 240 \text{ mW} > 0$  (ради као генератор),  $P_{I_{\text{g1}}} = U_{14} I_{\text{g1}} = 120 \text{ mW} > 0$  (ради као генератор) и  $P_{I_{\text{g6}}} = U_{43} I_{\text{g6}} = -70 \text{ mW} < 0$  (ради као пријемник).

Укупна снага Цулових губитака у колу је  $P_{\text{Juk}} = R_2 I_{21}^2 + R_3 I_{13}^2 + R_4 I_{42}^2 + R_5 I_{52}^2 = 290 \text{ mW}$ . Читаоцу се оставља да провери да ли је ова снага једнака укупној снази генератора ( $P_{E_4} + P_{I_{\text{g1}}} + P_{I_{\text{g6}}}$ ).

**113.** За коло са слике 113.1 је  $E_1 = 40 \text{ V}$ ,  $E_2 = 13 \text{ V}$ ,  $E_5 = 25 \text{ V}$ ,  $I_{\text{g4}} = 40 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_5 = 1 \text{ k}\Omega$  и  $R_6 = 300 \Omega$ . Користећи се методом контурних струја израчунати струје свих грана кола и напон струјног генератора.



Слика 113.1.



Слика 113.2.

РЕШЕЊЕ

Задато коло има  $n_k = 3$  контуре, а одабране су као на слици 113.2 (елементарне контуре). Једначине по методу контурних струја су  $R_1 I_1 = E_1 - E_2$ ,  $I_{\text{II}} = I_{\text{g4}}$  и

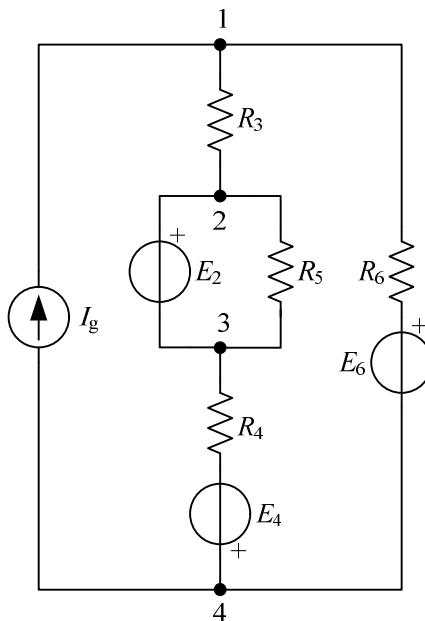
$-R_5 I_{\text{II}} + (R_5 + R_6) I_{\text{III}} = E_5$ . Из ових једначина је  $I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1} = 90 \text{ mA}$  и

$$I_{\text{III}} = \frac{R_5 I_{\text{g4}} + E_5}{R_5 + R_6} = 50 \text{ mA}.$$

Струје грана су (слика 113.2)  $I_1 = I_I = 90 \text{ mA}$ ,  $I_2 = I_I - I_{II} = 50 \text{ mA}$ ,  $I_3 = -I_{II} = -40 \text{ mA}$ ,  $I_5 = I_{II} - I_{III} = -10 \text{ mA}$  и  $I_6 = I_{III} = 50 \text{ mA}$ . Напон струјног генератора је  $U = U_{43} = R_6 I_6 - R_3 I_3 - E_2 = 10 \text{ V}$ .

Читаоцу се оставља да израчуна снаге свих отпорника и генератора и провери да ли резултати задовољавају теорему одржања снаге.

**114.** За коло чија је шема приказана на слици 114.1 познато је  $I_g = 60 \text{ mA}$ ,  $E_2 = 4 \text{ V}$ ,  $E_4 = 8 \text{ V}$ ,  $E_6 = 50 \text{ V}$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_4 = 200 \Omega$ ,  $R_5 = 100 \Omega$  и  $R_6 = 600 \Omega$ . Израчунати струје и напоне свих грана кола методом контурних струја (а) усвајајући систем основних контура и **\*\***(б) одређујући независне контуре хеуристичким методом кидања грана.



Слика 114.1.

#### РЕШЕЊЕ

Задато коло има  $n_k = n_g - n_{\Sigma} + 1 = 3$  независне контуре.

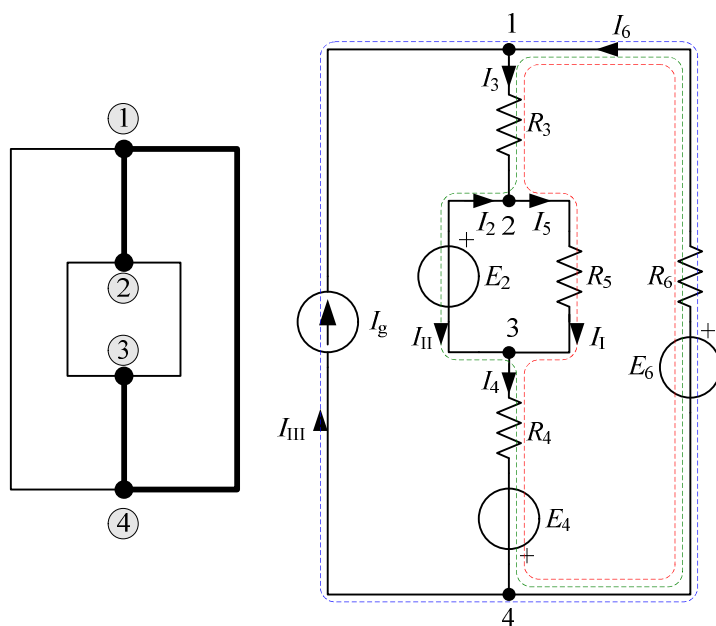
(а) На слици 114.2 приказано је стабло графа и три одговарајуће основне контуре. Систем једначина контурних струја је

$$(R_3 + R_4 + R_5 + R_6)I_I + (R_3 + R_4 + R_6)I_{II} - R_6 I_{III} = E_4 + E_6,$$

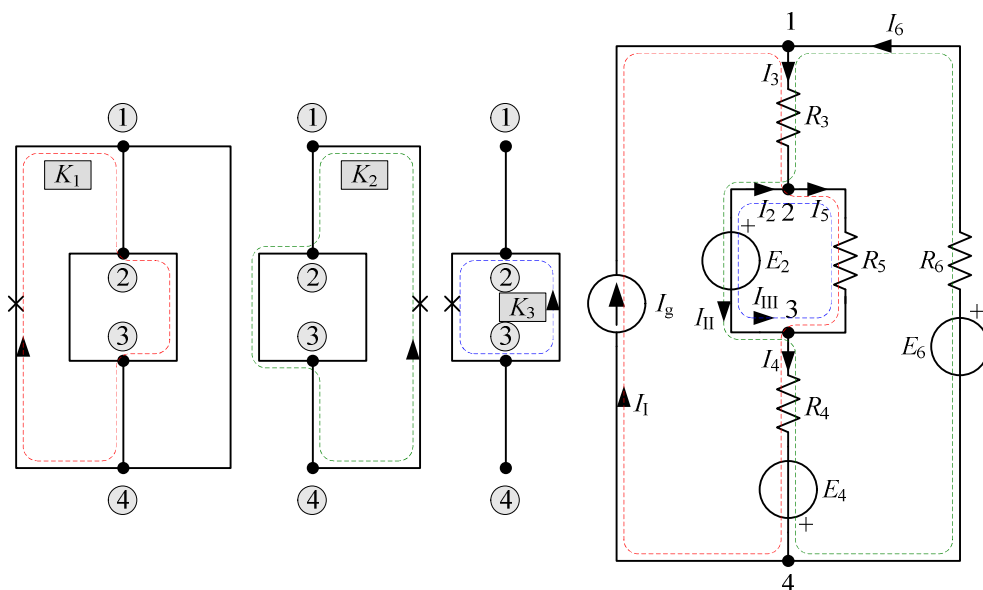
$$(R_3 + R_4 + R_6)I_I + (R_3 + R_4 + R_6)I_{II} - R_6 I_{III} = -E_2 + E_4 + E_6,$$

$$I_{III} = I_g,$$

а његовим решавањем се добија  $I_I = 40 \text{ mA}$ ,  $I_{II} = 50 \text{ mA}$  и  $I_{III} = 60 \text{ mA}$ . Струје грана су  $I_2 = -50 \text{ mA}$ ,  $I_3 = 90 \text{ mA}$ ,  $I_4 = 90 \text{ mA}$ ,  $I_5 = 40 \text{ mA}$  и  $I_6 = 30 \text{ mA}$ , а напони грана су  $U_{12} = 18 \text{ V}$ ,  $U_{23} = 4 \text{ V}$ ,  $U_{34} = 10 \text{ V}$  и  $U_{14} = 32 \text{ V}$ .



Слика 114.2.



Слика 114.3.

(б) На слици 114.3 приказано је одређивање система независних контура хеуристичким поступком кидања грана. При томе је вођено рачуна да кроз грану са идеалним струјним генератором пролази само једна контура. Одговарајуће једначине по методу контурних струја су

$$I_I = I_g,$$

$$(R_3 + R_4)I_I + (R_3 + R_4 + R_6)I_{II} = -E_2 + E_4 + E_6,$$

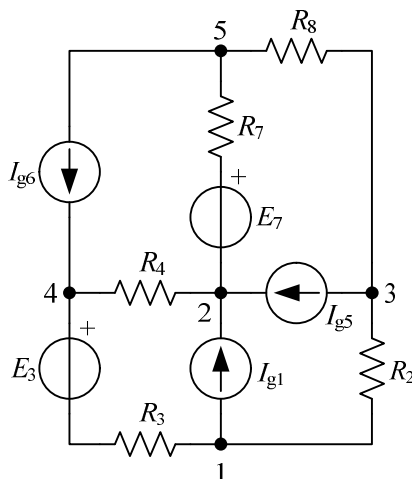
$$-R_5I_I + R_5I_{III} = -E_2.$$

Из ових једначина је  $I_I = 60 \text{ mA}$ ,  $I_{II} = 30 \text{ mA}$  и  $I_{III} = 20 \text{ mA}$ . Одавде се добијају струје и напони грана, који су исти као у решењу (а).

**115.** За коло приказано на слици 115.1 је  $E_3 = 2 \text{ V}$ ,  $E_7 = 21 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 60 \text{ mA}$ ,  $I_{g5} = 5 \text{ mA}$ ,  $I_{g6} = 50 \text{ mA}$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_4 = 150 \Omega$ ,  $R_7 = 100 \Omega$  и  $R_8 = 200 \Omega$ . Израчунати напон  $U_{15}$ .

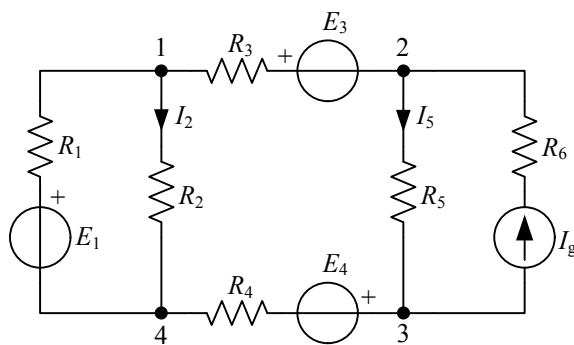
#### РЕЗУЛТАТ

Тражени напон је  $U_{15} = -13 \text{ V}$ .



Слика 115.1.

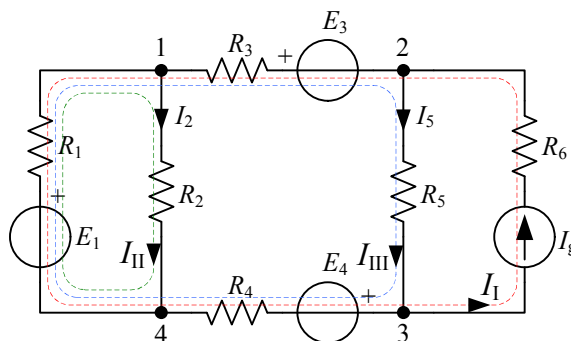
**116.** За коло са слике 116.1 познато је  $E_1 = 50 \text{ V}$ ,  $E_3 = 10 \text{ V}$ ,  $E_4 = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 10 \text{ k}\Omega$  и  $R_6 = 5 \text{ k}\Omega$ . Израчунати отпорност  $R_2$  и струју  $I_g$  тако да буде  $I_2 = 80 \text{ mA}$  и  $I_5 = 10 \text{ mA}$ .



Слика 116.1.

РЕШЕЊЕ

Коло има  $n_k = 3$  независне контуре, које су изабране као на слици 116.2. Кроз струјни генератор пролази само једна (прва) контура. Отпорник  $R_6$  не утиче на струју идеалног струјног генератора, па је струја прве контуре  $I_1 = I_g$ . (Сопствена отпорност прве контуре је бесконачна.)



Слика 116.2.

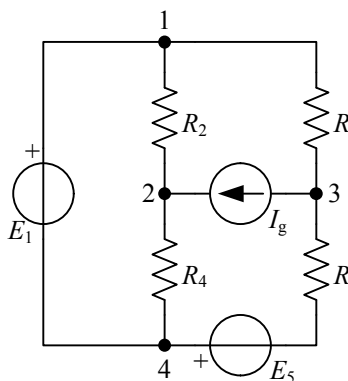
Остале две једначине по методу контурних струја су  $-R_1 I_g + (R_1 + R_2) I_2 + R_1 I_5 = E_1$  и  $-(R_1 + R_3 + R_4) I_g + R_1 I_2 + (R_1 + R_3 + R_4 + R_5) I_5 = E_1 - E_3 - E_4$  јер је  $I_{II} = I_2$  и  $I_{III} = I_5$ . Из ових једначина се добија  $I_g = 40 \text{ mA}$  и  $R_2 = 500 \Omega$ .

Да ли отпорник  $R_6$  утиче на снагу идеалног струјног генератора? Образложити одговор.

**117.** За коло сталне струје са слике 117.1 познато је  $E_1 = E_5 = 20 \text{ V}$ ,  $I_g = 40 \text{ mA}$ ,  $R_2 = R_4 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = R_5 = 1 \text{ k}\Omega$ . Израчунати струје свих грана и напон струјног генератора.

РЕЗУЛТАТ

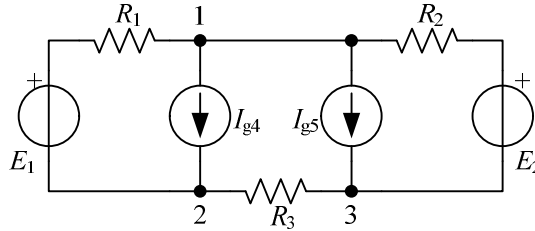
Струје грана су  $I_1 = I_{41} = 25 \text{ mA}$ ,  $I_2 = I_{12} = -15 \text{ mA}$ ,  $I_3 = I_{13} = 40 \text{ mA}$ ,  $I_4 = I_{24} = 25 \text{ mA}$  и  $I_5 = I_{34} = 0$ , а напон струјног генератора је  $U_{23} = 70 \text{ V}$ .



Слика 117.1.

Читаоцу се препоручује да провери да ли добијено решење задовољава други Кирхофов закон.

**118.** За коло са слике 118.1 познато је  $E_1 = 6 \text{ V}$ ,  $E_2 = 40,5 \text{ V}$ ,  $I_{g4} = 3 \text{ mA}$ ,  $I_{g5} = 15 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 0,75 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 0,5 \text{ k}\Omega$ . Израчунати (а) струје напонских генератора и напоне струјних генератора, (б) снаге генератора и (в) снаге Џулових губитака отпорника.



Слика 118.1.

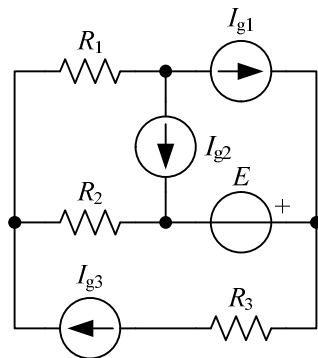
РЕЗУЛТАТ

(а) Струје напонских генератора су  $I_1 = I_{21} = -6 \text{ mA}$  и  $I_2 = I_{31} = 24 \text{ mA}$ , а напони струјних генератора су  $U_4 = U_{21} = -18 \text{ V}$  и  $U_5 = U_{31} = -22,5 \text{ V}$ .

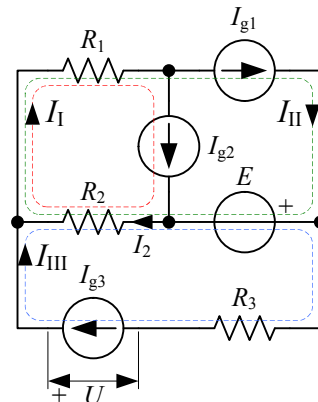
(б) Снаге које развијају генератори су  $P_{E_1} = -36 \text{ mW} < 0$  (ради као пријемник),  $P_{E_2} = 972 \text{ mW} > 0$  (ради као генератор),  $P_{I_{g4}} = -54 \text{ mW} < 0$  (ради као пријемник) и  $P_{I_{g5}} = -337,5 \text{ mW} < 0$  (ради као пријемник).

(в) Укупна снага Џулових губитака у колу је  $P_{\text{Juk}} = 544,5 \text{ mW}$ .

**119.** У колу приказаном на слици 119.1 је  $I_{g1} = 1 \text{ mA}$ ,  $I_{g2} = 2 \text{ mA}$ ,  $I_{g3} = 3 \text{ mA}$ ,  $E = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ . Израчунати снагу коју развија идеални струјни генератор  $I_{g3}$ .



Слика 119.1.



Слика 119.2.

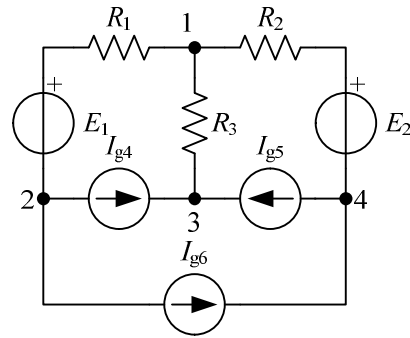
РЕШЕЊЕ

За систем основних контура приказан на слици 119.2 је  $I_I = I_{g2}$ ,  $I_{II} = I_{g1}$  и  $I_{III} = I_{g3}$ , па је  $I_2 = I_I + I_{II} - I_{III} = 0$ ,  $U = R_3 I_{g3} - E - R_2 I_2 = 8 \text{ V}$ , а снага струјног генератора је  $P_{I_{g3}} = U I_{g3} = 24 \text{ mW}$ .

**120.** У колу на слици 120.1 је  $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  $E_2 = 20 \text{ V}$ ,  $I_{g4} = 10 \text{ mA}$ ,  $I_{g5} = 20 \text{ mA}$ ,  $I_{g6} = 30 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ . Израчунати напон  $U_{24}$ .

РЕЗУЛТАТ

Тражени напон је  $U_{24} = -50 \text{ V}$ .

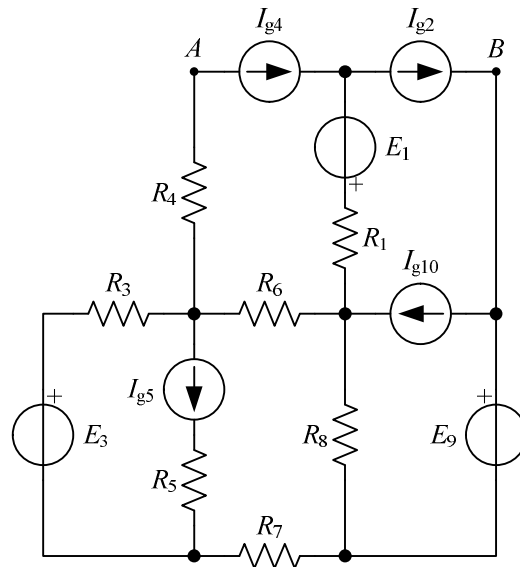


Слика 120.1.

**121.** У колу приказаном на слици 121.1 је  $E_1 = 3 \text{ V}$ ,  $E_3 = 5 \text{ V}$ ,  $E_9 = 10 \text{ V}$ ,  $I_{g2} = 5 \text{ mA}$ ,  $I_{g4} = 10 \text{ mA}$ ,  $I_{g5} = 6 \text{ mA}$ ,  $I_{g10} = 5 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 250 \Omega$ ,  $R_3 = R_6 = 100 \Omega$ ,  $R_4 = 200 \Omega$ ,  $R_5 = 25 \Omega$  и  $R_7 = R_8 = 50 \Omega$ . Израчунати снагу коју развија идеални струјни генератор  $I_{g4}$  и напон између тачака  $A$  и  $B$ .

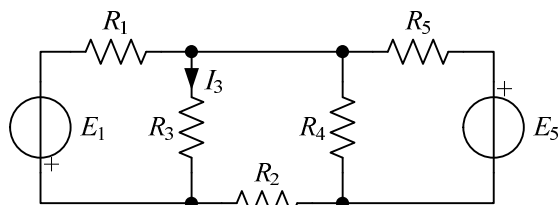
РЕЗУЛТАТ

Тражена снага струјног генератора је  $P_{I_{g4}} = -5,5 \text{ mW}$ , а напон је  $U_{AB} = -10,3 \text{ V}$ .



Слика 121.1.

**122.** У колу на слици 122.1 је  
 $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  
 $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 500 \Omega$ ,  
 $I_3 = -2,5 \text{ mA}$  и  $P_{R_4} = 0$ .  
 Израчунати отпорност  $R_3$  и  
 електромоторну силу  $E_5$ .



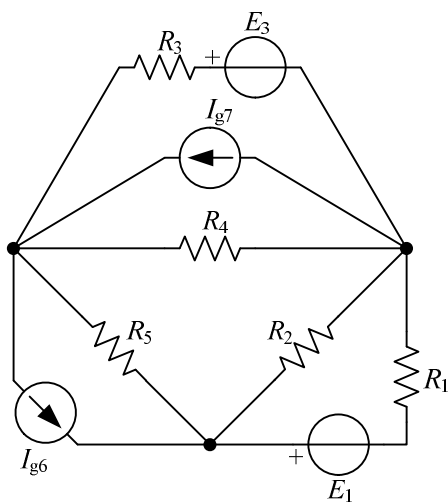
Слика 122.1.

**РЕЗУЛТАТ**

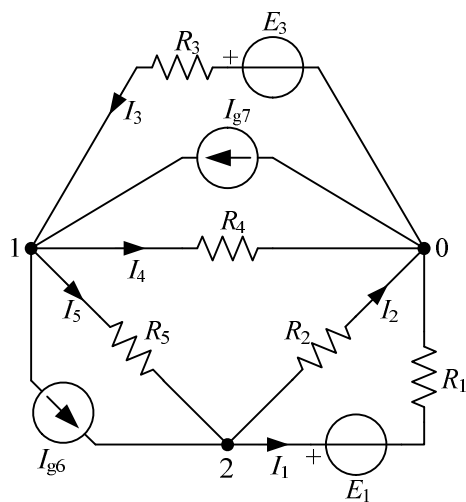
Тражена отпорност је  
 $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ , а електромоторна сила је  
 $E_5 = 1,25 \text{ V}$ .

**3.3. Метод потенцијала чворова**

**123.** За коло сталне струје са слике 123.1 познато је  $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  $E_3 = 20 \text{ V}$ ,  
 $I_{g6} = 160 \text{ mA}$ ,  $I_{g7} = 40 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 0,1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 2,5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 0,5 \text{ k}\Omega$  и  
 $R_5 = 1,25 \text{ k}\Omega$ . Методом потенцијала чворова израчунати напоне и струје свих грана  
 кола.



Слика 123.1.



Слика 123.2.

**РЕШЕЊЕ**

Задато коло има  $n_\zeta = 3$  чвора и  $n_g = 7$  грана. По Кирхофовим законима у  
 редукованом облику за ово коло је потребно поставити и решити систем од  $n_g = 7$



једначина. Међутим, у колу постоје  $n_s = 2$  грана са идеалним струјним генераторима, па су струје тих грана одмах познате. Стога се систем ефективно своди на  $n_g - n_s = 7 - 2 = 5$  једначина. По методу контурних струја број једначина је ефективно  $n_k = n_g - n_\Sigma + 1 - n_s = 3$ . Међутим, по методу потенцијала чворова број једначина је  $n_\Sigma - 1 = 2$ , односно систем једначина је најмањи<sup>28</sup>.

За референтни чвор је повољно усвојити онај чвор у коме се стиче највише грана са непознатим струјама. На слици 123.2 је референтни чвор означен са 0. Непознати су потенцијали чворова 1 и 2 у односу на чвор 0 (односно напони  $U_{10} = V_1$  и  $U_{20} = V_2$ ). Овакав избор референтног чвора има две погодности. Прва је што се непосредно из решења система по методу потенцијала чворова може одредити највише непознатих напона грана. Друга је што је писање једначина у систему олакшано јер је број грана између „врућих“ чворова минималан.

За коло са два „врућа“ чвора, под условом да у колу нема грана које садрже само идеалне напонске генераторе, систем једначина по методу потенцијала чворова има општи облик

$$G_{11}V_1 + G_{12}V_2 = I_I, \quad (123.1)$$

$$G_{21}V_1 + G_{22}V_2 = I_{II}. \quad (123.2)$$

За коло са слике 123.1, сопствене проводности чворова су  $G_{11} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} = \frac{8}{2,5} \text{ mS} = 3,2 \text{ mS}$  и  $G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = \frac{14,75}{1,25} \text{ mS} = 11,8 \text{ mS}$ .

Међусобне (узајамне) проводности чворова су  $G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_5} = -\frac{1}{1,25} \text{ mS} = -0,8 \text{ mS}$ .

Сопствене струје чворова су  $I_I = \frac{E_3}{R_3} + I_{g7} - I_{g6} = -\frac{280}{2,5} \text{ mA} = -112 \text{ mA}$  и

$$I_{II} = I_{g6} + \frac{E_1}{R_1} = 260 \text{ mA}.$$

Решавањем система једначина (123.1) и (123.2) добијају се потенцијали чворова,  $V_1 = -30 \text{ V}$  и  $V_2 = 20 \text{ V}$ . Овим су добијени одмах напони грана везаних између „врућих“ чворова и референтног, док је напон грана између „врућих“ чворова  $U_{12} = V_1 - V_2 = -50 \text{ V}$ .

Према оријентацији са слике 123.2, струје грана су  $I_1 = \frac{U_{20} - E_1}{R_1} = \frac{V_2 - E_1}{R_1} = 100 \text{ mA}$ ,  $I_2 = \frac{U_{20}}{R_2} = \frac{V_2}{R_2} = 20 \text{ mA}$ ,  $I_3 = \frac{E_3 - U_{10}}{R_3} = \frac{E_3 - V_1}{R_3} = 20 \text{ mA}$ ,  $I_4 = \frac{U_{10}}{R_4} = \frac{V_1}{R_4} = -60 \text{ mA}$  и  $I_5 = \frac{U_{12}}{R_5} = \frac{V_1 - V_2}{R_5} = -40 \text{ mA}$ .

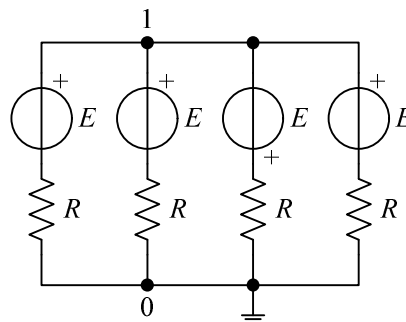
<sup>28</sup> Метод потенцијала чворова је, по правилу, најпогоднији када се у чворовима анализираног кола стиче већи број грана, што је чест случај у пракси.

Као провера, задовољен је први Кирхофов закон за чвор 0 :  
 $I_3 + I_{g7} - I_4 - I_2 - I_1 = 0$ .

**124.** У колу приказаном на слици 124.1 је  $E = 40 \text{ V}$ . Израчунати потенцијал тачке 1.

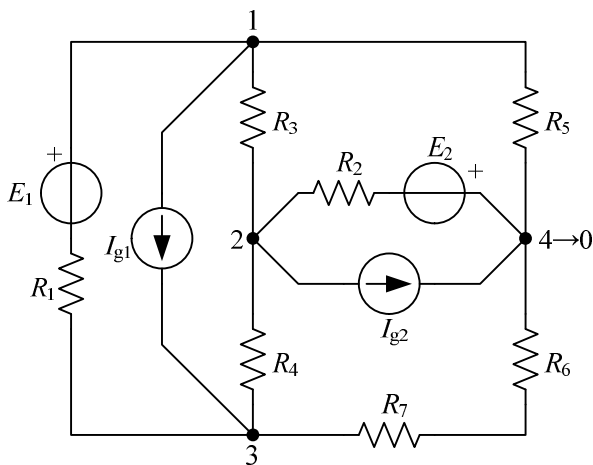
РЕЗУЛТАТ

Потенцијал тачке 1 је  $V = 20 \text{ V}$ .



Слика 124.1.

**125.** Напонски генератори емс  $E_1 = 33 \text{ V}$  и  $E_2 = 18 \text{ V}$ , струјни генератори струја  $I_{g1} = 30 \text{ mA}$  и  $I_{g2} = 10 \text{ mA}$  и отпорници отпорности  $R_1 = 300 \Omega$ ,  $R_2 = 500 \Omega$ ,  $R_3 = 120 \Omega$ ,  $R_4 = 300 \Omega$ ,  $R_5 = 200 \Omega$ ,  $R_6 = 180 \Omega$  и  $R_7 = 520 \Omega$  образују коло као на слици 125.1. Израчунати (а) непознате струје грана, (б) снаге идеалних напонских и струјних генератора и (в) укупну снагу Џулових губитака у колу.



Слика 125.1.

РЕШЕЊЕ

За решавање задатка најповољније је применити метод потенцијала чворова. Како је  $n_\Sigma - 1 = 3$  и пошто коло не садржи гране само са идеалним напонским генераторима, систем једначина по методу потенцијала чворова има општи облик

$$G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 = I_I,$$

$$G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 = I_{II},$$

$$G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 = I_{III}.$$

Узимајући чвор 4 за референтни, добија се систем линеарних једначина по потенцијалима:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) V_1 - \frac{1}{R_3} V_2 - \frac{1}{R_1} V_3 &= \frac{E_1}{R_1} - I_{g1}, \\ -\frac{1}{R_3} V_1 + \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} \right) V_2 - \frac{1}{R_4} V_3 &= -\frac{E_2}{R_2} - I_{g2}, \\ -\frac{1}{R_1} V_1 - \frac{1}{R_4} V_2 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6 + R_7} \right) V_3 &= -\frac{E_1}{R_1} + I_{g1}. \end{aligned}$$

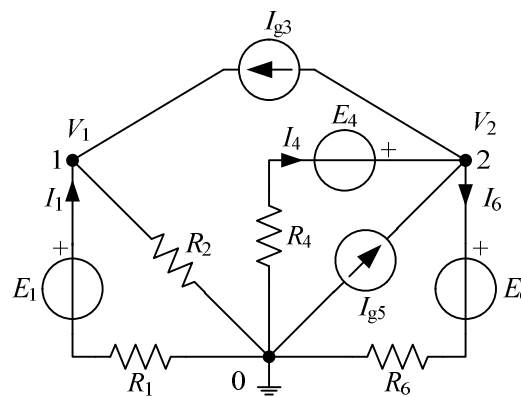
Заменом задатих података и решавањем овог система добија се  $V_1 = -2 \text{ V}$ ,  $V_2 = -8 \text{ V}$  и  $V_3 = -14 \text{ V}$ . Напони грана су  $U_{10} = V_1 = -2 \text{ V}$ ,  $U_{20} = V_2 = -8 \text{ V}$ ,  $U_{30} = V_3 = -14 \text{ V}$ ,  $U_{12} = V_1 - V_2 = 6 \text{ V}$ ,  $U_{13} = V_1 - V_3 = 12 \text{ V}$  и  $U_{23} = V_2 - V_3 = 6 \text{ V}$ .

(а) Струје грана кола су  $I_1 = I_{13} = \frac{U_{13} - E_1}{R_1} = -70 \text{ mA}$ ,  $I_3 = I_{12} = \frac{U_{12}}{R_3} = 50 \text{ mA}$ ,  
 $I_4 = I_{23} = \frac{U_{23}}{R_4} = 20 \text{ mA}$ ,  $I_5 = I_{10} = \frac{U_{10}}{R_5} = -10 \text{ mA}$ ,  $I_2 = I_{20} = \frac{U_{20} + E_2}{R_2} = 20 \text{ mA}$  и  
 $I_6 = I_{30} = \frac{U_{30}}{R_6 + R_7} = -20 \text{ mA}$ .

(б) Снаге које развијају идеални генератори у колу су  $P_{E_1} = -E_1 I_{13} = 2,31 \text{ W} > 0$  (ради као генератор),  $P_{E_2} = E_2 I_{20} = 0,36 \text{ W} > 0$  (ради као генератор),  $P_{I_{g1}} = -U_{13} I_{g1} = -0,36 \text{ W} < 0$  (ради као пријемник) и  $P_{I_{g2}} = -U_{20} I_{g2} = 80 \text{ mW} > 0$  (ради као генератор).

(в) Укупна снага отпорника је  $P_{Ruk} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 + R_7 I_6^2$ , односно  $P_{Ruk} = 2,39 \text{ W}$ , а једнака је укупној снази генератора,  $P_{E_1} + P_{E_2} + P_{I_{g1}} + P_{I_{g2}} = P_{Ruk}$ .

**126.** За коло са слике 126.1 је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_4 = 11 \text{ V}$ ,  $E_6 = 8 \text{ V}$ ,  $I_{g3} = 25 \text{ mA}$ ,  $I_{g5} = 40 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $R_4 = 20 \Omega$  и  $R_6 = 40 \Omega$ . Чвор означен са 0 је уземљен (на маси). Користећи се методом потенцијала чворова, израчунати (а) потенцијале чворова 1 и 2, (б) струје напонских генератора и (в) напоне струјних генератора.



Слика 126.1.

РЕЗУЛТАТ

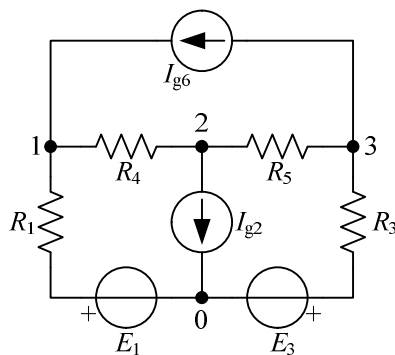
(а) Потенцијали чворова су  $V_1 = 9,8 \text{ V}$  и  $V_2 = 10,2 \text{ V}$ .

(б) Струје напонских генератора, према оријентацијама са слике 126.1, су  $I_1 = 0,22 \text{ A}$ ,  $I_4 = 40 \text{ mA}$  и  $I_6 = 55 \text{ mA}$ .

(в) Напони струјних генератора су  $U_{12} = -0,4 \text{ V}$  и  $U_{20} = 10,2 \text{ V}$ .

Читаоцу се препоручује да израчуна снаге свих отпорника и генератора у задатом колу и провери да ли је задовољена теорема одржања снаге.

**127.** За коло са слике 127.1 је  $E_1 = 70 \text{ V}$ ,  $E_3 = 40 \text{ V}$ ,  $I_{g2} = 40 \text{ mA}$ ,  $I_{g6} = 75 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 100 \Omega$  и  $R_5 = 500 \Omega$ . Решити коло методом потенцијала чворова и израчунати напоне и струје свих грана кола.



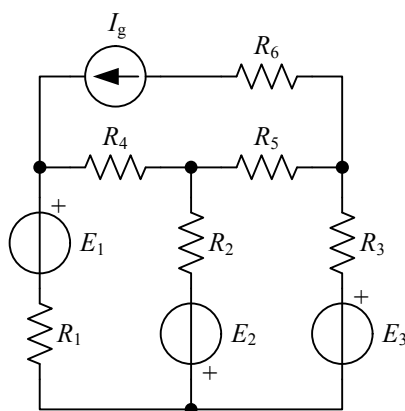
Слика 127.1.

РЕЗУЛТАТ

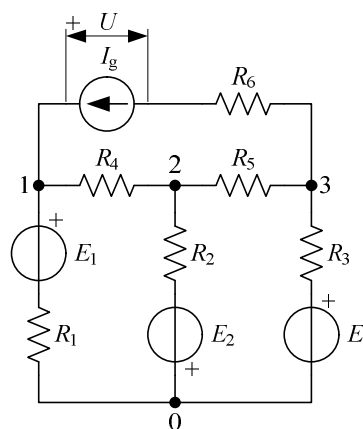
Напони грана кола су  $U_{12} = 10 \text{ V}$ ,  $U_{23} = 30 \text{ V}$ ,  $U_{13} = 40 \text{ V}$ ,  $U_{10} = 20 \text{ V}$ ,  $U_{20} = 10 \text{ V}$  и  $U_{30} = -20 \text{ V}$ . Струје су  $I_{10} = -25 \text{ mA}$ ,  $I_{30} = -15 \text{ mA}$ ,  $I_{12} = 100 \text{ mA}$  и  $I_{23} = 60 \text{ mA}$ .

Читаоцу се препоручује да задатак реши и методом контурних струја и упореди решења. По ком се методу брже долази до решења?

**128.** За коло сталне струје са слике 128.1 познато је  $I_g = 75 \text{ mA}$ ,  $E_1 = 70 \text{ V}$ ,  $E_2 = 30 \text{ V}$ ,  $E_3 = 40 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 100 \Omega$ ,  $R_5 = 500 \Omega$  и  $R_6 = 300 \Omega$ . Користећи се методом потенцијала чворова, израчунати снагу коју развија идеални струјни генератор.



Слика 128.1.



Слика 128.2.

РЕШЕЊЕ

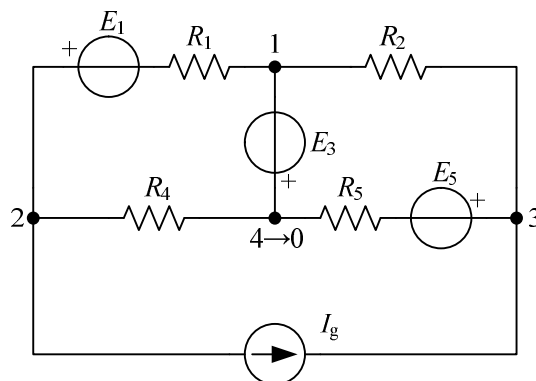
Према ознакама на слици 128.2, једначине по методу потенцијала чворова гласе:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right)V_1 - \frac{1}{R_4}V_2 = \frac{E_1}{R_1} + I_g, \quad -\frac{1}{R_4}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_2 - \frac{1}{R_5}V_3 = -\frac{E_2}{R_2} \quad \text{и}$$

$$-\frac{1}{R_5}V_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)V_3 = \frac{E_3}{R_3} - I_g. \quad (\text{Проводност гране са идеалним струјним генератором}$$

је нула, односно отпорност је бесконачна.) Решавањем овог система једначина добија се  $V_1 = 20\text{V}$ ,  $V_2 = 10\text{V}$  и  $V_3 = -20\text{V}$ . Напон идеалног струјног генератора је  $U = V_1 - V_3 + R_6 I_g = 62,5\text{V}$ , па је снага овог генератора  $P_{I_g} = U I_g \approx 4,69\text{W}$ .

**129.** За коло приказано на слици 129.1 познато је  $E_1 = 14\text{V}$ ,  $E_3 = 10\text{V}$ ,  $E_5 = 5\text{V}$ ,  $I_g = 25\text{mA}$ ,  $R_1 = 100\Omega$ ,  $R_2 = 2\text{k}\Omega$ ,  $R_4 = 200\Omega$  и  $R_5 = 5\text{k}\Omega$ . Користећи се методом потенцијала чворова, израчунати напоне и струје свих грана кола.



Слика 129.1.

РЕШЕЊЕ

Посматрано коло садржи једну грану само са идеалним напонским генератором. Нулта отпорност те гране онемогућава да се струја гране изрази помоћу напона гране и емс напонског генератора у тој грани. Проводност те гране је бесконачна, па се у једначини по методу потенцијала чворова за ту грану јављају бесконачни чланови. Међутим, емс у тој грани одређује напон гране (без обзира на струју гране). Узимањем једног од чворова те гране за референтни, проблем се елиминише јер је потенцијал

другог чвора познат. У задатом случају, за референтни чвор је изабран чвор 4 (надаље означен са 0), па систем једначина по методу потенцијала чворова добија облик:

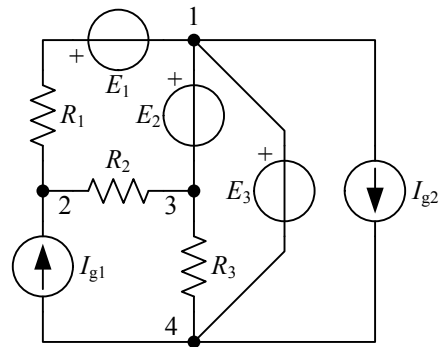
$$V_1 = -E_3, \quad (129.1)$$

$$-\frac{1}{R_1}V_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 = \frac{E_1}{R_1} - I_g, \quad (129.2)$$

$$-\frac{1}{R_2}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right)V_3 = I_g + \frac{E_5}{R_5}. \quad (129.3)$$

Решавањем овог система једначина добија се  $V_1 = -10 \text{ V} = U_{10}$ ,  $V_2 = 1 \text{ V} = U_{20}$  и  $V_3 = 30 \text{ V} = U_{30}$ . Напони осталих грана су  $U_{12} = V_1 - V_2 = -11 \text{ V}$ ,  $U_{13} = V_1 - V_3 = -40 \text{ V}$  и  $U_{23} = V_2 - V_3 = -29 \text{ V}$ . Струје грана су  $I_{12} = \frac{U_{12} + E_1}{R_1} = 30 \text{ mA}$ ,  $I_{13} = \frac{U_{13}}{R_2} = -20 \text{ mA}$ ,  $I_{20} = \frac{U_{20}}{R_4} = 5 \text{ mA}$ ,  $I_{30} = \frac{U_{30} - E_5}{R_5} = 5 \text{ mA}$  и  $I_{10} = -I_{12} - I_{13} = -10 \text{ mA}$ .

**130.** За коло приказано на слици 130.1 написати једначине по методу потенцијала чворова.



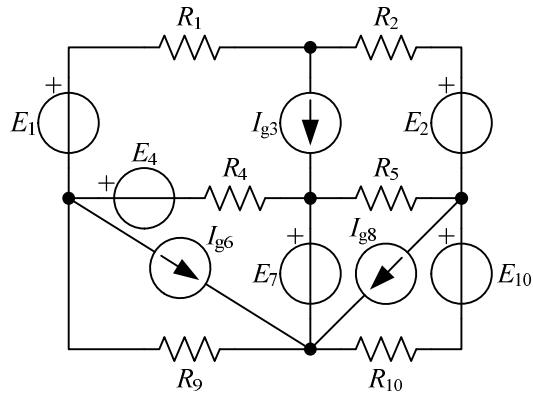
Слика 130.1.

#### РЕШЕЊЕ

Усвајајући чвор 1 за референтни јер се у њему стичу обе гране у којима постоји само идеални напонски генератор, једначине по методу потенцијала чворова гласе

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_2 - \frac{1}{R_2}V_3 = \frac{E_1}{R_1} + I_{g1}, \quad V_3 = -E_2 \text{ и } V_4 = -E_3.$$

**131.** У колу приказаном на слици 131.1 је  $E_1 = 1\text{ V}$ ,  $E_2 = 2\text{ V}$ ,  $E_4 = 4\text{ V}$ ,  $E_7 = 1\text{ V}$ ,  $E_{10} = 6\text{ V}$ ,  $I_{g3} = 3\text{ mA}$ ,  $I_{g6} = 2\text{ mA}$ ,  $I_{g8} = 3\text{ mA}$ ,  $R_1 = 1\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2\text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 1\text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 2\text{ k}\Omega$ ,  $R_9 = 1\text{ k}\Omega$  и  $R_{10} = 0,5\text{ k}\Omega$ . Израчунати снаге идеалних напонских генератора  $E_7$  и  $E_{10}$ , као и идеалних струјних генератора  $I_{g3}$  и  $I_{g6}$  користећи се методом потенцијала чворова.

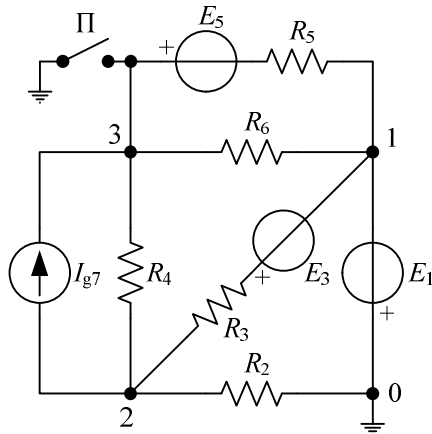


Слика 131.1.

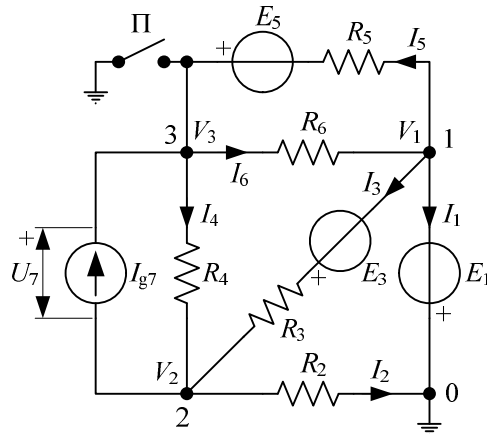
РЕЗУЛТАТ

Тражене снаге су  $P_{E_7} = 0$ ,  $P_{E_{10}} = 36\text{ mW}$ ,  $P_{I_{g3}} = 0$  и  $P_{I_{g6}} = -2\text{ mW}$ .

**\*132.** За коло са слике 132.1 је  $E_1 = 10\text{ V}$ ,  $E_3 = 5\text{ V}$ ,  $E_5 = 26\text{ V}$ ,  $I_{g7} = 20\text{ mA}$ ,  $R_2 = 400\Omega$ ,  $R_3 = 100\Omega$ ,  $R_4 = R_5 = 200\Omega$  и  $R_6 = 850\Omega$ . Користећи се методом потенцијала чворова, израчунати струје свих грана кола и напон струјног генератора када је прекидач П (а) затворен и (б) отворен.



Слика 132.1.



Слика 132.2.

РЕШЕЊЕ

(а) Када је прекидач П затворен, чворови 3 и 0 су међусобно кратко спојени преко уземљења, а потенцијали оба чвора су 0. У колу постоје само два „врућа“ чвора (1 и 2), а одговарајуће једначине по методу потенцијала чворова су  $V_1 = -E_1$ ,

$-\frac{1}{R_3}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 = -I_{g7} + \frac{E_3}{R_3}$ . Решење тих једначина је  $V_1 = -10\text{ V}$  и

$V_2 = -4 \text{ V}$ . Према референтним смеровима са слике 132.2, струје грана су

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = -10 \text{ mA}, \quad I_3 = \frac{V_1 - V_2 + E_3}{R_3} = -10 \text{ mA}, \quad I_4 = \frac{-V_2}{R_4} = 20 \text{ mA},$$

$$I_5 = \frac{V_1 + E_5}{R_5} = 80 \text{ mA}, \quad I_6 = \frac{-V_1}{R_6} = \frac{10}{850} \text{ A} \approx 11,76 \text{ mA} \quad \text{и} \quad I_1 = -I_3 - I_5 + I_6 \approx -58,24 \text{ mA}.$$

Напон идеалног струјног генератора је  $U_7 = -V_2 = 4 \text{ V}$ .

Колике су јачине струја кроз проводнике за уземљење чворова 0 и 3 у овом случају?

(б) Када је прекидач П отворен, остаје уземљен само чвор 0. Усвајајући тај чвор за референтни, систем једначина по методу потенцијала чворова је

$$V_1 = -E_1,$$

$$-\frac{1}{R_3}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 - \frac{1}{R_4}V_3 = -I_{g7} + \frac{E_3}{R_3},$$

$$-\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)V_1 - \frac{1}{R_4}V_2 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)V_3 = I_{g7} + \frac{E_5}{R_5}.$$

Решавањем овог система, добијају се потенцијали чворова  $V_1 = -10 \text{ V}$ ,  $V_2 = -2 \text{ V}$  и

$$V_3 = 7 \text{ V}. \quad \text{Струје грана су сада} \quad I_2 = \frac{V_2}{R_2} = -5 \text{ mA}, \quad I_3 = \frac{V_1 - V_2 + E_3}{R_3} = -30 \text{ mA},$$

$$I_4 = \frac{V_3 - V_2}{R_4} = 45 \text{ mA}, \quad I_5 = \frac{V_1 - V_3 + E_5}{R_5} = 45 \text{ mA}, \quad I_6 = \frac{V_3 - V_1}{R_6} = 20 \text{ mA} \quad \text{и}$$

$$I_1 = -I_2 = 5 \text{ mA}. \quad \text{Напон струјног генератора је} \quad U_7 = V_3 - V_2 = 9 \text{ V}.$$

Задатак се може решити и једноставније. Када је прекидач П отворен, у задатом колу само је један чвор уземљен (чвор 0). Стога у проводнику за уземљење нема струје (по првом Кирхофовом закону), па је, према слици 132.2,  $I_1 = -I_2$ . Проводник за уземљење се може прекинути, а да се струје и напони у колу не промене. Сада је, уместо чвора 0, за референтни чвор повољније узети неки други чвор, на пример, чвор 1. Једначине по методу потенцијала чворова гласе:

$$\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_{21} - \frac{1}{R_4}U_{31} = -I_{g7} + \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_1}{R_2},$$

$$-\frac{1}{R_4}U_{21} + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)U_{31} = I_{g7} + \frac{E_5}{R_5},$$

где су напони  $U_{21}$  и  $U_{31}$  једнаки потенцијалима чворова 2, односно 3 према новом референтном чвору (1). Из ових једначина је  $U_{21} = 8 \text{ V}$  и  $U_{31} = 17 \text{ V}$ , па је

$$I_1 = -I_2 = \frac{-U_{21} + E_1}{R_2} = -5 \text{ mA}, \quad I_3 = \frac{-U_{21} + E_3}{R_3} = -30 \text{ mA}, \quad I_4 = \frac{U_{31} - U_{21}}{R_4} = 45 \text{ mA},$$

$$I_5 = \frac{-U_{31} + E_5}{R_5} = 45 \text{ mA}, \quad I_6 = \frac{U_{31}}{R_6} = 20 \text{ mA}, \quad \text{и} \quad U_7 = U_{31} - U_{21} = 9 \text{ V}.$$

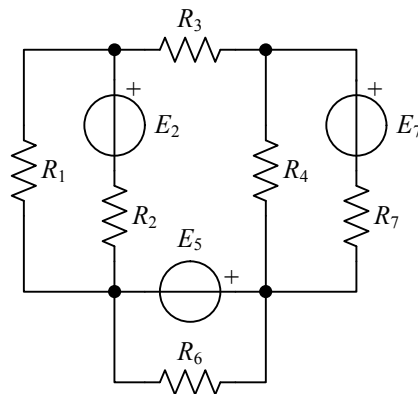


**133.** За коло приказано на слици 133.1 је  $E_2 = 25 \text{ V}$ ,  $E_5 = 10 \text{ V}$ ,  $E_7 = 40 \text{ V}$ ,  $R_1 = 300 \Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_4 = 260 \Omega$ ,  $R_6 = 500 \Omega$  и  $R_7 = 300 \Omega$ . Применом метода потенцијала чворова, израчунати снагу идеалног напонског генератора емс  $E_5$ .

РЕЗУЛТАТ

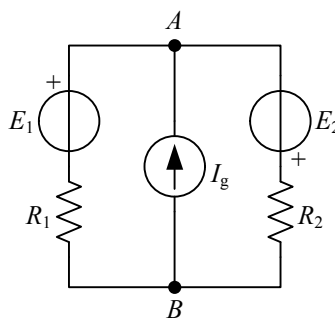
Тражена снага је  $P_{E_5} = 600 \text{ mW}$ .

Читаоцу се препоручује да задатак реши и методом контурних струја. По ком методу се брже долази до решења?



Слика 133.1.

**134.** За коло са слике 134.1 је  $E_1 = 25 \text{ V}$ ,  $E_2 = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$  и  $R_2 = 50 \Omega$ . Израчунати струју струјног генератора  $I_g$  тако да буде  $U_{AB} = 5 \text{ V}$ .



Слика 134.1.

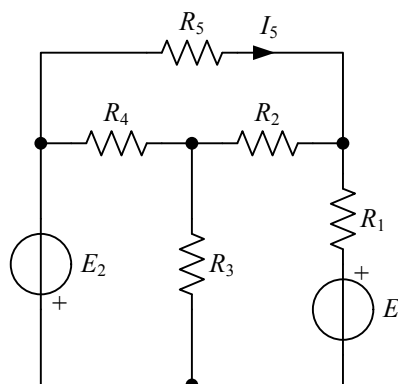
РЕШЕЊЕ

Ако се чвор  $B$  усвоји за референтни,  $U_{AB} = V_A$ . По методу потенцијала чворова формира се само једна једначина,  $\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_{AB} = \frac{E_1}{R_1} + I_g - \frac{E_2}{R_2}$ , одакле је  $I_g = -0,5 \text{ A}$ .

**135.** За коло сталне струје са слике 135.1 познато је  $E_1 = 9 \text{ V}$ ,  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $R_3 = 25 \Omega$ ,  $R_4 = 100 \Omega$ ,  $R_5 = 60 \Omega$  и  $I_5 = 175 \text{ mA}$ . Користећи се методом потенцијала чворова, израчунати емс  $E_2$ .

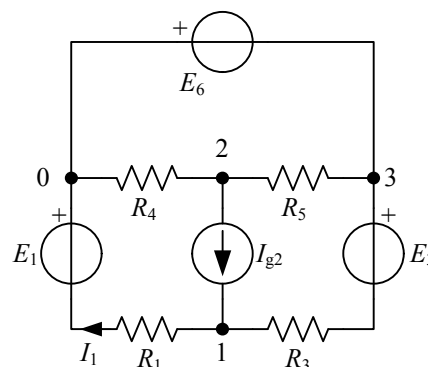
РЕЗУЛТАТ

Тражена електромоторна сила је  $E_2 = -20 \text{ V}$ .



Слика 135.1.

**136.** За коло са слике 136.1 је познато  $E_3 = 40 \text{ V}$ ,  $E_6 = 40 \text{ V}$ ,  $I_{g2} = 40 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 100 \Omega$  и  $R_5 = 500 \Omega$ . (а) Користећи се методом потенцијала чворова израчунати емс  $E_1$  тако да буде  $I_1 = 25 \text{ mA}$ . (б) Колика је, под тим условом, снага идеалног струјног генератора?



Слика 136.1.

РЕШЕЊЕ

(а) С обзиром на то да у колу постоји грана само са идеалним напонским генератором, референтни чвор је изабран као на слици 136.1 и означен са 0. При овој је  $V_1 = -E_1 + R_1 I_1$  и  $V_3 = -E_6$ . Једначине по методу потенцијала чворова су:

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) (-E_1 + R_1 I_1) + \frac{1}{R_3} E_6 = -\frac{E_1}{R_1} + I_{g2} - \frac{E_3}{R_3}, \quad (136.1)$$

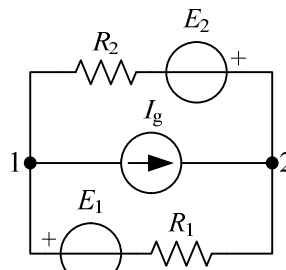
$$\left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_2 + \frac{1}{R_5} E_6 = -I_{g2}. \quad (136.2)$$

Из једначине (136.1) је  $E_1 = E_6 + E_3 - R_3 I_{g2} + (R_1 + R_3) I_1 = 70 \text{ V}$ .

(б) Из једначине (136.2) је  $V_2 = -\frac{R_4}{R_4 + R_5} (E_6 + R_5 I_{g2}) = -10 \text{ V}$ . Како је

$V_1 = -E_1 + R_1 I_1 = -20 \text{ V}$ , то је  $U_{12} = V_1 - V_2 = -10 \text{ V}$ , па је снага коју развија струјни генератор  $P_{I_{g2}} = U_{12} I_{g2} = -0,4 \text{ W} < 0$  (ради као пријемник).

**137.** У колу сталне струје приказаном на слици 137.1 је  $R_1 = R_2 = 400 \Omega$ ,  $I_g = 10 \text{ mA}$  и  $E_1 = 24 \text{ V}$ . Снаге прве и друге гране кола стоје у односу  $\frac{P_1}{P_2} = -\frac{5}{4}$ , а напон  $U_{12}$  је различит од нуле. Одредити снаге свих елемената кола и утврдити понашање идеалних напонских генератора.

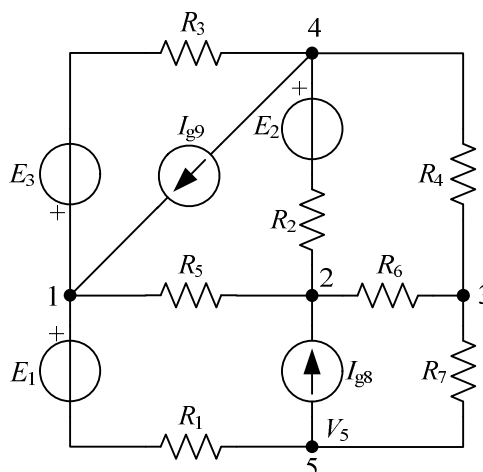


Слика 137.1.

РЕЗУЛТАТ

Емс другог генератора је  $E_2 = 12 \text{ V}$ . Снаге отпорника су  $P_{R_1} = 1000 \text{ mW}$  и  $P_{R_2} = 640 \text{ mW}$ , снаге идеалних напонских генератора су  $P_{E_1} = 1200 \text{ mW}$  (ради као генератор) и  $P_{E_2} = 480 \text{ mW}$  (ради као генератор), а снага идеалног струјног генератора је  $P_{I_g} = -40 \text{ mW}$  (ради као пријемник).

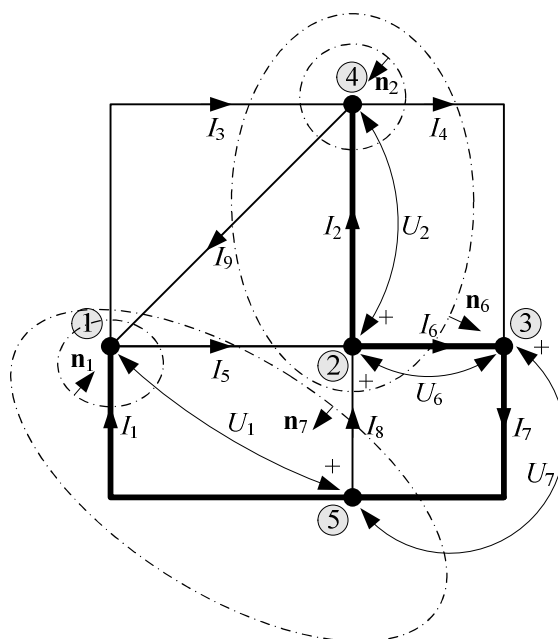
**\*\*\*138.** На слици 138.1 приказано је коло сталне струје за које је познато  $E_1 = 4 \text{ V}$ ,  $E_2 = 42 \text{ V}$ ,  $E_3 = 14 \text{ V}$ ,  $I_{g8} = 60 \text{ mA}$ ,  $I_{g9} = 22 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 400 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 400 \Omega$ ,  $R_5 = 300 \Omega$ ,  $R_6 = 1 \text{ k}\Omega$  и  $R_7 = 200 \Omega$ . (а) За дато коло нацртати граф, усвојити једно стабло и означити главне пресеке. (б) За усвојене пресеке, извести систем једначина по методу напона главних пресека. (в) Решити постављени систем једначина и израчунати напоне и струје свих грана кола.



Слика 138.1.

РЕШЕЊЕ

(а) На слици 138.2 приказан је граф кола. Изабрано стабло је означено дебелим линијама. Задато коло има  $n_{\xi} - 1 = 5 - 1 = 4$  гране стабла. Свакој од тих грана одговара један главни пресек, који сече ту грану стабла и неколико спојница. Главни пресеци су на слици 138.2 уцртани испрекиданим линијама. Оријентације пресека (ортови  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ ,  $\mathbf{n}_6$  и  $\mathbf{n}_7$ ) одређене су према одговарајућој грани стабла.



Слика 138.2.

(б) Референтни смерови напона грана стабла ( $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_6$  и  $U_7$ ) усаглашени су са оријентацијама тих грана. Напони свих осталих грана кола могу се изразити преко напона грана стабла. Стога напони грана стабла сачињавају потпуни скуп независних напона, као што контурне струје сачињавају потпуни скуп независних струја. Ти напони задовољавају систем једначина који се изводи на сличан начин као систем једначина по методу потенцијала чворова.

Једначине по првом Кирхофовом закону за изабране главне пресеке су, према слици 138.2,

$$\text{пресек } \mathbf{n}_1 : I_1 - I_5 + I_9 - I_3 = 0, \quad (138.1)$$

$$\text{пресек } \mathbf{n}_2 : I_3 - I_4 + I_2 - I_9 = 0, \quad (138.2)$$

$$\text{пресек } \mathbf{n}_6 : -I_3 + I_4 + I_6 - I_5 - I_8 + I_9 = 0, \quad (138.3)$$

$$\text{пресек } \mathbf{n}_7 : -I_3 + I_9 - I_5 - I_8 + I_7 = 0. \quad (138.4)$$

Релације између напона и струја грана анализираног кола су  $I_1 = \frac{U_1 + E_1}{R_1}$ ,

$$I_2 = \frac{U_2 + E_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U_{14} - E_3}{R_3} = \frac{U_2 - U_6 - U_7 - U_1 - E_3}{R_3}, \quad I_4 = \frac{U_{43}}{R_4} = \frac{U_6 - U_2}{R_4},$$

$$I_5 = \frac{U_{12}}{R_5} = \frac{-U_6 - U_7 - U_1}{R_5}, \quad I_6 = \frac{U_6}{R_6}, \quad I_7 = \frac{U_7}{R_7}, \quad I_8 = I_{g8} \text{ и } I_9 = I_{g9}.$$

Заменом у једначине (138.1)-(138.4) и сређивањем добија се систем једначина

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)U_1 - \frac{1}{R_3}U_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)U_6 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)U_7 =$$

$$= -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3} - I_{g9} \quad (138.5)$$

$$-\frac{1}{R_3}U_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_2 - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_6 - \frac{1}{R_3}U_7 =$$

$$= -\frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + I_{g9} \quad (138.6)$$

$$\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)U_1 - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)U_6 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)U_7 =$$

$$= -\frac{E_3}{R_3} + I_{g8} - I_{g9} \quad (138.7)$$

$$\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)U_1 - \frac{1}{R_3}U_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)U_6 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7}\right)U_7 =$$

$$= -\frac{E_3}{R_3} + I_{g8} - I_{g9} \quad (138.8)$$

Овај систем се може представити у општем облику

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 + G_{16}U_6 + G_{17}U_7 = I_1, \quad (138.9)$$

$$G_{21}U_1 + G_{22}U_2 + G_{26}U_6 + G_{27}U_7 = I_{II}, \quad (138.10)$$

$$G_{61}U_1 + G_{62}U_2 + G_{66}U_6 + G_{67}U_7 = I_{VI}, \quad (138.11)$$

$$G_{71}U_1 + G_{72}U_2 + G_{76}U_6 + G_{77}U_7 = I_{VII}. \quad (138.12)$$

У једначинама (138.9)-(138.12), коефицијент  $G_{kk}$  је сопствена проводност пресека, увек је позитивна, а једнака је збиру проводности грана пресечених посматраним пресеком. Коефицијент  $G_{kj} = G_{jk}$ ,  $k \neq j$ , је међусобна проводност, има алгебарско значење и једнака је збиру проводности грана пресечених пресецима  $k$  и  $j$ , и то са предзнаком „+” ако се оријентације пресека код посматране гране поклапају, а са предзнаком „-” ако су код посматране гране оријентације пресека супротне. Коефицијенти  $I_1$ ,  $I_{II}$ , ... су сопствене струје пресека. Сопствена струја пресека је алгебарски збир чланова облика  $\frac{E_k}{R_k}$  и  $I_{gk}$  за гране пресечене посматраним пресеком. Предзнак члана је „+” ако је референтни смер генератора супротан оријентацији пресека, а „-” ако су оријентације исте.

(в) Заменом бројних вредности познатих величина у SI систему, систем једначина (138.5)-(138.8) постаје

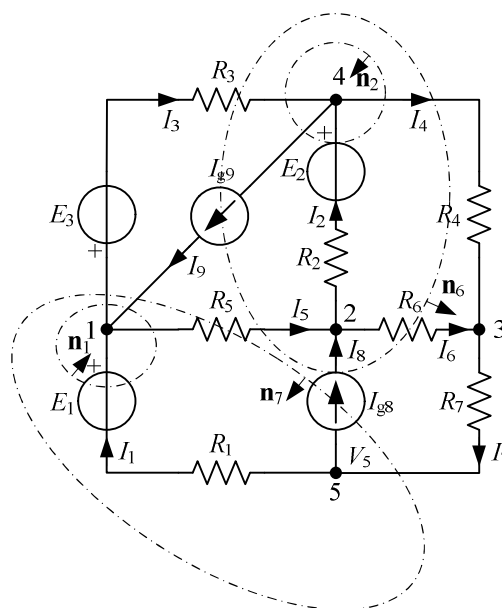
$$41 U_1 - 6 U_2 + 26 U_6 + 26 U_7 = -276,$$

$$-2 U_1 + 17 U_2 - 7 U_6 - 2 U_7 = -348,$$

$$26 U_1 - 21 U_2 + 47 U_6 + 26 U_7 = 144,$$

$$26 U_1 - 6 U_2 + 26 U_6 + 56 U_7 = 144.$$

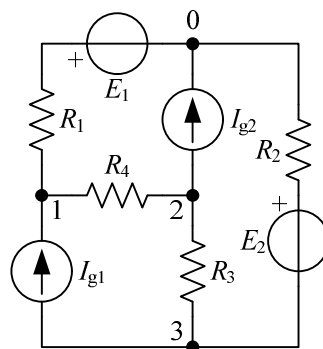
Решења овог система су  $U_1 = -12 \text{ V}$ ,  $U_2 = -23 \text{ V}$ ,  $U_6 = -5 \text{ V}$  и  $U_7 = 8 \text{ V}$ .



Слика 138.3.

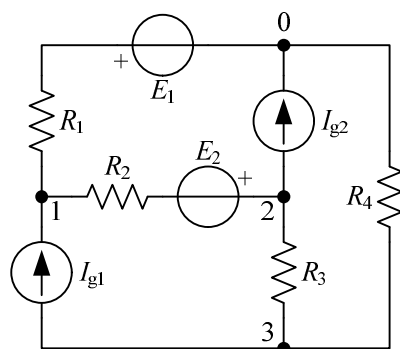
Напон гране кола се одређује на основу оријентације графа као алгебарски збир напона главних пресека који пресецају грану са предзнаком „+“ ако се оријентација гране и посматраног пресека поклапају, а са предзнаком „-“ уколико су оријентације гране и посматраног пресека супротни.

Према ознакама на слици 138.3, напони грана кола су  $U_{12} = -U_1 - U_7 - U_6 = 9 \text{ V}$ ,  $U_{14} = -U_1 - U_7 - U_6 + U_2 = -14 \text{ V}$ ,  $U_{43} = -U_2 + U_6 = 18 \text{ V}$ ,  $U_{52} = -U_7 - U_6 = -3 \text{ V}$ ,  $U_{15} = -U_1 = 12 \text{ V}$ ,  $U_{35} = +U_7 = 8 \text{ V}$ ,  $U_{23} = +U_6 = -5 \text{ V}$  и  $U_{42} = -U_2 = 23 \text{ V}$ . Струје грана су  $I_1 = -20 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 95 \text{ mA}$ ,  $I_3 = -28 \text{ mA}$ ,  $I_4 = 45 \text{ mA}$ ,  $I_5 = 30 \text{ mA}$ ,  $I_6 = -5 \text{ mA}$  и  $I_7 = 40 \text{ mA}$ .

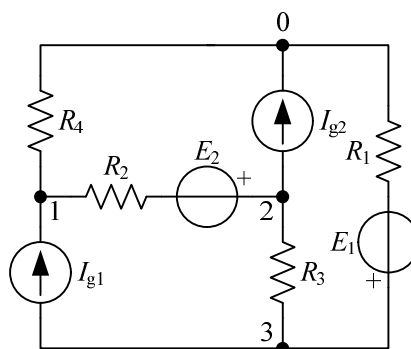


Слика 139.1.

**\*\*139.** Написати једначине по методу потенцијала чворова за коло приказано на слици (а) 139.1, (б) 139.2 и (в) 139.3, узимајући чвор 0 за референтни. У шта прелазе те једначине када  $R_1, R_2 \rightarrow 0$ ?



Слика 139.2.



Слика 139.3.

РЕШЕЊЕ

(а) Једначине по методу потенцијала чворова за коло са слике 139.1 гласе

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) V_1 - \frac{1}{R_4} V_2 = \frac{E_1}{R_1} + I_{g1}, \quad (139.1)$$

$$-\frac{1}{R_4} V_1 + \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) V_2 - \frac{1}{R_3} V_3 = -I_{g2}, \quad (139.2)$$

$$-\frac{1}{R_3} V_2 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_3 = -\frac{E_2}{R_2} - I_{g1}. \quad (139.3)$$

Када  $R_1 \rightarrow 0$ , једначина (139.1) постаје сингуларна. Међутим, пре узимања лимеса  $R_1 \rightarrow 0$ , једначина (139.1) се може помножити са  $R_1$  ( $R_1 \neq 0$ ), чиме се добија

$$\left( 1 + \frac{R_1}{R_4} \right) V_1 - \frac{R_1}{R_4} V_2 = E_1 + R_1 I_{g1}. \quad (139.4)$$

Ова једначина нема сингуларитет када  $R_1 \rightarrow 0$ , па се из ње добија, када  $R_1 \rightarrow 0$ ,

$$V_1 = E_1, \quad (139.5)$$

Слично томе, множење (139.3) са  $R_2$  даје, у лимесу када  $R_2 \rightarrow 0$ ,

$$V_3 = -E_2. \quad (139.6)$$

При томе, коло са слике 139.1 прелази у коло са слике 139.4, у коме су два идеална напонска генератора везана за референтни чвор. Једначине (139.2), (139.5) и (139.6) су једначине по методу потенцијала чворова за коло са слике 139.4, које смо могли написати и без извођења.

(б) За коло са слике 139.2 једначине гласе

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_1 - \frac{1}{R_2} V_2 = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + I_{g1}, \quad (139.7)$$

$$-\frac{1}{R_2}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_2 - \frac{1}{R_3}V_3 = \frac{E_2}{R_2} - I_{g2}, \quad (139.8)$$

$$-\frac{1}{R_3}V_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_3 = -I_{g1}. \quad (139.9)$$

Једначина (139.8), после множења са  $R_2$ , даје, када  $R_2 \rightarrow 0$ ,

$$-V_1 + V_2 = E_2. \quad (139.10)$$

Ако се посматра једначина (139.7) сама за себе, не може се закључити шта се дешава када  $R_1, R_2 \rightarrow 0$ . Међутим, ако се најпре из (139.7) и (139.10) елиминише потенцијал  $V_2$ , потиру се чланови који садрже разломак  $\frac{1}{R_2}$ . После множења са  $R_1$  и у лимесу када

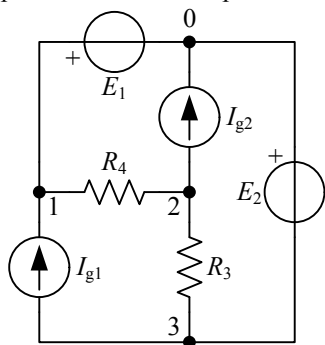
$R_1 \rightarrow 0$ , добија се

$$V_1 = E_1. \quad (139.11)$$

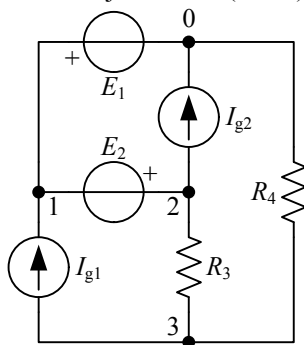
Једначине (139.9), (139.10) и (139.11) чине систем једначина за коло са слике 139.5, за које је, очигледно,  $V_1 = E_2$  и  $V_2 = E_1 + E_2$ .

Описани поступак се може генерализовати на кола у којима су гране са идеалним напонским генераторима надовезане једна на другу<sup>29</sup>.

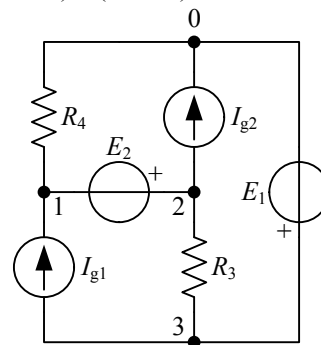
Читаоцу се препоручује да за коло са слике 139.5 напише једначине по методу потенцијала чворова узимајући чвор 1 за референтни и да покаже да се добијају иста решења за напоне грана као из система једначина (139.9), (139.10) и (139.11).



Слика 139.4.



Слика 139.5.



Слика 139.6.

(в) Једначине по методу потенцијала чворова за коло са слике 139.3 су

$$\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2}\right)V_1 - \frac{1}{R_2}V_2 = -\frac{E_2}{R_2} + I_{g1}, \quad (139.12)$$

<sup>29</sup> Гране са идеалним напонским генераторима не смеју образовати контуру, јер је таква веза нерегуларна. Веза је неодређена ако је алгебарски збир емс дуж контуре једнак нули.



$$-\frac{1}{R_2}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_2 - \frac{1}{R_3}V_3 = \frac{E_2}{R_2} - I_{g2}, \quad (139.13)$$

$$-\frac{1}{R_3}V_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)V_3 = \frac{E_1}{R_1} - I_{g1}. \quad (139.14)$$

Када  $R_1, R_2 \rightarrow 0$ , коло са слике 139.3 прелази у коло са слике 139.6. За коло са слике 139.6 не може се написати класичан систем једначина по методу потенцијала чворова јер гране које садрже идеалне напонске генераторе нису везане за исти чвор.

Аналогним поступком као за коло са слике 139.1, из (139.14) се добија, када  $R_1 \rightarrow 0$ ,

$$V_3 = E_1. \quad (139.15)$$

Када  $R_2 \rightarrow 0$ , из (139.12) се добија

$$V_1 - V_2 = -E_2. \quad (139.16)$$

Исти резултат следи и из (139.13), па се тиме не добија довољан број једначина ( $n_\varepsilon - 1 = 3$ ) да би се проблем решио. Међутим, ако се једначине (139.12) и (139.13) саберу, добија се

$$\frac{1}{R_4}V_1 + \frac{1}{R_3}V_2 - \frac{1}{R_3}V_3 = I_{g1} - I_{g2}. \quad (139.17)$$

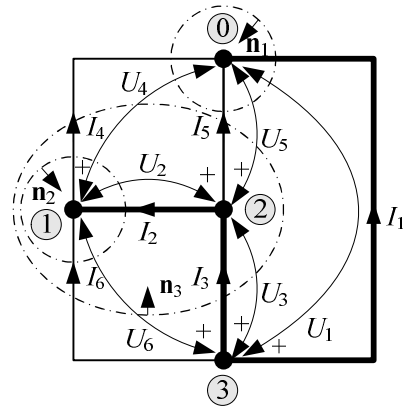
Систем једначина за коло са слике 139.6 чине једначине (139.15), (139.16) и (139.17).

\*\*\* Коло са слике 139.6 може се решити и методом напона главних пресека, узимајући да гране са идеалним напонским генераторима припадају стаблу, као на слици 139.7. На тој слици су означене усвојене оријентације грана. Референтни смерови напона усаглашени су са тим оријентацијама. На слици су означени и основни пресеци, оријентисани као одговарајуће гране стабла. Сопствене проводности пресека 1 и 2 су бесконачне (јер у одговарајућој грани стабла постоји само идеални напонски генератор), па се једначине за те пресеке не могу писати у облику (138.9)-(138.12). Међутим, напони грана стабла су познати (и једнаки одговарајућој електромоторној сили), па систем једначина по методу напона главних пресека гласи

$$U_1 = E_1. \quad (139.18)$$

$$U_2 = E_2, \quad (139.19)$$

$$-\frac{1}{R_4}U_1 + \frac{1}{R_4}U_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_3 = I_{g1} - I_{g2}. \quad (139.20)$$

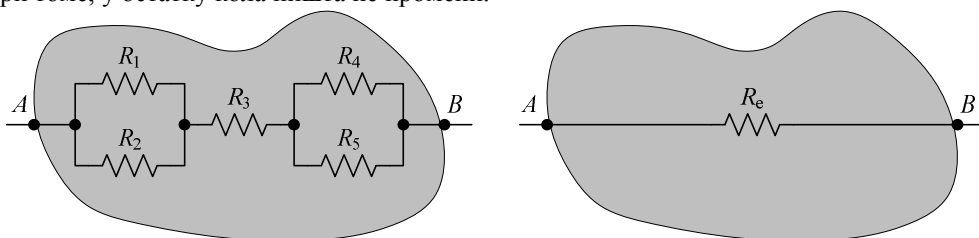


Слика 139.7.

Напоменимо да се у пракси за решавање кола као што је оно на слици 139.6 највише употребљава модификовани метод потенцијала чворова, о коме ће бити речи у одељку о компензацији.

### 3.4. Трансфигурације мрежа отпорника

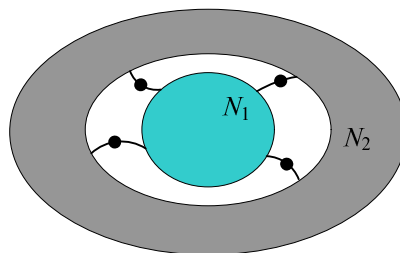
**140.** На слици 140.1 приказан је део електричног кола између тачака  $A$  и  $B$  за који је познато  $R_1 = 100 \, \Omega$ ,  $R_2 = 150 \, \Omega$ ,  $R_3 = 65 \, \Omega$ ,  $R_4 = 100 \, \Omega$  и  $R_5 = 300 \, \Omega$ . Израчунати отпорност  $R_e$  отпорника којим се може заменити приказана група отпорника, а да се, при томе, у остатку кола ништа не промени.



Слика 140.1.

#### РЕШЕЊЕ

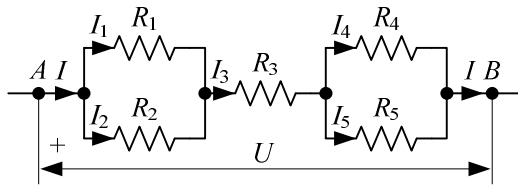
Под трансфигурацијом дела кола подразумева се измена састава у једном делу кола, при чему се у нетрансфигурисаном делу кола ништа не мења (струје и потенцијали после трансфигурације исти су као што су били пре трансфигурације). На слици 140.2 је са  $N_1$  означен трансфигурисани, а са  $N_2$  нетрансфигурисани део кола.



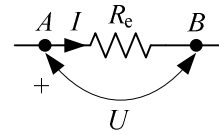
Слика 140.2.

Посматрајући трансфигурисани део кола ( $N_1$ ) као мрежу са два или више крајева (односно са једним или више приступа), при трансфигурацији се релације између напона и струја на приступима те мреже не мењају, што представља основни услов трансфигурације.

Према ознакама са слике 140.3 је  $U = R_4 I_4 + R_3 I_3 + R_1 I_1$ ,  $I = I_1 + I_2$ ,  $I = I_4 + I_5$ ,  $I = I_3$ ,  $R_1 I_1 = R_2 I_2$  и  $R_4 I_4 = R_5 I_5$ . Одавде је  $U = \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right) I$ . За еквивалентни отпорник (слика 140.4) важи  $U = R_e I$ , па је трансфигурација валидна ако је  $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 60 + 65 + 75 = 200 \, \Omega$ .



Слика 140.3.

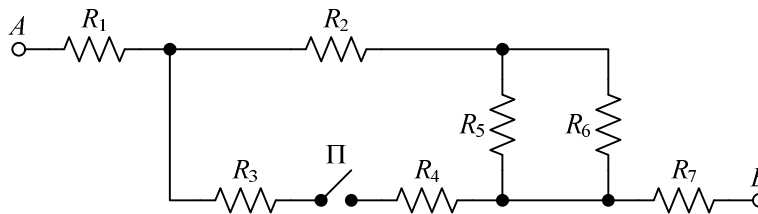


Слика 140.4.

Поступак одређивања еквивалентне отпорности се, осим непосредне примене основног услова трансфигурације, често може спровести и уочавањем карактеристичних веза и применом готових образаца на трансфигурацију тих веза. У задатом случају (слика 140.3) запажају се редне и паралелне везе отпорника, па се за ту мешовиту везу симболички може писати  $R_e = R_1 \parallel R_2 \oplus R_3 \oplus R_4 \parallel R_5$ , где симбол  $\parallel$  означава паралелну везу, а  $\oplus$  редну везу. При формирању израза оператор  $\parallel$  има предност над оператором  $\oplus$ , па на основу образаца за трансфигурацију редне и паралелне везе следи

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 200 \, \Omega.$$

**141.** Познате су отпорности отпорника у мрежи приказаној на слици 141.1:  $R_1 = 60 \, \Omega$ ,  $R_2 = 160 \, \Omega$ ,  $R_3 = 20 \, \Omega$ ,  $R_4 = 30 \, \Omega$ ,  $R_5 = 60 \, \Omega$ ,  $R_6 = 120 \, \Omega$  и  $R_7 = 50 \, \Omega$ . Израчунати отпорност  $R_{AB}$  еквивалентног отпорника када је прекидач П (а) затворен и (б) отворен.



Слика 141.1.

РЕШЕЊЕ

Еквивалентна (улазна) отпорност се може одредити постепеним трансфигурацијама редних и паралелних веза.

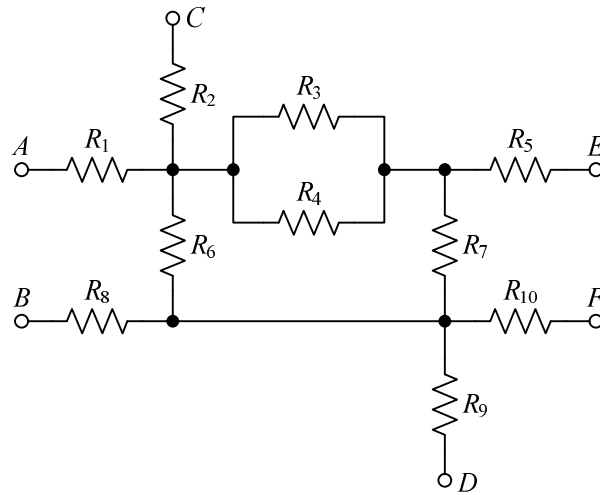
(а) При затвореном прекидачу П је  $R_{AB}^z = R_1 \oplus (R_2 \oplus R_5 \parallel R_6) \parallel (R_3 \oplus R_4) \oplus R_7$ ,

$$\text{односно } R_{AB}^z = R_1 + \frac{\left( R_2 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} \right) (R_3 + R_4)}{R_2 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} + R_3 + R_4} + R_7 = 150 \, \Omega.$$

(б) Када је прекидач П отворен, тада је  $R_{AB}^o = R_1 \oplus R_2 \oplus R_5 \parallel R_6 \oplus R_7$ , односно

$$R_{AB}^o = R_1 + R_2 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} + R_7 = 310 \, \Omega.$$

**142.** На слици 142.1 приказана је мрежа отпорника са шест прикључака. Познате су отпорности  $R_k = R$ ,  $k = 1, 2, \dots, 10$ . Одредити улазну отпорност између свих парова крајева приказане мреже, сматрајући да су, при томе, остали крајеви у празном ходу.



Слика 142.1.

РЕШЕЊЕ

За задату мрежу треба одредити  $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$  улазних отпорности. Посматрајући мрежу, закључује се да се еквивалентне отпорности могу одредити трансформацијама редних и паралелних веза.

$$1) R_{AB} = R_1 \oplus R_6 \parallel (R_3 \parallel R_4 \oplus R_7) \oplus R_8 = R_1 + \frac{R_6 \left( \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_7 \right)}{R_6 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_7} + R_8$$

$$= R + \frac{R \left( \frac{R}{2} + R \right)}{R + \frac{R}{2} + R} + R = \frac{13}{5} R$$

$$2) R_{AC} = R_1 \oplus R_2 = 2R,$$

$$3) R_{AD} = R_1 \oplus R_6 \parallel (R_3 \parallel R_4 \oplus R_7) \oplus R_9 = \frac{13}{5} R,$$

$$4) R_{AE} = R_1 \oplus (R_6 \oplus R_7) \parallel (R_3 \parallel R_4) \oplus R_5 = \frac{12}{5} R,$$

$$5) R_{AF} = R_1 \oplus R_6 \parallel (R_3 \parallel R_4 \oplus R_7) \oplus R_{10} = \frac{13}{5} R,$$

$$6) R_{BC} = R_8 \oplus R_6 \parallel (R_3 \parallel R_4 \oplus R_7) \oplus R_2 = \frac{13}{5} R,$$

$$7) R_{BD} = R_8 \oplus R_9 = 2R,$$

$$8) R_{BE} = R_8 \oplus R_7 \parallel (R_6 \oplus R_3 \parallel R_4) \oplus R_5 = \frac{13}{5} R,$$

$$9) R_{BF} = R_8 \oplus R_{10} = 2R,$$

$$10) R_{CD} = R_2 \oplus R_6 \parallel (R_3 \parallel R_4 \oplus R_7) \oplus R_9 = \frac{13}{5} R,$$

$$11) R_{CE} = R_2 \oplus (R_6 \oplus R_7) \parallel (R_3 \parallel R_4) \oplus R_5 = \frac{12}{5} R,$$

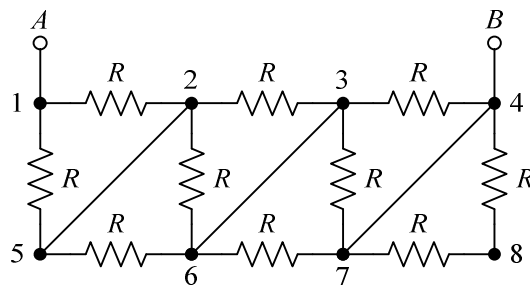
$$12) R_{CF} = R_2 \oplus R_6 \parallel (R_3 \parallel R_4 \oplus R_7) \oplus R_{10} = \frac{13}{5} R,$$

$$13) R_{DE} = R_9 \oplus R_7 \parallel (R_6 \oplus R_3 \parallel R_4) \oplus R_5 = \frac{13}{5} R,$$

$$14) R_{DF} = R_9 \oplus R_{10} = 2R,$$

$$15) R_{EF} = R_5 \oplus R_7 \parallel (R_6 \oplus R_3 \parallel R_4) \oplus R_{10} = \frac{13}{5} R.$$

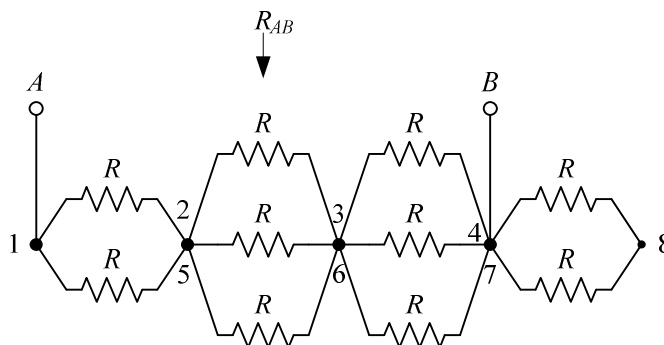
143. Израчунати еквивалентну отпорност мреже отпорника са слике 143.1 за коју је  $R = 30 \Omega$ .



Слика 143.1.

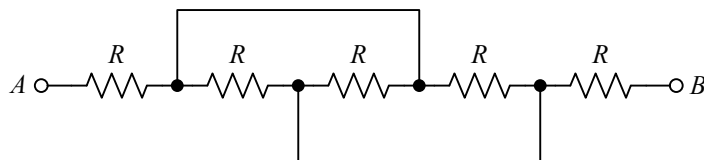
РЕШЕЊЕ

Задата мрежа се може нацртати као на слици 143.2, па је

$$R_{AB} = R \parallel R \oplus R \parallel R \parallel R \oplus R \parallel R \parallel R = \frac{R}{2} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = \frac{7}{6} R = 35 \Omega.$$


Слика 143.2.

144. Одредити еквивалентну отпорност мреже приказане на слици 144.1.

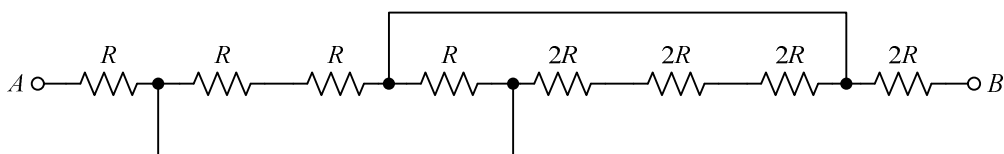


Слика 144.1.

РЕЗУЛТАТ

Еквивалентна отпорност је  $R_{AB} = \frac{7}{3} R$ .

145. Израчунати еквивалентну отпорност мреже приказане на слици 145.1 ако је  $R = 2,5 \Omega$ .

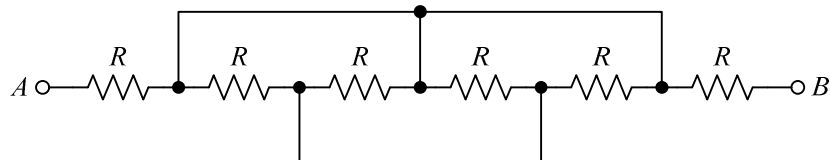


Слика 145.1.

РЕЗУЛТАТ

Еквивалентна отпорност је  $R_{AB} = \frac{18}{5} R = 9 \Omega$ .

146. Одредити еквивалентну отпорност мреже приказане на слици 146.1.

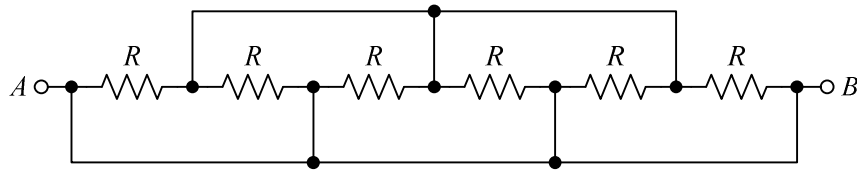


Слика 146.1.

РЕЗУЛТАТ

Еквивалентна отпорност је  $R_{AB} = 2R$ .

147. Одредити еквивалентну отпорност мреже приказане на слици 147.1.

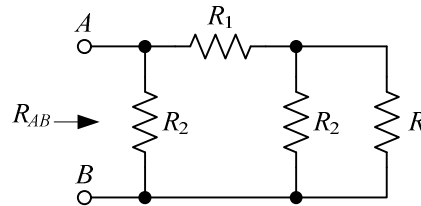


Слика 147.1.

РЕЗУЛТАТ

Еквивалентна отпорност је  $R_{AB} = 0$ .

**148.** У мрежи на слици 148.1 познате су отпорности  $R_1$  и  $R_2$ . Одредити колика треба да буде отпорност  $R$  тако да улазна отпорност мреже буде  $R_{AB} = R$ .



Слика 148.1.

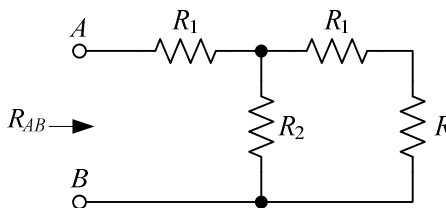
РЕШЕЊЕ

Улазна проводност задате мреже је  $G_{AB} = G_2 + \frac{G_1(G_2 + G)}{G_1 + G_2 + G}$ . Из постављеног услова

је  $G_{AB} = G = \frac{1}{R}$ , што даје  $G = G_2 + \frac{G_1(G_2 + G)}{G_1 + G_2 + G}$ , одакле је  $G = G_2 \sqrt{1 + 2 \frac{G_1}{G_2}}$ .

Изражавајући проводности преко отпорности ( $G_k = \frac{1}{R_k}$ ), добија се  $R = \frac{R_2}{\sqrt{1 + 2 \frac{R_2}{R_1}}}$ .

**149.** У мрежи на слици 149.1 познате су отпорности  $R_1$  и  $R_2$ . Одредити отпорност  $R$  тако да улазна отпорност мреже буде  $R_{AB} = R$ .



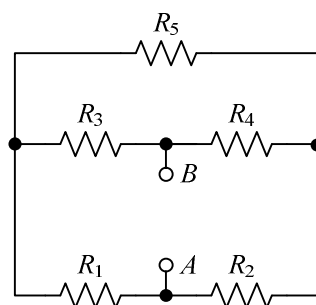
Слика 149.1.

РЕЗУЛТАТ

Тражена отпорност је

$$R = R_1 \sqrt{1 + 2 \frac{R_2}{R_1}}.$$

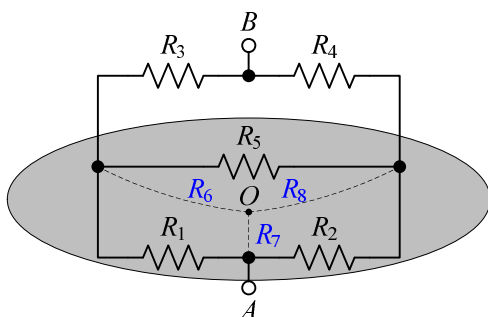
**150.** За мрежу отпорника са слике 150.1 познато је  $R_1 = 70 \, \Omega$ ,  $R_2 = 35 \, \Omega$ ,  $R_3 = 60 \, \Omega$ ,  $R_4 = 80 \, \Omega$  и  $R_5 = 140 \, \Omega$ . Израчунати еквивалентну отпорност између тачака  $A$  и  $B$ .



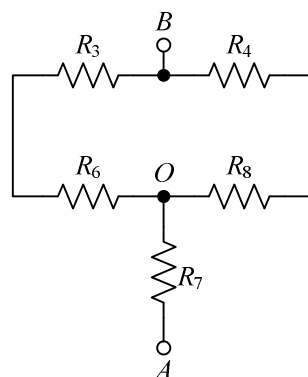
Слика 150.1.

РЕШЕЊЕ

Мрежа са слике 150.1 је неуравнотежени мост. У једној дијагонали моста је отпорник  $R_5$ , а прикључци мреже су у другој дијагонали. У задатој мрежи може се запазити троугао који чине отпорници  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_5$  (слика 150.2). Троугао се може трансфигурисати у трокраку звезду. Отпорности грана звезде су  $R_6 = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} = 40 \, \Omega$ ,  $R_7 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_5} = 10 \, \Omega$  и  $R_8 = \frac{R_2 R_5}{R_1 + R_2 + R_5} = 20 \, \Omega$ . Тиме се добија редно-паралелна веза приказана на слици 150.3. Еквивалентна отпорност те везе је  $R_{AB} = R_7 \oplus (R_6 \oplus R_3) \parallel (R_8 \oplus R_4) = 60 \, \Omega$ .



Слика 150.2.

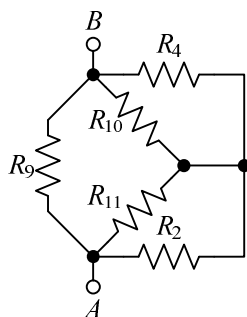


Слика 150.3.

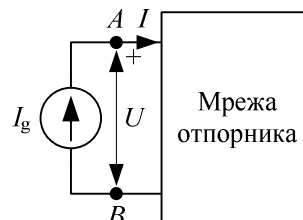
Алтернативно, у мрежи са слике 150.1 може се уочити звезда коју чине отпорници  $R_1$ ,  $R_3$  и  $R_5$  и та звезда трансфигурисати у троугао. Отпорности грана троугла су  $R_9 = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_5} = 160 \, \Omega$ ,  $R_{10} = R_3 + R_5 + \frac{R_3 R_5}{R_1} = 320 \, \Omega$  и  $R_{11} = R_1 + R_5 + \frac{R_1 R_5}{R_3} = \frac{1120}{3} \, \Omega$ . Слика 150.4 приказује задату мрежу после трансфигурације. Еквивалентна отпорност редно-паралелне везе са слике 150.4 је  $R_{AB} = R_9 \parallel (R_4 \parallel R_{10} \oplus R_2 \parallel R_{11}) = 60 \, \Omega$ .



Из претходног се може запазити да трансфигурација троугао  $\rightarrow$  звезда смањује број контура, а трансфигурација звезда  $\rightarrow$  троугао повећава број паралелно везаних грана.



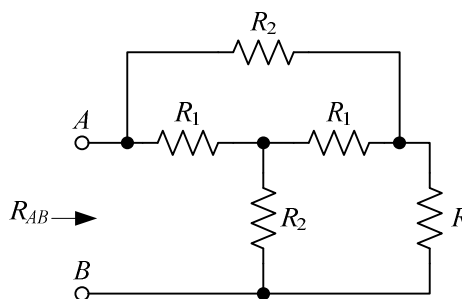
Слика 150.4.



Слика 150.5.

Читаоцу се препоручује да задатак реши трансфигурацијом троугла који чине отпорници  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$ , односно трансфигурацијом звезде коју чине отпорници  $R_2$ ,  $R_4$  и  $R_5$ .

Читаоцу се такође препоручује да задатак реши тако да задату мрежу побуди генератором (напонским или струјним) између тачака  $A$  и  $B$ , реши коло, па улазну отпорност одреди из Омовог закона. Као пример, на слици 150.5 је приказана побуда идеалним струјним генератором. Улазна отпорност мреже је  $R_{AB} = \frac{U}{I}$ , где је  $U = U_{AB}$  и  $I = I_g$ .



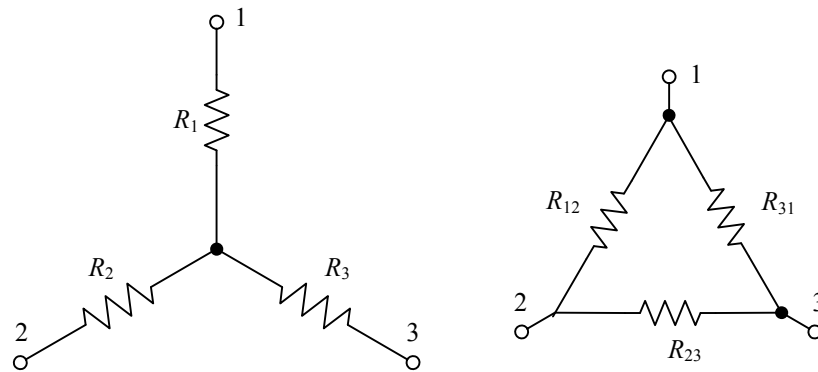
Слика 151.1.

**\*151.** За мрежу на слици 151.1 познате су отпорности  $R_1$  и  $R_2$ . Одредити отпорност  $R$  тако да улазна отпорност мреже буде  $R_{AB} = R$ .

#### РЕЗУЛТАТ

$$\text{Тражена отпорност је } R = R_1 \sqrt{\frac{1 + 2 \frac{R_2}{R_1}}{1 + 2 \frac{R_1}{R_2}}} = R_2 \sqrt{\frac{2 + \frac{R_1}{R_2}}{2 + \frac{R_2}{R_1}}} = \sqrt{R_1 R_2 \frac{R_1 + 2 R_2}{R_2 + 2 R_1}}.$$

**152.** Полазећи од израза за отпорности при трансфигурацији трокраке звезде у троугао (слика 152.1), и обрнуто, извести одговарајуће изразе за проводности.



Слика 152.1.

РЕШЕЊЕ

Отпорности грана троугла који је еквивалентан трокракој звезди са слике 152.1 су  $R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$ ,  $R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$  и  $R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$ . Отпорности се могу изразити преко проводности,  $R_1 = \frac{1}{G_1}$ ,  $R_2 = \frac{1}{G_2}$ ,  $R_3 = \frac{1}{G_3}$ ,  $R_{12} = \frac{1}{G_{12}}$ ,  $R_{23} = \frac{1}{G_{23}}$  и  $R_{31} = \frac{1}{G_{31}}$ . Заменом у израз за  $R_{12}$  добија се  $\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{G_3}{G_1 G_2} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 G_2}$ , одакле је  $G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$ . На исти начин се добијају проводности и друге две гране троугла,  $G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$  и  $G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$ .

Отпорности грана звезде која је еквивалентна троуглу са слике 152.1 су  $R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$ ,  $R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$  и  $R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$ . Изражавањем отпорности преко проводности и заменом у израз за  $R_1$  добија се

$$\frac{1}{G_1} = \frac{\frac{1}{G_{12}} \frac{1}{G_{31}}}{\frac{1}{G_{12}} + \frac{1}{G_{23}} + \frac{1}{G_{31}}} = \frac{G_{23}}{G_{23} G_{31} + G_{31} G_{12} + G_{12} G_{23}}, \quad \text{одакле} \quad \text{је}$$

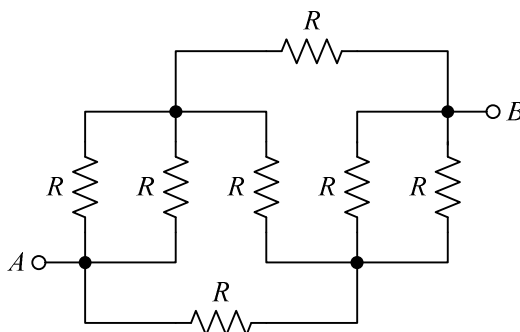
$$G_1 = \frac{G_{23} G_{31} + G_{31} G_{12} + G_{12} G_{23}}{G_{23}} = G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12} G_{31}}{G_{23}}.$$

$$\text{преостала два израза, } G_2 = G_{23} + G_{12} + \frac{G_{23} G_{12}}{G_{31}} \text{ и } G_3 = G_{31} + G_{23} + \frac{G_{31} G_{23}}{G_{12}}.$$

**153.** Израчунати еквивалентну отпорност мреже приказане на слици 153.1 ако је  $R = 56 \Omega$ .

РЕЗУЛТАТ

Еквивалентна отпорност је  $R_{AB} = 40 \Omega$ .



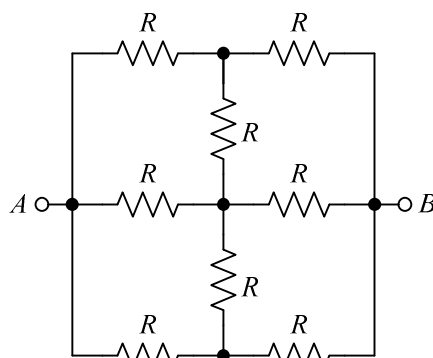
Слика 153.1.

**154.** За мрежу отпорника са слике 154.1 је  $R = 30 \Omega$ . Израчунати отпорност  $R_{AB}$ .

РЕЗУЛТАТ

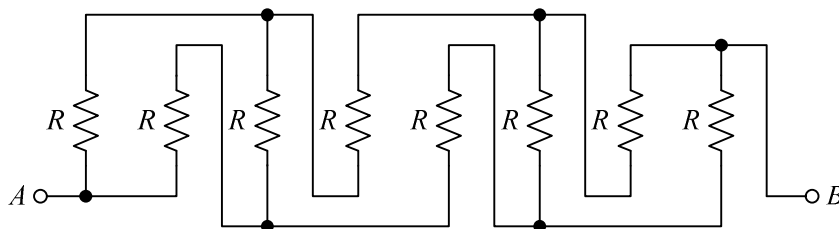
Тражена отпорност је  $R_{AB} = \frac{2}{3}R = 20 \Omega$ .

Напомена. Уместо трансфигурацијама, задатак се може лакше решити користећи се симетријом.



Слика 154.1.

**155.** Израчунати еквивалентну отпорност мреже приказане на слици 155.1 ако је  $R = 10 \Omega$ .



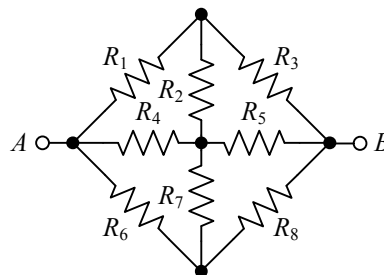
Слика 155.1.

РЕЗУЛТАТ

Еквивалентна отпорност је  $R_{AB} = 3R/2 = 15 \Omega$ .

Напомена. Уместо трансфигурацијама, задатак се може лакше решити користећи се симетријом или уочавајући да су мостови у равнотежи.

**156.** За мрежу отпорника приказану на слици 156.1 је  $R_1 = 100 \, \Omega$ ,  $R_2 = 120 \, \Omega$ ,  $R_3 = 56 \, \Omega$ ,  $R_4 = 270 \, \Omega$ ,  $R_5 = 220 \, \Omega$ ,  $R_6 = 330 \, \Omega$ ,  $R_7 = 68 \, \Omega$  и  $R_8 = 150 \, \Omega$ . Израчунати еквивалентну отпорност ове мреже.

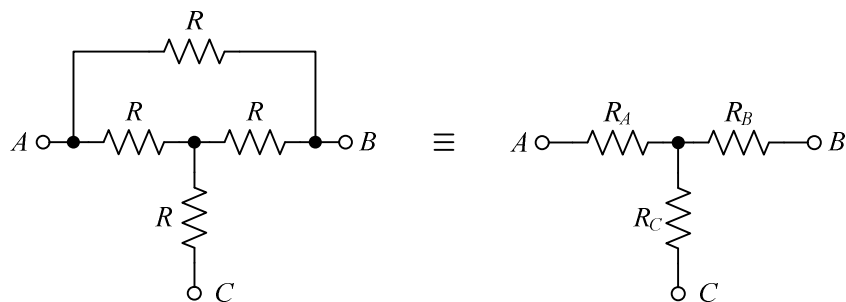


Слика 156.1.

РЕЗУЛТАТ

Еквивалентна отпорност је  $R_{AB} \approx 94,3 \, \Omega$ .

**157.** Одредити отпорности звезде еквивалентне мрежи отпорника приказаној на слици 157.1.

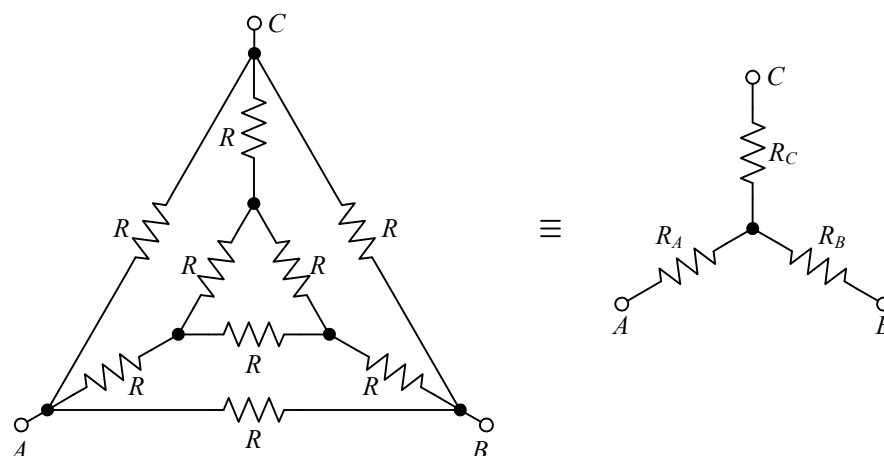


Слика 157.1.

РЕЗУЛТАТ

Отпорности грана еквивалентне звезде су  $R_A = R_B = R/3$  и  $R_C = 4R/3$ .

**158.** За мрежу отпорника отпорности  $R = 60 \, \Omega$  са слике 158.1, израчунати отпорности грана еквивалентне трокраке звезде.

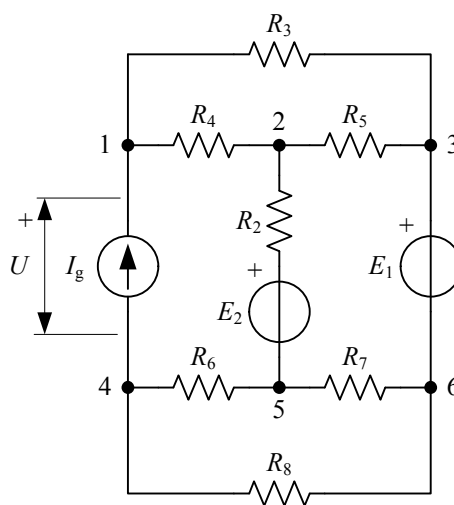


Слика 158.1.

РЕЗУЛТАТ

Тражене отпорности кракова звезде су  $R_A = R_B = R_C = \frac{4}{15}R = 16\ \Omega$ .

**159.** За коло сталне струје са слике 159.1 познато је  $E_1 = 12\text{ V}$ ,  $E_2 = 18\text{ V}$ ,  $R_2 = 20\ \Omega$ ,  $R_3 = R_8 = 140\ \Omega$ ,  $R_4 = R_7 = 70\ \Omega$  и  $R_5 = R_6 = 280\ \Omega$ . Израчунати струју струјног генератора  $I_g$  тако да напон тог генератора буде  $U = 45\text{ V}$ .



Слика 159.1.

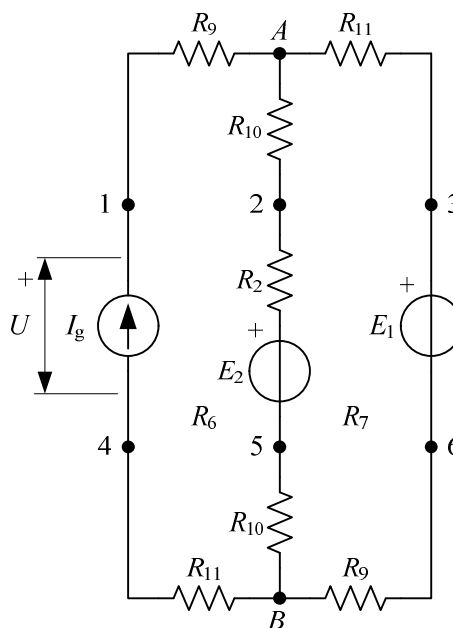
РЕШЕЊЕ

После трансфигурације троуглова отпорности  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  и  $R_6$ ,  $R_7$ ,  $R_8$  у трокраке звезде, коло добија изглед као на слици 159.2. При томе је  $R_9 = 20 \Omega$ ,  $R_{10} = 40 \Omega$  и  $R_{11} = 80 \Omega$ .

За коло са слике 159.2 је  $U_{AB} = U - (R_9 + R_{11})I_g$ . Усвајајући у том колу чвор  $B$  за референтни и примењујући метод потенцијала чворова, добија се једначина

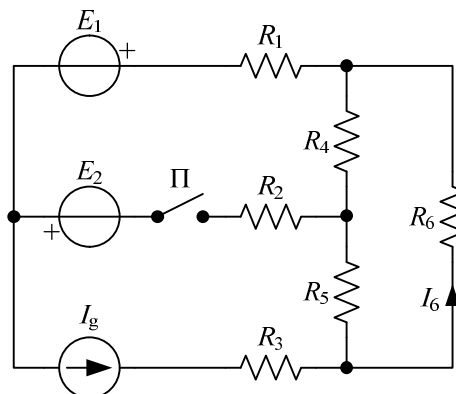
$$\left( \frac{1}{R_2 + 2R_{10}} + \frac{1}{R_9 + R_{11}} \right) (U - (R_9 + R_{11})I_g) = I_g + \frac{E_1}{R_9 + R_{11}} + \frac{E_2}{R_2 + 2R_{10}},$$

из које се може израчунати тражена струја,  $I_g = 0,2 \text{ A}$ .



Слика 159.2

**\*160.** У колу сталне струје приказаном на слици 160.1 је  $E_2 = 25 \text{ V}$ ,  $I_g = 10 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 400 \Omega$ ,  $R_3 = 500 \Omega$ ,  $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 3 \text{ k}\Omega$  и  $R_6 = 5 \text{ k}\Omega$ . По затварању прекидача П, у грани са отпорником  $R_6$  успостави се струја јачине  $I_6 = 4 \text{ mA}$ . Израчунати прираштаје снага које развијају идеални генератори у колу услед затварања прекидача П.



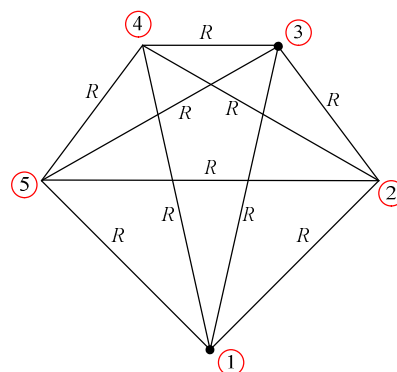
Слика 160.1.

РЕЗУЛТАТ

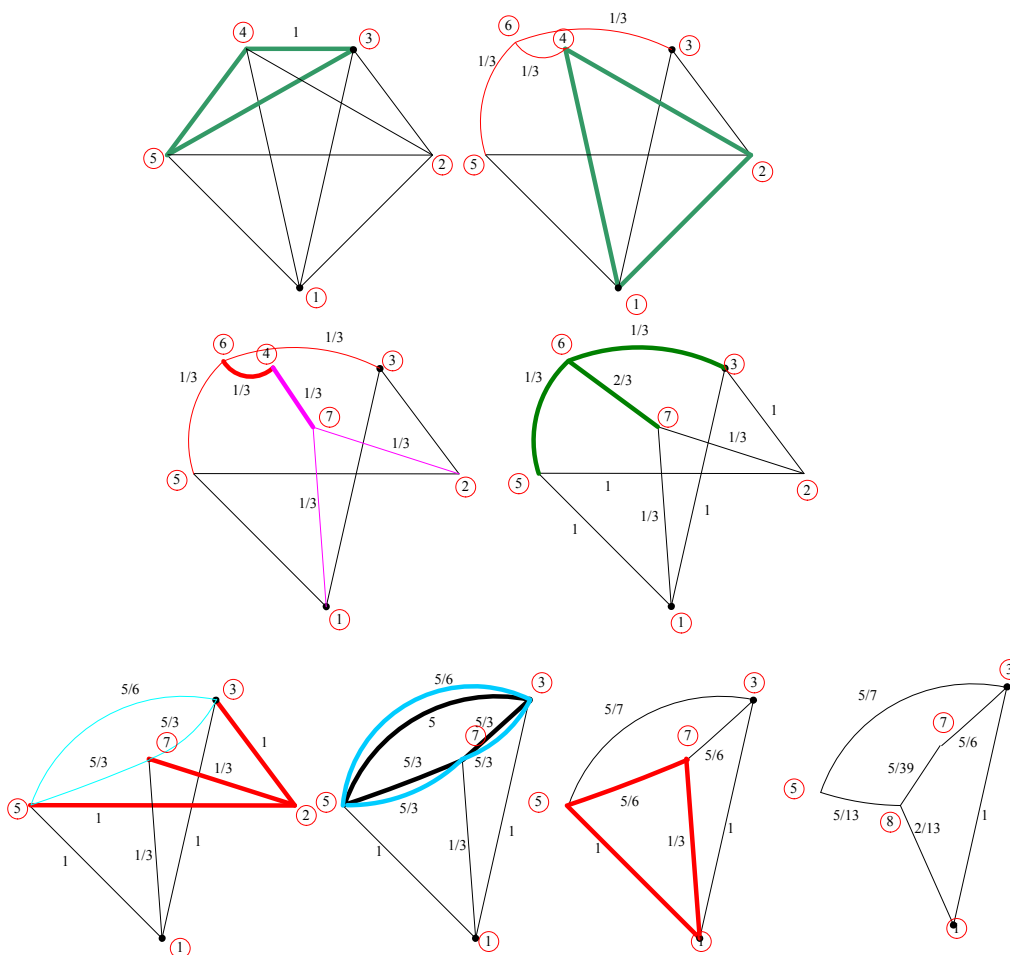
Упутство. Трансфигурисати троугао коју чине отпорници  $R_4$ ,  $R_5$  и  $R_6$ , па применити Кирхофове законе. Непозната емс је  $E_1 = -30 \text{ V}$ .

Прираштаји снага генератора су  $\Delta P_{E_1} = -150 \text{ mW}$ ,  $\Delta P_{E_2} = 125 \text{ mW}$  и  $\Delta P_{I_g} = -100 \text{ mW}$ .

**\*\*161.** На слици 161.1 приказан је граф мреже која се састоји од 10 отпорника. Отпорности сваког отпорника је  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Одредити еквивалентну отпорност између прикључака 1 и 3 употребљавајући трансфигурације звезде у троугао, и обрнуто, као и сажимање редних и паралелних веза.



Слика 161.1.



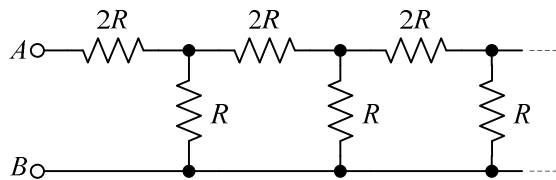
Слика 161.2.

**РЕШЕЊЕ**

Поступак трансфигурације приказан је на слици 161.2, где је отпорност сваке гране дата у килооимима. Тражена еквивалентна отпорности је  $R_e = 400 \Omega$ .

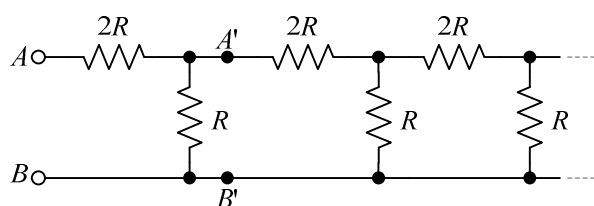
Колика је еквивалентна отпорност између тачака 1 и 2?

**\*\*162.** Лествичаста мрежа састоји се од веома великог броја отпорника отпорности  $2R$  и  $R$  који су повезани као на слици 162.1. Одредити еквивалентну отпорност између прикључака мреже ( $A$  и  $B$ ).



Слика 162.1.

#### РЕШЕЊЕ



Слика 162.2.

Сматрајући да је мрежа бесконачна, еквивалентна отпорност која се види десно од тачака  $A$  и  $B$  на слици 162.2 иста је као отпорност која се види десно од тачака  $A'$  и  $B'$ .

Стога је  $R_{AB} = (R_{A'B'} \parallel R) \oplus 2R = \frac{R_{A'B'}R}{R_{A'B'} + R} + 2R = \frac{R_{AB}R}{R_{AB} + R} + 2R$ . Одавде се добија

квадратна једначина  $R_{AB}^2 - 2R_{AB}R - 2R^2 = 0$ , чија су решења  $R_{AB} = R \pm R\sqrt{3}$ . Еквивалентна отпорност не може бити негативна, па у обзир долази само горњи знак, односно  $R_{AB} = (1 + \sqrt{3})R \approx 2,73205081 R$ .

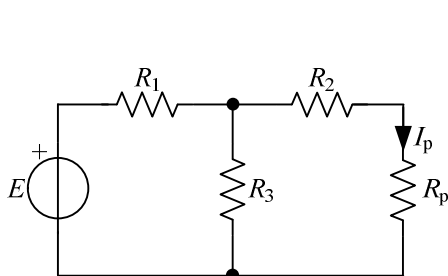
Задатак се може решити и применом метода пропорционалних величина који је објашњен у задатку 168.



## 4. Теореме

### 4.1. Линеарност и суперпозиција

**163.** За електрично коло приказано на слици 163.1 нацртати график зависности струје  $I_p$  од емс  $E$  сматрајући да су отпорности у колу познате и непроменљиве.



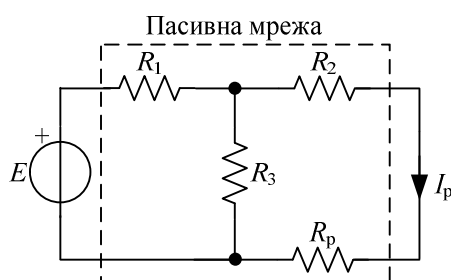
Слика 163.1.



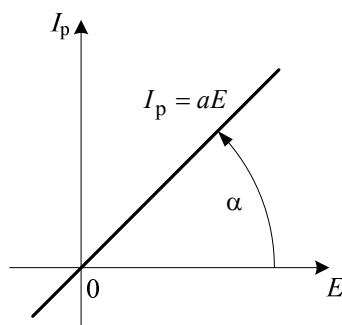
Слика 163.2.

#### РЕШЕЊЕ

Када у линеарном електричном колу постоји само један генератор (напонски или струјни), а отпорности кола се не мењају, важи теорема пропорционалности, која је посебан случај опште теореме линеарности. Струја  $I_k$  гране кола линеарно је сразмерна побудном параметру генератора (екситацији) у колу,  $I_k = aE$  (слика 163.2), а напон између две тачке у колу је  $U = bE$ , где су  $a$  и  $b$  фактори сразмерности, који су константне величине за посматрано коло.



Слика 163.3.



Слика 163.4.

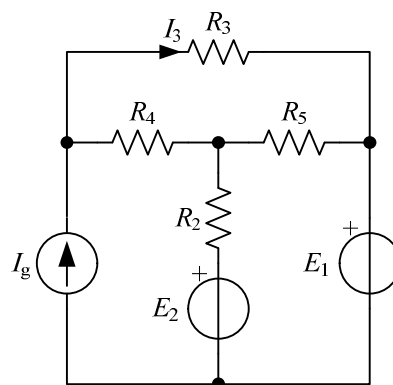
Према слици 163.3 је  $I_p = \frac{R_3}{R_1 R_3 + (R_2 + R_p)(R_1 + R_3)} E$ , односно  $I_p = aE$ , где је

$a = \frac{R_3}{R_1 R_3 + (R_2 + R_p)(R_1 + R_3)}$ . На слици 163.4 је приказан график ове функције, при чему је  $\tan \alpha = a$ .

**164.** За коло сталне струје са слике 164.1 је  $E_1 = 6 \text{ V}$ ,  $E_2 = 12 \text{ V}$ ,  $I_g = 70 \text{ mA}$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 8 \Omega$  и  $R_5 = 30 \Omega$ . Применом теореме суперпозиције израчунати струју  $I_3$ .

#### РЕШЕЊЕ

По теорему суперпозиције је  $I_3(I_g, E_1, E_2) = I_3(I_g) + I_3(E_1) + I_3(E_2)$ , где су  $I_3(I_g)$ ,  $I_3(E_1)$  и  $I_3(E_2)$  одзиви када делује само по једна екситација, док су преостале екситације анулиране. Анулирањем струје идеалног струјног генератора добија се отворена веза, а анулирањем емс идеалног напонског генератора добија се кратак спој.



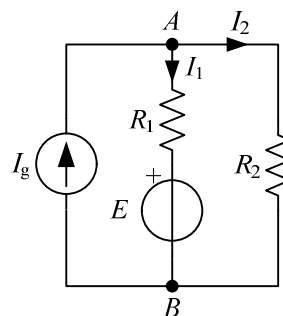
Слика 164.1.

За коло са слике 164.1 је  $I_3(I_g) = \frac{\left(R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}\right) I_g}{R_3 + R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}} = 28 \text{ mA}$ ,

$I_3(E_1) = \frac{-\frac{R_5}{R_2 + R_5} E_1}{R_3 + R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}} = -72 \text{ mA}$  и  $I_3(E_2) = \frac{\frac{R_5}{R_2 + R_5} E_2}{R_3 + R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}} = 144 \text{ mA}$ , па је

$I_3 = I_3(I_g, E_1, E_2) = 100 \text{ mA}$ .

**165.** За коло са слике 165.1 је  $R_1 = 300 \Omega$  и  $R_2 = 200 \Omega$ . Када је  $I_g = 0$ , познат је напон  $U_{AB}(E) = 4 \text{ V}$ , а када је  $E = 0$ , познат је напон  $U_{AB}(I_g) = 12 \text{ V}$ . Израчунати снаге свих елемената кола када у колу делују оба генератора.



Слика 165.1.

РЕШЕЊЕ

У стационарном стању када у колу делује само напонски генератор ( $I_g = 0$ ) је  $I_2(E) = \frac{U_{AB}(E)}{R_2} = 20 \text{ mA}$  и  $I_1(E) = -I_2(E) = -20 \text{ mA}$ . При томе је  $U_{AB}(E) = E + R_1 I_1(E)$ , одакле је  $E = U_{AB}(E) - R_1 I_1(E) = 10 \text{ V}$ .

У стационарном стању када у колу делује само струјни генератор ( $E = 0$ ) је  $U_{AB}(I_g) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_g$ , одакле је  $I_g = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) U_{AB}(I_g) = 100 \text{ mA}$ . Струје грана су тада  $I_1(I_g) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_g = 40 \text{ mA}$  и  $I_2(I_g) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_g = 60 \text{ mA}$ .

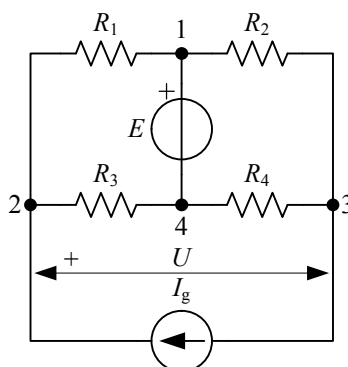
У стационарном стању када у колу делују оба генератора, по теореме суперпозиције је  $I_1(E, I_g) = I_1(E) + I_1(I_g) = 20 \text{ mA}$ ,  $I_2(E, I_g) = I_2(E) + I_2(I_g) = 80 \text{ mA}$  и  $U_{AB}(E, I_g) = U_{AB}(E) + U_{AB}(I_g) = 16 \text{ V}$ . При томе су снаге елемената кола  $P_E = -E I_1(E, I_g) = -200 \text{ mW}$ ,  $P_{I_g} = U_{AB}(E, I_g) I_g = 1,6 \text{ W}$ ,  $P_{R_1} = R_1 I_1^2(E, I_g) = 120 \text{ mW}$  и  $P_{R_2} = R_2 I_2^2(E, I_g) = 1,28 \text{ W}$ .

Читаоцу се препоручује да на овом примеру покаже да теорема суперпозиције не важи за снаге.

**166.** У колу на слици 166.1 је  $E = 1 \text{ V}$ ,  $I_g = 20 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 100 \Omega$  и  $R_4 = 200 \Omega$ . Израчунати за колико се промени напон  $U$  ако се (а) електромоторна сила напонског генератора промени за  $\Delta E = 20 \text{ mV}$  (при чему се струја струјног генератора не мења) и (б) струја струјног генератора промени за  $\Delta I_g = -1 \text{ mA}$  (при чему се емс напонског генератора не мења).

РЕШЕЊЕ

На основу теореме линеарности је  $U = aE + bI_g$ , где су  $a$  и  $b$  константне величине за посматрано коло. Те константне величине се могу одредити решавањем задатог кола тако да се у поступку решавања емс  $E$  и струја  $I_g$  оставе као симболи.



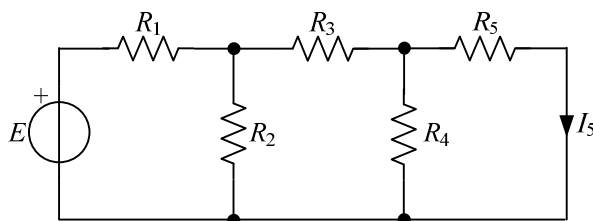
Слика 166.1.

На пример, ако се примени метод потенцијала чворова и чвор 4 узме за референтни, једначине гласе  $V_1 = E$ ,  $-\frac{1}{R_1}V_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)V_2 = I_g$ ,  $-\frac{1}{R_2}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right)V_3 = -I_g$ . Из овог система се добија  $V_2 = \frac{E + R_1 I_g}{R_1 + R_3} R_3$  и  $V_3 = \frac{E - R_2 I_g}{R_2 + R_4} R_4$ , па је посматрани напон  $U = V_2 - V_3 = \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4}\right) E + \left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}\right) I_g$ . Заменом бројних вредности отпорности добија се  $U = V_2 - V_3 = 0 \cdot E + 100 \Omega \cdot I_g$ . Одавде је  $a = 0$  и  $b = 100 \Omega$ . Још једноставније, решење се може добити применом теореме суперпозиције. Из релације  $U = aE + bI_g$  следи и  $\Delta U = a\Delta E + b\Delta I_g$ .

(а) Када се промени емс напонског генератора, промена напона је  $\Delta U = 0$  (мост је у равнотежи).

(б) Када се промени струја струјног генератора за  $\Delta I_g = -1 \text{ mA}$ , напон се промени за  $\Delta U = -100 \text{ mV}$ .

**167.** За лествичасту отпорничку мрежу напајану идеалним напонским генератором (слика 167.1) познато је  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$ ,  $R_4 = 4 \Omega$ ,  $R_5 = 5 \Omega$  и  $E = 39,75 \text{ V}$ . Користећи се методом пропорционалних величина, израчунати струју  $I_5$ .



Слика 167.1.

РЕШЕЊЕ

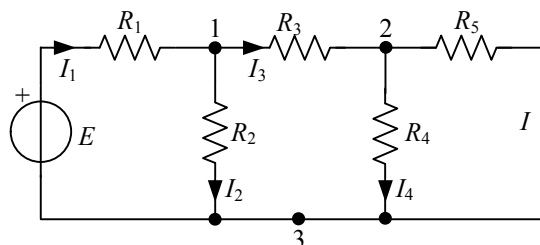
Према теореме линеарности, за коло са слике 167.2 (у коме делује само једна екситација) важи линеарна сразмерност  $I = aE$ . Уколико се промени емс генератора,

промениће се и струја посматране гране, при чему је  $I_1 = aE_1$ . Одавде следи пропорција

$$\frac{I}{I_1} = \frac{E}{E_1}, \text{ односно } I = \frac{E}{E_1} I_1.$$



Слика 167.2.



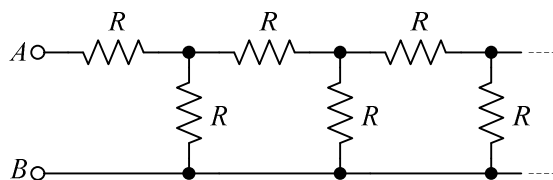
Слика 167.3.

Према оријентацијама и ознакама са слике 167.3 је  $I_5 = I$ . На основу једначине струјног разделника је  $I_3 = \frac{R_4 + R_5}{R_4} I = \frac{9}{4} I$ . Даље је  $U_{13} = R_5 I + R_3 I_3$  и  $I_2 = \frac{U_{13}}{R_2}$ , па је

$$I_1 = \frac{R_2 + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}}{R_2} I_3 = \frac{65}{8} I \quad \text{и} \quad E_1 = \left( R_1 + \frac{R_2 \left( R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)}{R_2 + R_3 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}} \right) I_1, \quad \text{односно}$$

$$E_1 = \left( \frac{159}{8} \Omega \right) I = 19,875 \Omega \cdot I \quad \text{и} \quad a = \frac{1}{19,875 \Omega}. \quad \text{Сада је тражена струја } I = \frac{E}{19,875 \Omega} = 2 \text{ A}.$$

**\*\*168.** Лествичаста мрежа приказана на слици 168.1 састоји се од веома великог броја идентичних отпорника отпорности  $R$ . Методом пропорционалних величина одредити еквивалентну отпорност између прикључака мреже ( $A$  и  $B$ ).



Слика 168.1.

#### РЕШЕЊЕ

Посматрајмо мрежу отпорника приказану на слици 168.2 и применимо метод пропорционалних величина. Претпоставимо да је позната струја  $I_1 = I$ . Тада је, редом,

$I_2 = I_1 = I$ ,  $V_1 = 2RI$ ,  $I_3 = 2I$ ,  $I_4 = 3I$ ,  $V_2 = 5RI$ ,  $I_5 = 5I$ ,  $I_6 = 8I$ , ... Бројеви 1, 2, 3, 5, 8... су чланови Фибоначијевог низа бројева<sup>30</sup>.

Еквивалентна отпорност које се види гледано удесно од пресека 1-1' је

$$R_{e1} = \frac{2}{1}R, \text{ удесно од пресека 2-2' је}$$

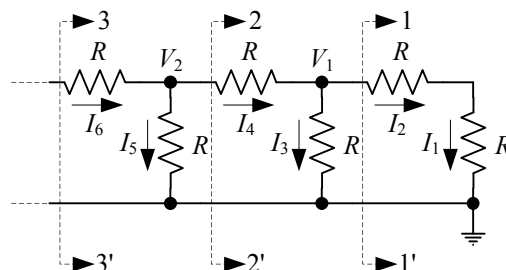
$$R_{e2} = \frac{5}{3}R, \text{ удесно од пресека 3-3' је}$$

$$R_{e3} = \frac{13}{8}R, \dots \text{ У општем случају, удесно}$$

од пресека  $n$ - $n'$  еквивалентна отпорност

$$\text{је } R_{en} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}R, \text{ где је } F_m \text{ } m\text{-ти број}$$

Фибоначијевог низа и  $m \geq 1$ .



Слика 168.2.

Са друге стране,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{F_{m+1}}{F_m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (златни пресек), па је

$R_{AB} = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{en} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R$ . У табели 8.1 приказане су еквивалентне отпорности  $R_{en}$  за

$n = 1, \dots, 10$ , као и релативно одступање  $\frac{R_{en} - R_{AB}}{R_{AB}}$ .

Табела 168.1.

| $n$ | $\frac{R_{en}}{R}$ | $\frac{R_{en} - R_{AB}}{R_{AB}}$ |
|-----|--------------------|----------------------------------|
| 1   | 2,00000000000000   | 0,236067977499793                |
| 2   | 1,66666666666667   | 0,03005664791649454              |
| 3   | 1,62500000000000   | 0,004305231718582103             |
| 4   | 1,61904761904762   | 0,0006264579760231204            |
| 5   | 1,61818181818182   | 0,00009136361346917532           |
| 6   | 1,61805555555556   | 0,00001332901893014160           |
| 7   | 1,61803713527851   | 0,000001944661636610334          |
| 8   | 1,61803444782168   | 0,0000002837219705842386         |
| 9   | 1,61803405572755   | 0,00000004139447296047649        |
| 10  | 1,61803399852180   | 0,000000006039374556010557       |

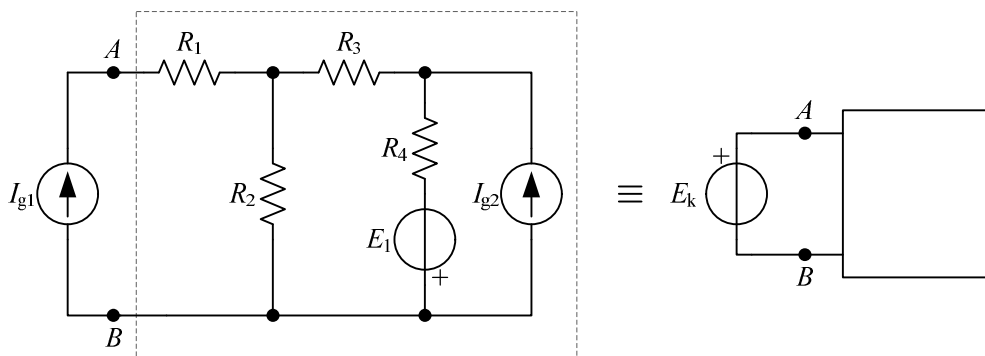
До решења се може доћи и поступком описаним у задатку 162.

<sup>30</sup> Фибоначијеви бројеви су дефинисани рекурентном релацијом

$$F_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F_{n-2} + F_{n-1}, & n > 1 \end{cases} . \text{ Првих десет Фибоначијевих бројева су } 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,$$

## 4.2. Компензација

169. У колу приказаном на слици 169.1 је  $E_1 = 100 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 2 \text{ A}$ ,  $I_{g2} = 1 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_3 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 15 \Omega$  и  $R_4 = 10 \Omega$ . На основу теореме компензације, заменити идеални струјни генератор  $I_{g1}$  идеалним напонским генератором.

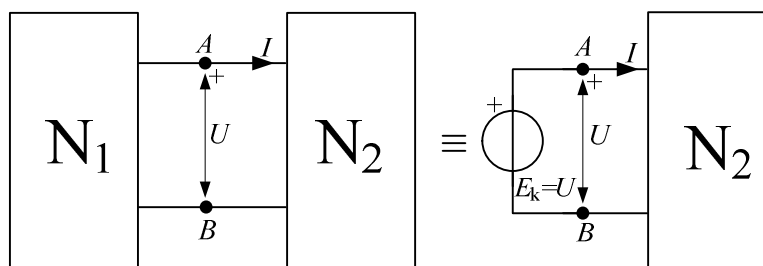


Слика 169.1.

### РЕШЕЊЕ

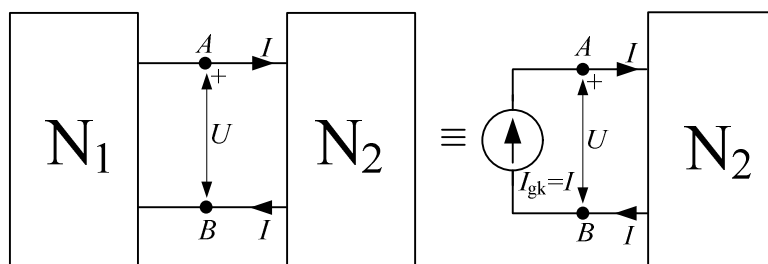
Теорема компензације се односи на електрично коло које се састоји од два дела (две мреже) међусобно повезана само помоћу два проводника. Теорема се формулише у два облика: као напонска и као струјна компензација.

Према напонској компензацији (слика 169.2), један део кола се може заменити идеалним напонским генератором чија је емс једнака напону између спојних проводника,  $E_k = U$ .



Слика 169.2.

Према струјној компензацији (слика 169.3), један део кола се може заменити идеалним струјним генератором чија је струја једнака струји спојних проводника,  $I_{gk} = I$ .



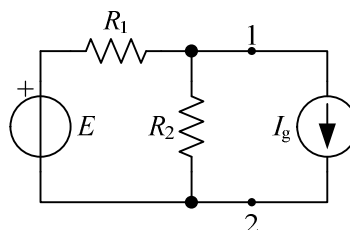
Слика 169.3

Компензациони генератор (и напонски, и струјни) је идеалан, али неаутономан генератор, јер свака промена у колу у општем случају мења његов побудни параметар (емс односно струју). Међутим, у сваком стационарном стању у колу, компензациони генератор се третира исто као да је аутономни генератор (чији побудни параметар не зависи од стања у колу).

Решавањем кола са слике 169.1 (на пример, методом контурних струја) добија се  $U_{AB} = -20 \text{ V}$ , па је електромоторна сила компензационог генератора  $E_k = U_{AB} = -20 \text{ V}$ .

Колика би била емс компензационог генератора када би се струја првог струјног генератора променила на  $I'_{g1} = 0$ ?

**\*170.** У колу на слици 170.1 је  $E = 24 \text{ V}$ ,  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$  и  $I_g = 1,5 \text{ A}$ . Заменили део кола лево од тачака 1 и 2 компензационим генератором. Продискутовати могућност замене (а) напонским и (б) струјним генератором.



Слика 170.1.

#### РЕШЕЊЕ

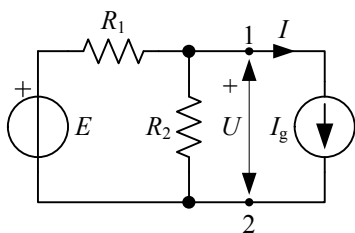
Према референтним смеровима са слике 170.2,  $U = 4 \text{ V}$  и  $I = 1,5 \text{ A}$ .

(а) Према теорему напонске компензације, део кола лево од тачака 1 и 2 може се заменити компензационим напонским генератором емс  $E_k = U = 4 \text{ V}$ , као на слици 170.3. Анализирајући то коло, види се да су напон  $U$  и струја  $I$  исти као у колу са слике 170.1.

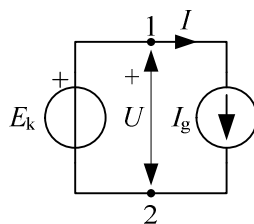
(б) Према теорему струјне компензације, део кола лево од тачака 1 и 2 може се заменити компензационим струјном генератором струје  $I_k = I = 1,5 \text{ A}$ , као на слици 170.4. Добијена је редна веза два идеална струјна генератора. С обзиром на то да су струје генератора једнаке, оваква веза је дозвољена, али неодређена: из кола са слике 170.4 није могуће једнозначно одредити напон између тачака 1 и 2. Тај напон може имати било коју вредност, па и ону као у колу на слици 170.1.

Читаоцу се препоручује да скицира пример кола у коме би напонска компензација довела до неодређене везе.

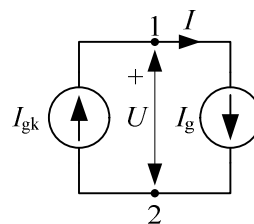




Слика 170.2.

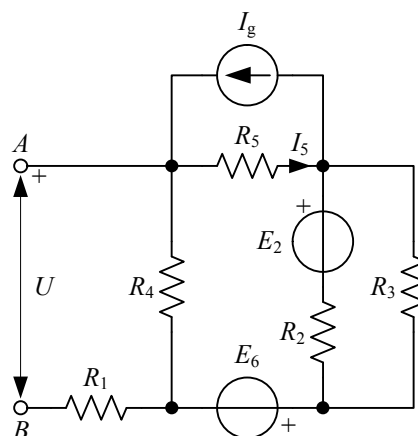


Слика 170.3.



Слика 170.4.

**171.** На слици 171.1 приказано је коло сталне струје за које је познато  $U = 50 \text{ V}$ ,  $E_2 = 100 \text{ V}$ ,  $E_6 = 25 \text{ V}$ ,  $I_g = 50 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 400 \Omega$ ,  $R_4 = 300 \Omega$  и  $R_5 = 50 \Omega$ . Користећи се теоремом компензације и теоремом суперпозиције, израчунати струју  $I_5$ .

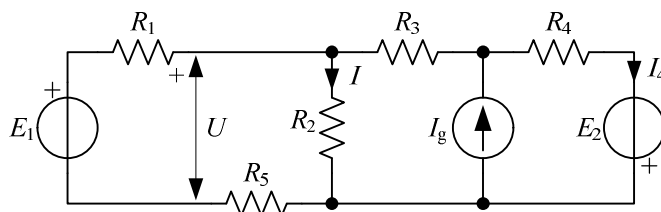


Слика 171.1.

РЕШЕЊЕ

На основу теореме компензације, део кола лево од тачака  $A$  и  $B$  може се заменити компензационим напонским генератором емс  $E_k = E_{kBA} = U$ . На основу теореме суперпозиције је сада  $I_5(E_k, E_6, I_g, E_2) = I_5(E_k) + I_5(E_6) + I_5(I_g) + I_5(E_2)$ , где је  $I_5(E_k) = 120 \text{ mA}$ ,  $I_5(E_6) = -100 \text{ mA}$ ,  $I_5(I_g) = 40 \text{ mA}$  и  $I_5(E_2) = -320 \text{ mA}$ , па је  $I_5 = -260 \text{ mA}$ .

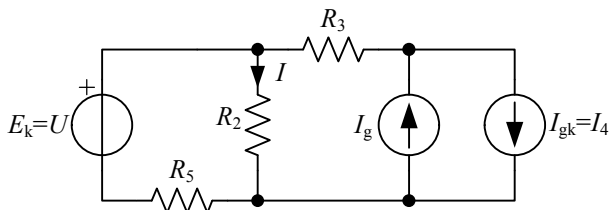
**172.** У колу на слици 172.1 познато је  $U = 10 \text{ V}$ ,  $I_g = 1 \text{ A}$ ,  $I_4 = -1 \text{ A}$ ,  $R_2 = R_5 = 10 \Omega$  и  $R_3 = R_4 = 5 \Omega$ . Применом теорема компензације и суперпозиције, израчунати струју  $I$ , а одатле снагу отпорника  $R_2$ .



Слика 172.1.

РЕШЕЊЕ

Применом теореме компензације, грана  $E_1 - R_1$  се може заменити компензационим напонским генератором емс  $E_k = U$ , а грана  $E_4 - R_4$  компензационим струјним генератором струје  $I_{gk} = I_4$ , чиме се добија коло као на слици 172.2.

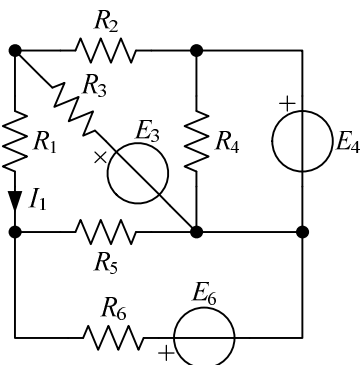


Слика 172.2.

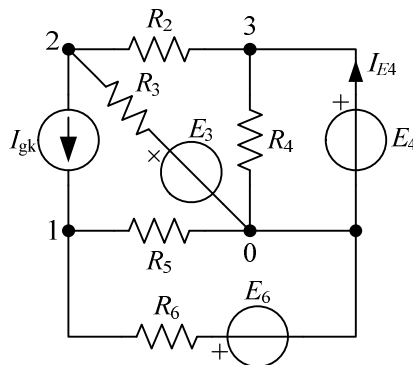
Струјни генератори  $I_g$  и  $I_{gk}$  могу се заменити једним еквивалентним струјним генератором струје  $I_{ge} = I_g - I_{gk} = 2 \text{ A}$ , чији се референтни смер поклапа са смером  $I_g$ .

На основу суперпозиције,  $I = I'(E_k) + I''(I_{ge}) = \frac{U}{R_2 + R_5} + \frac{R_5}{R_2 + R_5} I_{ge} = 1,5 \text{ A}$ , па је снага отпорника је  $P_{R_2} = R_2 I^2 = 22,5 \text{ W}$ .

**173.** За коло сталне струје приказано на слици 173.1 познато је  $R_1 = 300 \Omega$ ,  $R_2 = 400 \Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 500 \Omega$ ,  $R_6 = 100 \Omega$ ,  $E_3 = 12 \text{ V}$  и  $E_6 = 32 \text{ V}$ . (а) Израчунати емс  $E_4$  тако да је струја  $I_1 = 40 \text{ mA}$ . (б) За тако израчану емс, израчунати снагу идеалног напонског генератора  $E_4$ .



Слика 173.1.



Слика 173.2.

РЕШЕЊЕ

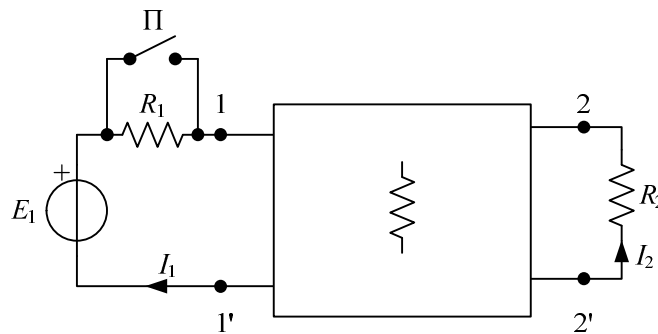
(а) Уколико се грана са отпорником  $R_1$  замени компензационим струјним генератором струје  $I_{gk} = I_1$  и усвоји нумерација чворова као на слици 173.2 (чвор 0 је референтни), на основу метода потенцијала чворова може се поставити систем линеарних једначина  $V_1 \left( \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) = \frac{E_6}{R_6} + I_1$ ,  $V_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{E_4}{R_2} = -I_1 + \frac{E_3}{R_3}$  јер је

$V_3 = E_4$ . Из прве једначине се добија  $V_1 = \frac{\frac{E_6}{R_6} + I_1}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}} = 30 \text{ V}$ . За коло са слике 173.1 је

$V_2 = V_1 + R_1 I_1 = 42 \text{ V}$ . Заменом потенцијала  $V_2$  у другу једначину по методу потенцијала чворова добија се  $E_4 = R_2 I_1 - \frac{R_2}{R_3} E_3 + V_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) = 70 \text{ V}$ .

(б) На основу првог Кирхофовог закона за чвор 3 добија се  $I_{E_4} = \frac{E_4}{R_4} + \frac{E_4 - V_2}{R_2} = 84 \text{ mA}$ , те је  $P_{E_4} = E_4 I_{E_4} = 5,88 \text{ W}$ .

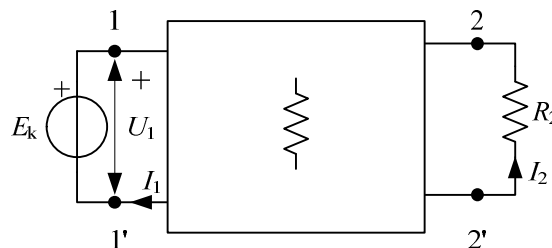
**174.** У колу приказаном на слици 174.1 је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_2 = 200 \Omega$ , а мрежа представљена правоугаоником (четворопол) састављена је само од отпорника. Када је прекидач П отворен, познате су струје  $I_1 = 3 \text{ mA}$  и  $I_2 = 1 \text{ mA}$ . Колика је струја  $I_2'$  по затварању прекидача?



Слика 174.1.

РЕШЕЊЕ

По теореме компензације, део кола лево од тачака 1 и 1' може се заменити идеалним напонским генератором емс  $E_k = U_1$  (слика 174.2). У колу са слике 174.2 делује само једна побуда па је, на основу теореме пропорционалности,  $I_2 = a E_k$ , где је  $a$  константна величина.



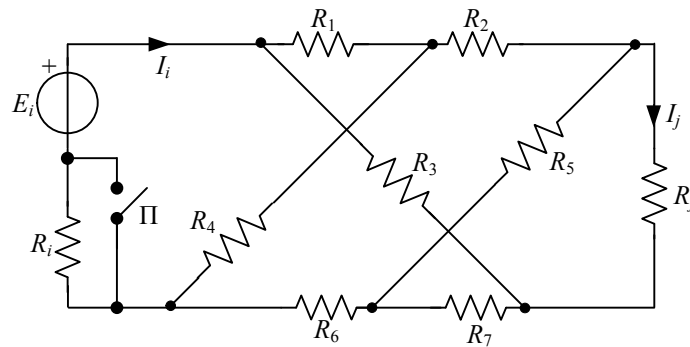
Слика 174.2.

Када је прекидач П отворен,  $U_1 = E_1 - R_1 I_1 = 6 \text{ V}$ , па је  $a = \frac{I_2}{E_k} = \frac{I_2}{U_1} = \frac{1}{6} \text{ mS}$ . Када се прекидач затвори, тада је  $U'_1 = E_1 = 12 \text{ V} = E'_k$ , па је  $I'_2 = a E'_k = 2 \text{ mA}$ .

Овим поступком је промена састава кола, услед затварања прекидача П, замењена променом побудног параметра компензационог генератора.

Колика је струја  $I'_1$  када је прекидач затворен?

**175.** За коло са слике 175.1 је  $E_i = 60 \text{ V}$ ,  $R_i = 10 \Omega$  и  $R_j = 4 \Omega$ . При отвореном прекидачу П познате су струје  $I_i = 2 \text{ A}$  и  $I_j = 20 \text{ mA}$ . Колика је струја  $I'_j$  после затварања прекидача П?

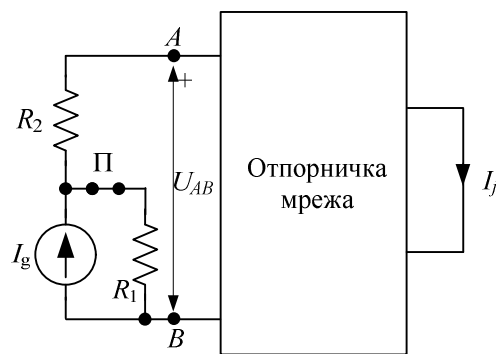


Слика 175.1.

#### РЕЗУЛТАТ

При затвореном прекидачу је  $I'_j = \frac{E_i}{E_i - R_i I_i} I_j = 30 \text{ mA}$ .

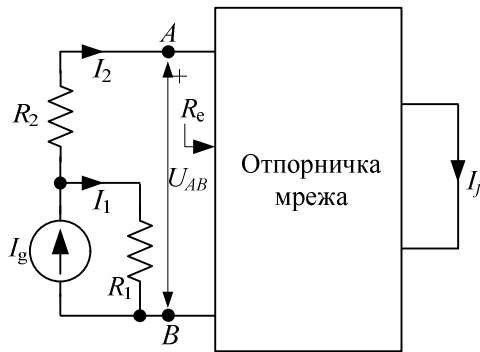
**176.** За електрично коло приказано на слици 176.1 познато је  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$  и  $I_g = 2,5 \text{ A}$ . При затвореном прекидачу П познати су напон  $U_{AB} = 2,5 \text{ V}$  и струја  $I_j = 2 \text{ mA}$ . Израчунати струју  $I'_j$  после отварања прекидача.



Слика 176.1.

РЕШЕЊЕ

При затвореном прекидачу П, коло се може представити као на слици 176.2. За то коло је  $I_g = I_1 + I_2$  и  $U_{AB} = R_1 I_1 - R_2 I_2$ , одакле је  $I_2 = \frac{R_1 I_g - U_{AB}}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ A}$ . Гледано у отпорничку мрежу, удесно од прикључака А и В, види се еквивалентна отпорност  $R_e = \frac{U_{AB}}{I_2}$ , односно  $R_e = 5 \Omega$ .



Слика 176.2.



Слика 176.3.

На основу теореме напонске компензације је (слика 176.3)  

$$E_k = \begin{cases} U_{AB} = 2,5 \text{ V}, \text{ П затворен} \\ U'_{AB} = R_e I_g = 12,5 \text{ V}, \text{ П отворен} \end{cases}$$
 По теореме линеарности је  $I_j = a E_k$ , па је

$$I_j = a U_{AB} \text{ и } I'_j = a U'_{AB} = a R_e I_g. \text{ Одавде је } I'_j = \frac{R_e I_g}{U_{AB}} I_j = 10 \text{ mA}.$$

Задатак се може решити и применом струјне компензације (слика 176.4), где је

$$I_{gk} = \begin{cases} I_2, \text{ П затворен} \\ I_g, \text{ П отворен} \end{cases}.$$

Како је  $I_j = b I_{gk}$ ,

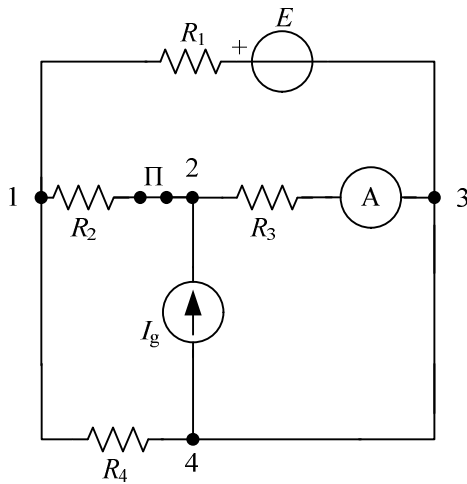
то је  $I_j = b I_2$  и  $I'_j = b I_g$ , па је

$$I'_j = \frac{I_g}{I_2} I_j = 10 \text{ mA}.$$

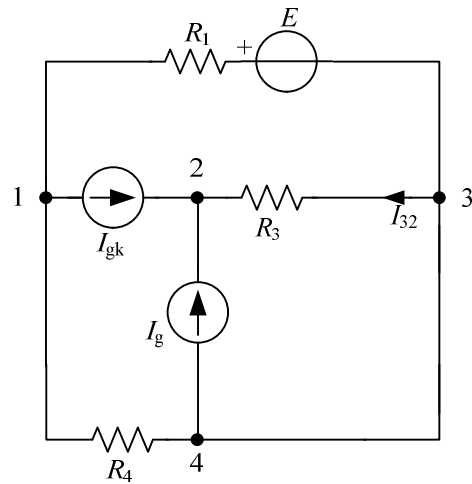


Слика 176.4.

177. За коло са слике 177.1 познато је  $R_1 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 100 \Omega$  и  $R_4 = 60 \Omega$ . При затвореном прекидачу П познат је напон  $U_{12}^{(z)} = 1,5 \text{ V}$ . При отварању прекидача, идеални амперметар установи прираштај струје  $\Delta I_{32} = 10 \text{ mA}$ . Израчунати отпорност  $R_2$ .



Слика 177.1.



Слика 177.2.

РЕШЕЊЕ

Отпорност  $R_2$  се може израчунати из релације  $R_2 = \frac{U_{12}^{(z)}}{I_{12}^{(z)}}$ . У ту сврху треба

израчунати струју  $I_{12}^{(z)}$  када је прекидач затворен. Применом струјне компензације

добива се коло као на слици 177.2, при чему је  $I_{\text{gk}} = \begin{cases} I_{12}^{(z)}, & \text{П затворен} \\ I_{\text{gk}}^{(o)} = 0, & \text{П отворен} \end{cases}$ . У том колу

постоје три екситације: идеални напонски генератор  $E$  и идеални струјни генератори  $I_g$  и  $I_{\text{gk}}$ . Промена стања прекидача мења струју  $I_{\text{gk}}$ , а та промена изазива промену струје  $I_{32}$  коју мери амперметар. У првом стационарном стању прекидач је затворен, а у другом отворен, па је прираштај струје компензационог генератора  $\Delta I_{\text{gk}} = I_{\text{gk}}^{(o)} - I_{\text{gk}}^{(z)} = -I_{12}^{(z)}$ .

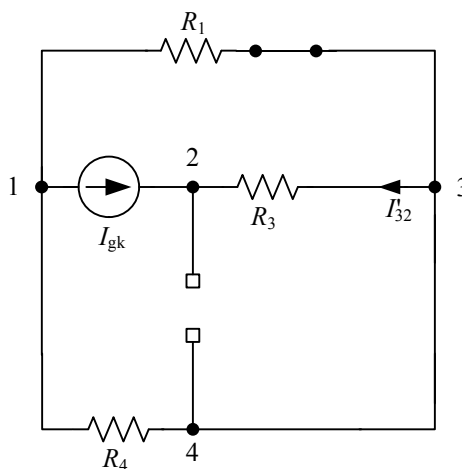
Према теорему линеарне зависности одзива од побуде (која је посебан облик теореме линеарности), када у колу делује неколико побуда, а од интереса нам је да опишемо зависност одзива (струје  $I_{32}$ ) само од једне побуде ( $I_{\text{gk}}$ ), важи израз облика

$$I_{32} = aI_{\text{gk}} + b, \quad (177.1)$$

где су  $a$  и  $b$  константне величине за посматрано коло. Константа  $b$  представља, по теорему суперпозиције, одзив на побуду идеалним напонским генератором  $E$  и идеалним струјним генератором  $I_g$ . Промена струје  $I_{\text{gk}}$  не утиче на  $b$ , па из (177.1) следи да је задати прираштај струје амперметра  $\Delta I_{32} = a\Delta I_{\text{gk}} = 10 \text{ mA}$ .

Да бисмо израчунали струју  $I_{gk}$ , потребно је да одредимо константу  $a$ .

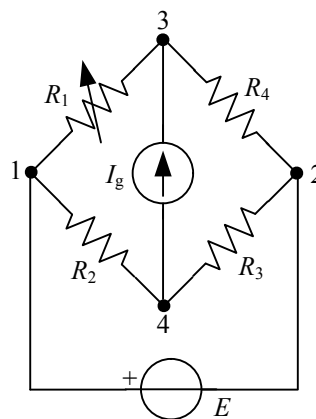
Ако се у колу на слици 177.2 анулирају побуде  $E$  и  $I_g$ , анулира се и константа  $b$ . Добија се коло на слици 177.3 („делта коло“) за које, уместо (177.1), важи  $I'_{32} = aI_{gk}$ . Решавањем тог кола добија се  $I'_{32} = -I_{gk}$ , па је  $a = -1$ , што је очигледно. Сада је  $\Delta I_{gk} = -\Delta I_{32} = -10 \text{ mA} = -I_{12}^{(z)}$ , односно  $I_{12}^{(z)} = 10 \text{ mA}$ , па је тражена отпорност  $R_2 = 150 \Omega$ .



Слика 177.3.

**\*\*Поступак решавања овог задатка илуструје чињеницу да се између свих линеарних величина у колу може успоставити зависност типа  $y = ax + b$ , где  $y$  означава одзив (струју гране или напон гране), а  $x$  означава побуду коју мењамо. Можемо разликовати две ситуације. Прва је да у колу мењамо само једну независну побуду (емс једног напонског генератора или струју једног струјног генератора), а све остале побуде су непроменљиве. Друга је да су све независне побуде константне, али мењамо напон или струју једне гране (на пример, тако што мењамо отпорност отпорника који је у тој грани, или отварамо и затварамо прекидач). Општија ситуација је да смо у колу уочили мрежу са једним паром крајева, па променом параметара елемената у мрежи мењамо напон или струју на прикључцима те мреже. Та грана, односно мрежа, може се заменити компензационим генератором, а  $x$  означава параметар тог генератора (емс, односно струју).**

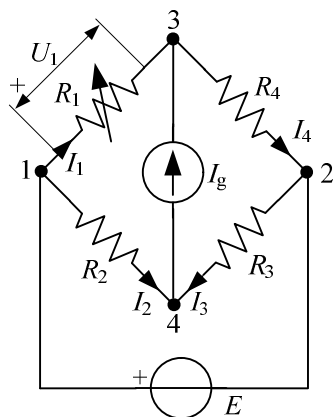
**\*178.** Отпорници  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $R_3 = 50 \Omega$  и  $R_4 = 40 \Omega$ , напонски генератор емс  $E = 20 \text{ V}$ , струјни генератор струје  $I_g = 4 \text{ A}$  и отпорник променљиве отпорности  $R_1$  ( $0 \leq R_1 < +\infty$ ) образују коло као на слици 178.1. Одредити зависност струја свих отпорника од напона променљивог отпорника и графички их приказати.



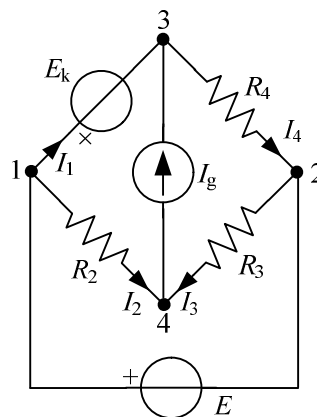
Слика 178.1.

РЕШЕЊЕ

Усвојимо референтне смерове струја отпорника и напона  $U_1$  као на слици 178.2. Грана са променљивим отпорником може се заменити компензационим напонским генератором емс  $E_k = U_1$ , као на слици 178.3. На основу линеарности, за струје отпорника важи релација  $I_i = a_i U_1 + b_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Оваквој релацији одговара права линија у дијаграму напон-струја.



Слика 178.2.



Слика 178.3.

Уместо коефицијентима  $a_i$  и  $b_i$ , права се може дефинисати и помоћу две тачке. Посматрајмо стога два посебна стања: када је грана 1 кратко спојена (ks) и када је у празном ходу (ph).

Када је грана 1 у кратком споју, тада је  $U_1 = 0$ , па је  $I_i^{(ks)} = b_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Када је грана 1 у празном ходу, тада је  $I_1^{(ph)} = 0$  и  $U_1 = U_1^{(ph)}$ , па је  $0 = a_1 U_1^{(ph)} + I_1^{(ks)}$  и  $I_i^{(ph)} = a_i U_1^{(ph)} + I_i^{(ks)}$ ,  $i = 2, 3, 4$ . Одавде је  $a_1 = -\frac{I_1^{(ks)}}{U_1^{(ph)}}$  и  $a_i = -\frac{I_i^{(ks)} - I_i^{(ph)}}{U_1^{(ph)}}$ ,  $i = 2, 3, 4$ . па је  $I_1 = I_1^{(ks)} - \frac{I_1^{(ks)}}{U_1^{(ph)}} U_1$  и  $I_i = I_i^{(ks)} - \frac{I_i^{(ks)} - I_i^{(ph)}}{U_1^{(ph)}} U_1$ ,  $i = 2, 3, 4$ .

Решавањем кола са слике 178.2 за случај када је  $R_1 = 0$ , добија се  $I_1^{(ks)} = -3,5$  A,  $I_2^{(ks)} = 2,75$  A,  $I_3^{(ks)} = 1,25$  A и  $I_4^{(ks)} = 0,5$  A. За случај када  $R_1 \rightarrow +\infty$ , добија се  $U_1^{(ph)} = -140$  V,  $I_2^{(ph)} = 2,75$  A,  $I_3^{(ph)} = 1,25$  A и  $I_4^{(ph)} = 4$  A.

Једначина које повезује струју и напон прве гране сада гласи, у јединицама SI система,  $I_1 = -3,5 - 0,025 U_1$ . Са друге стране је  $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$ . Елиминишући струју из ових

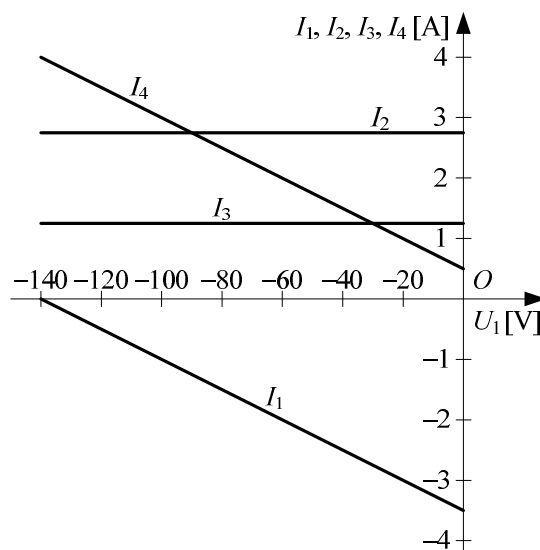
релација, добија се  $U_1 = \frac{-3,5}{\frac{1}{R_1} + 0,025}$ .



Напон  $U_1$  монотono опада када отпорност  $R_1$  расте. Када  $R_1 \rightarrow 0^+$ , тада  $U_1 \rightarrow 0^-$ . Када  $R_1 \rightarrow +\infty$ , тада  $U_1 \rightarrow -140^+$ . Према томе, напон се налази у границама  $U_1 \in [-140 \text{ V}, 0]$ .

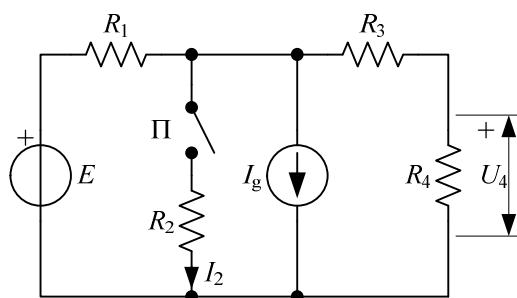
Једначине за струје осталих отпорника су  $I_2 = 2,75 \text{ A}$  (не зависи од  $U_1$ ),  $I_3 = 1,25 \text{ A}$  (не зависи од  $U_1$ ) и  $I_4 = 0,5 - 0,025 U_1$ .

Тражени графици приказани су на слици 178.4.



Слика 178.4.

**179.** У мрежи приказаној на слици 179.1 познате су отпорности  $R_1 = 100 \Omega$  и  $R_3 = R_4 = 200 \Omega$ , а прекидач П је отворен. Прекидач се затим затвори и успостави се ново стационарно стање, у коме је позната струја  $I_2 = 50 \text{ mA}$ . Израчунати прираштај напона  $U_4$  од стационарног стања када је прекидач отворен, до стационарног стања када је прекидач затворен.



Слика 179.1.

**РЕЗУЛТАТ**

Прираштај напона је  $\Delta U_4 = -\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_3 + R_4} I_2 = -2 \text{ V}$ .

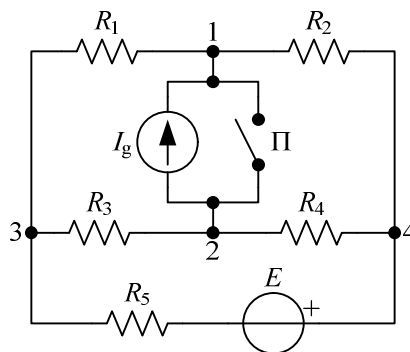
**180.** У колу приказаном на слици 180.1 је  $E = 75 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 12 \text{ k}\Omega$  и  $R_5 = 750 \Omega$ . Снага идеалног напонског генератора иста је када је прекидач П отворен и када је затворен. Израчунати (а) јачину струје идеалног струјног генератора и (б) снагу тог генератора када је прекидач П отворен.

РЕШЕЊЕ

Заменимо паралелну везу струјног генератора и прекидача компензационим напонским генератором, емс  $E_{k21}$ . Када је прекидач П затворен,  $E'_{k21} = 0$ , а када је отворен, емс је  $E''_{k21}$ .

На основу теореме линеарности, промена емс тог генератора изазива промену струје  $I_{34}$  (јер мост није у равнотежи). Из податка да се снага идеалног напонског генератора није променила, следи да се није променила ни струја тог генератора ( $I_{34}$ ).

На основу тога закључујемо да се, при отварању и затварању прекидача,  $E_{k21}$  не мења, па је  $E''_{k21} = 0$ . Не мења се ни напон  $U_{12}$ , па се не мења ни струја кроз прикључке паралелне везе струјног генератора и прекидача.



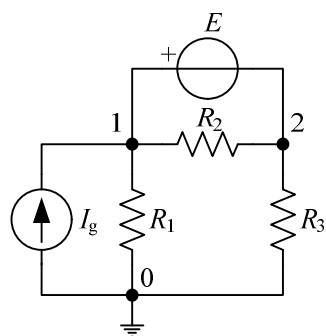
Слика 180.1.

(а) Из претходног разматрања следи да је  $I_g$  једнако струји кратког споја између тачака 2 и 1. Та струја је  $I_{21ks} = -2 \text{ mA}$ , па је  $I_g = -2 \text{ mA}$ .

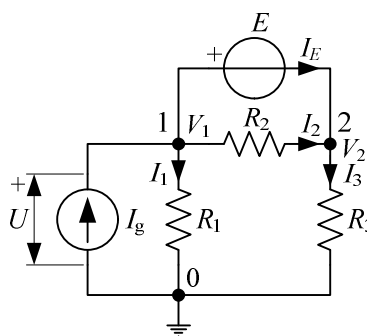
Колика је струја прекидача П када је он затворен?

(б) Напон идеалног струјног генератора је нула без обзира на положај прекидача, па је  $P_{I_g} = 0$ .

\*\*\*181. Отпорници отпорности  $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$ , напонски генератор емс  $E = 30 \text{ V}$  и струјни генератор струје  $I_g = 20 \text{ mA}$  образују коло као на слици 181.1. Чвор означен са 0 је уземљен. На примеру овог кола извести модификовани метод потенцијала чворова и њиме израчунати напоне и струје свих грана кола.



Слика 181.1.



Слика 181.2.

РЕШЕЊЕ

Када једна грана кола садржи само идеални напонски генератор, непосредна примена класичног метода потенцијала чворова захтева да се један од чворова те гране усвоји за референтни чвор, чиме се избегава „критична” једначина у систему (у којој

фигурише бесконачна проводност те гране). Међутим, уз једноставну модификацију, метод потенцијала чворова може се применити и у случајевима када идеални напонски генератор није везан за референтни чвор.

Према ознакама са слике 181.2, струја идеалног напонског генератора је  $I_E$ . Заменимо грану са тим генератором компензационим струјним генератором струје  $I_E$ . Тада је, по првом Кирхофовом закону,

$$\text{чвор 1: } -I_g + I_1 + I_2 + I_E = 0, \quad (181.1)$$

$$\text{чвор 2: } -I_E - I_2 + I_3 = 0. \quad (181.2)$$

Такође је

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1}, \quad (181.3)$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2}, \quad (181.4)$$

$$I_3 = \frac{V_2}{R_3}, \quad (181.5)$$

$$V_1 - V_2 = E. \quad (181.6)$$

Из ових једначина добија се систем

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_1 - \frac{1}{R_2} V_2 = I_g - I_E, \quad (181.7)$$

$$-\frac{1}{R_2} V_1 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_2 = I_E, \quad (181.8)$$

$$V_1 - V_2 = E. \quad (181.9)$$

У систему једначина (181.7)-(181.9) непознате су потенцијали чворова ( $V_1$  и  $V_2$ ) и струја компензационог генератора ( $I_E$ ). То значи да је број једначина и непознатих, уместо  $n_\xi - 1 = 2$ , сада  $n_\xi = 3$ , односно имамо једну једначину и једну непознату више.

Третирање струје идеалног напонског генератора као нове непознате величине суштина је модификованог метода потенцијала чворова (МНА – модификована нодална анализа).

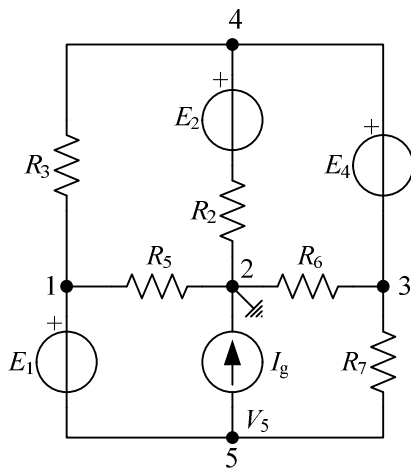
Из једначина (181.7)-(181.9) добија се  $V_1 = R_1 \frac{R_3 I_g + E}{R_1 + R_3} = 60 \text{ V}$ ,

$$V_2 = R_3 \frac{R_1 I_g - E}{R_1 + R_3} = 30 \text{ V} \quad \text{и} \quad I_E = \frac{R_1 I_g}{R_1 + R_3} - \frac{(R_1 + R_2 + R_3)E}{R_2(R_1 + R_3)} = 2 \text{ mA}.$$

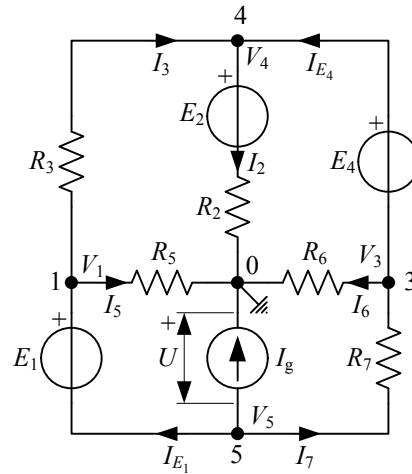
Струје грана су

$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = 15 \text{ mA}$ ,  $I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = 3 \text{ mA}$ ,  $I_3 = \frac{V_2}{R_3} = 5 \text{ mA}$ . Напон идеалног струјног генератора је  $U = V_1 = 60 \text{ V}$ .

**\*\*\*182.** За коло сталне струје са слике 182.1 познато је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_2 = 42 \text{ V}$ ,  $E_4 = 18 \text{ V}$ ,  $I_g = 60 \text{ mA}$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $R_3 = 280 \Omega$ ,  $R_5 = 300 \Omega$ ,  $R_6 = 1 \text{ k}\Omega$  и  $R_7 = 200 \Omega$ . Чвор 2 је уземљен. Користећи се модификованом методом потенцијала чворова (МНА) израчунати струје грана и напон струјног генератора.



Слика 182.1.



Слика 182.2.

**РЕШЕЊЕ**

Према ознакама са слике 182.2, једначине по модификованом методу потенцијала чворова су

$$\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)V_1 - \frac{1}{R_3}V_4 = I_{E1}, \quad -\frac{1}{R_7}V_5 + \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}\right)V_3 = -I_{E4},$$

$$-\frac{1}{R_3}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_4 = \frac{E_2}{R_2} + I_{E4}, \quad -\frac{1}{R_7}V_3 + \frac{1}{R_7}V_5 = -I_{E1} - I_g, \quad V_1 - V_5 = E_1 \quad \text{и}$$

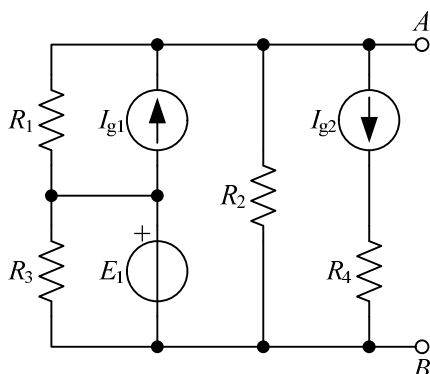
$$V_4 - V_3 = E_4.$$

Заменом бројних вредности познатих величина и решавањем постављеног система једначина, добија се  $V_1 = 9 \text{ V}$ ,  $V_3 = 5 \text{ V}$ ,  $V_4 = 23 \text{ V}$ ,  $V_5 = -3 \text{ V}$ ,  $I_{E1} = -20 \text{ mA}$  и  $I_{E4} = -45 \text{ mA}$ .

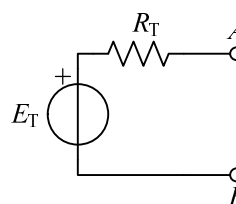
Струје осталих грана кола су  $I_5 = \frac{V_1}{R_5} = 30 \text{ mA}$ ,  $I_6 = \frac{V_3}{R_6} = 5 \text{ mA}$ ,  $I_2 = \frac{V_4 - E_2}{R_2} = -95 \text{ mA}$ ,  $I_3 = \frac{V_1 - V_4}{R_3} = -50 \text{ mA}$  и  $I_7 = \frac{V_5 - V_3}{R_7} = -40 \text{ mA}$ . Напон струјног генератора је  $U = -V_5 = 3 \text{ V}$ .

### 4.3. Тевененова и Нортонова теорема

**183.** У мрежи приказаној на слици 183.1 је  $E_1 = 6 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 3 \text{ A}$ ,  $I_{g2} = 6 \text{ A}$ ,  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$  и  $R_4 = 3 \Omega$ . Израчунати параметре еквивалентног Тевененовог генератора у односу на прикључке  $A$  и  $B$  (слика 183.2).



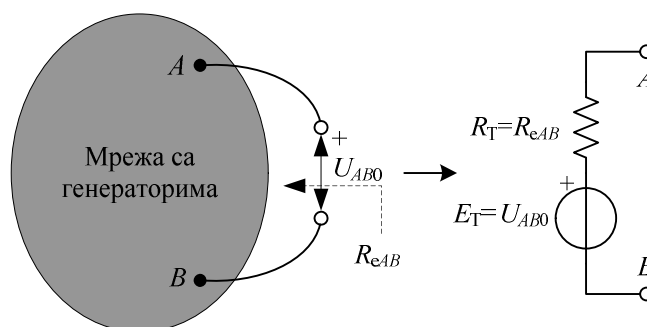
Слика 183.1.



Слика 183.2.

#### РЕШЕЊЕ

Тевененова теорема описује понашање линеарне мреже са једним паром прикључака ( $A$  и  $B$ ) у односу на било коју другу мрежу која се везује на те прикључке (слика 183.3). Према тој теорему, посматрана мрежа се понаша као реалан напонски генератор (Тевененов генератор).



Слика 183.3.

Електромоторна сила Тевененовог генератора ( $E_T$ ) једнака је напону празног хода између прикључака мреже (тј. напону пре прикључења друге мреже),  $(E_T)_{BA} = U_{AB0}$ . Унутрашња отпорност Тевененовог генератора ( $R_T$ ) једнака је еквивалентној (улазној) отпорности мреже између тачака  $A$  и  $B$ , пре прикључивања друге мреже,  $R_T = R_{eAB}$ , при чему је одстрањено дејство свих извора у мрежи. Одстрањивање дејства извора се врши анулирањем емс напонских генератора и струја струјних генератора.

Посматрана мрежа и одговарајући еквивалентни Тевененов генератор имају исту релацију између напона и струје на приступу.

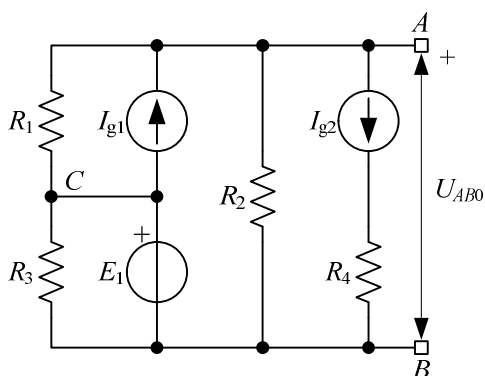
За одређивање напона празног хода задате мреже, потребно је израчунати напон  $U_{AB0}$  у колу са слике 183.4. При томе, у прикључцима  $A$  и  $B$  нема струје. Коло се може

решити, на пример, методом потенцијала чворова, узимајући чвор  $B$  за референтни.

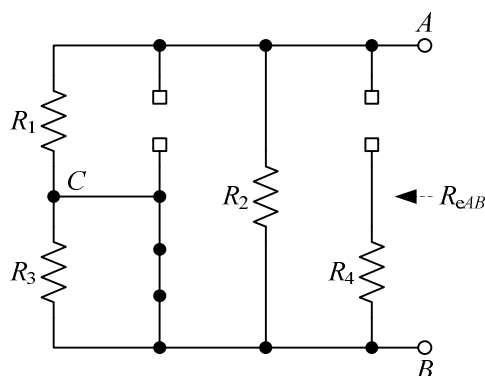
Одговарајуће једначине гласе  $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_A - \frac{1}{R_1}V_C = I_{g1} - I_{g2}$ ,  $V_C = E_1$ , одакле је

$$V_A = -4,8 \text{ V} = U_{AB0} = E_T.$$

При одређивању отпорности Тевененовог генератора, све екситације у мрежи се анулирају. Идеални напонски генератори тако постају кратки спојеви, а идеални струјни генератори отворене везе, као на слици 183.5. Еквивалентна отпорност те мреже отпорника је  $R_{eAB} = R_1 \parallel R_2 = 2,4 \Omega = R_T$ .



Слика 183.4

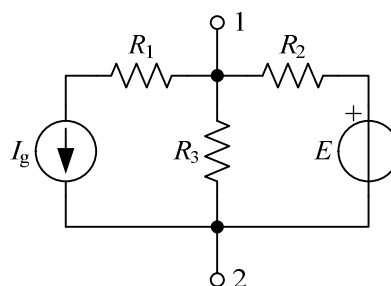


Слика 183.5

**184.** Израчунати параметре Тевененовог генератора у односу на прикључке 1 и 2 мреже приказане на слици 184.1 ако је  $E = 1 \text{ V}$ ,  $I_g = 1 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ .

#### РЕЗУЛТАТ

Параметри Тевененовог генератора су  $E_T = 0$  и  $R_T = 0,5 \text{ k}\Omega$ .

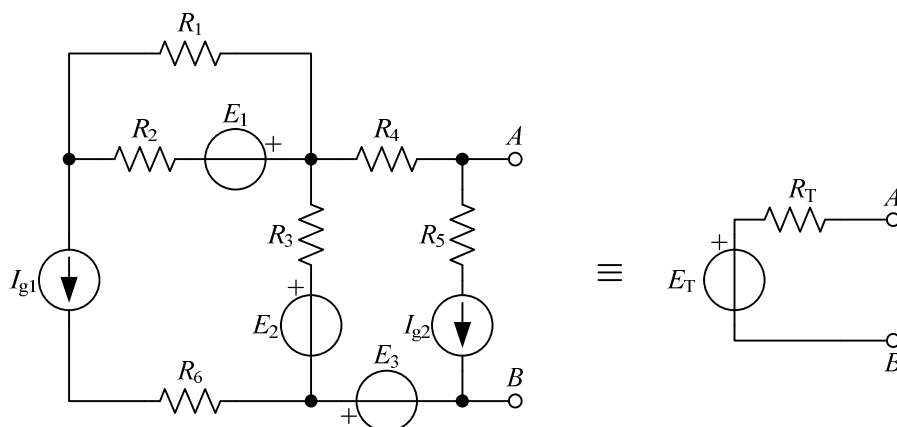


Слика 184.1.

**185.** Израчунати параметре еквивалентног Тевененовог генератора за мрежу приказану на слици 185.1. Познато је  $E_1 = 2 \text{ V}$ ,  $E_2 = 1 \text{ V}$ ,  $E_3 = 3 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 1 \text{ mA}$ ,  $I_{g2} = 2 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = 4 \text{ k}\Omega$  и  $R_6 = 3 \text{ k}\Omega$ .

#### РЕЗУЛТАТ

Параметри Тевененовог генератора су  $E_T = -16 \text{ V}$  и  $R_T = 8 \text{ k}\Omega$ .

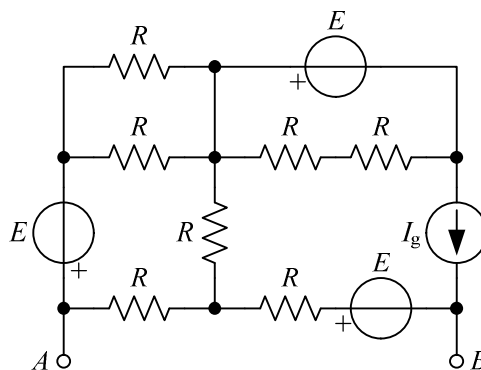


Слика 185.1.

**186.** Израчунати параметре Тевененовог генератора у односу на прикључке  $A$  и  $B$  мреже приказане на слици ако је  $E = 100 \text{ V}$ ,  $I_g = 10 \text{ A}$  и  $R = 10 \Omega$ .

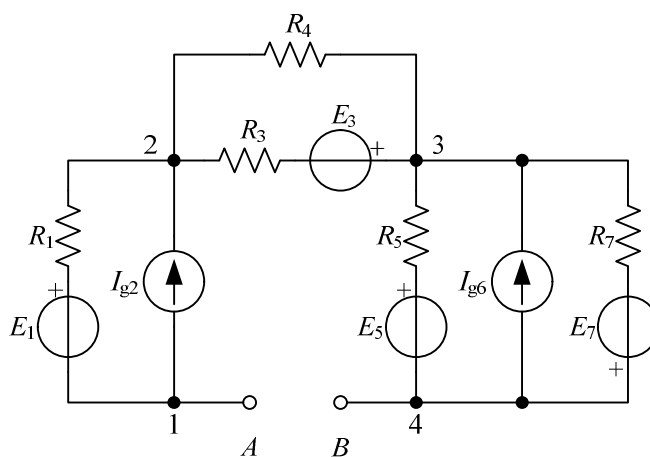
РЕЗУЛТАТ

Параметри Тевененовог генератора су  $E_T = 0$  и  $R_T = 16 \Omega$ .



Слика 186.1.

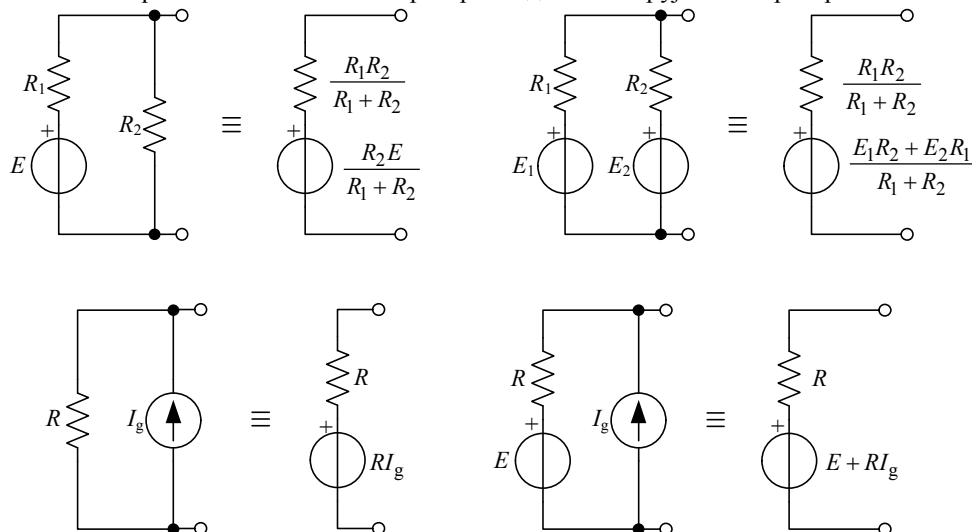
**187.** Користећи се трансфигурацијама редних и паралелних веза у мрежи са слике 187.1, одредити параметре Тевененовог генератора у односу на прикључке  $A$  и  $B$ .



Слика 187.1.

РЕШЕЊЕ

На слици 187.2 приказано је неколико примера замене једноставнијих мрежа еквивалентним Тевененовим генератором: паралелна веза реалног напонског генератора и отпорника, паралелна веза два реална напонска генератора, реални струјни генератор и паралелна веза реалног напонског генератора и идеалног струјног генератора.



Слика 187.2.

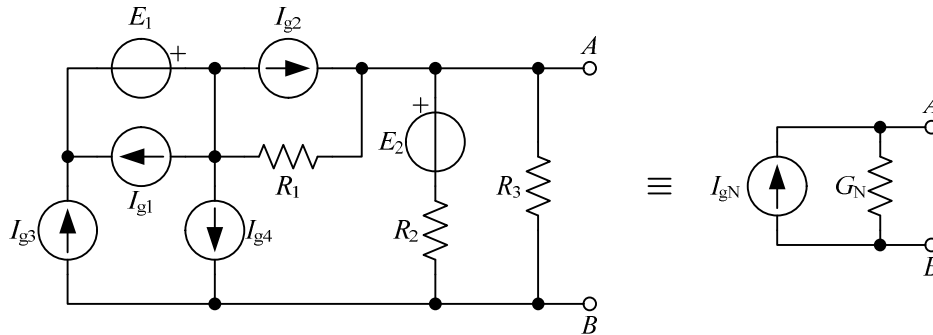
На основу тога, мрежа  $E_1 - R_1 - I_{g2}$  на слици 187.1 може се заменити Тевененовим генератором параметара  $E_{T12} = E_1 + R_1 I_{g2}$  и  $R_{T12} = R_1$ . Мрежа  $E_3 - R_3 - R_4$  се може трансфигурисати у Тевененов генератор параметара  $E_{T23} = \frac{R_4 E_3}{R_3 + R_4}$  и  $R_{T23} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$ . Мрежа  $E_5 - R_5 - I_{g6}$  се може заменити Тевененовим генератором параметара  $E'_{T43} = E_5 + R_5 I_{g6}$  и  $R'_{T43} = R_5$ , па онда тај Тевененов генератор и реални напонски генератор  $E_7 - R_7$  могу заменити новим Тевененовим генератором параметара  $E_{T43} = \frac{R_7 E'_{T43} - R'_{T43} E_7}{R'_{T43} + R_7}$  и  $R_{T43} = \frac{R'_{T43} R_7}{R'_{T43} + R_7}$ .

Тим заменама добијена је редна веза три реална напонска генератора, који се могу трансфигурисати у један реални напонски генератор – тражени Тевененов генератор за мрежу са слике 187.1. Електромоторна сила тог генератора је  $E_{TBA} = -E_1 - R_1 I_{g2} - \frac{R_4 E_3}{R_3 + R_4} + \frac{R_7 E_5 - R_5 E_7}{R_5 + R_7} + \frac{R_7 R_5}{R_5 + R_7} I_{g6}$ , а отпорност је  $R_T = R_1 + \frac{R_4 R_3}{R_3 + R_4} + \frac{R_7 R_5}{R_5 + R_7}$ .

Из претходног се може закључити да сваки еквивалентан реалан напонски генератор (без обзира на процедуру његовог формирања) мора бити Тевененов генератор.



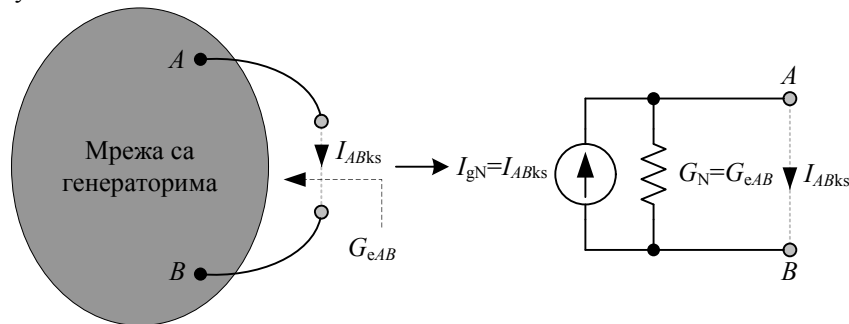
**188.** Израчунати параметре еквивалентног Нортоновог генератора за мрежу приказану на слици 188.1 ако је  $E_1 = 2 \text{ V}$ ,  $E_2 = 1 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 1 \text{ mA}$ ,  $I_{g2} = 2 \text{ mA}$ ,  $I_{g3} = 3 \text{ mA}$ ,  $I_{g4} = 5 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 4 \text{ k}\Omega$ .



Слика 188.1.

РЕШЕЊЕ

Нортонова теорема описује понашање линеарне мреже са једним паром прикључака ( $A$  и  $B$ ) у односу на било коју другу мрежу која се везује за те прикључке (слика 188.2). Према тој теорему, посматрана мрежа се понаша као реалан струјни генератор (Нортонов генератор), као што је приказано на слици 188.2. Посматрана мрежа и одговарајући Нортонов генератор имају исту релацију између струје и напона на приступу.

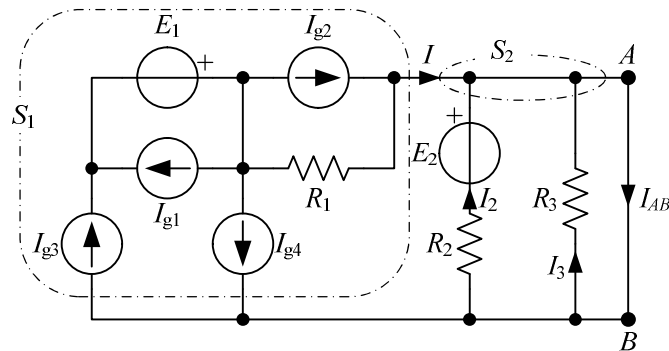


Слика 188.2.

Струја Нортоновог генератора ( $I_{gN}$ ) једнака је струји кратког споја између тачака  $A$  и  $B$ ,  $I_{gN} = I_{ABks}$ , при чему се референтни смерови за  $I_{gN}$  и  $I_{ABks}$  надовезују један на други (слика 188.2). Унутрашња проводност ( $G_N$ ) Нортоновог генератора једнака је еквивалентној (улазној) проводности између тачака  $A$  и  $B$  када је одстрањено дејство извора у мрежи,  $G_N = G_{eAB}$ .

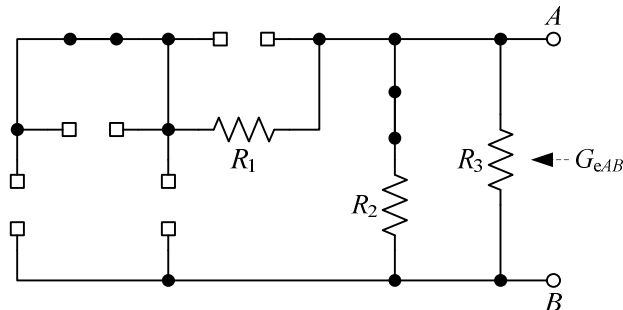
Нортонов генератор је еквивалентан Тевененовом генератору у случају да је  $R_T \neq 0$ . И обрнуто, Тевененов генератор је еквивалентан Нортоновом уколико је  $G_N \neq 0$ . Ако је  $R_T = 0$  или  $G_N = 0$ , еквиваленција није могућа. Између параметара еквивалентних генератора важе релације  $E_T = R_T I_{gN}$  и  $R_T G_N = 1$ .

За одређивање струје кратког споја задате мреже, потребно је израчунати струју кроз кратак спој ( $I_{AB}$ ) у колу са слике 188.3. у том колу је напон  $U_{AB} = 0$ , па је  $I_2 = \frac{E_2}{R_2} = 500 \mu\text{A}$  и  $I_3 = 0$ . Из првог Кирхофовог закона за пресек  $S_1$  следи  $I = I_{g3} - I_{g4} = -2 \text{ mA}$ , па се из једначине за пресек  $S_2$  добија  $I_{AB} = I + I_2 + I_3 = -1,5 \text{ mA} = I_{gN}$ .



Слика 188.3.

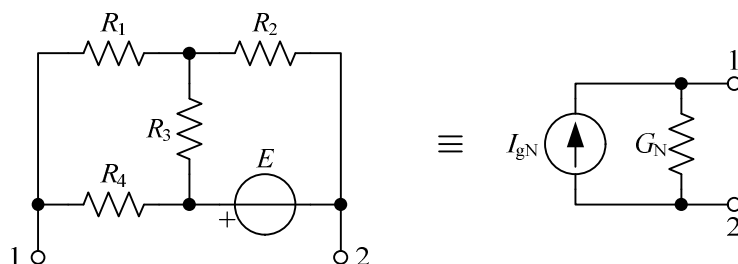
Еквивалентна проводност мреже је, на основу слике 188.4,

$$G_{eAB} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 750 \mu\text{S}.$$


Слика 188.4.

Читаоцу се препоручује да за мрежу са слике 188.1 одреди параметре Тевененовог генератора, и то (а) трансфигурацијом Нортеновог генератора и (б) одређивањем напона празног хода и еквивалентне отпорности.

**189.** За мрежу сталне струје на слици 189.1 је  $E = 30 \text{ V}$  и  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ . Израчунати параметре еквивалентног Нортеновог генератора.

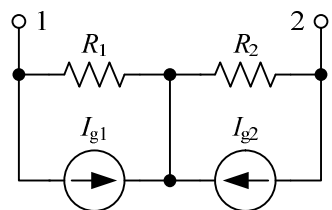


Слика 189.1.

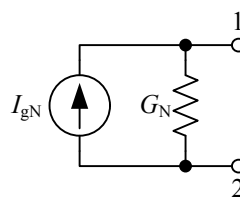
РЕЗУЛТАТ

Параметри Нортоновог генератора су  $I_{gN} = 40 \text{ mA}$  и  $G_N = \frac{5}{3} \text{ mS}$ .

**190.** За мрежу сталне струје на слици 190.1 је  $I_{g1} = I_{g2} = 10 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$  и  $R_2 = 200 \Omega$ . Израчунати параметре Нортоновог генератора.



Слика 190.1.

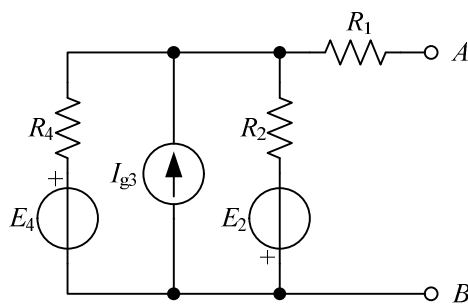


Слика 190.2.

РЕЗУЛТАТ

Према ознакама на слици 190.2, параметри Нортоновог генератора су  $I_{gN} = \frac{1}{300} \text{ A}$  и  $G_N = \frac{1}{300} \text{ S}$ .

**191.** Одредити параметре реалног струјног генератора еквивалентног мрежи са слике 191.1, у односу на прикључке  $A$  и  $B$ .

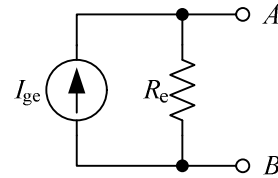


Слика 191.1.

РЕШЕЊЕ

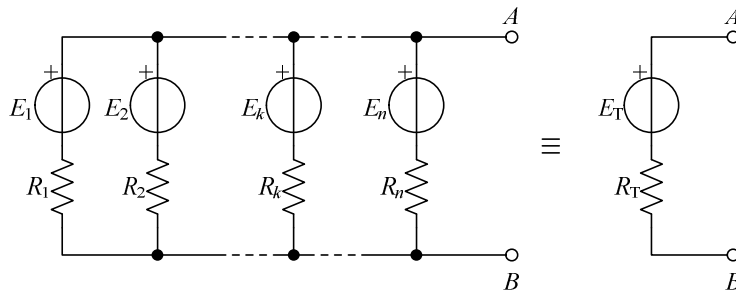
Параметри Тевененовог генератора еквивалентног посматраној мрежи су  $E_{TBA} = \frac{R_2 E_4 - R_4 E_2 + R_2 R_4 I_{g3}}{R_2 + R_4}$  и  $R_T = R_1 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$ .

Тевененов генератор се може трансфигурисати у реални струјни (Нортонов) генератор, параметара  $I_{ge} = \frac{R_2 E_4 - R_4 E_2 + R_2 R_4 I_{g3}}{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4}$  и  $R_T = R_e$  (слика 191.2).



Слика 191.2.

**192.** Одредити параметре реалног напонског генератора еквивалентног паралелној вези  $n$  реалних напонских генератора, као на слици 192.1.

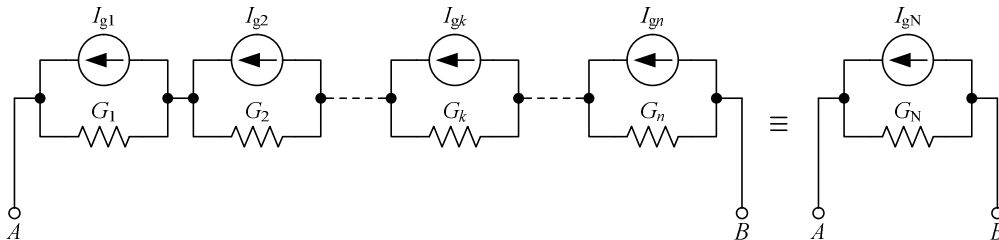


Слика 192.1.

РЕЗУЛТАТ

Параметри Тевененовог генератора су  $E_T = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$  и  $R_T = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$ .

**193.** Одредити параметре реалног струјног генератора еквивалентног редној вези  $n$  реалних струјних генератора, као на слици 193.1.

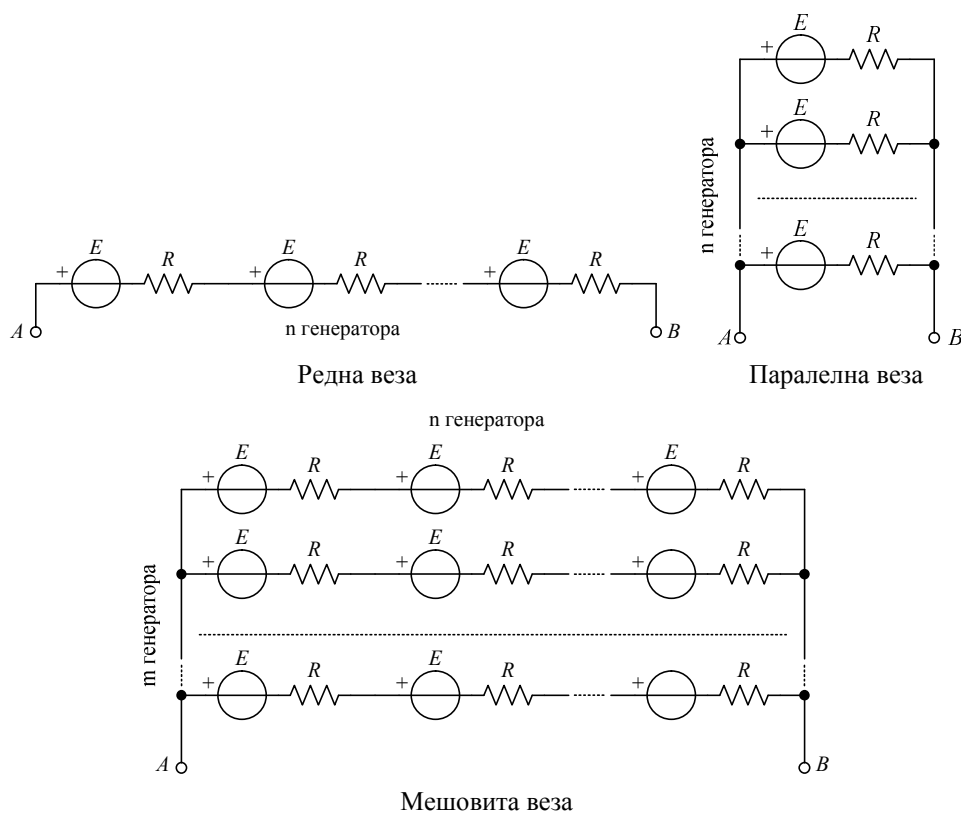


Слика 193.1.

РЕЗУЛТАТ

Параметри Нортоновог генератора су  $I_{gN} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{I_{gk}}{G_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}}$  и  $G_N = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}}$ .

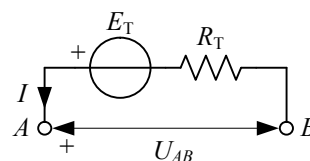
**194.** Реални напонски генератори, сваки електромоторне силе  $E$  и унутрашње отпорности  $R$ , удружују се у три карактеристичне везе: редну, паралелну и мешовиту, као што је приказано на слици 194.1. Одредити параметре Тевененовог генератора ових веза.



Слика 194.1

РЕШЕЊЕ

Примењујући Тевененову теорему за сваку од ових веза, може се према тачкама  $A$  и  $B$  формирати Тевененов генератор, као на слици 194.2.



Слика 194.2.

(а) За редну везу је  $E_T = nE$  и  $R_T = nR$ . Овим се добија еквивалентни генератор са великом емс,  $n$  пута већом од емс појединачног генератора, али је и отпорност групе  $n$  пута већа од унутрашње отпорности појединачног генератора. Сем тога, струја у колу ( $I$ ) не може бити већа од струје коју могу издржати појединачни генератори.

(б) Код паралелне везе генератора је  $E_T = E$  и  $R_T = \frac{R}{n}$ . Група се понаша као еквивалентни генератор чија је емс једнака емс појединачних генератора, а отпорност  $n$  пута мања од отпорности појединачних генератора. Ово је погодно за примену у случајевима када није потребна емс већа од емс расположивих генератора, али је потребна већа струја од оне коју сваки од њих може да издржи, јер је струја сваког појединачног генератора  $I_1 = \frac{I}{n}$ .

(в) У мешовитој вези је  $E_T = nE$  и  $R_T = \frac{n}{m}R$ . Оваква група је погодна када је потребна већа емс од емс појединачних расположивих генератора и већа струја од оне коју могу дати појединачни генератори (јер је струја појединачног генератора  $I_1 = \frac{I}{m}$ ).

**195.** Располаже се са  $n_a = 48$  једнаких акумулатора, сваки емс  $E = 2 \text{ V}$  и унутрашње отпорности  $R_i = 0,4 \Omega$ , и отпорником отпорности  $R = 1,6 \Omega$ . Акумулатори се могу везати (а) сви на ред, (б) сви један са другим у паралелу и (в) по  $n$  акумулатора на ред, па ове редне везе у паралелу (с тим да се употребе сви расположиви акумулатори). Затим се отпорник прикључи на тако везане акумулаторе. Израчунати за које  $n$  је струја отпорника највећа.

РЕШЕЊЕ

(а) При редном везивању свих акумулатора, јачина струје је

$$I = \frac{n_a E}{n_a R_i + R} = \frac{E}{R_i + \frac{R}{n_a}} = 4,62 \text{ A}.$$

(б) При паралелном везивању је  $I = \frac{E}{R + \frac{R_i}{n_a}} = 1,24 \text{ A}.$

(в) У случају мешовите везе је  $I = \frac{nE}{\frac{n^2}{n_a} R_i + R}$ . Максимална струја се може одредити

претраживањем по свим бројевима  $n$  који имају физичког смисла, јер  $n$  и  $\frac{n_a}{n}$  морају бити природни бројеви. Стога  $n$  може узети само вредности из скупа  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ . При томе се за  $n=1$  добија решење под (а), а за  $n=48$  добија се решење под (б). У табели 195.1 су приказане израчунате јачине струја за бројеве  $n$  из тог скупа. На основу тога се закључује да је највећа јачина струје  $I_{\max} = 8,57 \text{ A}$ , а да се може остварити на два начина: са  $n_1 = 12$  или са  $n_2 = 16$ .

Табела 195.1.

| $n$           | 1    | 2    | 3    | 4    | 6    | 8   | 12   | 16   | 24  | 48   |
|---------------|------|------|------|------|------|-----|------|------|-----|------|
| $I[\text{A}]$ | 1,24 | 2,45 | 3,58 | 4,62 | 6,32 | 7,5 | 8,57 | 8,57 | 7,5 | 4,62 |

Уместо таквог поступка, може се посматрати функција  $\frac{1}{I} = \frac{1}{n_a E} \left( n R_i + \frac{n_a}{n} R \right)$ .

Екстремум ове функције се поклапа са екстремумом функције  $I(n)$  (минимум једне функције је максимум друге).

Како је  $\frac{d}{dn} \left( \frac{1}{I} \right) = \frac{1}{n_a E} \left( R_i - \frac{n_a R}{n^2} \right)$ , то услов екстремума,  $\frac{d}{dn} \left( \frac{1}{I} \right) = 0$ , даје

$R_i - \frac{n_a}{n^2} R = 0$ , одакле је  $\bar{n} = \sqrt{\frac{n_a R}{R_i}} = 13,86$ . Други извод посматране функције је

$\frac{d^2}{dn^2} \left( \frac{1}{I} \right) = \frac{2R}{E n^3}$  и у тачки екстремума тај извод је  $\frac{2R}{E} \left( \frac{R_i}{n_a R} \right)^{\frac{3}{2}} > 0$ , односно функција има минимум.

С обзиром на то да  $\bar{n}$  није цео број из скупа допуштених вредности  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ , треба израчунати јачину струје за вредности  $n$  које су најближе  $\bar{n}$ : прву мању од  $\bar{n}$  ( $n_1 = 12$ ), и прву већу од  $\bar{n}$  ( $n_2 = 16$ ), па одабрати ону вредност  $n$  којој одговара јача струја. У посматраном примеру је, случајно, струја иста у оба случаја, па задатак има два решења,  $n_1 = 12$  и  $n_2 = 16$ .

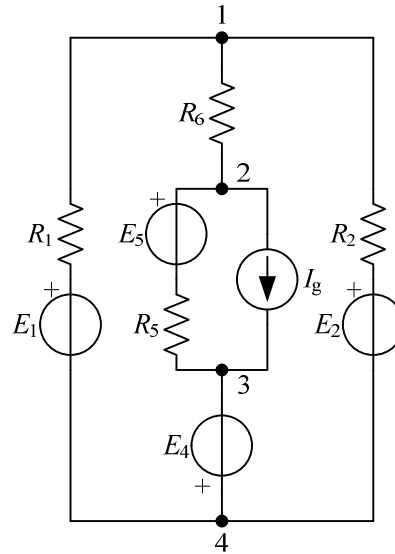
За које  $n$  је снага отпорника  $R$  највећа?

Читаоцу се препоручује да понови задатак ако је  $R = 2 \Omega$ .

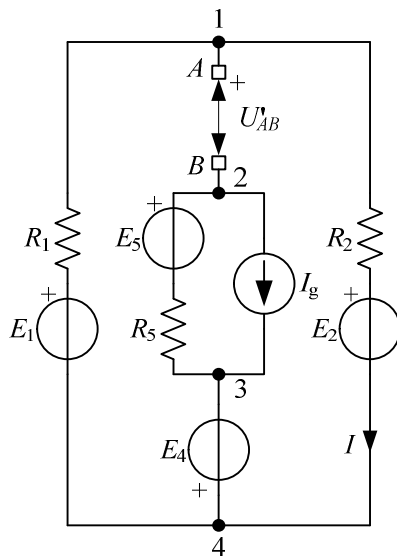
**196.** За разгранато коло сталне струје са слике 196.1 познато је  $E_1 = 30 \text{ V}$ ,  $E_2 = 15 \text{ V}$ ,  $E_4 = 28 \text{ V}$ ,  $E_5 = 11,75 \text{ V}$ ,  $I_g = 50 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 300 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_5 = 100 \Omega$  и  $R_6 = 25 \Omega$ . Израчунати снагу отпорника  $R_6$ .

#### РЕШЕЊЕ

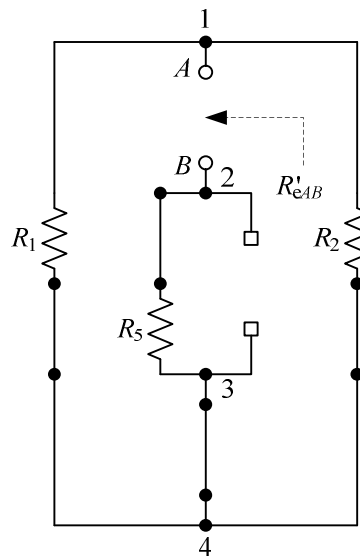
Снага отпорника отпорности  $R_6$  може се израчунати из обрасца  $P_{R_6} = R_6 I_6^2$ , пошто је  $R_6$  познато, потребно је израчунати струју тог отпорника. Пошто је, у овом случају, од интереса само струја једне гране кола, за рачунање те струје погодно је применити Тевененову теорему.



Слика 196.1.



Слика 196.3.

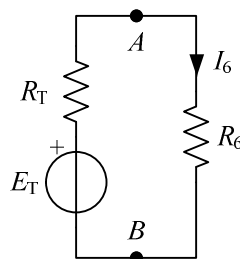


Слика 196.4.

Поделитемо коло са слике 196.1 у два дела (две мреже). Једна мрежа је грана са отпорником  $R_6$ , а друга мрежа је остатак. Друга мрежа је знатно једноставнија од оригиналног кола са слике 196.1 и за њу се лако може одредити Тевененов генератор. На сликама 196.3, 196.4 и 196.5 приказани су коло за одређивање  $E_T$ , отпорничка мрежа за одређивање  $R_T$  и еквивалентно просто коло које се добија прикључењем отпорника  $R_6$  на Тевененов генератор.

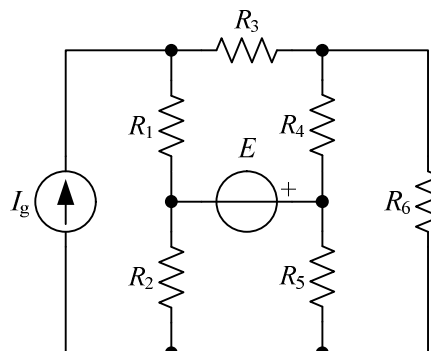


Према овим сликама је  $I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = 37,5 \text{ mA}$ ,  
 $E_T = U'_{AB} = R_5 I_g - E_5 + E_4 + E_1 - R_1 I = 40 \text{ V}$ ,  
 $R_T = R'_{eAB} = R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 175 \Omega$  и  $I_6 = \frac{E_T}{R_T + R_6} = 0,2 \text{ A}$ , па  
 је тражена снага  $P_{R_6} = R_6 I_6^2 = 1 \text{ W}$ .



Слика 196.5.

**197.** За коло са слике 197.1 познато је  $E = 18 \text{ V}$ ,  $I_g = 2 \text{ A}$ ,  $R_1 = 60 \Omega$ ,  $R_2 = 15 \Omega$ ,  $R_3 = 50 \Omega$ ,  $R_4 = 60 \Omega$ ,  $R_5 = 90 \Omega$  и  $R_6 = 150 \Omega$ . Израчунати снагу напонског генератора емс  $E$ .



Слика 197.1.

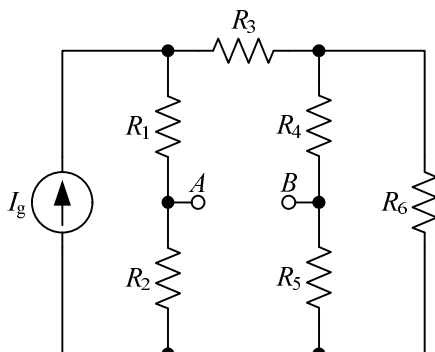
РЕШЕЊЕ

Како је позната емс  $E$  напонског генератора, потребно је, у циљу одређивања снаге, израчунати струју тога генератора. У ту сврху, погодно је применити Тевененову теорему. На слици 197.2 је приказано коло за одређивање карактеристика Тевененовог генератора. У циљу олакшавања прорачуна, погодно је троугао  $R_4 - R_5 - R_6$

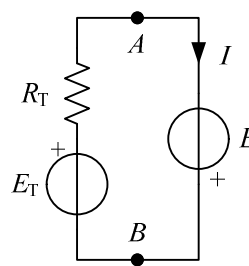
трансфигурисати у звезду  $R_7 - R_8 - R_9$ , где је  $R_7 = \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 30 \Omega$ ,

$R_8 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = 18 \Omega$  и  $R_9 = \frac{R_5 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 45 \Omega$ . Као резултат, параметри

Тевененовог генератора су  $R_T = R'_{eAB} = 60 \Omega$  и  $E_T = U'_{AB} = -15 \text{ V}$  (слика 197.3).



Слика 197.2.



Слика 197.3.

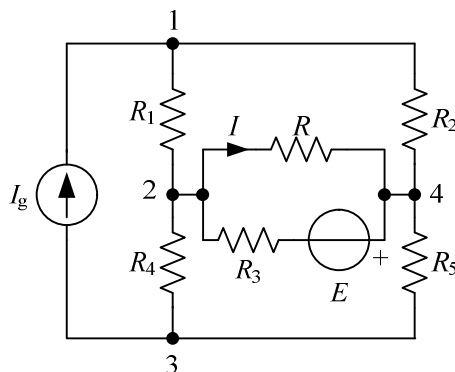
Према слици 197.3 је  $I = \frac{E_T + E}{R_T} = 50 \text{ mA}$ , па је  $P_E = EI = 0,9 \text{ W}$ .

**198.** За коло са слике 198.1 је  $E = 7,2 \text{ V}$ ,  $I_g = 0,2 \text{ A}$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 600 \Omega$ ,  $R_4 = 500 \Omega$ ,  $R_5 = 1,5 \text{ k}\Omega$  и  $R = 120 \Omega$ . Применом Нортонове теореме израчунати струју  $I$ .

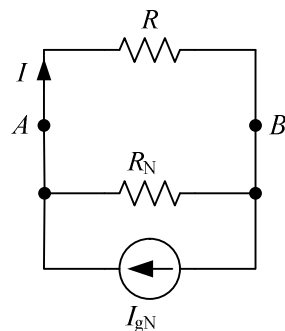
#### РЕШЕЊЕ

Задато коло са слике 198.1 може се поделити на две мреже. Једну мрежу сачињава отпорник  $R$ , а другу остатак кола. Тај остатак се може заменити Нортоновим генератором, па се онда те две мреже могу спојити у коло као на слици 198.2. У том колу је струја отпорника отпорник  $R$  иста као у колу на слици 198.1.

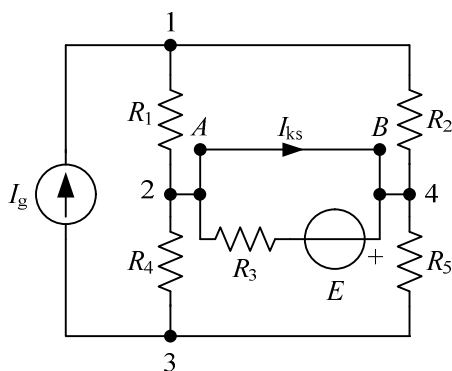
На сликама 198.3 и 198.4 приказана су кола за одређивање карактеристика Нортоновог генератора.



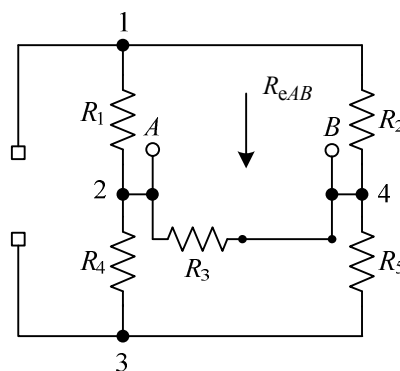
Слика 198.1.



Слика 198.2.



Слика 198.3.



Слика 198.4.

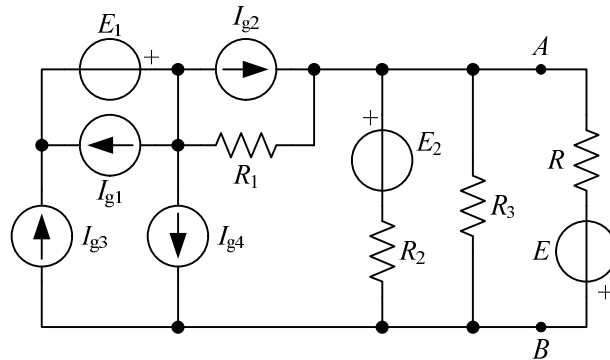
Примењујући суперпозицију за коло на слици 198.3, добија се  $I_{ks} = -\frac{E}{R_3} + \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) I_g = -42 \text{ mA} = I_{gN}$ . За мрежу отпорника са слике 198.4

је  $R_{eAB} = R_3 \parallel (R_1 \oplus R_2) \parallel (R_4 \oplus R_5) = 240 \, \Omega = R_N$ . Сада је, на основу слике 198.2,

$$I = \frac{R_N}{R + R_N} I_N = -28 \, \text{mA}.$$

**199.** За коло са слике 199.1 познато је  $E_1 = 2 \, \text{V}$ ,  $E_2 = 1 \, \text{V}$ ,  $I_{g1} = 1 \, \text{mA}$ ,  $I_{g2} = 2 \, \text{mA}$ ,  $I_{g3} = 3 \, \text{mA}$ ,  $I_{g4} = 5 \, \text{mA}$ ,  $R_1 = 1 \, \text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \, \text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 4 \, \text{k}\Omega$ ,  $E = 3 \, \text{V}$  и  $R = 1/3 \, \text{k}\Omega$ .

Израчунати снагу коју развија идеални напонски генератор емс  $E$ .

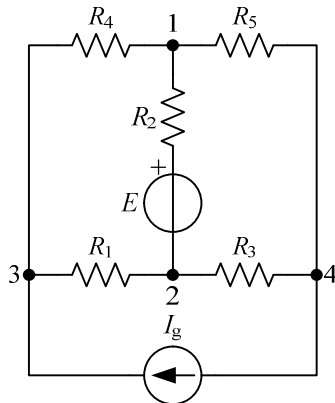


Слика 199.1.

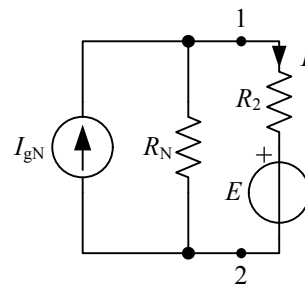
РЕЗУЛТАТ

Видети и задатак 188. Снага идеалног напонског генератора је  $P_E = 1,8 \, \text{mW}$

**200.** У колу на слици 200.1 је  $E = 6 \, \text{V}$ ,  $I_g = 20 \, \text{mA}$ ,  $R_1 = 2 \, \text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 6 \, \text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 5 \, \text{k}\Omega$ ,  $R_4 = 3 \, \text{k}\Omega$  и  $R_5 = 15 \, \text{k}\Omega$ . Израчунати струју у грани са напонским генератором.



Слика 200.1.



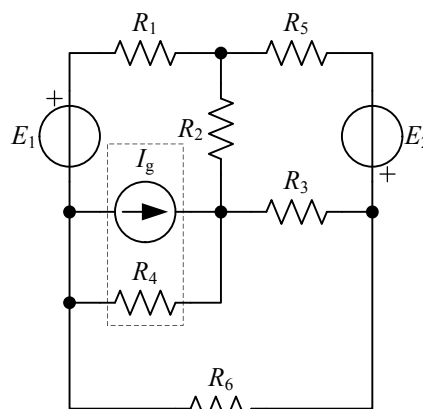
Слика 200.2.

РЕШЕЊЕ

У односу на грану са напонским генератором, остатак кола се може заменити Нортоним генератором (слика 200.2) параметара  $I_{gN} = 3 \, \text{mA}$  и  $R_N = 4 \, \text{k}\Omega$ . Тражена

струја је  $I = \frac{-E + R_N I_{gN}}{R_2 + R_N} = 600 \, \mu\text{A}$ .

**201.** За коло сталне струје приказано на слици 201.1 познато је  $E_1 = 3,3 \text{ V}$ ,  $E_2 = 12 \text{ V}$ ,  $I_g = 1 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5,6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 3,3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 0,18 \text{ M}\Omega$ ,  $R_5 = 22 \text{ k}\Omega$  и  $R_6 = 470 \Omega$ . Израчунати снагу реалног струјног генератора ( $I_g - R_4$ ).

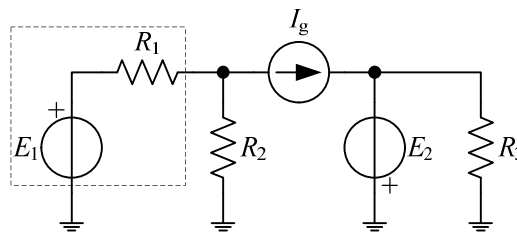


Слика 201.1.

РЕЗУЛТАТ

Снага реалног струјног генератора је  $P_{I_g} = U_{I_g} I_g - U_{I_g}^2 / R_4 \approx 3,443 \text{ mW}$ .

**202.** За коло сталне струје приказано на слици 202.1 познато је  $E_1 = 3,3 \text{ V}$ ,  $I_g = 1 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5,6 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 4,7 \text{ k}\Omega$ . Израчунати снагу реалног напонског генератора ( $E_1 - R_1$ ).

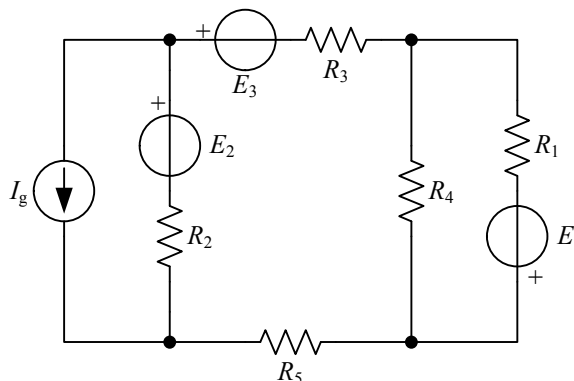


Слика 202.1.

РЕЗУЛТАТ

Снага реалног напонског генератора је  $P_{E_1} = E_1 I_{E_1} - R_1 I_{E_1}^2 = 2,632 \text{ mW}$ .

**\*\*203.** За коло са слике 203.1 познато је  $E_1 = 4 \text{ V}$ ,  $E_2 = 10 \text{ V}$ ,  $E_3 = 3 \text{ V}$ ,  $I_g = 20 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 300 \Omega$ ,  $R_2 = 150 \Omega$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_4 = 100 \Omega$  и  $R_5 = 75 \Omega$ . Користећи се Тевеноновом теоремом и теоремом суперпозиције, израчунати струје свих грана кола.



Слика 203.1.

РЕШЕЊЕ

На слици 203.2 је приказано разгранато коло сталне струје са једном граном која се прекида, а уз претпоставку да се између тачака прекида може одредити Тевенонов генератор (да улазна отпорност између тачака прекида није бесконачно велика). Пре прекида у грани је постојала струја  $I$  (слика 203.2). После прекида (слика 203.3) је

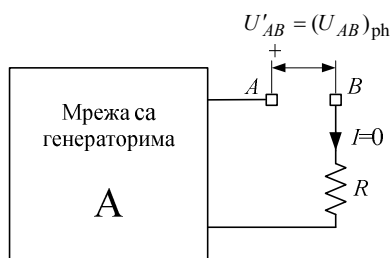
$I = 0$ , а између тачака прекида је напон празног хода  $U_{AB} = (U_{AB})_{ph}$ . Уколико се између тачака  $A$  и  $B$ , уместо прекида, постави идеалан напонски генератор (компензациони генератор) емс  $E_{BA} = E_T = U_{AB}$  (слика 203.4), струја у грани ће и даље бити  $I = 0$ .

Ако се у грану између тачака  $A$  и  $B$  стави још један идеални напонски генератор емс  $E_{AB} = E_T = U'_{AB}$ , супротног поларитета од компензационог генератора, као на слици 203.5, у грани ће постојати иста струја  $I$  као на слици 203.2. Према теореди суперпозиције, струја  $I$  у шеми на слици 203.5, а самим тим и у полазној шеми са слике 203.2, једнака је алгебарском збиру струја те гране када у колу делују поједини генератори или поједине групе генератора. Генератори из мреже  $A$  заједно са генератором емс  $E_{BA} = E_T = U'_{AB} = (U_{AB})_{ph}$  у посматраној грани не изазивају струју, па је струја у тој грани последица само деловања генератора  $E_T$  у колу на слици 203.6.

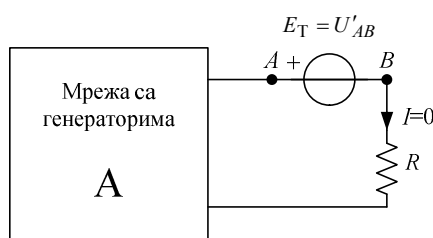
Претходно разматрање важи и за струју у било којој грани у мрежи  $A$  на слици 203.2. Одатле се закључује да се струја било које гране кола може добити алгебарским сабирањем струје у стационарном стању када је једна грана прекинута (у празном ходу) и у стационарном стању када у колу делује само један идеални напонски генератор постављен између тачака прекида гране, чија је емс једнака напону празног хода између тих тачака ( $E = U_{ph}$ ), као на слици 203.6.



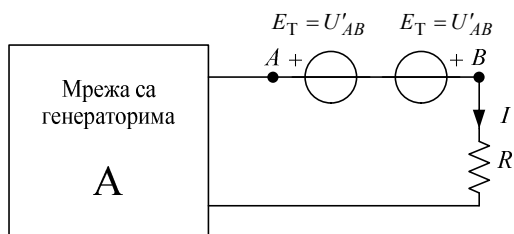
Слика 203.2.



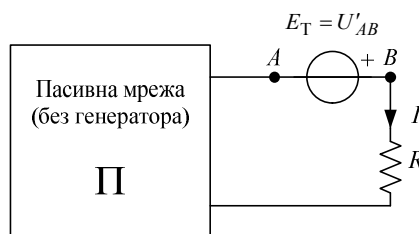
Слика 203.3.



Слика 203.4.



Слика 203.5.

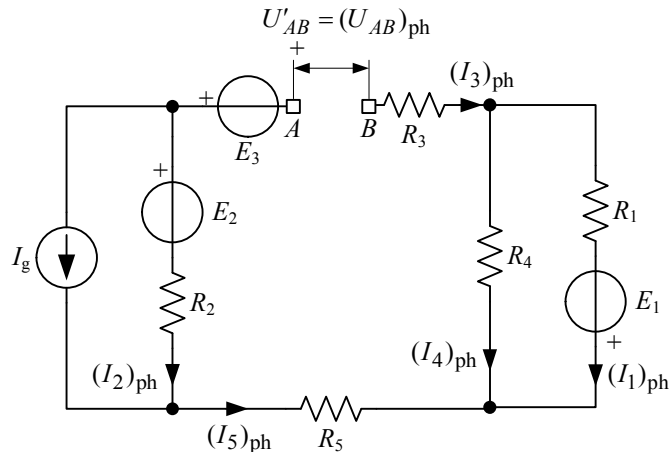


Слика 203.6.

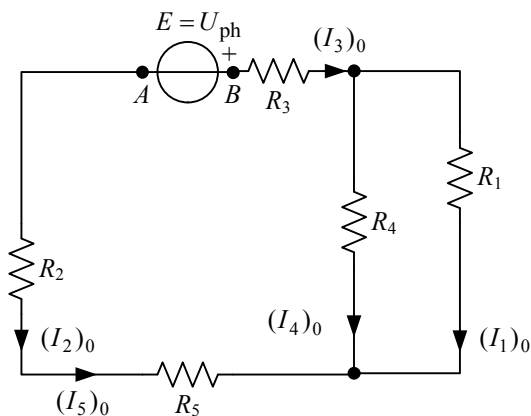
Ради решавања кола са слике 203.1, може се прекинути грана  $E_3 - R_3$  између отпорника и генератора. После прекида једне гране, коло се обично драстично редукује. Према оријентацијама са слике 203.7 је  $(I_2)_{\text{ph}} = -I_g = -20 \text{ mA}$ ,  $(I_1)_{\text{ph}} = -(I_4)_{\text{ph}} = \frac{E_1}{R_1 + R_4} = 10 \text{ mA}$ ,  $(I_3)_{\text{ph}} = 0$  и  $(I_5)_{\text{ph}} = 0$ . Напон празног хода између тачака прекида гране је  $U_{\text{ph}} = -R_4(I_4)_{\text{ph}} + R_2(I_2)_{\text{ph}} + E_2 - E_3 = 5 \text{ V}$ .

На слици 203.8 је приказано коло у коме делује само генератор емс  $E = U_{\text{ph}}$ , а одстрањено је дејство свих извора у остатку кола. Тада је  $(I_3)_0 = -(I_2)_0 = -(I_5)_0 = \frac{U_{\text{ph}}}{R_3 + R_2 + R_5 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}} = 10 \text{ mA}$ ,  $(I_4)_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_4} (I_3)_0 = 7,5 \text{ mA}$

и  $(I_1)_0 = \frac{R_4}{R_1 + R_4} (I_3)_0 = 2,5 \text{ mA}$ .



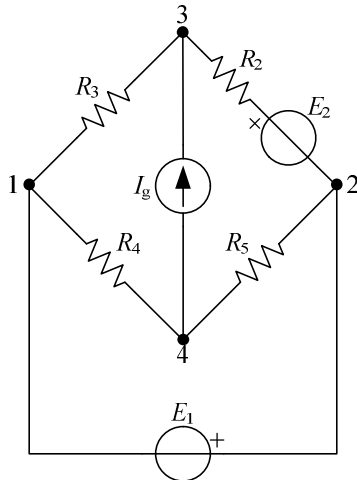
Слика 203.7.



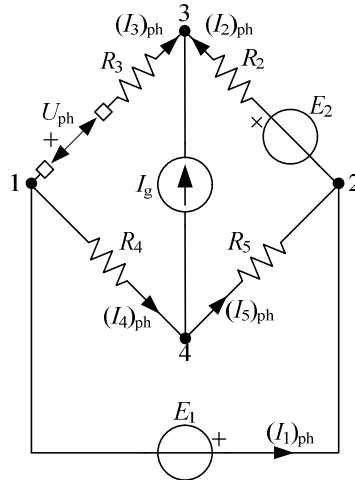
Слика 203.8.

Струје грана кола су, на основу суперпозиције,  $I_1 = (I_1)_{ph} + (I_1)_0 = 12,5 \text{ mA}$ ,  $I_2 = (I_2)_{ph} + (I_2)_0 = -30 \text{ mA}$ ,  $I_3 = (I_3)_{ph} + (I_3)_0 = 10 \text{ mA}$ ,  $I_4 = (I_4)_{ph} + (I_4)_0 = -2,5 \text{ mA}$ , и  $I_5 = (I_5)_{ph} + (I_5)_0 = -10 \text{ mA}$ .

**\*\*204.** За коло са слике 204.1 је  $E_1 = E_2 = 10 \text{ V}$ ,  $I_g = 0,4 \text{ A}$ ,  $R_2 = R_3 = 50 \Omega$  и  $R_4 = R_5 = 100 \Omega$ . Израчунати струје свих грана кола користећи се Тевененовом теоремом и теоремом суперпозиције.



Слика 204.1.



Слика 204.2.

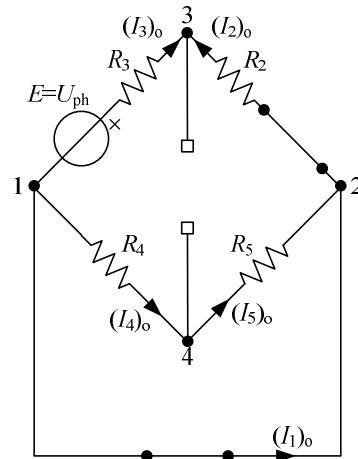
**РЕШЕЊЕ**

На слици 204.2 приказано је коло после кидања гране са отпорником  $R_3$ . Према тој слици је

$$I_g + (I_5)_{ph} + (I_1)_{ph} = 0, \\ E_1 + R_5(I_5)_{ph} - R_4(I_1)_{ph} = 0, \quad (I_2)_{ph} = -I_g, \\ (I_4)_{ph} = -(I_1)_{ph} \quad \text{и} \quad (I_3)_{ph} = 0. \quad \text{Одавде је}$$

$$(I_1)_{ph} = \frac{E_1 - R_5 I_g}{R_4 + R_5} = -0,15 \text{ A} \quad \text{и} \quad (I_5)_{ph} = -0,25 \text{ A}.$$

Напон празног хода између тачака прекида гране је  $U_{ph} = -R_2 I_g - E_2 - E_1 = -40 \text{ V}$ .



Слика 204.3.

Према слици 204.3, када у колу делује само генератор емс  $E = U_{ph}$ , је  $(I_3)_0 = -(I_2)_0 = \frac{E}{R_3 + R_2} = -0,4 \text{ A}$ ,  $(I_1)_0 = -(I_3)_0 = 0,4 \text{ A}$ ,  $(I_4)_0 = 0$  и  $(I_5)_0 = 0$ . Струје

грана задатог кола су  $I_1 = (I_1)_{\text{ph}} + (I_1)_0 = 0,25 \text{ A}$ ,  $I_2 = (I_2)_{\text{ph}} + (I_2)_0 = 0$ ,  $I_3 = (I_3)_{\text{ph}} + (I_3)_0 = -0,4 \text{ A}$ ,  $I_4 = (I_4)_{\text{ph}} + (I_4)_0 = 0,15 \text{ A}$  и  $I_5 = (I_5)_{\text{ph}} + (I_5)_0 = -0,25 \text{ A}$ .

**205.** Променљив отпорник  $R_p$  чија се отпорност може мењати од 0 до  $400 \Omega$ , отпорници отпорности  $R_2 = R_3 = 200 \Omega$  и  $R_4 = 400 \Omega$ , мерни инструмент унутрашње отпорности  $R_A = 100 \Omega$  и струјни генератор струје  $I_g = 135 \text{ mA}$  образују коло приказано на слици 205.1. Одредити и графички представити струју  $I_A$  у зависности од отпорности  $R_p$ .

#### РЕШЕЊЕ

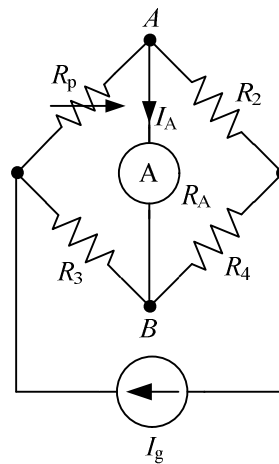
Како је од интереса само струја гране са мерним инструментом, погодно је применити Тевененову теорему. Параметри Тевененовог генератора, према ознакама на слици 205.2, су

$$E_T = U'_{AB} = \frac{R_3(R_p + R_2) - R_p(R_3 + R_4)}{R_p + R_2 + R_3 + R_4} I_g \quad \text{и}$$

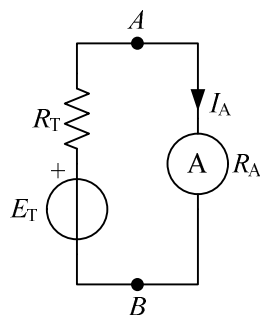
$$R_T = R_{\text{eAB}} = \frac{(R_p + R_3)(R_2 + R_4)}{R_p + R_2 + R_3 + R_4}, \quad \text{па је}$$

$$I_A = \frac{E_T}{R_T + R_A}. \quad \text{Заменом бројних вредности}$$

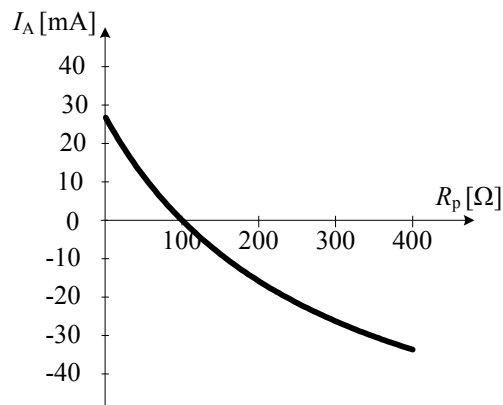
познатих величина у  $SI$  систему јединица, добија се зависност  $I_A(R_p) = 0,54 \frac{100 - R_p}{7R_p + 2000}$ .



Слика 205.1.



Слика 205.2.



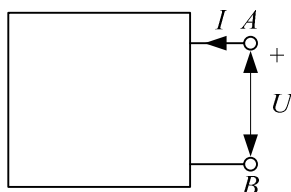
Слика 205.3.

На слици 205.3 је приказан график зависности  $I_A = I_A(R_p)$ , из кога се види да се, променом отпорности  $R_p$ , струји мерног инструмента  $I_A$  мења интензитет, али и смер.

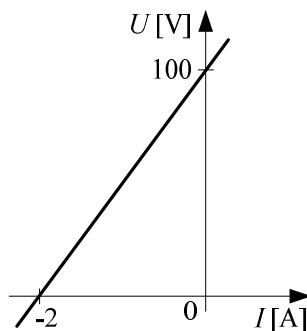


Колика је струја амперметра када би грана са променљивим отпорником била у прекиду?

**206.** Веза између напона и струје мреже са слике 206.1 приказана је на слици 206.2. Израчунати параметре (а) Тевененовог и (б) Нортоновог генератора еквивалентног овој мрежи.



Слика 206.1.

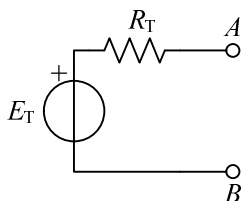


Слика 206.2.

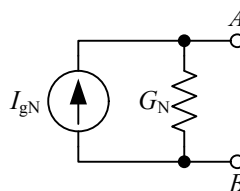
РЕЗУЛТАТ

(а) Параметри Тевененовог генератора (слика 206.3) су  $E_T = 100 \text{ V}$  и  $R_T = 50 \Omega$ .

(б) Параметри Нортоновог генератора (слике 206.4) су  $I_{gN} = 2 \text{ A}$  и  $G_N = 20 \text{ mS}$ .



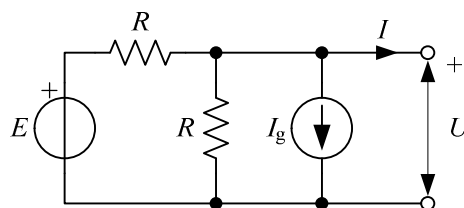
Слика 206.3.



Слика 206.4.

**207.** У колу приказаном на слици 207.1 је  $E = 20 \text{ V}$ ,  $I_g = 1 \text{ A}$  и  $R = 10 \Omega$ .

(а) Формирати аналитичку везу између напона  $U$  и струје  $I$ . (б) Колики је напон када је  $I = 0$ ? (в) Колика је струја када је  $U = 0$ ?



Слика 207.1.

РЕЗУЛТАТ

(а) Аналитичка веза између напона и струје гласи  $U_{[V]} = 5 - 5I_{[A]}$ .

(б) Када је  $I = 0$ , тада је  $U = 5 \text{ V}$ .

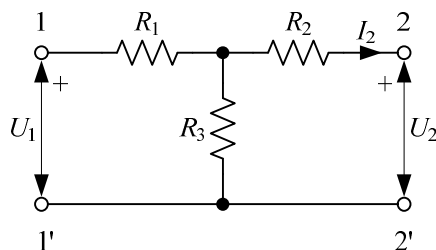
(в) Када је  $U = 0$ , тада је  $I = 1 \text{ A}$ .

Да ли се на основу података из тачака (а) и (б) може одредити Тевененов генератор за мрежу са слике 207.1? А Нортонов генератор?

**208.** За четворопол приказан на слици 208.1 познато је  $U_1 = 10 \text{ V}$  ( $U_1 = \text{const}$ ),  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ . Одредити израз за струју  $I_2$  у функцији напона  $U_2$ .

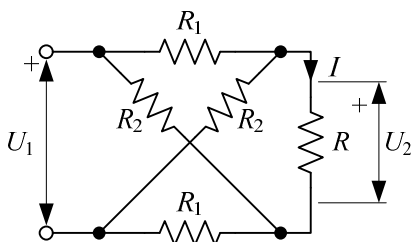
#### РЕЗУЛТАТ

Тражена израз је  $I_{[\text{mA}]} = 4 - 0,6 U_{2[\text{V}]}$ .

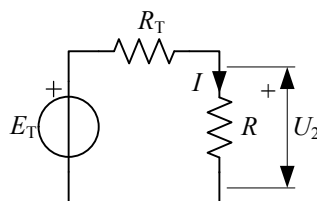


Слика 208.1.

**209.** За мрежу приказану на слици 209.1 познате су отпорности  $R_1 = 100 \Omega$  и  $R_2 = 200 \Omega$ . Изразити струју  $I$  у функцији напона  $U_1$  и  $U_2$ .



Слика 209.1.

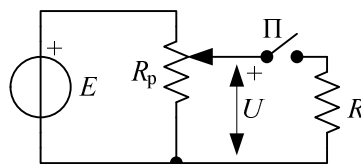


Слика 209.2.

#### РЕШЕЊЕ

Заменимо део кола лево од прикључака мреже компензационим напонским генератором емс  $E_k = U_1$ . Тада се, у односу на отпорник  $R$ , остатак кола може заменити Тевененовим генератором емс  $E_T = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} U_1$  и отпорности  $R_T = 2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ , као на слици 209.2. Јачина струје отпорника  $R$  је  $I = \frac{E_T - U_2}{R_T} = \frac{R_2 - R_1}{2 R_1 R_2} U_1 - \frac{R_2 + R_1}{2 R_1 R_2} U_2$ , односно, нумерички,  $I_{[\text{mA}]} = 2,5(U_{1[\text{V}]} - 3U_{2[\text{V}]})$ .

**210.** У колу са слике 210.1. позната је емс идеалног напонског генератора  $E = 10 \text{ V}$  и отпорност потенциометра  $R_p = 1 \text{ k}\Omega$ . Колика треба да буде отпорност отпорника  $R$ , па да се напон  $U$  када је прекидач П затворен не разликује за више од 10% од напона када је прекидач отворен (за произвољан положај клизача потенциометра)?



Слика 210.1.

РЕШЕЊЕ

Идеални напонски генератор и потенциометар могу се заменити Тевененовим генератором отпорности  $R_T = R_1 \parallel R_2$ , где је  $R_1$  отпорност између клизача и доњег прикључка потенциометра,  $R_2$  отпорност између клизача и горњег прикључка потенциометра и  $R_1 + R_2 = R_p$ . Емс Тевененовог генератора је  $E_T = U_0 = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ , где

је  $U_0$  напон између клизача и доњег прикључка потенциометра када је прекидач П отворен. Када се прекидач затвори, тада је  $U = E_T \frac{R}{R + R_T} = U_0 \frac{R}{R + R_T}$ . Очигледно је

$U < U_0$ . Према услову задатка је  $\frac{|U - U_0|}{U_0} \leq 0,1$ , одакле следи  $\frac{R_T}{R + R_T} \leq 0,1$  односно

$R \geq 9R_T$ . Овај услов мора бити испуњен за сваки положај клизача. Отпорност Тевененовог генератора мења се са променом положаја клизача. Најмања је (нула) када је клизач у крајњем доњем или у крајњем горњем положају. Отпорност Тевененовог генератора је највећа када је  $R_1 = R_2$  и износи  $R_{T\max} = R_p / 4 = 250 \Omega$ . Одавде следи да мора бити испуњен услов  $R \geq 9R_{T\max} = 2,25 \text{ k}\Omega$ .

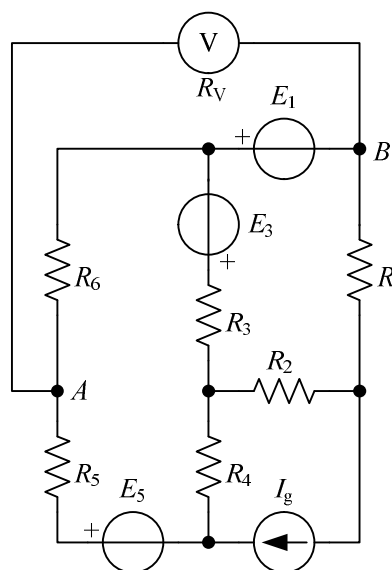
Читаоцу се препоручује да нацрта зависност напона  $U$  од отпорности  $R_1$  када је прекидач П отворен и када је затворен, ако је  $R = 2,25 \text{ k}\Omega$ .

**211.** Отпорности отпорника у колу са слике 211.1 су  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 15 \Omega$ ,  $R_5 = 5 \Omega$  и  $R_6 = 15 \Omega$ . Ради мерења напона између тачака  $A$  и  $B$  прикључен је волтметар унутрашње отпорности  $R_V = 200 \Omega$ , који показује  $U_{AB} = 30 \text{ V}$ . Колики је напон између тачака  $A$  и  $B$  пре прикључивања волтметра?

РЕШЕЊЕ

Коло се према тачкама  $A$  и  $B$ , односно према волтметру, може представити Тевененовим генератором као на слици 211.2. Напон између тачака  $A$  и  $B$  пре прикључења волтметра је  $U_{AB} = E_T$ , и он је циљ мерења.

Према слици 211.2 је  $U'_{AB} = U_{AB} + R_T I_V$ , где је  $U_{AB} = 30 \text{ V}$ , одакле се закључује да би снижавање струје волтметра повећало тачност мереног напона. Међутим, снижавање струје волтметра захтева употребу осетљивијег инструмента.



Слика 211.1

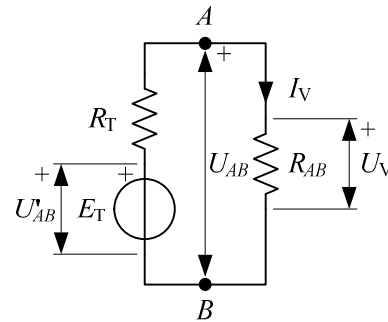
Из израза за апсолутну систематску грешку мерења,  $\Delta U_{AB} = U_{AB} - U'_{AB} = -R_T I_V < 0$ , закључује се да је увек измерени напон нижи од мереног напона. Другачије посматрано, када се између две тачке прикључи грана која садржи само отпорник, напон између тачака мора да се смањи по апсолутној вредности.

Релативна систематска грешка мерења,  $\frac{\Delta U_{AB}}{U_{AB}} = -\frac{R_T}{R_V}$ , не зависи од мереног напона.

Грешка мерења је утолико мања, уколико је унутрашња отпорност употребљеног волтметра већа од отпорности кола на месту мерења напона, што је важан критеријум приликом избора волтметра.

У посматраном случају је  $R_T = R'_{eAB} = 10 \Omega$ , па је напон пре прикључења волтметра

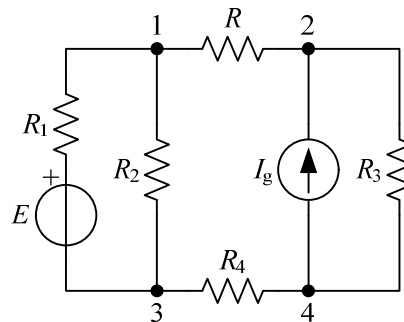
$$U'_{AB} = \left(1 + \frac{R_T}{R_V}\right) U_{AB} = 31,5 \text{ V} \text{ и } \Delta U_{AB} = -1,5 \text{ V}.$$



Слика 211.2

Релативна систематска грешка мерења овог напона, изражена у процентима, је  $\frac{\Delta U_{AB}}{U'_{AB}} \cdot 100\% \approx -4,76\%$ .

**212.** У колу сталне струје приказаном на слици 212.1 је  $E = 4 \text{ V}$ ,  $I_g = 200 \mu\text{A}$ ,  $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 250 \Omega$  и  $R = 20 \text{ k}\Omega$ . Потребно је измерити напон  $U_{12}$  волтметром унутрашње отпорности  $R_V = 12 \text{ k}\Omega$ . Израчунати апсолутну и релативну систематску грешку овог мерења.



Слика 212.1.

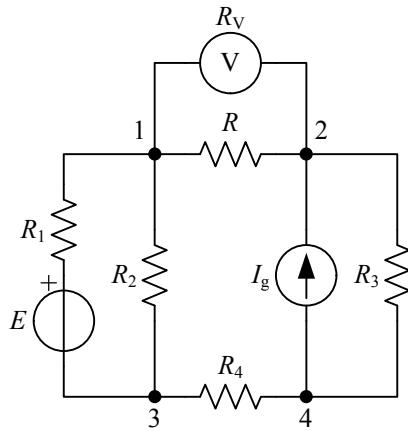
#### РЕШЕЊЕ

На слици 212.2 приказана је шема везивања волтметра. У односу на волтметар, остатак кола са слике 212.1 може се заменити Тевененовим генератором (слика 212.3), емс  $E_T = U_{12} = 160 \text{ mV}$  и отпорности  $R_T = 4 \text{ k}\Omega$ . Та емс једнака је напону који смо хтели измерити ( $U_{12}$ ). Напон који мери волтметар мањи је (по апсолутној вредности) од напона који смо хтели измерити,  $U'_{12} = \frac{R_V}{R_V + R_T} U_{12} = 120 \text{ mV}$ .

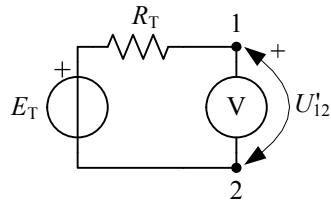
$$U'_{12} = \frac{R_V}{R_V + R_T} U_{12} = 120 \text{ mV}.$$

Апсолутна грешка мерења је  $\Delta U_{12} = U'_{12} - U_{12} = -40 \text{ mV}$ , а релативна грешка је

$$\frac{\Delta U_{12}}{U_{12}} = -0,25 = -25\%.$$

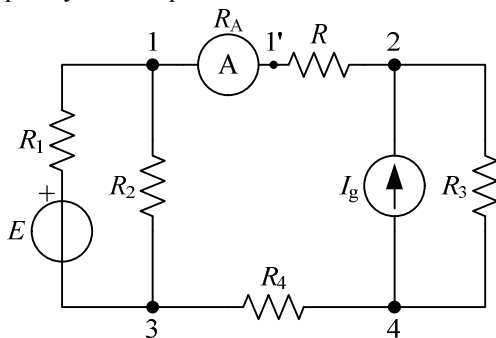


Слика 212.2.

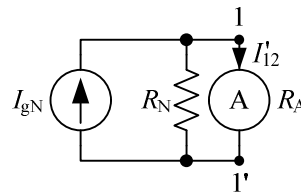


Слика 212.3.

**213.** У колу са слике 212.1 потребно је измерити струју  $I_{12}$  амперметром унутрашње отпорности  $R_A = 1 \text{ k}\Omega$ . Израчунати апсолутну и релативну систематску грешку овог мерења.



Слика 213.1.



Слика 213.2.

#### РЕШЕЊЕ

На слици 213.1 приказана је шема везивања амперметра. У односу на амперметар, остатак кола се може заменити Нортоновим генератором (слика 213.2). Струја тог генератора,  $I_{gN} = I_{12} = 8 \text{ }\mu\text{A}$ , једнака је струји коју смо хтели измерити у колу са слике 212.1. Отпорност Нортоновог генератора је  $R_N = 25 \text{ k}\Omega$ . Струја коју мери амперметар

је, међутим, мања по апсолутној вредности,  $I'_{12} = \frac{R_N}{R_N + R_A} I_{gN} = \frac{100}{13} \text{ }\mu\text{A} \approx 7,69 \text{ }\mu\text{A}$ .

Апсолутна грешка мерења је  $\Delta I_{12} = I'_{12} - I_{12} \approx -0,31 \text{ }\mu\text{A}$ , а релативна грешка је

$$\frac{\Delta I_{12}}{I_{12}} \approx -0,04 = -4\%.$$

**214.** Када се напон једне гране кола сталне струје мери волтметром унутрашње отпорности  $R_{V1} = 250 \text{ k}\Omega$ , добија се резултат  $U_1 = 10 \text{ V}$ , а када се мери волтметром унутрашње отпорности  $R_{V2} = 500 \text{ k}\Omega$ , резултат је  $U_2 = 15 \text{ V}$ . Израчунати напон те гране када волтметар није прикључен.

РЕЗУЛТАТ

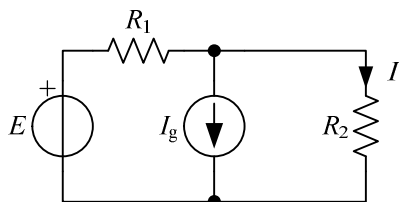
Када волтметар није прикључен, напон је  $U = 30 \text{ V}$ .

**215.** Волтметром унутрашње отпорности  $R_{V1} = 5 \text{ k}\Omega$  измерен је напон  $U_{12} = 6 \text{ V}$  између тачака 1 и 2 једног кола сталне струје. Затим је волтметром унутрашње отпорности  $R_{V2} = 10 \text{ k}\Omega$  између истих тачака измерен напон  $U'_{12} = 8 \text{ V}$ . Колики ће бити резултат мерења напона волтметром унутрашње отпорности  $R_{V3} = 15 \text{ k}\Omega$ ?

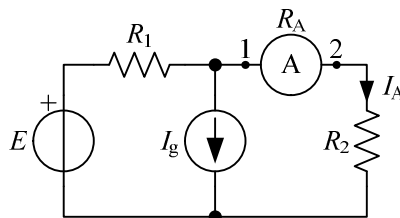
РЕЗУЛТАТ

Резултат мерења ће бити  $U''_{12} = 9 \text{ V}$ .

**216.** У колу са слике 216.1 је  $E = 13 \text{ V}$ ,  $I_g = 20 \text{ A}$ ,  $R_1 = 0,04 \Omega$  и  $R_2 = 2,4 \Omega$ . Потребно је измерити јачину струје у грани са отпорником  $R_2$ . На располагању је амперметар унутрашње отпорности  $R_A = 0,06 \Omega$ . (а) Нацртати шему по којој треба везати амперметар. Израчунати (б) јачину струје коју мери амперметар и (в) релативну систематску грешку у односу на јачину струје коју је требало измерити. Релативну грешку рачунати као  $\delta_r = (I_A - I) / I$ , где је  $I_A$  измерена вредност, а  $I$  тачна вредност.



Слика 216.1.



Слика 216.2.

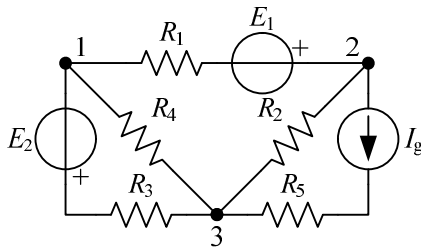
РЕЗУЛТАТ

(а) Шема прикључивања приказана је на слици 216.2.

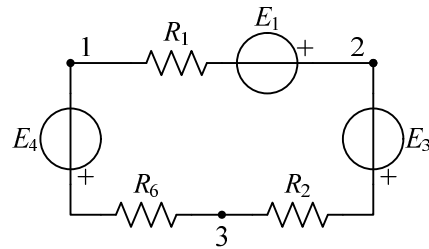
(б) Пре прикључивања амперметра, јачина струје је  $I = 5 \text{ A}$ , а по прикључивању амперметра је  $I_A = 4,88 \text{ A}$ .

(в) Релативна грешка је  $\delta_r = -0,024$ .

217. У колу са слике 217.1 је  $E_1 = 20 \text{ V}$ ,  $E_2 = 15 \text{ V}$ ,  $I_g = 20 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 500 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_5 = 200 \Omega$ . Израчунати напон  $U_{12}$ .



Слика 217.1.



Слика 217.2.

РЕШЕЊЕ

Задатак ћемо решити поступним трансфигурацијама једноставних делова кола, користећи се Тевененовом теоремом, тако да се при томе тачке 1 и 2 не изгубе.

Најпре, редна веза струјног генератора и отпорника  $R_5$  еквивалентна је само струјном генератору струје  $I_g$ . Паралелна веза тог струјног генератора и отпорника  $R_2$  еквивалентна је реалном напонском генератору емс  $E_3 = R_2 I_g = 6 \text{ V}$  и отпорности  $R_2$  (слика 217.2).

Паралелна веза реалног напонског генератора  $E_2 - R_3$  и отпорника  $R_4$  еквивалентна је реалном напонском генератору емс  $E_4 = \frac{E_2 R_4}{R_3 + R_4} = 6 \text{ V}$  и отпорности

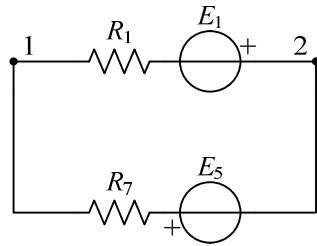
$$R_6 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 1,2 \text{ k}\Omega \text{ (слика 217.2).}$$

Редна веза реалних напонских генератора  $E_3 - R_2$  и  $E_4 - R_6$  еквивалентна је реалном напонском генератору емс  $E_5 = E_3 - E_4 = 0$  и отпорности  $R_7 = R_2 + R_6 = 1,5 \text{ k}\Omega$  (слика 217.3), односно само отпорнику  $R_7$ .

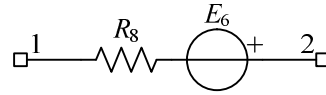
Најзад, паралелна веза реалног напонског генератора  $E_1 - R_1$  и отпорника  $R_7$  еквивалентна је реалном напонском генератору емс  $E_6 = \frac{E_1 R_7}{R_1 + R_7} = 15 \text{ V}$  и отпорности

$$R_8 = \frac{R_1 R_7}{R_1 + R_7} = 375 \Omega \text{ (слика 217.4). Тај генератор је у празном ходу, па је тражени напон}$$

$$U_{12} = -E_6 = -15 \text{ V}.$$

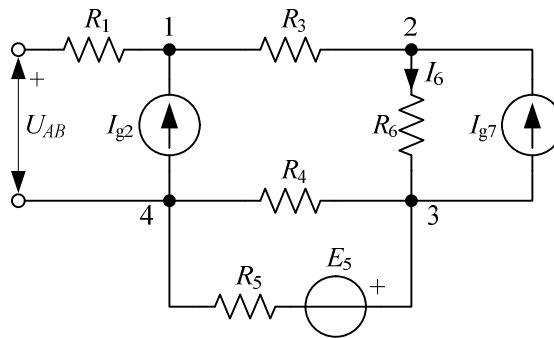


Слика 217.3.

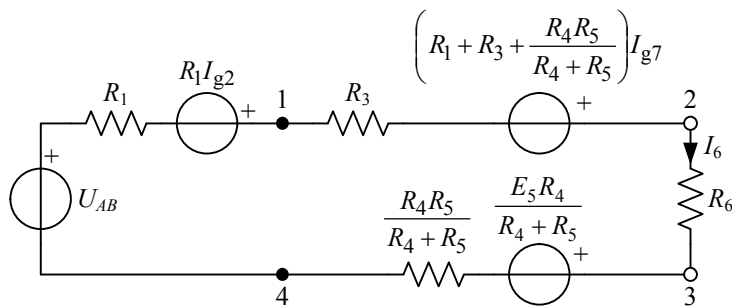


Слика 217.4.

**218.** На слици 218.1 приказано је електрично коло сталне струје за које је познато  $U_{AB} = 30 \text{ V}$ ,  $E_5 = 17,5 \text{ V}$ ,  $I_{g2} = 60 \text{ mA}$ ,  $I_{g7} = 50 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_4 = 200 \Omega$ ,  $R_5 = 300 \Omega$  и  $R_6 = 80 \Omega$ . Користећи се Тевеноновом теоремом и трансфигурацијама једноставнијих мрежа, израчунати струју  $I_6$ .



Слика 218.1.



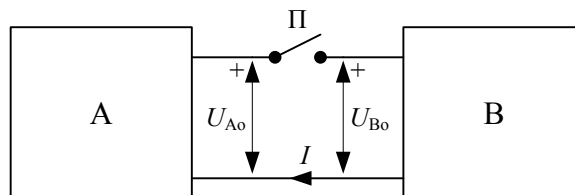
Слика 218.2.

#### РЕЗУЛТАТ

Заменом напона  $U_{AB}$  компензационим генератором и постепеним трансфигурацијама као на слици 218.2, добија се тражена струја,  $I_6 = 100 \text{ mA}$ .



**219.** Мреже А и В, приказане на слици 219.1, састоје се од отпорника, напонских и струјних генератора. Напон празног хода мреже А је  $U_{A0} = 10 \text{ V}$ , а струја кратког споја је 1 А. Напон празног хода мреже В је  $U_{B0} = -10 \text{ V}$ , а струја кратког споја је 2 А. Израчунати напон  $U_A$  када је прекидач П затворен.



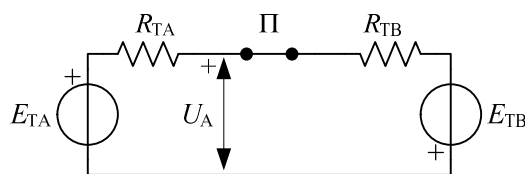
Слика 219.1.

РЕШЕЊЕ

Мрежа А се може заменити Тевененовим генератором (слика 219.2). Емс тог генератора је  $E_{TA} = U_{A0} = 10 \text{ V}$ , а отпорност  $R_{TA} = \frac{E_{TA}}{I_{ksA}} = 10 \Omega$ , где је  $I_{ksA} = 1 \text{ A}$  струја кратког споја мреже А. Референтни смер струје кратког споја поклапа се на слици 219.2 са референтним смером емс  $E_{TA}$ .

Слично томе, параметри Тевененовог генератора који је еквивалентан мрежи В су  $E_{TB} = -U_{B0} = 10 \text{ V}$  и  $R_{TB} = 5 \Omega$ .

Када се прекидач затвори, добија се просто коло као на слици 219.2, у коме је  $U_A = -\frac{10}{3} \text{ V}$ .



Слика 219.2.

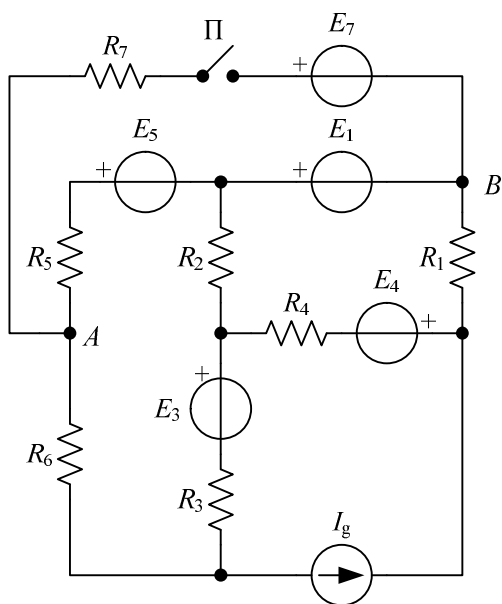
**220.** За коло са слике 220.1 познато је  $I_g = 50 \text{ mA}$ ,  $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  $E_3 = 7,5 \text{ V}$ ,  $E_4 = 2,5 \text{ V}$ ,  $E_5 = 2 \text{ V}$ ,  $E_7 = 6 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 150 \Omega$ ,  $R_4 = 50 \Omega$ ,  $R_5 = 150 \Omega$ ,  $R_6 = 50 \Omega$  и  $R_7 = 50 \Omega$ . Прекидач П је отворен. Израчунати снагу коју прима новоприкључена грана после затварања прекидача.

РЕШЕЊЕ

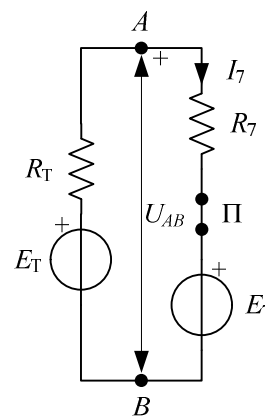
Електромоторна сила Тевененовог генератора (слика 220.2) је  $E_T = 3 \text{ V}$ , а унутрашња отпорност  $R_T = 100 \Omega$ .

По затварању прекидача (слика 220.2), струја и напон новоприкључене гране су  $I_7 = \frac{E_T - E_7}{R_T + R_7} = -20 \text{ mA}$  и  $U_{AB} = -R_T I_7 + E_T = 5 \text{ V}$ , па је снага коју прима та грана

$P_7 = U_{AB} I_7 = -100 \text{ mW} < 0$  (грانا ради као генератор). Идеални напонски генератор  $E_7$  у тој грани ради као генератор и развија снагу  $P_{E_7} = -E_7 I_7 = 120 \text{ mW}$ , а отпорник  $R_7$  дисипира снагу  $P_{R_7} = R_7 I_7^2 = 20 \text{ mW}$ .



Слика 220.1.



Слика 220.2.

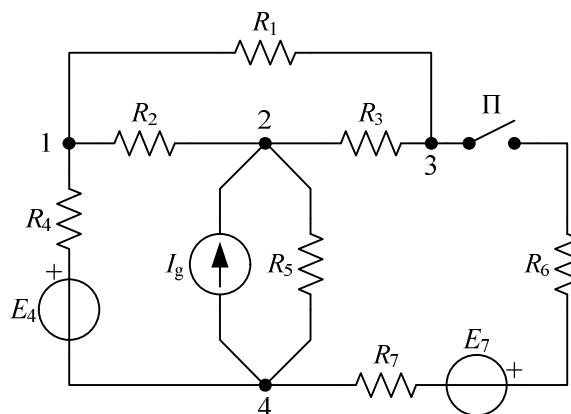
**221.** За коло приказано на слици 221.1 познато је  $E_7 = 19 \text{ V}$ ,  $I_g = 5 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_6 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 400 \Omega$  и  $R_5 = R_7 = 1,5 \text{ k}\Omega$ . Када је прекидач П затворен, познат је напон  $U_{34} = 5 \text{ V}$ . Колики је напон  $U'_{34}$  када се прекидач П отвори?

#### РЕЗУЛТАТ

Упутство. Заменили остатак кола у односу на новоприкључену грану Тевененовим генератором.

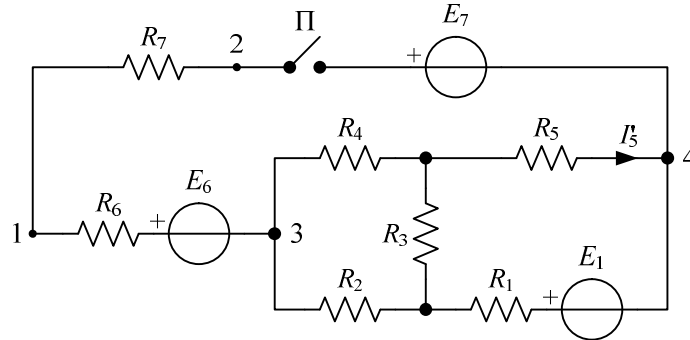
Када се прекидач отвори,  $U'_{34} = -2 \text{ V}$ .

Читаоцу се препоручује да, на основу задатих података, израчуна и емс  $E_4$ , иако се задатак може решити без рачунања те емс.



Слика 221.1.

222. За коло са слике 222.1 познато је  $E_6 = 14 \text{ V}$ ,  $E_7 = 5 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = 100 \Omega$  и  $R_6 = 50 \Omega$ . При отвореном прекидачу П позната је струја  $I'_5 = 50 \text{ mA}$ , а при затвореном прекидачу напон  $U_{12} = 5 \text{ V}$ . Израчунати отпорност  $R_7$ .



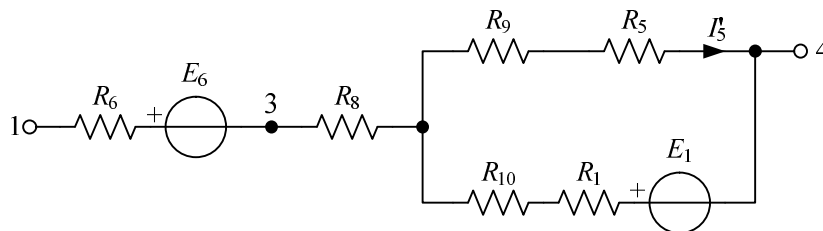
Слика 222.1.

РЕШЕЊЕ

Ради решења проблема, погодно је део кола према грани са прекидачем представити Тевененовим генератором, као на слици 222.2, при чему је  $R_8 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 60 \Omega$ ,

$$R_9 = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 20 \Omega \quad \text{и} \quad R_{10} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = 60 \Omega. \quad \text{Сада је}$$

$$E_T = U'_{14} = (R_5 + R_9) I'_5 + E_6 = 20 \text{ V} \quad \text{и} \quad R_T = R'_{e14} = R_6 + R_8 + \frac{(R_5 + R_9)(R_1 + R_{10})}{R_5 + R_9 + R_1 + R_{10}} = 200 \Omega.$$

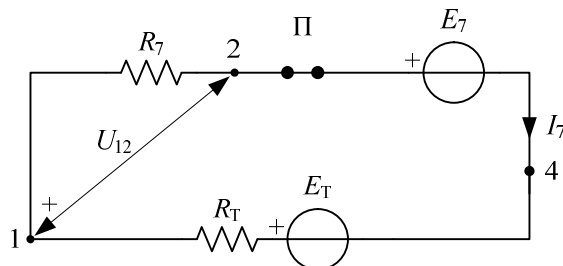


Слика 222.2.

На слици 222.3 је представљено еквивалентно просто коло, за које је

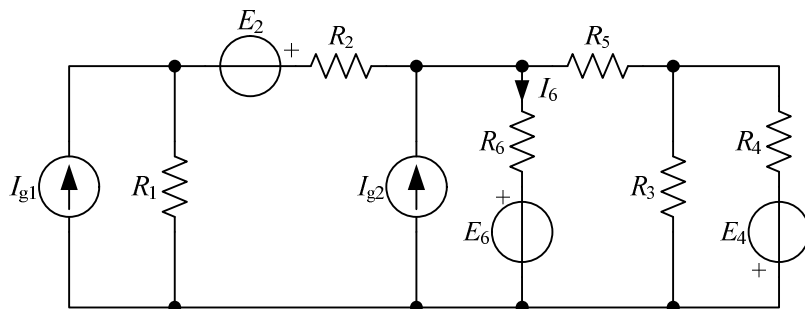
$$I_7 = \frac{U_{12}}{R_7} = \frac{E_T - E_7}{R_T + R_7}. \quad \text{Одавде је}$$

$$R_7 = \frac{R_T}{\frac{E_T - E_7}{U_{12}} - 1} = 100 \Omega.$$



Слика 222.3.

**223.** За коло са слике 223.1 познато је  $E_2 = 18 \text{ V}$ ,  $E_4 = 25 \text{ V}$ ,  $E_6 = 10 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 2 \text{ A}$ ,  $R_1 = 15 \Omega$ ,  $R_2 = 25 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 20 \Omega$ ,  $R_5 = 8 \Omega$  и  $R_6 = 10 \Omega$ . Израчунати струју  $I_{g2}$  тако да буде  $I_6 = 1 \text{ A}$ .



Слика 223.1.

**РЕШЕЊЕ**

Применом Тевененове теореме добија се коло као на слици 223.2. При томе је

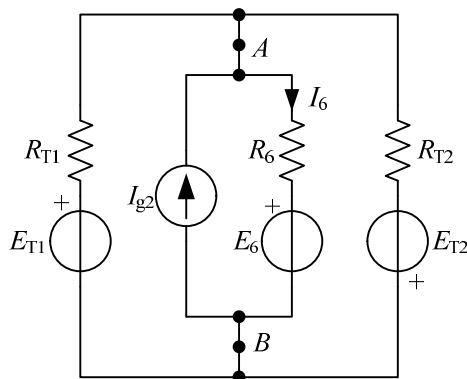
$$R_{T1} = R_1 + R_2 = 40 \Omega,$$

$$E_{T1} = E_2 + R_1 I_{g1} = 48 \text{ V},$$

$$R_{T2} = R_5 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 20 \Omega$$

$$E_{T2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} E_4 = 15 \text{ V}.$$

и

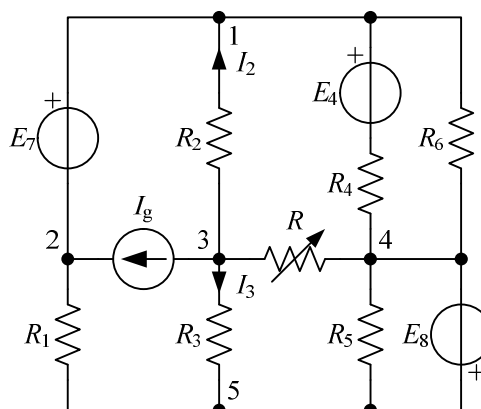


Слика 223.2.

Како је  $U_{AB} = E_6 + R_6 I_6$ , то је по методи потенцијала чворова

$$\left( \frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_{T2}} \right) (E_6 + R_6 I_6) = \frac{E_{T1}}{R_{T1}} + I_{g2} + \frac{E_6}{R_6} - \frac{E_{T2}}{R_{T2}}. \text{ Одавде је } I_{g2} = 2,05 \text{ A}.$$

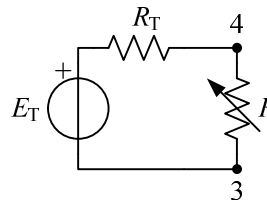
**224.** За коло сталне струје приказано на слици 224.1 је  $E_4 = 8 \text{ V}$ ,  $I_g = 8 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 60 \Omega$ ,  $R_2 = R_4 = R_6 = 120 \Omega$  и  $R_3 = R_5 = 300 \Omega$ . Када је отпорност променљивог отпорника  $R = 200 \Omega$ , познате су струје  $I_2 = 7 \text{ mA}$  и  $I_3 = 5 \text{ mA}$ . Колика је струја променљивог отпорника када му је отпорност  $R' = 500 \Omega$ ?



Слика 224.1.

РЕШЕЊЕ

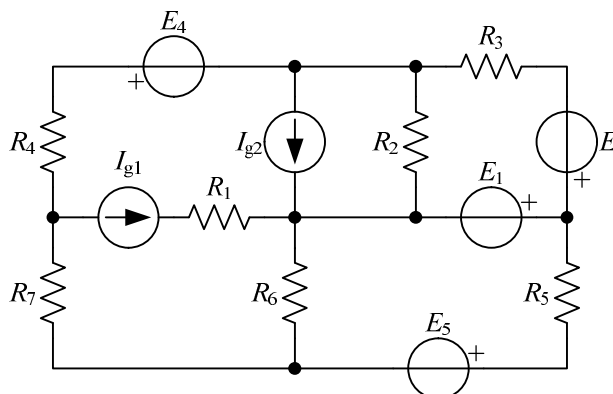
У односу на променљиви отпорник, остатак кола се може заменити Тевененовим генератором отпорности  $R_T = 100 \Omega$  и непознате електромоторне силе (слика 224.2). Када је  $R = 200 \Omega$ , струја променљивог отпорника је  $I_{43} = I_2 + I_3 + I_g = 20 \text{ mA}$ , па је емс Тевененовог генератора  $E_T = (R + R_T)I_{43} = 6 \text{ V}$ .



Слика 224.2.

Када је отпорност променљивог отпорника  $R' = 500 \Omega$ , струја му је  $I'_{43} = 10 \text{ mA}$ .

**225.** За коло сталне струје са слике 225.1 познато је  $E_1 = E_3 = 1 \text{ V}$ ,  $E_4 = 3 \text{ V}$ ,  $E_5 = 4 \text{ V}$ ,  $I_{g2} = 1 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_7 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_4 = R_5 = R_6 = 1 \text{ k}\Omega$ . Снага идеалног напонског генератора  $E_1$  је  $P_{E_1} = 1 \text{ mW}$ . Израчунати струју струјног генератора  $I_{g1}$ .

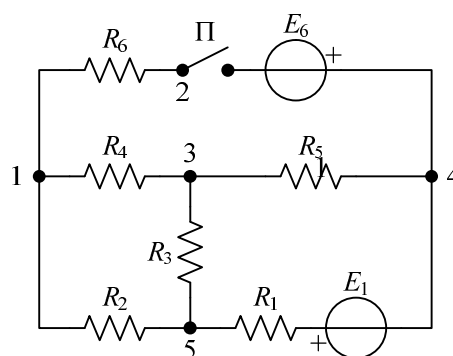


Слика 225.1.

РЕЗУЛТАТ

Струја струјног генератора је  $I_{g1} = 4 \text{ mA}$ .

**226.** За коло приказано на слици 226.1 је  $E_6 = -15 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 150 \Omega$  и  $R_3 = R_4 = R_5 = 50 \Omega$ . При отвореном прекидачу П познат је напон  $U'_{14} = 25 \text{ V}$ . При затвореном прекидачу П познат је напон  $U''_{12} = 2,5 \text{ V}$ . Одредити отпорност  $R_6$ .

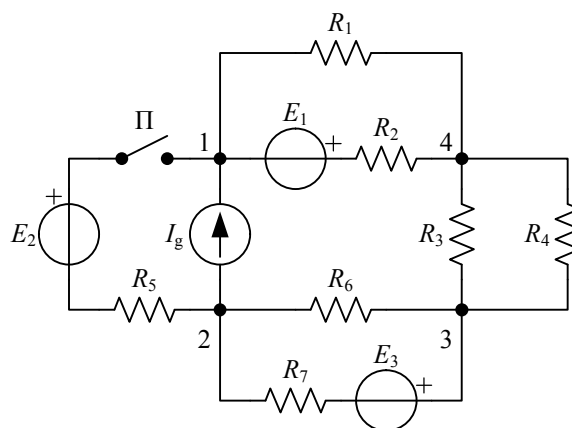


Слика 226.1.

РЕЗУЛТАТ

Отпорност је  $R_6 = 25 \Omega$ .

\*227. За коло приказано на слици 227.1 познато је  $E_1 = 25 \text{ V}$ ,  $E_3 = 4 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 150 \Omega$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_4 = 800 \Omega$ ,  $R_5 = 50 \Omega$  и  $R_6 = R_7 = 160 \Omega$ . Када је прекидач П отворен, снага коју развија струјни генератор је  $P_{I_g} = 2,2 \text{ W}$ , а идеални напонски генератор  $E_3$  се понаша као пријемник. Када је прекидач П затворен, снага отпорника  $R_4$  је  $P_{R_4} = 320 \text{ mW}$ , а струјни генератор се понаша као пријемник. Израчунати електромоторну силу  $E_2$ .

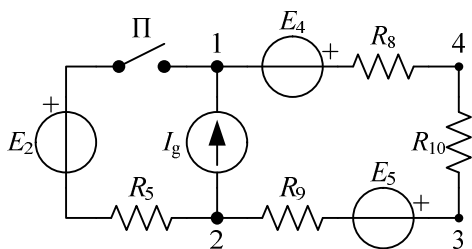


Слика 227.1.

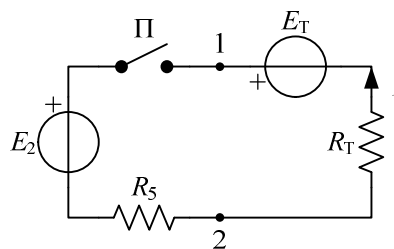
РЕШЕЊЕ

После трансфигурације мрежа  $R_1 - E_1 - R_2$ ,  $R_6 - E_3 - R_7$  и  $R_3 - R_4$ , коло се упрошћава као на слици 227.2, при чему је  $E_4 = 10 \text{ V}$ ,  $E_5 = 2 \text{ V}$ ,  $R_8 = 60 \Omega$ ,  $R_9 = 80 \Omega$  и  $R_{10} = 160 \Omega$ .

Уочимо да је, осим емс  $E_2$ , непозната и струја струјног генератора  $I_g$ . Када је прекидач П отворен, напон струјног генератора је  $U_{12} = (R_9 + R_{10} + R_8)I_g + E_5 - E_4$ , а снага је  $P_{I_g} = U_{12}I_g$  и дата је условима задатка. На основу тога се добија квадратна једначина за струју генератора,  $(R_9 + R_{10} + R_8)I_g^2 + (E_5 - E_4)I_g - P_{I_g} = 0$ , која, за задате податке, у јединицама СИ система гласи  $300I_g^2 - 8I_g - 2,2 = 0$ . Решења те једначине су  $I_g^{(1)} = 0,1 \text{ A}$  и  $I_g^{(2)} = -0,0733 \text{ A}$ . У првом случају је  $U_{23}^{(1)} = -10 \text{ V}$ . Тада је, у односу на референтни смер од 2 ка 3 на слици 227.1, струја генератора  $E_3$  негативна, па се тај генератор понаша као пријемник, што одговара условима задатка. У другом случају је  $U_{23}^{(2)} = 3,864 \text{ V}$ , а генератор  $E_3$  ради као генератор. Стога то решење отпада, па је  $I_g = 0,1 \text{ A}$ .



Слика 227.2.



Слика 227.3.

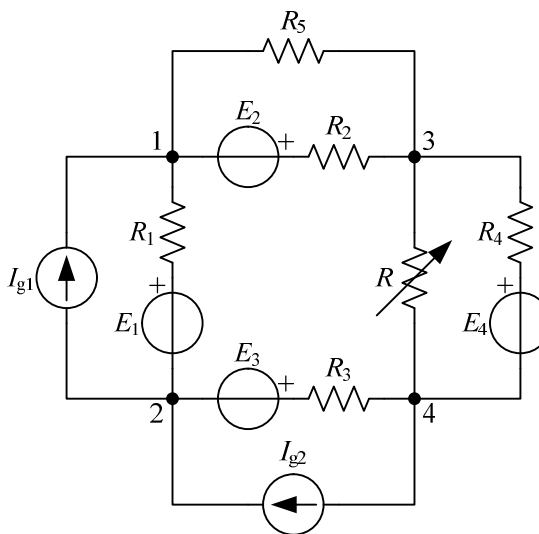
Сада се коло са слике 227.2 може трансфигурисати у просто коло са слике 227.3 у коме је  $E_T = 22 \text{ V}$  и  $R_T = 300 \Omega$ .

Када је прекидач П затворен, јачина струје у колу са слике 227.3 је  $I = \frac{E_T - E_2}{R_T + R_5}$ .

Струја отпорника  $R_4$  у колу са слике 227.1, у односу на референтни смер од чвора 3 ка чвору 4, је  $I_4 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} (I - I_g)$ . На основу услова задатка,  $I_4 = \pm \sqrt{\frac{P_{R_4}}{R_4}} = \pm 20 \text{ mA}$ .

Доњем знаку одговара позитиван напон  $U_{12}$ , струјни генератор ради као генератор, а то није у складу са условима задатка. Горњем знаку одговара  $U' = -38 \text{ V}$ , струјни генератор ради као пријемник, па је  $I_4 = 20 \text{ mA}$ . На основу тога је  $E_2 = -48 \text{ V}$ .

**228.** У колу сталне струје са слике 228.1 је  $E_1 = 1 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 6 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 4 \text{ k}\Omega$  и  $R_5 = 6 \text{ k}\Omega$ . Када је отпорност променљивог отпорника  $R = 0$ , снага идеалног напонског генератора  $E_1$  је  $P_{E_1} = -5 \text{ mW}$ . Када је  $R = 1,2 \text{ k}\Omega$ , снага идеалног струјног генератора  $I_{g1}$  је  $P_{I_{g1}} = 37,6 \text{ mW}$ . Израчунати снагу идеалног напонског генератора  $E_4$  када је  $R = 2,4 \text{ k}\Omega$ .

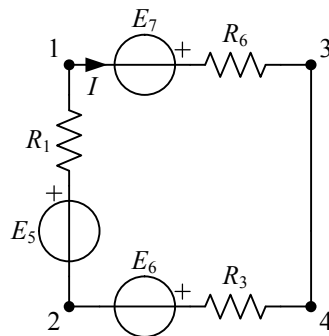


Слика 228.1.

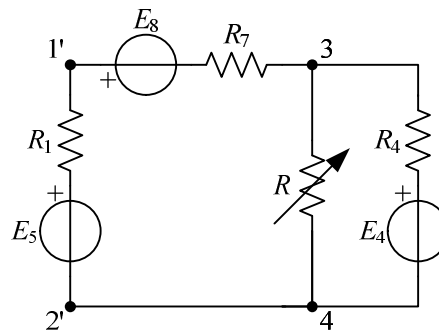
#### РЕШЕЊЕ

Када је  $R = 0$ , тада је  $P_{E_1} = E_1 I_1 = -5 \text{ mW}$ , па је  $I_1 = I_{21} = -5 \text{ mA}$  и  $U_{12} = 6 \text{ V}$ . Мреже  $E_1 - R_1 - I_{g1}$ ,  $E_2 - R_2 - R_5$  и  $E_3 - R_3 - I_{g2}$  могу се трансфигурисати у еквивалентне напонске генераторе, као на слици 228.2, где је  $E_5 = 7 \text{ V}$ ,  $E_6 = E_3 - R_3 I_{g2}$ ,

$E_7 = E_2 \frac{R_5}{R_2 + R_5}$  и  $R_6 = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} = 2 \text{ k}\Omega$ . Струја у том колу је  $I = I_1 + I_{g1} = 1 \text{ mA}$ . Како је  $U_{12} = E_6 - E_7 + (R_3 + R_6)I$ , добија се  $E_6 - E_7 = 1 \text{ V}$ . У простом колу са слике 228.2, реални напонски генератор  $E_6 - R_3$  се може преместити уз генератор  $E_7 - R_6$ , па се оба генератора заменити једним еквивалентним генератором, параметара  $E_8 = 1 \text{ V}$  и  $R_7 = 5 \text{ k}\Omega$ . Тиме се коло са слике 228.1 своди на коло са слике 228.3.



Слика 228.2.



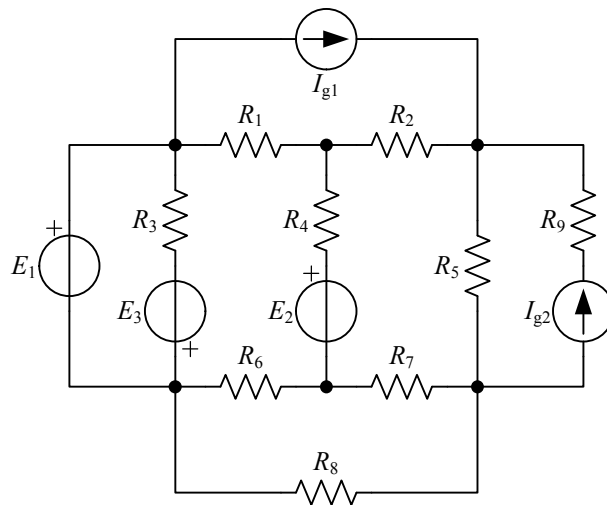
Слика 228.3.

Из податка за снагу идеалног струјног генератора  $I_{g1}$  када је  $R = 1,2 \text{ k}\Omega$ , следи  $U_{12} = U_{1'2'} = \frac{94}{15} \text{ V}$ , па се анализом кола на слици 228.3 добија  $E_4 = 4 \text{ V}$ . Из истог кола се, за  $R = 2,4 \text{ k}\Omega$ , добија тражена снага генератора,  $P_{E_4} = 1,6 \text{ mW}$ .

**\*229.** За коло сталне струје са слике 229.1 познато је  $E_1 = 120 \text{ V}$ ,  $E_2 = E_3 = 100 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 0,1 \text{ A}$ ,  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $R_3 = 40 \Omega$ ,  $R_4 = 35 \Omega$ ,  $R_5 = 100 \Omega$ ,  $R_6 = R_7 = 50 \Omega$ ,  $R_8 = R_9 = 25 \Omega$ ,  $P_{I_{g1}} = -4,6 \text{ W}$  и  $P_{E_2} = 20 \text{ W}$ . Израчунати отпорност  $R_1$  и струју струјног генератора  $I_{g2}$ .

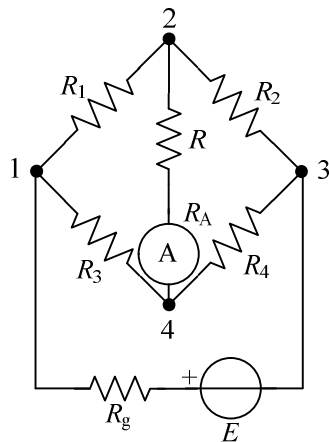


РЕЗУЛТАТ  
Тражена отпорност је  
 $R_1 = 50 \Omega$ , а струја струјног  
генератора је  $I_{g2} = -0,2 \text{ A}$ .

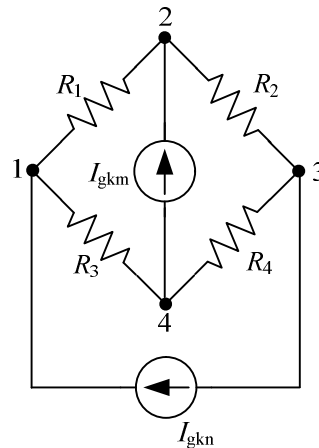


Слика 229.1.

**230.** На слици 230.1 приказана је електрична шема моста за сталну струју. Извести услов равнотеже моста.



Слика 230.1.



Слика 230.2.

РЕШЕЊЕ

Гране са отпорницима  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  називају се гране моста, грана 1-3 је напојна дијагонала моста, а грана 2-4 је мерна дијагонала моста. Увођењем компензационих струјних генератора уместо напојне и мерне дијагонале, шема добија облик као на слици 230.2. По теорему суперпозиције, напони између крајева дијагонале моста су  $U_{24} = U_{24}(I_{gkn}) + U_{24}(I_{gkm})$  и  $U_{13} = U_{13}(I_{gkn}) + U_{13}(I_{gkm})$ , односно

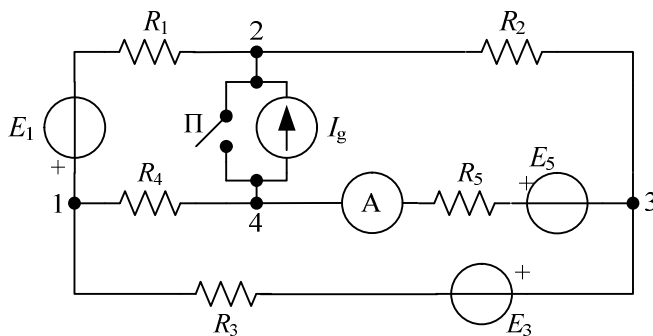
$$U_{24} = \frac{-R_1(R_3 + R_4) + R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_{gkn} + \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_{gkm}, \quad (230.1)$$

$$U_{13} = \frac{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_{gkn} + \frac{-R_4(R_1 + R_3) + R_3(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_{gkm}. \quad (230.2)$$

Мост је у равнотежи ако стање (напон и струја) у једној дијагонали не утиче на стање (напон и струју) у другој дијагонали. Према једначинама (230.1) и (230.2), то значи да напон  $U_{24}$  не зависи од струје  $I_{gkn}$ , а напон  $U_{13}$  не зависи од струје  $I_{gkm}$ , односно ако је  $R_1(R_3 + R_4) - R_3(R_1 + R_2) = 0$  и  $-R_4(R_1 + R_3) + R_3(R_2 + R_4) = 0$ . Оба услова су истовремено испуњена ако је  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ .

Шема са слике 230.1 одговара Витстоновом мосту, који се употребљава у електричним мерењима. Када је мост у равнотежи, емс Тевененовог генератора у односу на мерну дијагоналу је нула, па је и струја амперметра једнака нули. По теореме компензације, мерна дијагонала се може раскинути, а да се напони и струје у остатку кола не промене. Када је мост са слике 230.1 у равнотежи, онда је и  $U_{24} = 0$ , па се, по теореме компензације, мерна дијагонала може кратко спојити, а да то не утиче стање у остатку кола.

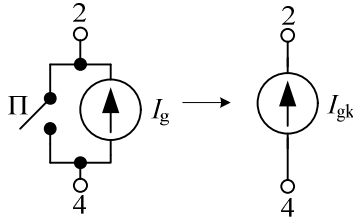
**231.** За коло сталне струје са слике 231.1 је  $R_1 = R_5 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = R_4 = 40 \Omega$ ,  $E_1 = 40 \text{ V}$  и  $E_5 = 10 \text{ V}$ . По затварању прекидача П, идеалним амперметром установи се прираштај струје  $\Delta I_5 = \Delta I_{34} = 2 \text{ A}$ . Израчунати струју струјног генератора,  $I_g$ .



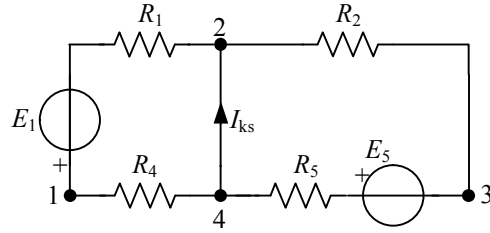
Слика 231.1.

**РЕШЕЊЕ**

Применимо струјну компензацију на паралелну везу прекидача и идеалног струјног генератора (слика 231.2). При овоме је  $I_{gk} = \begin{cases} I_{gk}^{(o)} = I_g, & \text{П отворен} \\ I_{gk}^{(z)} = I_{ks}, & \text{П затворен} \end{cases}$ , где је  $I_{ks} = (I_{ks})_{42}$  струја кратког споја између тачака 4 и 2.



Слика 231.2.



Слика 231.3.

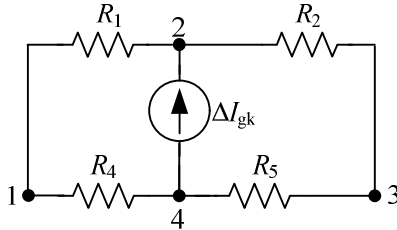
Ради одређивања струје  $I_{ks}$ , посматра се коло са слике 231.3. Отпорници  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_4$  и  $R_5$  су гране моста који је у равнотежи, јер је  $R_1 R_5 = R_2 R_4$ . Стога стање у дијагонали  $E_3 - R_3$  (слика 231.1) не утиче на напон  $U_{24}$  нити на струју кратког споја  $I_{ks}$ , па је на слици 231.3 дијагонала  $E_3 - R_3$  уклоњена. Струја кратког споја је

$$I_{ks} = \frac{E_1}{R_1 + R_4} + \frac{E_5}{R_2 + R_5} = 1 \text{ A}.$$

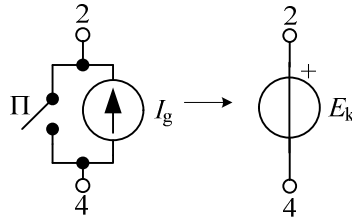
По теорему линеарне зависности одзива од побуде, прираштај струје амперметра је  $\Delta I_{34} = a_1 \Delta I_{gk}$ , где је  $\Delta I_{gk} = I_{gk}^{(z)} - I_{gk}^{(o)} = I_{ks} - I_g$  и  $a_1$  константа величина, што значи да је  $\Delta I_{34}$  једнако струји гране 3-4 када у колу делује само струјни генератор струје  $\Delta I_{gk}$ , као на слици 231.4. И на тој шеми је дијагонала  $R_3 - E_3$  раскинута, због равнотеже моста. На основу слике 231.4 је  $\Delta I_{34} = \frac{R_1 + R_4}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} \Delta I_{gk}$ , па је

$$\Delta I_{gk} = \frac{R_1 + R_2 + R_4 + R_5}{R_1 + R_4} \Delta I_{34} = 3 \text{ A}.$$

Како је  $\Delta I_{gk} = I_{ks} - I_g$ , то је  $I_g = I_{ks} - \Delta I_{gk} = -2 \text{ A}$ .



Слика 231.4.



Слика 231.5.

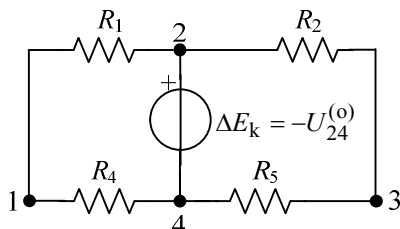
Задатак се може решити и применом напонске компензације. Према слици 231.5 је

$$E_k = \begin{cases} E_k^{(o)} = U_{24}^{(o)}, & \text{П отворен} \\ E_k^{(z)} = U_{24}^{(z)} = 0, & \text{П затворен} \end{cases}.$$

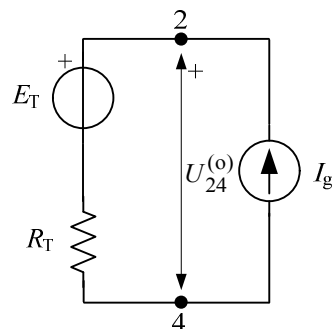
На основу теореме линеарне зависности одзива од

побуде је  $\Delta I_{34} = a_2 \Delta E_k$ , где је  $\Delta E_k = U_{24}^{(z)} - U_{24}^{(o)} = -U_{24}^{(o)}$ . Прираштај  $\Delta I_{34}$  једнак је

$$\text{струји у грани 3-4 на слици 231.6, } \Delta I_{34} = \frac{\Delta E_k}{R_2 + R_5} = \frac{-U_{24}^{(o)}}{R_2 + R_5}, \text{ одакле је } U_{24}^{(o)} = -60 \text{ V}.$$



Слика 231.6.



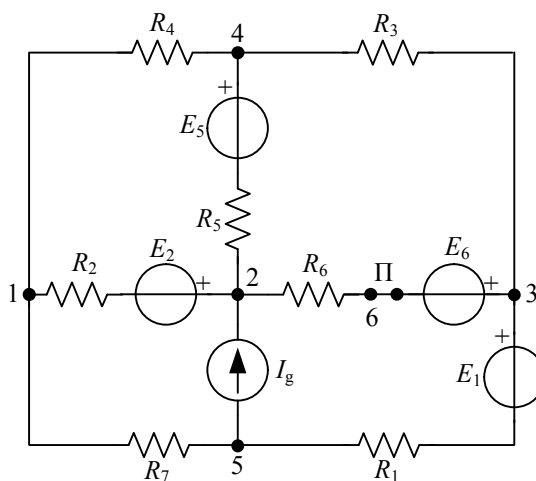
Слика 231.7.

Посматрајући еквивалентно просто коло са слике 231.7, добијено за коло са слике 231.1 на основу Тевененове теореме, види се да је  $U_{24}^{(o)} = R_T I_g + E_T$ . Параметри

Тевененовог генератора су  $R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 20 \, \Omega$  и

$$E_T = U'_{24} = -\frac{E_1(R_2 + R_5) + E_5(R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} = -20 \, \text{V}, \text{ па је } I_g = \frac{U_{24}^{(o)} - E_T}{R_T} = -2 \, \text{A}.$$

**232.** За коло са слике 232.1 познато је  $R_1 = 15 \, \Omega$ ,  $R_2 = 45 \, \Omega$ ,  $R_3 = 75 \, \Omega$ ,  $R_4 = 135 \, \Omega$ ,  $R_5 = 90 \, \Omega$ ,  $R_7 = 22,5 \, \Omega$  и  $E_6 = 12 \, \text{V}$ . При затвореном прекидачу П, познат је напон  $U_{23}^{(z)} = -18 \, \text{V}$ . Отварање прекидача П узрокује прираштај напона  $U_{12}$ ,  $\Delta U_{12} = 4 \, \text{V}$ . Израчунати отпорност  $R_6$ .



Слика 232.1.

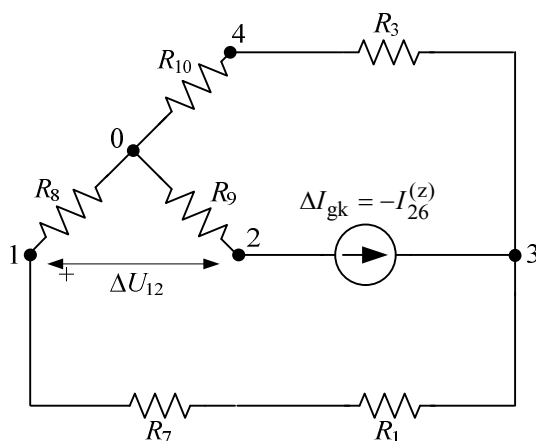
### РЕШЕЊЕ

При затвореном прекидачу, напон отпорника  $R_6$  је  $U_{26}^{(z)} = E_6 + U_{23}^{(z)} = -6 \, \text{V}$ . Како је

$$R_6 = \frac{U_{26}^{(z)}}{I_{26}^{(z)}}, \text{ то је за одређивање отпорности } R_6 \text{ потребно одредити струју } I_{26}^{(z)}.$$

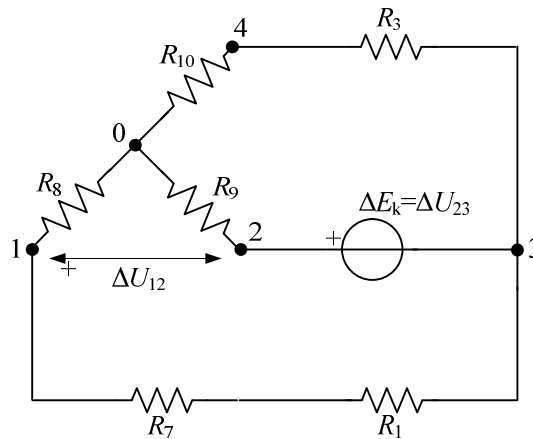
Применом струјне компензације, грана са отпорником се замени струјним компензационим генератором струје  $I_{\text{gk}} = I_{\text{gk23}} = \begin{cases} I_{\text{gk}}^{(z)} = I_{26}^{(z)}, & \text{П затворен} \\ I_{\text{gk}}^{(o)} = 0, & \text{П отворен} \end{cases}$ . Прираштај

напона  $U_{12}$  услед отварања прекидача је  $\Delta U_{12} = a_1 \Delta I_{\text{gk}}$ , где је  $\Delta I_{\text{gk}} = I_{\text{gk}}^{(o)} - I_{\text{gk}}^{(z)} = -I_{26}^{(z)}$  и  $a_1$  константна величина.  $\Delta I_{\text{gk}} = -I_{26}^{(z)}$ . Веза између  $\Delta U_{12}$  и  $\Delta I_{\text{gk}}$  може се добити анализом кола са слике 232.2, у коме је  $\Delta U_{12} = 4 \text{ V}$ . Троугао отпорника  $R_2, R_4, R_5$  са слике 232.1 трансфигурисан је у трокраку звезду отпорности  $R_8 = 22,5 \Omega$ ,  $R_9 = 15 \Omega$  и  $R_{10} = 45 \Omega$ . Са 232.2 слике је  $\Delta U_{12} = \left( R_9 + R_8 \frac{R_3 + R_{10}}{R_3 + R_{10} + R_8 + R_7 + R_1} \right) \Delta I_{\text{gk}}$ , одакле је  $I_{26}^{(z)} = -\Delta I_{\text{gk}} = -\frac{2}{15} \text{ A}$ , па је отпорност  $R_6 = 45 \Omega$ .



Слика 232.2.

Задатак се може решити и применом напонске компензације. Грана између чворова 2 и 3 (слика 232.1), са  $R_6, E_6$  и прекидачем П, замењује се напонским компензационим генератором емс  $E_k = E_{k32} = \begin{cases} E_k^{(z)} = U_{23}^{(z)}, & \text{П затворен} \\ E_k^{(o)} = U_{23}^{(o)}, & \text{П отворен} \end{cases}$ , где је  $U_{23}^{(o)} = U_{23}^{(z)} + \Delta U_{23}$ , па је прираштај емс компензационог генератора услед отварања прекидача  $\Delta E_k = \Delta U_{23}$ .



Слика 232.3.

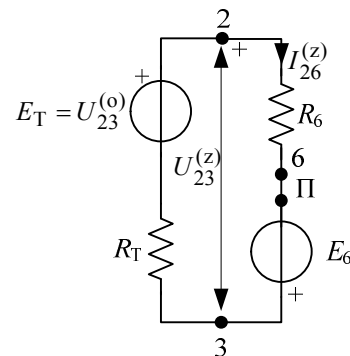
Веза између  $\Delta E_k$  и  $\Delta U_{12}$  добија се из кола са слике 232.3, за које је  $\Delta U_{12} = a_2 \Delta E_k = -\frac{6}{11} \Delta E_k$ , где је  $a_2 = -\frac{6}{11}$ , па је  $\Delta U_{23} = \Delta E_k = \frac{\Delta U_{12}}{a_2} = -\frac{22}{3} \text{ V}$ . На основу тога је, у колу са слике 232.1, после отварања прекидача,  $U_{23}^{(o)} = U_{23}^{(z)} + \Delta U_{23} = -\frac{76}{3} \text{ V}$ .

За коло са слике 232.1, применом Тевененове теореме у односу на грану између чворова 2 и 3, добија се коло са слике 232.4, при чему је  $E_T = U_{23}^{(o)} = -\frac{76}{3} \text{ V}$  и

$$R_T = R_9 + \frac{(R_3 + R_{10})(R_8 + R_7 + R_1)}{R_3 + R_{10} + R_8 + R_7 + R_1} = 55 \Omega. \quad \text{Са}$$

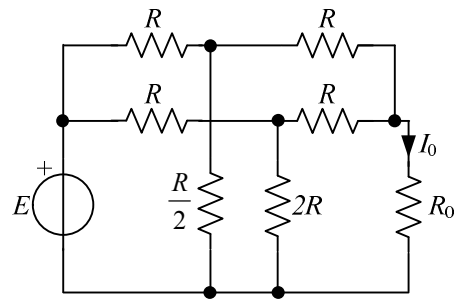
$$\text{слике 232.4 је } I_{26}^{(z)} = \frac{U_{23}^{(o)} - U_{23}^{(z)}}{R_T} = \frac{U_{23}^{(z)} + E_6}{R_6},$$

$$\text{одакле је } R_6 = \frac{U_{23}^{(z)} + E_6}{\Delta U_{23}} R_T = 45 \Omega.$$



Слика 232.4.

**\*\*233.** У отпорнику отпорности  $R_0$ , у колу са слике 233.1, успостављена је струја  $I_0$ . Одредити прираштај ове струје ако се отпорност  $R_0$  промени за  $\Delta R_0$ . Сматрати да је отпорност  $R$  позната.



Слика 233.1.

РЕШЕЊЕ

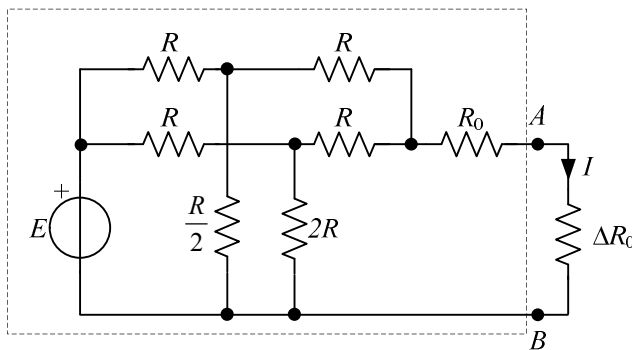
Када се отпорност  $R_0$  промени за  $\Delta R_0$ , нова отпорност је  $R'_0 = R_0 + \Delta R_0$ , па се отпорник  $R_0$  на слици 233.1 може заменити редном везом два отпорника. Отпорност првог отпорника је  $R_0$ , а другог је  $\Delta R_0$  (при чему је могуће да је отпорност другог отпорника буде и позитивна, и негативна, и нула). Тиме се добија коло као на слици 233.2.

У односу на отпорник  $\Delta R_0$ , остатак кола се може заменити Нортоновим генератором (слика 233.3). Проводност Нортоновог генератора за мрежу са слике 233.3 (еквивалентна проводност гледано улево од прикључака  $A$  и  $B$ ) је  $G_N = G_e = \frac{1}{R_e}$ , где је

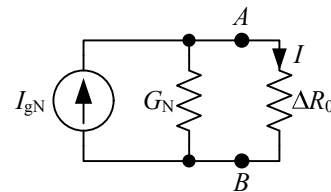
$$R_e = \frac{1}{G_e} = \frac{20}{27} R + R_0 \text{ еквивалентна отпорност мреже.}$$

Струја Нортоновог генератора је  $I_{gN} = I_0$ , односно то је струја отпорника  $R_0$  пре промене. Струја  $I$  је струја после промене. Из једначине разделника струје је  $I = I_{gN} \frac{1}{1 + G_N \Delta R_0} = I_{gN} \frac{R_e}{R_e + \Delta R_0}$ , па је прираштај струје  $\Delta I = I - I_0 = -\frac{\Delta R_0 I_0}{R_e + \Delta R_0}$ .

Заменом израза за  $R_e$  добија се  $\Delta I = \frac{-(\Delta R_0) I_0}{\frac{20}{27} R + R_0 + \Delta R_0}$ .



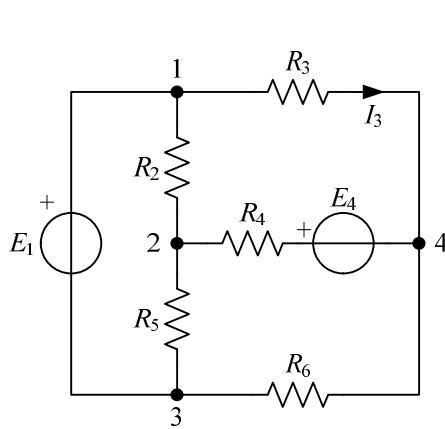
Слика 233.2.



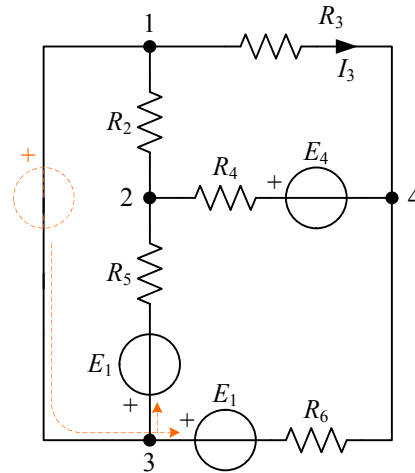
Слика 233.3.

**4.4. Премештање генератора**

**\*234.** За коло са слике 234.1 познато је  $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  $E_4 = 14 \text{ V}$ ,  $R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 120 \Omega$ ,  $R_4 = 40 \Omega$ ,  $R_5 = 200 \Omega$  и  $R_6 = 160 \Omega$ . Израчунати струју  $I_3$ .



Слика 234.1.



Слика 234.2.

РЕШЕЊЕ

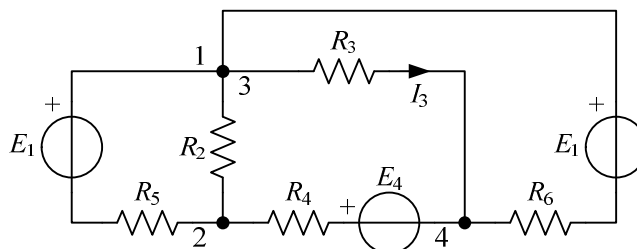
Из система једначина по методи контурних струја произилази да контурне струје, а преко њих и струје грана кола, не зависе од положаја електромоторних сила у контури, већ зависе од алгебарских збирова емс у контури. Ово допушта да се идеални напонски генератори могу премештати у друге гране кола, при чему алгебарски зборови емс у контурама пре и после премештања остају исти.

Поступак при премештању је следећи: идеални напонски генератор се може преместити из једна гране кола у све гране које са посматраном граном имају заједнички чвор. Струје грана се, при овоме, не мењају, али се мења потенцијал тог чвора.

На слици 234.2 приказано је задато коло после премештања генератора  $E_1$ . Чворови 1 и 3 у колу са слике 234.2 могу се сажети у један чвор, чиме се добија коло на слици 234.3. Даљим трансфигурацијама добијају се кола са слике 234.4 и слике 234.5, при чему

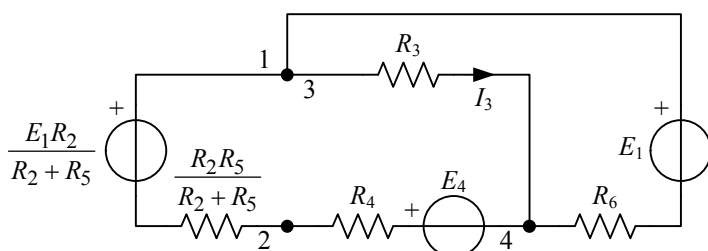
$$\text{је } R_e = \frac{R_6 \left( R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} \right)}{R_6 + R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}} = 80 \, \Omega \quad \text{и} \quad E_e = \frac{E_1 \left( R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} \right) + R_6 \left( E_4 + \frac{R_2 E_1}{R_2 + R_5} \right)}{R_6 + R_4 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}} = 15 \, \text{V}.$$

$$\text{Тражена струја је } I_3 = \frac{E_e}{R_e + R_3} = 75 \, \text{mA}.$$

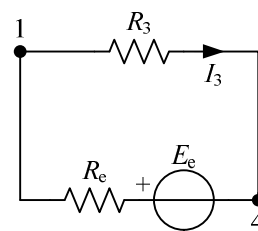


Слика 234.3.





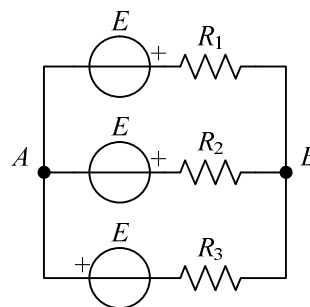
Слика 234.4.



Слика 234.5.

\*235. За коло са слике 235.1 је  $E = 6 \text{ V}$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$  и  $R_3 = 80 \Omega$ . Израчунати напон  $U_{AB}$ .

РЕШЕЊЕ

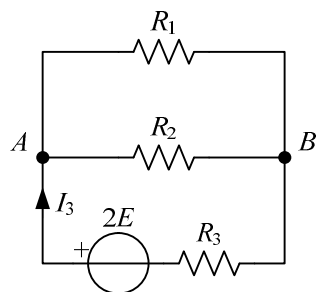


Слика 235.1.

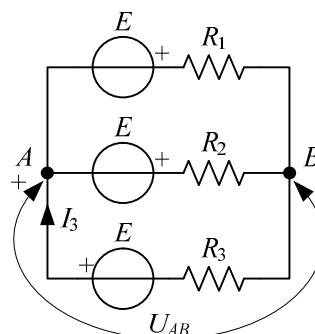
Слика 235.2 приказује коло после премештања генератора, у коме је  $I_3 = \frac{2E}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 60 \text{ mA}$ . Напон  $U_{AB}$  се променио после сеобе генератора. Зато се тај напон мора одредити из оригиналног кола. На основу слике 235.3 је сада  $U_{AB} = -R_3 I_3 + E = \frac{R_1 R_2 - R_1 R_3 - R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E = 1,2 \text{ V}$ .

Напон  $U_{AB}$  се, провере ради, може одредити и применом методе напона између

чворова (слика 235.1),  $U_{AB} = \frac{I_A}{G_{AA}} = \frac{\frac{E}{R_3} - \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 - R_1 R_3 - R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} E = 1,2 \text{ V}$ .

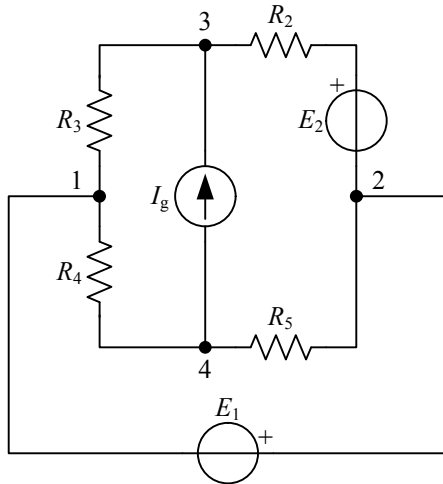


Слика 235.2.

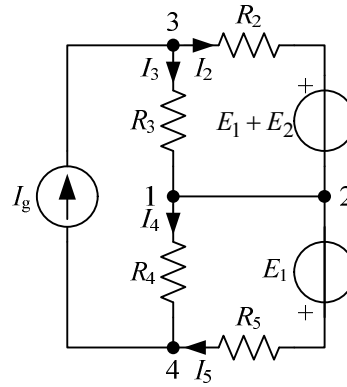


Слика 235.3.

**\*236.** За коло сталне струје са слике 236.1 је  $E_1 = E_2 = 20 \text{ V}$ ,  $I_g = 40 \text{ mA}$ ,  $R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$  и  $R_4 = R_5 = 2 \text{ k}\Omega$ . Израчунати снаге које развијају генератори.



Слика 236.1.



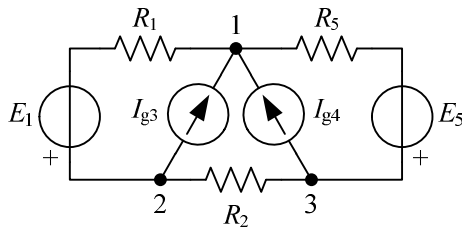
Слика 236.2.

**РЕШЕЊЕ**

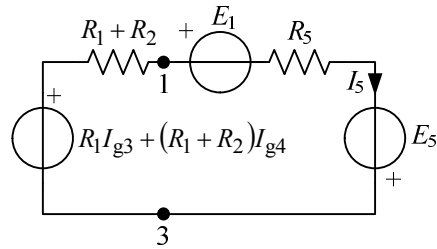
Ради бржег решавања кола генератор  $E_1$  може се преместити као на слици 236.2, са које је  $I_g = I_2 + I_3$  и  $R_3 I_3 = E_1 + E_2 + R_2 I_2$ . Из ових једначина је  $I_3 = 40 \text{ mA}$ . Такође је  $I_g = I_4 + I_5$  и  $R_4 I_4 = -E_1 + R_5 I_5$ , одакле је  $I_4 = 15 \text{ mA}$ .

Према слици 236.2 струје кроз напонске генераторе су  $I_{12} = I_3 - I_4 = 25 \text{ mA}$  и  $I_{23} = -I_g + I_3 = 0$ . Напон између крајева струјног генератора је  $U_{34} = R_4 I_4 + R_3 I_3 = 70 \text{ V}$ . Снаге које развијају генератори су  $P_{E_1} = E_1 I_{12} = 0,5 \text{ W}$ ,  $P_{E_2} = E_2 I_{23} = 0$  и  $P_{I_g} = U_{34} I_g = 2,8 \text{ W}$ .

**\*237.** За коло приказано на слици 237.1 познато је  $E_1 = 6 \text{ V}$ ,  $E_5 = 20 \text{ V}$ ,  $I_{g3} = 3 \text{ mA}$ ,  $I_{g4} = 10 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 0,5 \text{ k}\Omega$  и  $R_5 = 0,5 \text{ k}\Omega$ . Израчунати снагу коју развија идеални напонски генератор  $E_5$ .



Слика 237.1.



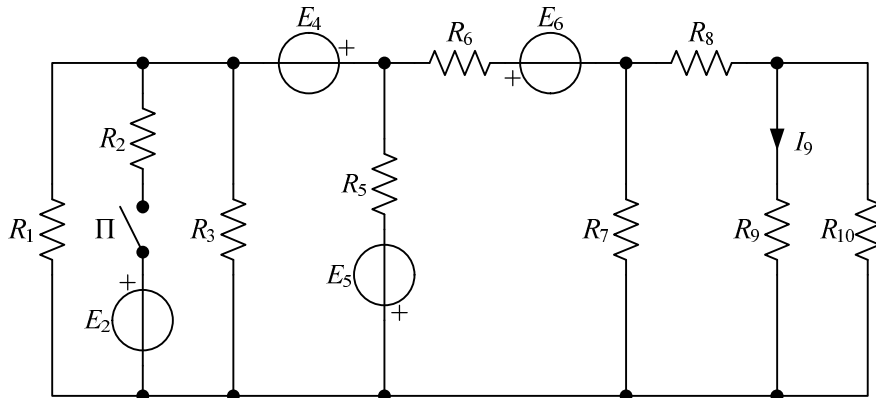
Слика 237.2.

РЕШЕЊЕ

Ради израчунавања снаге коју развија генератор  $E_5$ , потребно је израчунати струју тог генератора. После премештања генератора  $E_1$  и даље трансформације, коло добија облик као на слици 237.2. Према уопштеном Омовом закону, струја у овом колу је

$$I_5 = \frac{R_1 I_{g3} + (R_1 + R_2) I_{g4} - E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} = 15 \text{ mA}, \text{ па је тражена снага } P_{E_5} = E_5 I_5 = 0,3 \text{ W}.$$

**\*238.** За коло приказано на слици 238.1 је  $E_4 = E_6 = 8 \text{ V}$ ,  $E_5 = 2 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $R_5 = 10 \Omega$  и  $R_7 = 500 \Omega$ . При затвореном прекидачу П позната је струја  $I_9^{(z)} = 0,2 \text{ A}$ . При отварању прекидача, та струја се промени за  $\Delta I_9 = -0,4 \text{ A}$ . Одредити снагу отпорника  $R_2$  при затвореном прекидачу П.



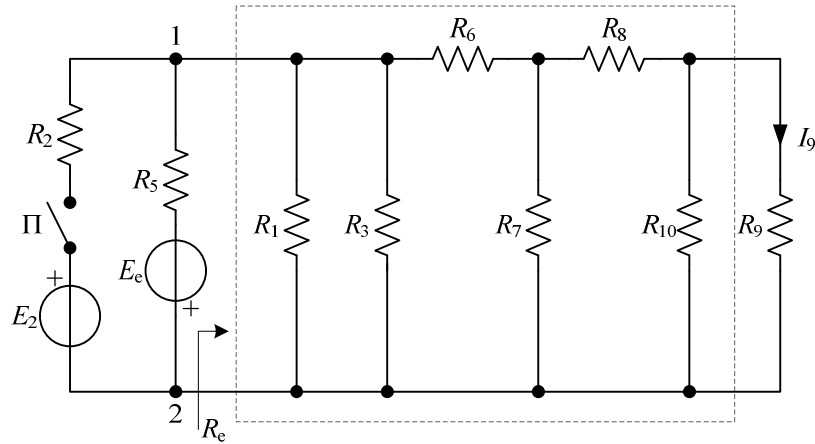
Слика 238.1.

РЕШЕЊЕ

Коло се упрошћава премештањем генератора  $E_4$  у гране 5 и 6, као на слици 238.2, јер се емс  $E_4$  и  $E_6$  потиру, а  $E_4$  и  $E_5$  се сабирају у  $E_e = E_4 + E_5 = 10 \text{ V}$ . Премештањем генератора не мења се напон  $U_{12}$ , као ни струја  $I_9$ .

На основу теореме компензације и теореме линеарности, важи  $I_9 = a U_{12}$ , где је  $a$  константна величина за посматрано коло. Када је прекидач П затворен, тада је

$I_9^{(z)} = aU_{12}^{(z)} = 0,2 \text{ A}$ . Када је прекидач отворен, тада је  $I_9^{(o)} = aU_{12}^{(o)} = I_9^{(z)} + \Delta I_9 = -0,2 \text{ A}$ , па је  $U_{12}^{(o)} = -U_{12}^{(z)}$ .



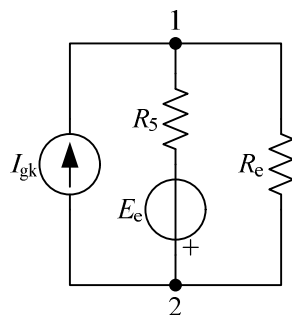
Слика 238.2.

Грана са прекидачем може се заменити компензационим струјним генератором, а резистивна мрежа заменити отпорником отпорности  $R_e$ , као на слици 238.3. Струја компензационог генератора је  $I_{gk} = \begin{cases} 0, & \text{П отворен} \\ I_2, & \text{П затворен} \end{cases}$ , где је  $I_2 = I_{21}$  струја отпорника

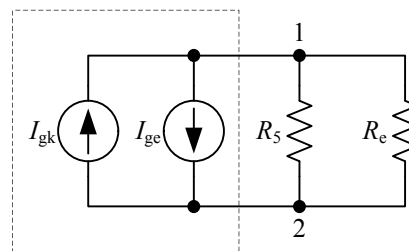
$R_2$  при затвореном прекидачу. Када је прекидач П отворен,  $U_{12}^{(o)} = -\frac{R_e}{R_e + R_5} E_e$ . Када је прекидач затворен, на основу суперпозиције је  $U_{12}^{(z)} = -\frac{R_e}{R_e + R_5} E_e + \frac{R_e R_5}{R_e + R_5} I_2$ . Из

услова  $U_{12}^{(o)} = -U_{12}^{(z)}$  следи  $I_2 = \frac{2E_e}{R_5} = 2 \text{ A}$ , па је тражена снага отпорника

$$P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 160 \text{ W}.$$



Слика 238.3.



Слика 238.4.

Уместо напонске компензације, може се применити струјна компензација. Најпре се реални напонски генератор  $E_e - R_5$  са слике 238.2 трансфигурише у еквивалентни

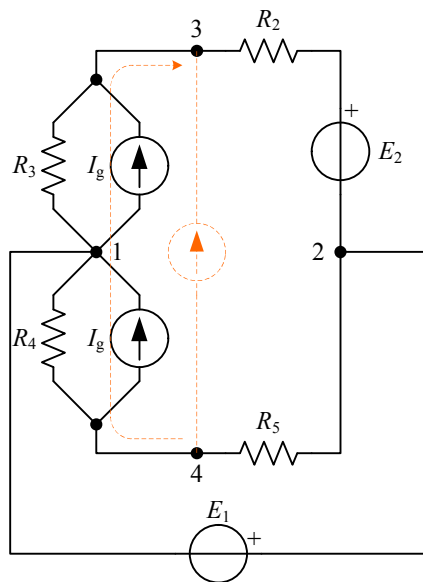
струјни генератор (слика 238.4), струје  $I_{ge} = \frac{E_e}{R_5} = 1 \text{ A}$  и отпорности  $R_5$ . Грана са прекидачем се замени компензационим струјним генератором струје  $I_{gk}$ , па се паралелна веза генератора  $I_{gk}$  и  $I_{ge}$  замени новим компензационим генератором струје  $I'_{gk} = I_{gk} - I_{ge}$ . На основу линеарности је  $I_9 = bI'_{gk}$ , где је  $b$  константна величина. Из услова задатка је  $I'_{gk}^{(o)} = -I'_{gk}^{(z)}$ , па је  $I_{gk} = I_2 = 2I_{ge} = 2 \text{ A}$ , одакле је  $P_{R_2} = 160 \text{ W}$ .

**\*239.** Користећи се премештањем струјног генератора у колу са слике 236.1, одредити снаге које развијају генератори.

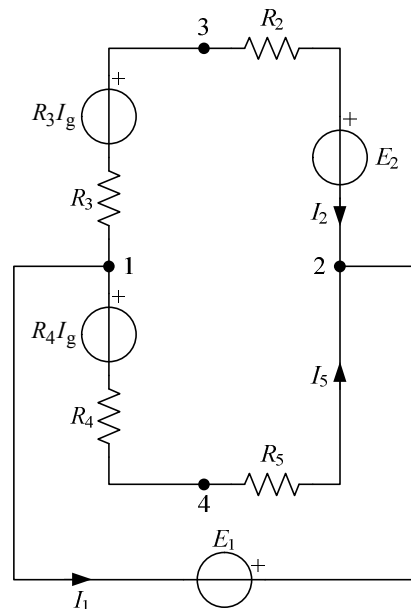
#### РЕШЕЊЕ

Из система једначина написаних за коло по методи потенцијала чворова произилази да напони између појединих чворова и референтног чвора, а тиме и напони између појединих чворова, зависе од алгебарских збирова струја струјних генератора везаних за поједине чворове, а не зависе од положаја струјних генератора у колу. То дозвољава премештање идеалних струјних генератора у колу уз услов да при томе алгебарски зборови струја струјних генератора за све чворове буду исти пре и после премештања генератора. Одавде се добија правило да се струјни генератор може преместити тако да се паралелно веже свим гранама које са тим струјним генератором образују контуру.

Премештањем идеалног струјног генератора из кола са слике 236.1 добија се шема кола на слици 239.1. Трансфигурацијом реалних струјних генератора у реалне напонске генераторе, добија се шема са слике 239.2.



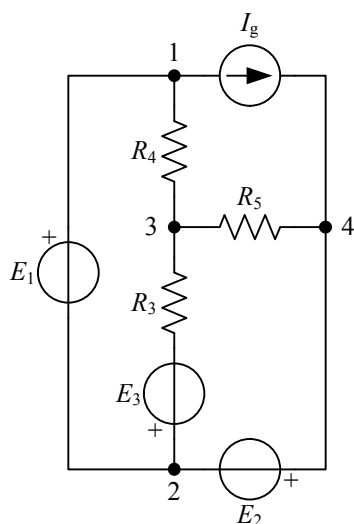
Слика 239.1.



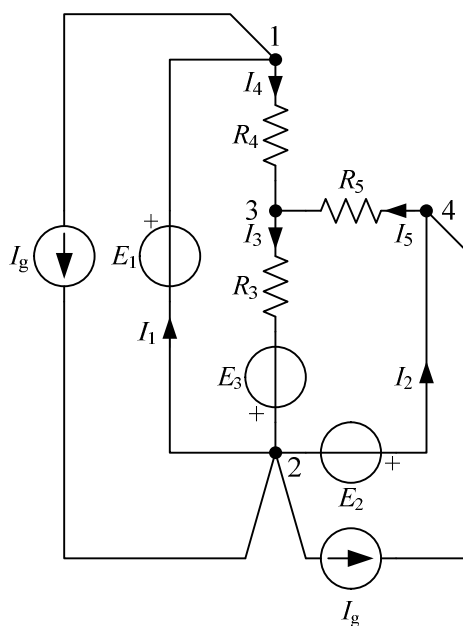
Слика 239.2.

Са те слике је  $I_2 = \frac{-E_1 + R_3 I_g - E_2}{R_2 + R_3} = 0$  и  $I_5 = \frac{-E_1 - R_4 I_g}{R_4 + R_5} = -25 \text{ mA}$ . Такође је  $I_1 = -I_2 - I_5 = 25 \text{ mA}$  и  $U_{34} = -R_5 I_5 + E_2 + R_2 I_2 = 70 \text{ V}$ , па су тражене снаге генератора  $P_{E_1} = E_1 I_1 = 0,5 \text{ W}$ ,  $P_{E_2} = -E_2 I_2 = 0$  и  $P_{I_g} = U_{34} I_g = 2,8 \text{ W}$ .

**\*240.** За коло са слике 240.1 је  $E_1 = 20 \text{ V}$ ,  $E_2 = 12 \text{ V}$ ,  $E_3 = 26,5 \text{ V}$ ,  $I_g = 13 \text{ mA}$ ,  $R_3 = 100 \Omega$ ,  $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$  и  $R_5 = 500 \Omega$ . Израчунати (а) снаге које развијају генератори и (б) укупну снагу Џулових губитака у колу.



Слика 240.1.



Слика 240.2.

**РЕШЕЊЕ**

После премештања струјног генератора, коло добија облик као на слици 240.2. По Кирхофовим законима за то коло је  $I_3 = I_4 + I_5$ ,  $E_1 - R_4 I_4 - R_3 I_3 + E_3 = 0$  и  $E_2 - R_5 I_5 - R_3 I_3 + E_3 = 0$ , одакле је  $I_3 = 95 \text{ mA}$ ,  $I_4 = 37 \text{ mA}$  и  $I_5 = 58 \text{ mA}$ . Даље је  $I_1 = I_g + I_4 = 50 \text{ mA}$  и  $I_2 = I_3 - I_5 = 45 \text{ mA}$  и  $U_{41} = -R_4 I_4 + R_5 I_5 = -8 \text{ V}$ .

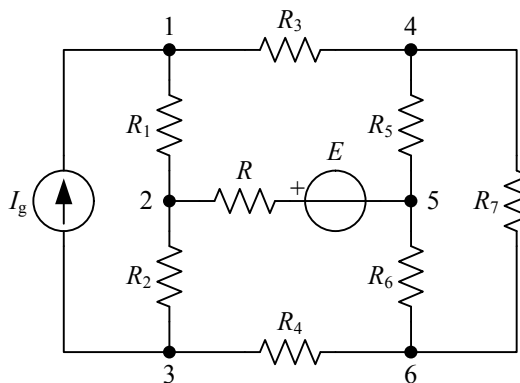
(а) Снаге које развијају генератори у колу на слици 240.1 су  $P_{E_1} = E_1 I_1 = 1 \text{ W}$ ,  $P_{E_2} = E_2 I_2 = 0,54 \text{ W}$ ,  $P_{E_3} = E_3 I_3 = 2,5175 \text{ W}$  и  $P_{I_g} = U_{41} I_g = -0,104 \text{ W}$ .

(б) Укупна снага Џулових губитака је  $P_{R_{\text{uk}}} = R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = 3,9535 \text{ W}$ , што је једнако укупној снази генератора,  $P_g = P_{E_1} + P_{E_2} + P_{E_3} + P_{I_g} = 3,9535 \text{ W}$ .

\*241. За коло са слике 241.1 је  $E = 6 \text{ V}$ ,  $R = 180 \Omega$ ,  $I_g = 0,4 \text{ A}$ ,  $R_1 = 25 \Omega$ ,  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $R_3 = 60 \Omega$ ,  $R_4 = 40 \Omega$ ,  $R_5 = 45 \Omega$ ,  $R_6 = 90 \Omega$  и  $R_7 = 67,5 \Omega$ . Израчунати снагу отпорника  $R$ .

РЕШЕЊЕ

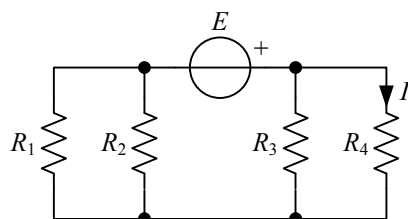
Премештањем струјног генератора  $I_g$  паралелно отпорницима  $R_1$  и  $R_2$ , трансфигурацијом добијених реалних струјних генератора у напонске, као и трансфигурацијом троугла  $R_5$ ,  $R_6$ ,  $R_7$  у звезду, добија се коло са два чвора. Решавањем тог кола методом потенцијала чворова добија се струја отпорника  $R$ ,  $I_{S2} = 20 \text{ mA}$ , па је тражена снага отпорника  $R$   $P_R = RI_{S2}^2 = 72 \text{ mW}$ .



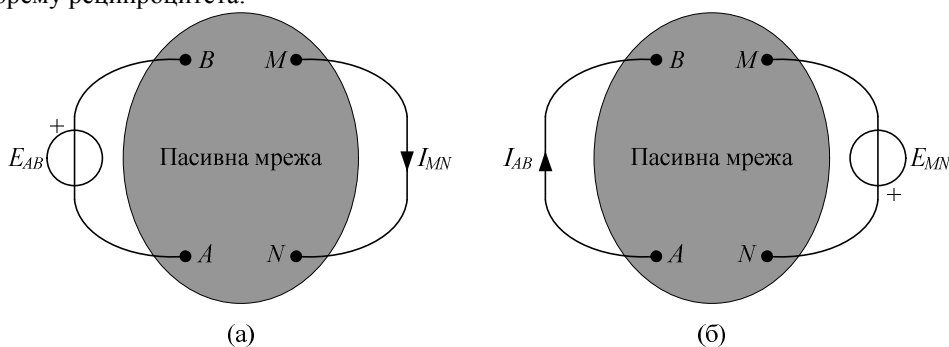
Слика 241.1.

## 4.5. Реципроцитет

242. На слици 242.1 је приказано коло са једним идеалним напонским генератором емс  $E = 42 \text{ V}$  и четири отпорника отпорности  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 0,3 \text{ k}\Omega$  и  $R_4 = 0,3 \text{ k}\Omega$ . Израчунати струју  $I_4$  и проверити теорему реципроцитета.



Слика 242.1.

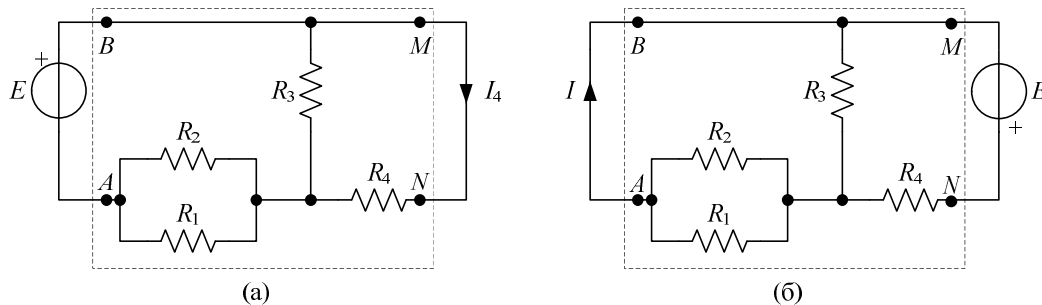


Слика 242.2.

РЕШЕЊЕ

Према општој шеми приказаној на слици 242.2, за побуду једним идеалним напонским генератором, теорема реципроцитета (узајамности) тврди да ако је

$E_{AB} = E_{MN}$ , тада је  $I_{MN} = I_{AB}$ . Одавде произилази да је  $\frac{E_{AB}}{I_{MN}} = \frac{E_{MN}}{I_{AB}} = R_t$ , где је  $R_t$  величина која има природу отпорности, а назива се преносна отпорност (трансрезистанса).



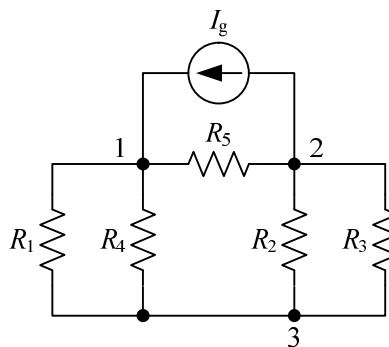
Слика 242.3.

На слици 242.3 је приказано задато коло у форми прилагођеној слици 242.2. Према слици 242.3 је  $I_4 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{R_3 E}{R_1 R_2 \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2} + R_3 R_4} = 28 \text{ mA}$  и

$$I = \frac{\frac{R_3 E}{R_3 + R_4}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{R_3 E}{R_1 R_2 \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2} + R_3 R_4} = 28 \text{ mA} . \quad \text{Ово потврђује теорему}$$

реципроцитета, јер је  $I = I_4$ . Преносна отпорност је  $R_t = \frac{E}{I_4} = \frac{E}{I} = 1,5 \text{ k}\Omega$ .

**243.** Идеални струјни генератор  $I_g$  и отпорници отпорности  $R_1, R_2, R_3, R_4$  и  $R_5$  везани су у коло као на слици 243.1. Одредити израз за напон  $U_{13}$  и проверити теорему реципроцитета.



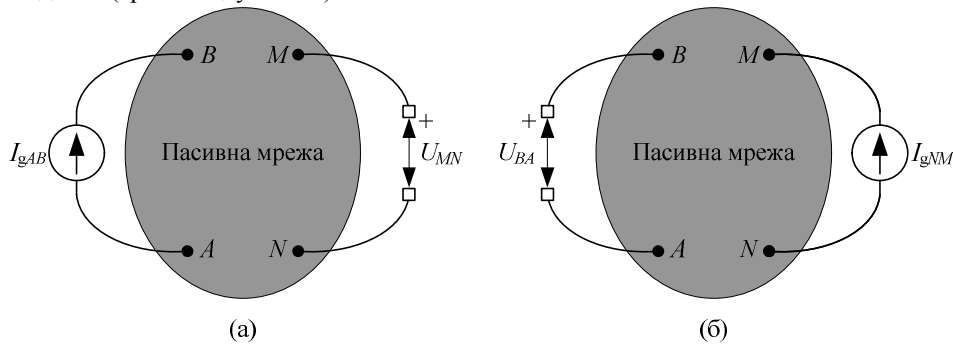
Слика 243.1.

#### РЕШЕЊЕ

Када се у колу налази само један идеални струјни генератор, теорема реципроцитета се може исказати користећи се сликом 243.2: ако је  $I_{gAB} = I_{gNM}$ , тада је  $U_{MN} = U_{BA}$ .



Количник  $G_t = \frac{I_{gAB}}{U_{MN}} = \frac{I_{gNM}}{U_{BA}}$  је по природи проводност и назива се преносна проводност (транскондуктанса).



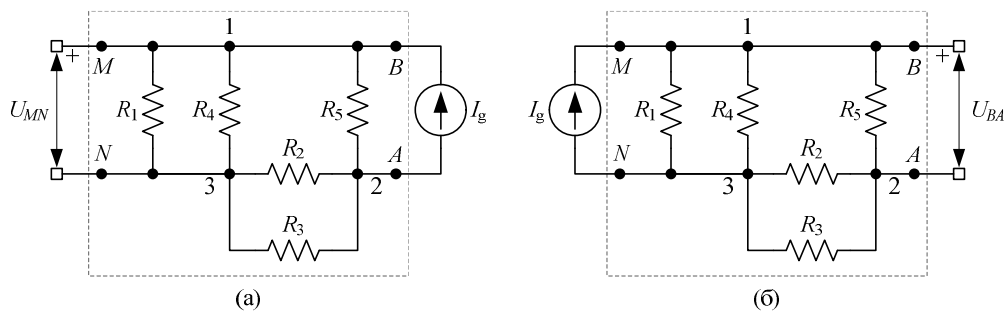
Слика 243.2.

На слици 243.3 је приказано задато коло. Према тој слици је

$$U_{MN} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} \frac{R_5 I_g}{\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + R_5 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \quad \text{и} \quad U_{BA} = R_5 \frac{\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} I_g}{\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + R_5 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}.$$

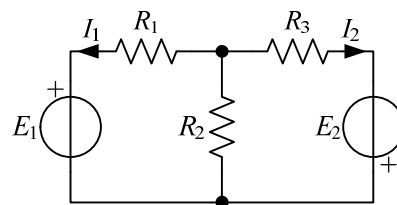
Одавде је  $U_{MN} = U_{BA}$ , што потврђује теорему реципроцитета илустровану сликом 243.2.

$$\text{Преносна проводност је } G_t = \frac{I_g}{U_{MN}} = \frac{I_g}{U_{BA}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_1} \left( 1 + \frac{R_1}{R_4} \right) + \frac{1}{R_5} \frac{R_2 R_3 (R_1 + R_4)}{R_1 R_4 (R_2 + R_3)}.$$



Слика 243.3.

**244.** Када је у колу приказаном на слици 244.1  $E_1 = 10 \text{ V}$  и  $E_2 = 0$ , тада је  $I_2 = 2 \text{ mA}$ . Колика је струја  $I_1$  када је  $E_1 = 0$  и  $E_2 = 20 \text{ V}$ ?

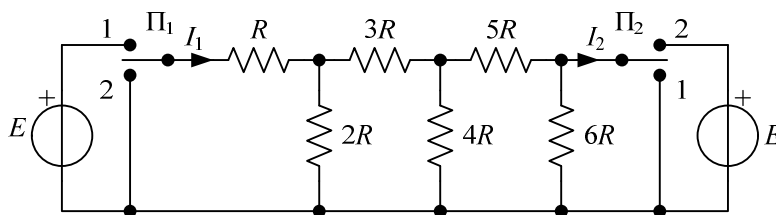


Слика 244.1.

РЕЗУЛТАТ

На основу теореме реципроцитета и теореме пропорционалности, тражена струја је  $I_1 = -4 \text{ mA}$ .

**245.** У колу приказаном на слици 245.1 је  $E = 1 \text{ V}$ . Када су преклопници  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  у положају 1,  $I_2 = 10 \text{ mA}$ . Колика је струја  $I_1$  када су преклопници у положају 2?

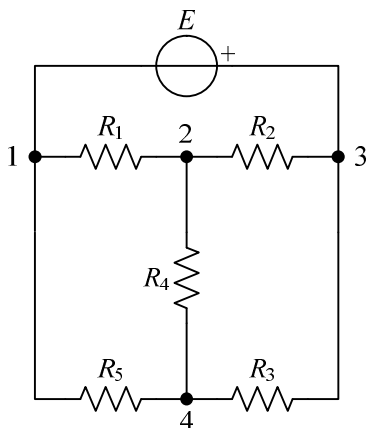


Слика 245.1.

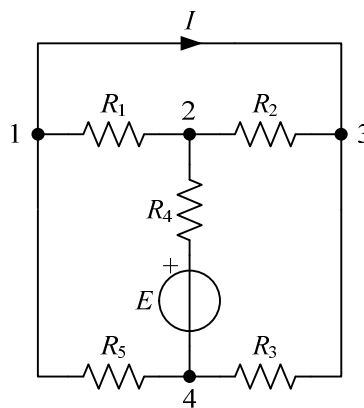
РЕШЕЊЕ

На основу теореме реципроцитета је  $I'_1 = -I_2 = -10 \text{ mA}$ .

**246.** Генератор емс  $E = 30 \text{ V}$  и отпорници отпорности  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 400 \Omega$ ,  $R_4 = 100 \Omega$  и  $R_5 = 100 \Omega$  образују коло сталне струје као на слици 246.1. Израчунати снагу отпорника  $R_4$ .



Слика 246.1.



Слика 246.2.

РЕШЕЊЕ

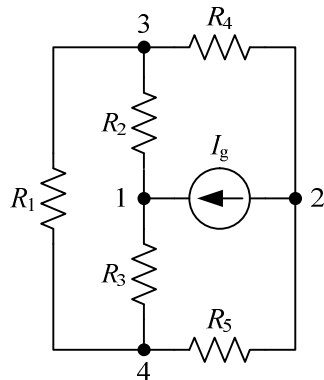
Тражена снага се може израчунати из  $P_4 = R_4 I_4^2$ , где је  $I_4$  струја отпорника отпорности  $R_4$ . Ради лакшег решавања, примењена је теорема реципроцитета, као на

слици 246.2. У колу са те слике је  $I_{42} = \frac{E}{R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5}} = 0,1 \text{ A}$ . Такође је

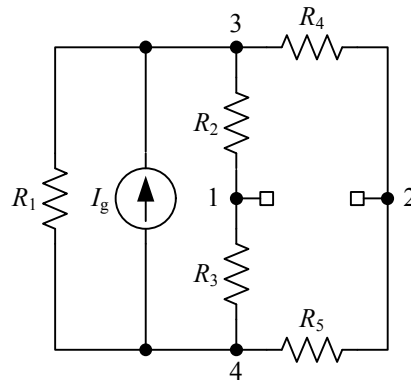
$$I_{21} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_{42} = 60 \text{ mA} \text{ и } I_{14} = \frac{R_3}{R_3 + R_5} I_{42} = 80 \text{ mA} . \text{ Сада је } I = I_{21} - I_{14} = -20 \text{ mA} ,$$

што је једнако струји отпорника  $R_4$  у колу са слике 246.1. Тражена снага тог отпорника је  $P_4 = 40 \text{ mW}$ .

**247.** За коло са слике 247.1 познато је  $I_g = 30 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 0,5 \text{ k}\Omega$  и  $R_5 = 0,4 \text{ k}\Omega$ . Израчунати снагу отпорника  $R_1$ .



Слика 247.1.



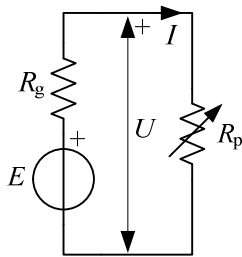
Слика 247.2.

РЕШЕЊЕ

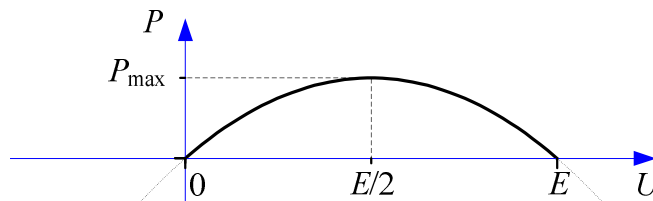
Снага отпорника  $R_1$  се може израчунати из обрасца  $P_{R_1} = \frac{U_{34}^2}{R_1}$ . У овом примеру, за одређивање напона  $U_{34}$  погодно је применити теорему реципроцитета, односно анализирати коло са слике 247.2. По методи напона између чворова, за то коло је 
$$U_{34} = \frac{I_g}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} = 18,9 \text{ V} , \text{ па је } U_{12} = \left( \frac{R_4}{R_4 + R_5} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right) U_{34} = -3 \text{ V} .$$
 Стога је у колу са слике 247.1  $U_{34} = -3 \text{ V}$ . Тражена снага отпорника је  $P_{R_1} = 3 \text{ mW}$ .

## 4.6. Прилагођење по снази

**248.** Реални напонски генератор, емс  $E$  и унутрашње отпорности  $R_g$ , и пријемник променљиве отпорности образују просто електрично коло као на слици 248.1. Одредити отпорност  $R_p$  пријемника при којој је снага пријемника максимална.



Слика 248.1.



Слика 248.2.

### РЕШЕЊЕ

Снага пријемника је  $P = UI = U \frac{E - U}{R_g}$ , односно

$$P(U) = \frac{1}{R_g} (EU - U^2). \quad (248.1)$$

Снага отпорника  $R_p$  мора задовољавати услов  $P \geq 0$ . Отпорник је увек пријемник, не може се понашати као генератор, а његова отпорност је  $R_p > 0$ . Унутрашња отпорност генератора такође мора бити позитивна ( $R_g > 0$ ). Ако се претпостави да је  $E > 0$ , следи да напон отпорника мора испуњавати двоструку неједнакост  $0 \leq U \leq E$ . (Ако је  $E < 0$ , онда мора важити  $E \leq U \leq 0$ .) На слици 248.2 приказан је график функције (парабола) дате изразом (248.1). Са графика се види да је снага пријемника максимална када је

$U = \frac{E}{2}$ . Заменом  $U = \frac{E}{2}$  у (248.1) добија се да максимална снага износи  $P_{\max} = \frac{E^2}{4R_g}$ .

Под овим околностима је  $U = \frac{E}{2} = \frac{R_p}{R_p + R_g} E$ , одакле следи  $R_p = R_g$ . Каже се да је тада пријемник прилагођен по снази на генератор.

До истог резултата се може доћи и помоћу извода. Како је услов екстремума  $\frac{dP(U)}{dU} \equiv \frac{1}{R_g}(E - 2U) = 0$ , добија се  $U = \frac{E}{2}$ . При томе је испуњен услов да је екстремум

максимум, јер је  $\frac{d^2 P_p}{dU_p^2} \equiv -\frac{2}{R_p} < 0$ .

Када је пријемник прилагођен по снази, снага генератора је  $P_g = UI = \frac{E^2}{4R_g}$ , а снага коју развија емс  $E$  је  $P_E = EI = \frac{E^2}{2R_g}$ . То значи да се развијена снага дели на два једнака дела: једна половина се претвара у топлоту у пријемнику, а друга половина у унутрашњој отпорности генератора. При прилагођењу по снази, коефицијент корисног дејства (степен искоришћења) генератора је  $\eta = \frac{P_p}{P_E} = \frac{1}{2}$ , односно  $\eta = 50\%$ .

**249.** Генератор, сталне емс  $E$  ( $E > 0$ ) и унутрашње отпорности  $R_g > 0$ , и пријемник отпорности  $R_p \in [0, +\infty)$  образују просто електрично коло (слика 248.1). На истом графику, у функцији јачине струје пријемника,  $I$ , представити напон пријемника,  $U$ , снагу пријемника,  $P_{R_p}$ , снагу коју развија емс  $E$ , снагу губитака у генератору и коефицијент корисног дејства,  $\eta$ .

#### РЕШЕЊЕ

У простом колу на слици 248.1, емс  $E$  одржава струју  $I$  у колу, па емс и струја морају бити истог знака у односу на референтне смерове са те слике. По Омовом закону је  $I(R_p) = \frac{E}{R_g + R_p}$ . Посебно, за  $R_p = 0$  је  $I(R_p = 0) = \frac{E}{R_g}$ , док је за  $R_p \rightarrow +\infty$

$I(R_p \rightarrow +\infty) = 0$ . Стога, за  $R_p \in [0, +\infty)$  произилази  $I(R_p) \in [0, I_{\max}]$ , где је  $I_{\max} = \frac{E}{R_g}$

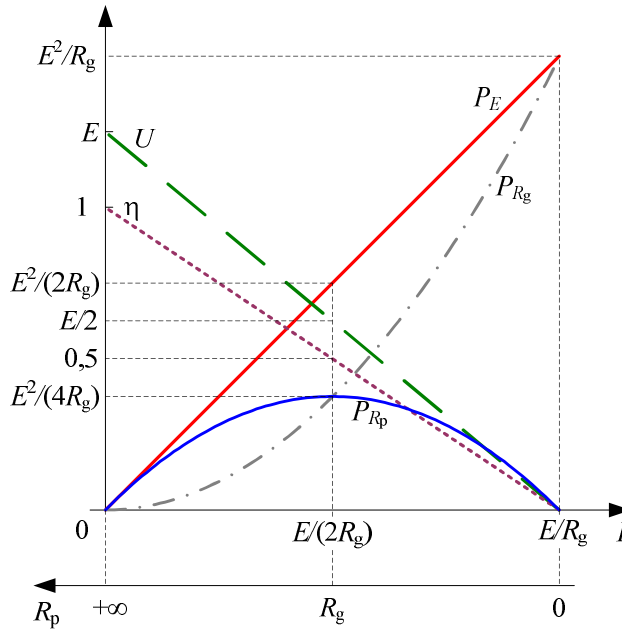
струја кратког споја генератора.

Напон пријемника је  $U(I) = E - R_g I$ , што је линеарна опадајућа функција (слика 249.1).

Снага пријемника је  $P_{R_p} = UI = (E - R_g I)I$ , што је квадратна функција струје  $I$ . Отвор параболе је надоле (слика 249.1). Функција има нуле за  $I = 0$  и  $I = \frac{E}{R_g}$ , и један

екстремум, одређен из  $\frac{dP_{R_p}}{dI} \equiv E - 2R_g I = 0$ , односно  $I = \frac{E}{2R_g} = \frac{I_{\max}}{2}$ . Како је

$\frac{d^2 P_{R_p}}{dI^2} = -2R_g < 0$ , тај екстремум је максимум (што је очигледно и са слике 249.1) и износи  $(P_{R_p})_{\max} = \frac{E^2}{4R_g}$ .



Слика 249.1.

Снага коју развија емс  $E$  је  $P_E = EI$  и линеарно је пропорционална струји  $I$  (слика 249.1). Максимална снага коју развија емс је  $(P_E)_{\max} = EI_{\max} = \frac{E^2}{R_g}$ . При струји при којој је снага пријемника максимална (када је пријемник прилагођен на генератор), снага коју развија емс  $E$  је  $P_E = \frac{E^2}{2R_g} = \frac{1}{2}(P_E)_{\max} = 2(P_{R_p})_{\max}$ .

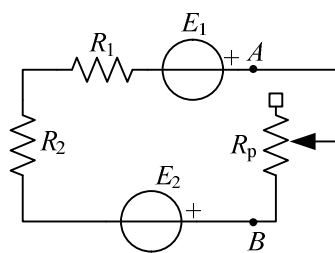
Снага дисипирана на унутрашњој отпорности генератора ( $R_g$ ) је  $P_{R_g} = R_g I^2$  и пропорционална је квадрату струје  $I$ . Та снага је у границама  $P_{R_g} \in \left[0, \frac{E^2}{R_g}\right]$  за  $I(R_p) \in [0, I_{\max}]$ . Када је пријемник прилагођен на генератор,  $P_{R_g} = \frac{E^2}{4R_g} = (P_{R_p})_{\max} = \frac{1}{2}P_E$ . Тада се снага коју развија емс  $E$  дели на два једнака дела, од којих се један део дисипира на пријемнику, а други у самом генератору (на отпорнику  $R_g$ ).

Степен искоришћења је  $\eta = \frac{P_{R_p}}{P_E} = 1 - \frac{R_g}{E} I$  и линеарна је функција струје  $I$ . Када је пријемник прилагођен, тада је  $\eta = 0,5$  (50%). Са слике се види да је степен искоришћења већи од 50% за  $R_p > R_g$ , али је тада снага пријемника мања од снаге при прилагођењу. Степен искоришћења тежи максималној вредности (100%) када  $I \rightarrow 0$ , при чему и  $P_{R_p} \rightarrow 0$ .

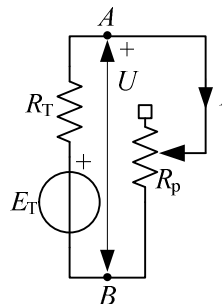
Читаоцу се препоручује да понови овај задатак тако да изрази све снаге и степен искоришћења у функцији напона  $U$ .

Читаоцу се такође препоручује да понови задатак ако је генератор реалан струјни, струје  $I_g = \frac{E}{R_g}$  и унутрашње проводности  $G_g = \frac{1}{R_g}$  и да упореди степен искоришћења реалног струјног и еквивалентног реалног напонског генератора.

**250.** Генератори емс  $E_1 = 20 \text{ V}$  и  $E_2 = 100 \text{ V}$ , отпорници отпорности  $R_1 = 5 \Omega$  и  $R_2 = 10 \Omega$  и потенциометар отпорности  $R_p = 30 \Omega$  и максималне допустиве струје  $I_{p\max} = 2 \text{ A}$  образују просто коло као на слици 250.1. Израчунати отпорност потенциометра тако да се на њему у овом колу развије максимална снага.



Слика 250.1.



Слика 250.2.

#### РЕШЕЊЕ

У односу на потенциометар, остатак кола се може заменити Тевененовим генератором (слика 250.2) параметара  $E_T = -E_2 + E_1 = -80 \text{ V}$  и  $R_T = R_1 + R_2 = 15 \Omega$ . Потенциометар у колу на слици 250.2 понаша се као отпорник променљиве отпорности, чија се отпорност  $R$  може мењати у границама  $0 \leq R \leq 30 \Omega$ . Границе одговарају крајњим положајима клизача потенциометра.

Апсолутна вредност јачине струје у колу је  $|I(R)| = \frac{|E_T|}{R_T + R}$ . На слици 250.3 је приказана та вредност у зависности од отпорности потенциометра ( $R$ ). Да се не би прекорачила допустива јачина струје, односно да би било  $|I(R)| \leq I_{p\max}$ , очигледно мора бити  $R \geq 25 \Omega$ . Имајући у виду опсег отпорности  $R$  који се може реализовати

потенциометром, максимална допустива јачина струје неће бити прекорачена ако је  $25 \Omega \leq R \leq 30 \Omega$ .

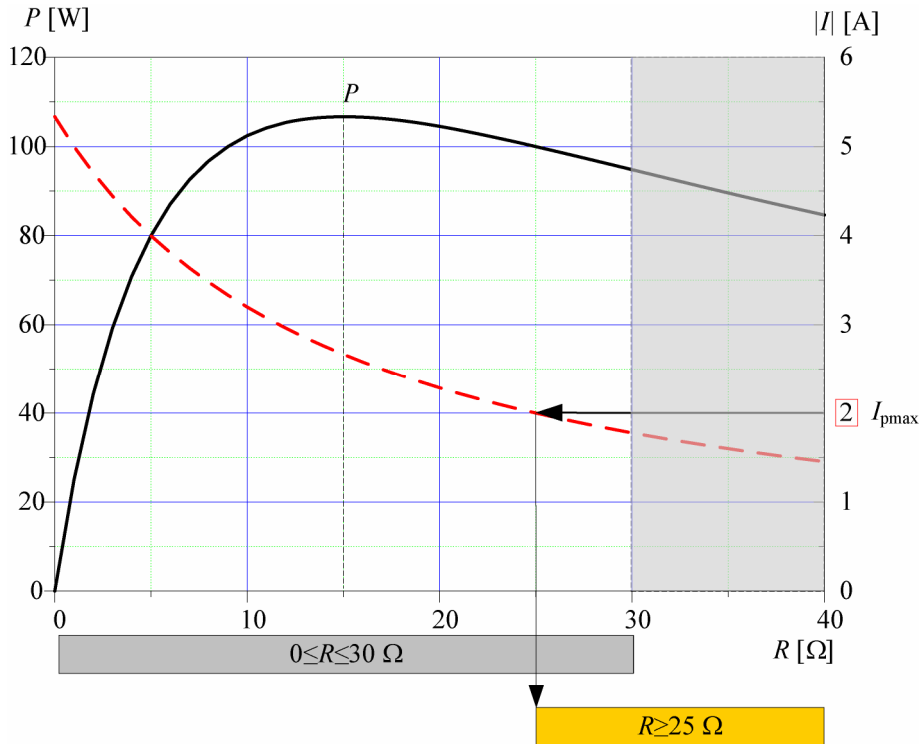
Снага потенциометра је  $P = \frac{RE_T^2}{(R_T + R)^2}$  (слика 250.3). Снага има максимум када је

$R = R_T = 15 \Omega$ , када је остварено прилагођење по снази. Та отпорност се може реализовати потенциометром (јер је  $R < R_p$ ). Међутим, при тој отпорности је јачина

струје у колу већа од допустиве и износи  $|I| = \frac{|E_T|}{2R_T} = \frac{8}{3} \text{ A}$ . Стога потенциометар не сме

да се постави у тај положај.

Имајући у виду ограничење које намеће допустива јачина струје, очигледно је да је снага отпорника највећа када је  $|I| = I_{p\max} = 2 \text{ A}$ , односно  $R = 25 \Omega$ , а максимална снага је  $P = 100 \text{ W}$ .



Слика 250.3.

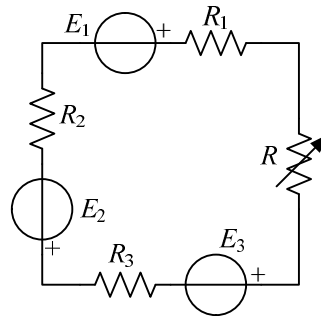
Читаоцу се препоручује да понови задатак за следеће карактеристике потенциометра (сви остали подаци су исти као у тексту задатка):

- $R_p = 30 \Omega$ ,  $I_{p\max} = 4 \text{ A}$ ;
- $R_p = 20 \Omega$ ,  $I_{p\max} = 2 \text{ A}$ ;
- $R_p = 30 \Omega$ ,  $I_{p\max} = 4 \text{ A}$ , максимална допустива снага потенциометра  $P_{p\max} = 100 \text{ W}$ ;



- $R_p = 20 \Omega$ ,  $I_{p\max} = 4 \text{ A}$ ,  $P_{p\max} = 100 \text{ W}$ .

**251.** За коло приказано на слици 251.1 је познато  $E_1 = 4 \text{ V}$ ,  $E_2 = -8 \text{ V}$ ,  $E_3 = 24 \text{ V}$ ,  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 12 \Omega$  и  $R_3 = 20 \Omega$ . Израчунати отпорност  $R$  тако да се на том отпорнику развија највећа снага. Колика је та снага?

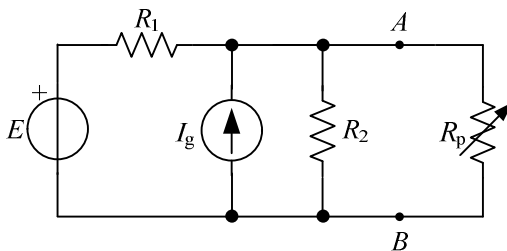


Слика 251.1.

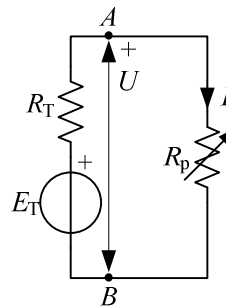
РЕЗУЛТАТ

Снага је највећа када је  $R = 40 \Omega$  и износи  $P_{\max} = 0,9 \text{ W}$ .

**252.** Отпорници отпорности  $R_1 = 100 \Omega$  и  $R_2 = 400 \Omega$ , напонски генератор емс  $E = 30 \text{ V}$ , струјни генератор струје  $I_g = 0,2 \text{ A}$  и пријемник променљиве отпорности  $R_p \in [0, 100 \Omega]$  образују коло приказано на слици 252.1. (а) Колика је отпорност  $R_p$  при којој је снага пријемника максимална и колика је та максимална снага? (б) Колики је при томе коефицијент корисног дејства?



Слика 252.1.



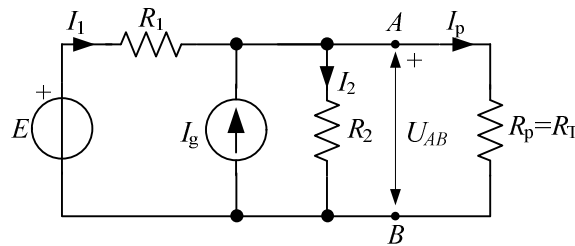
Слика 252.2.

РЕШЕЊЕ

(а) Део кола са слике 252.1 лево од тачака  $A$  и  $B$  може се заменити Тевененовим генератором параметара  $R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 80 \Omega$  и  $E_T = R_2 \frac{E + R_1 I_g}{R_1 + R_2} = 40 \text{ V}$ , чиме се добија просто коло као на слици 252.2. Снага пријемника је максимална када је испуњен услов прилагођења по снази,  $R_p = R_T = 80 \Omega$ . Максимална снага је, при томе,

$$P_{p\max} = \frac{E_T^2}{4R_T} = 5 \text{ W}.$$

(б) Тевененов генератор еквивалентно замењује мрежу у односу на остатак кола. Међутим, у општем случају коефицијент корисног дејства оригиналне мреже није исти као коефицијент корисног дејства Тевененовог генератора. (Изузетак је, на пример, просто коло из задатка 250.) Коефицијент корисног дејства Тевененовог генератора при условима максималне снаге пријемника је  $\eta_T = \frac{R_p}{R_p + R_T} = 0,5$ . Међутим, снага отпорника  $R_T$  са слике 252.2 није једнака збиру снага отпорника у оригиналној мрежи са слике 252.1, па је коефицијент корисног дејства оригиналне мреже  $\eta \neq \eta_T$ .

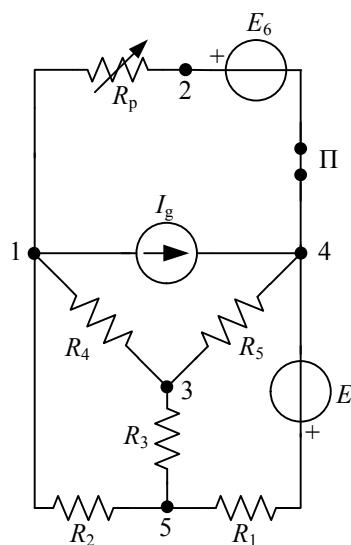


Слика 252.3.

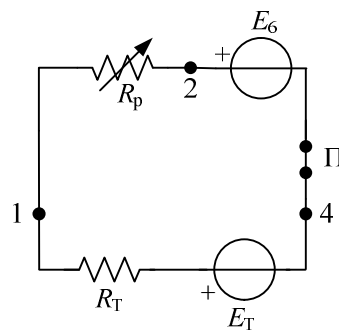
На слици 252.3 је приказано задато коло у режиму максималне снаге пријемника. Према референтним смеровима са те слике је  $U_{AB} = 20 \text{ V}$  и  $I_1 = \frac{E - U_{AB}}{R_1} = 0,1 \text{ A}$ , па је укупна снага отпорника  $P_R = R_1 I_1^2 + \frac{U_{AB}^2}{R_2} = 2 \text{ W}$ . За разлику од тога, снага отпорника  $R_T$  са слике 252.2 је  $P_{R_T} = 5 \text{ W}$ .

Укупна снага генератора у колу на слици 252.3 је  $P_g = P_R + P_{p \max} = 7 \text{ W}$ , што мора бити на основу теореме одржања снаге у колу. Коефицијент корисног дејства кола са слике 252.3 је стога  $\eta = \frac{P_{p \max}}{P_g} = \frac{5}{7} \neq \eta_T$ .

**253.** За коло са слике 253.1 познато је  $R_1 = R_2 = 150 \Omega$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = 50 \Omega$  и  $E_6 = 15 \text{ V}$ . Отпорност пријемника се може мењати у границама  $R_p \in [0, 25 \Omega]$ . При отвореном прекидачу П познат је напон  $U'_{14} = 25 \text{ V}$ . Израчунати отпорност пријемника при којој је његова снага максимална. Колика је та снага?



Слика 253.1.

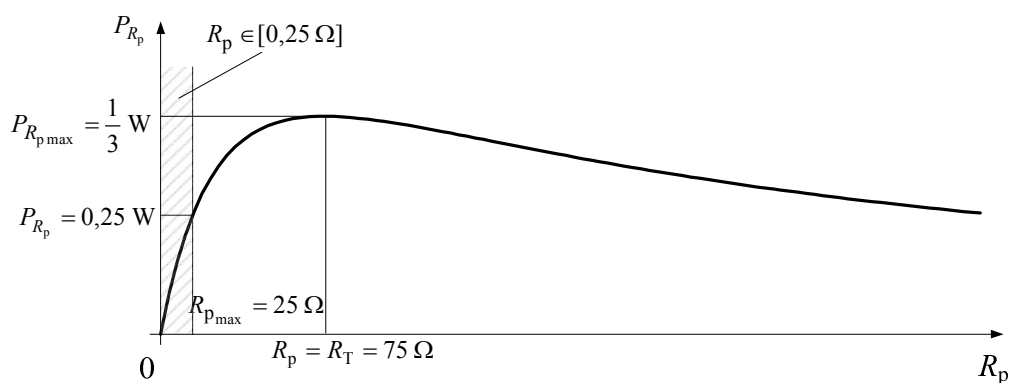


Слика 253.2.

РЕШЕЊЕ

На слици 253.2 приказано је еквивалентно просто коло формирано применом Тевененове теореме. Параметри Тевененовог генератора су  $E_T = U'_{14} = 25 \text{ V}$  и  $R_T = 75 \Omega$ .

Према теореди прилагођења по снази, снага пријемника је максимална када је  $R_p = R_T = 75 \Omega$  и износи  $P_{R_p \text{ max}} = \frac{1}{3} \text{ W}$ . Међутим, опсег промене отпорности пријемника не покрива ову оптималну вредност (слика 253.3). У опсегу  $R_p \in [0, 25 \Omega]$  снага пријемника монотонно расте са повећавањем отпорности  $R_p$ . Максимална снага пријемника се достиже за  $R_p = R_{p \text{ max}} = 25 \Omega$  и износи  $P_{R_p} = 0,25 \text{ W}$ .



Слика 253.3.

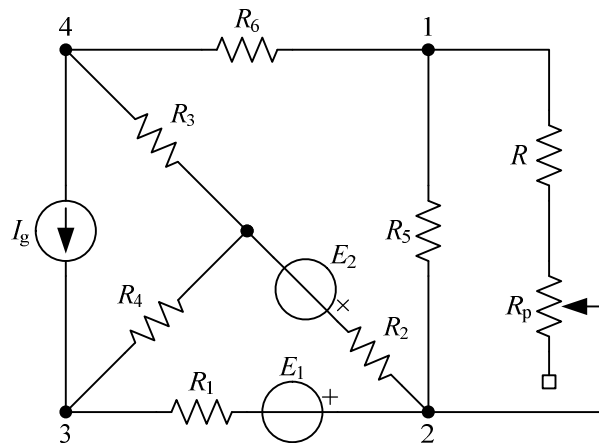
**254.** Реални напонски генератор, електромоторне силе  $E = 10 \text{ V}$  и унутрашње отпорности  $R_g = 12 \Omega$ , и пријемник отпорности  $R_p$  везани су у просто коло. (а) Израчунати отпорност пријемника тако да његова снага буде 75% максимално могуће снаге пријемника у овом колу. (б) Колика треба да буде отпорност пријемника да би његова снага била максимално могућа?

## РЕЗУЛТАТ

(а) Постоје два решења:  $R_{p1} = 4 \Omega$  и  $R_{p2} = 36 \Omega$ .

(б) Отпорност пријемника при којој му је снага максимална је  $R_p = R_g = 12 \Omega$ .

**255.** Генератори електромоторних сила  $E_1 = 125 \text{ V}$  и  $E_2 = 20 \text{ V}$ , струјни генератор  $I_g$ , отпорници отпорности  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $R_3 = 15 \Omega$ ,  $R_4 = 5 \Omega$ ,  $R_5 = 15 \Omega$  и  $R_6 = 5 \Omega$ , пријемник отпорности  $R = 10 \Omega$  и потенциометар отпорности  $R_p = 20 \Omega$ , максималне допустиве снаге  $P_{p\max} = 5 \text{ W}$  и максималне допустиве струје  $I_{p\max} = 1 \text{ A}$ , образују електрично коло као на слици 255.1. Одредити у којим границама сме да се налази струја струјног генератора  $I_g$ , тако да потенциометар у овоме колу не прегори без обзира на положај клизача.



Слика 255.1.

## РЕШЕЊЕ

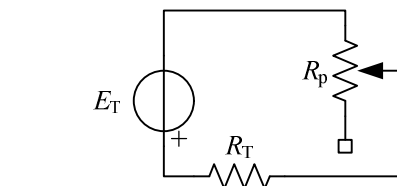
У односу на потенциометар, остатак кола се може заменити Тевененовим генератором параметара  $E_T[V] = \frac{55}{9} I_{g[A]} + 30$  и  $R_T = 20 \Omega$ , као на слици 255.2. Најјача (по апсолутној вредности) струја потенциометра постоји када је његова отпорност једнака нули и износи  $I_p = \frac{E_T}{R_T}$ . Према услову задатка,  $-1 \text{ A} < I_p < 1 \text{ A}$ , одакле је  $-20 \text{ V} < E_T < 20 \text{ V}$ .

Снага потенциометра је највећа када је његова отпорност једнака  $R_p = R_T = 20 \Omega$  (што је истовремено и највећа отпорност између прикључака потенциометра) и износи  $P_p = \frac{E_T^2}{4R_T}$ .

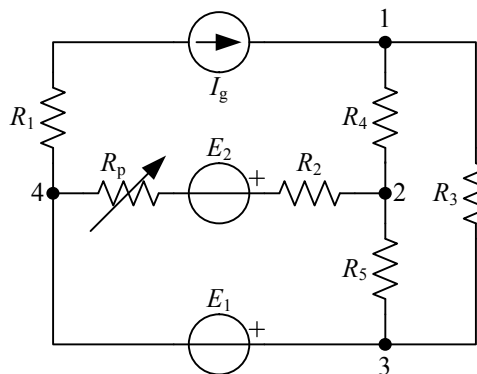
Према услови задатка,  $P_p < 5 \text{ W}$ , одакле се добија исти услов као за струју:  $-20 \text{ V} < E_T < 20 \text{ V}$ .

$$\text{Одавде је } -\frac{90}{11} \text{ A} < I_g < -\frac{18}{11} \text{ A}.$$

**256.** За коло сталне струје са слике 256.1 познато је  $E_1 = 21 \text{ V}$ ,  $E_2 = 15 \text{ V}$ ,  $I_g = 0,3 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_2 = 50 \Omega$ ,  $R_3 = 210 \Omega$ ,  $R_4 = 420 \Omega$ ,  $R_5 = 105 \Omega$  и отпорник  $R_p$  променљиве отпорности од 0 до  $10 \Omega$  и највеће допустиве струје  $0,15 \text{ A}$ . Израчунати (а) отпорност променљивог отпорника  $R_p$  тако да снага Џулових губитака у грани 2-4 буде максимална и (б) ту максималну снагу.



Слика 255.2.



Слика 256.1.

## РЕШЕЊЕ

У односу на грану 2-4, остатак кола се може заменити Тевененовим генератором параметара  $E_T = E_{T42} = 30 \text{ V}$  и отпорности  $R_T = 90 \Omega$ . Анализирајући просто коло које се добија везивањем гране 2-4 на Тевененов генератор, добија се да је најјача струја променљивог отпорника (за  $R_p = 0$ ),  $I_{\max} \approx 107 \text{ mA}$ , што је мање од његове највеће допустиве струје.

(а) Максимална снага Џулових губитака у грани би се добила за  $R_p + R_2 = R_T$ , односно за  $R_p = 40 \Omega$ , али отпорност променљивог отпорника не може бити већа од  $10 \Omega$ . Стога је снага Џулових губитака у грани је максимална када је отпорност променљивог отпорника максимална,  $R_p = 10 \Omega$ .

(б) Максимална снага Џулових губитака у грани 2-4 је  $P_{J_{\max}} = 0,6 \text{ W}$ .

**\*257.** У колу на слици 257.1 извршена су два мерења пре затварања прекидача П. Када је између тачака А и В прикључен амперметар занемарљиве унутрашње отпорности, измерена је струја  $I'_{AB} = 1 \text{ A}$ , а када је прикључен волтметар занемарљиве

унутрашње проводности, измерен је напон  $U''_{AB} = 2 \text{ V}$ . Затим је затворен прекидач П. Одредити (а) отпорност  $R_x$  тако да снага овог отпорника буде максимална, (б) ту максималну снагу, и (в) параметре  $R$ ,  $E$  и  $I_g$  тако да буде задовољен услов (а) и да, при затвореном прекидачу П, снага коју развија идеални напонски генератор буде једнака снази коју развија идеални струјни генератор.

#### РЕШЕЊЕ

У односу на отпорник  $R_x$ , остатак кола се може заменити Тевененовим генератором емс  $E_T = E_{TBA} = U''_{AB} = 2 \text{ V}$

и отпорности  $R_T = \frac{U''_{AB}}{I'_{AB}} = 2 \Omega$ .

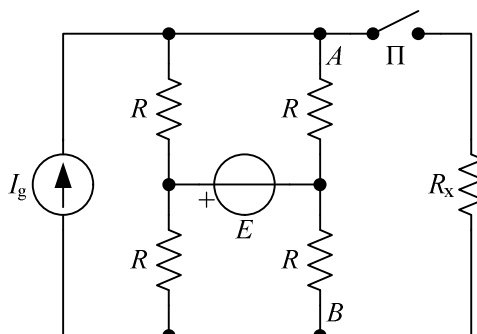
(а) На основу теореме прилагођења по снази, отпорност отпорника је  $R_x = R_T = 2 \Omega$ .

(б) Максимална снага отпорника је

$$P_{\max} = \frac{E_T^2}{4R_T} = 0,5 \text{ W}.$$

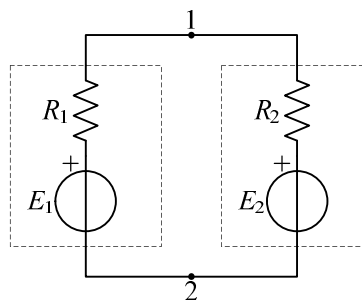
(в) Отпорност Тевененовог генератора је  $R_T = R$ , па је  $R = 2 \Omega$ . Емс Тевененовог генератора је  $E_T = RI_g$ . Одавде је  $I_g = 1 \text{ A}$ . Када је прекидач П затворен, снага идеалног струјног генератора је  $P_{I_g} = U_{AB}I_g = \frac{E_T}{2}I_g = 1 \text{ W}$ .

Идеални напонски генератор је везан у једну дијагоналу уравнотеженог моста, па  $E$  не доприноси електромоторној сили Тевененовог генератора. И обрнуто, стање у гранама које су везане између тачака  $A$  и  $B$  не утичу на струју идеалног напонског генератора. На основу тога је струја тог генератора, у односу на референтни смер који се поклапа са смером емс,  $I_E = \frac{E}{R}$ , па је снага тог генератора  $P_E = \frac{E^2}{R}$ . Према условима задатка,  $P_E = P_{I_g}$ , одакле је  $E = \pm\sqrt{2} \text{ V}$ .



Слика 257.1.

**258.** Реални напонски генератор електромоторне силе  $E_1 = 20 \text{ V}$  и унутрашње отпорности  $R_1 = 1 \Omega$  и реални напонски генератор непознате електромоторне силе  $E_2$  и унутрашње отпорности  $R_2 = 0,5 \Omega$  везани су у коло као на слици 258.1. Израчунати електромоторну силу  $E_2$  при којој је снага коју прима други реални напонски генератор ( $E_2 - R_2$ ) максимална.



Слика 258.1.

РЕШЕЊЕ

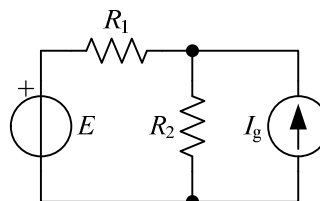
Снага коју прима други генератор је  $P = U_{12}I_{12}$ , где је  $I_{12}$  струја тог генератора у односу на референтни смер који се на слици 258.1 поклапа са смером кретања казаљке часовника. Та снага је истовремено снага коју даје први генератор. Како је  $U_{12} = E_1 - R_1I_{12}$ , то је  $P = E_1I_{12} - R_1I_{12}^2$ . Ова квадратна функција има максимум када је  $I_{12} = \frac{E_1}{2R_1} = 10 \text{ A}$ , односно када је струја једнака једној половини струје кратког споја

првог генератора. При томе је  $U_{12} = \frac{E_1}{2} = 10 \text{ V}$ , односно напон првог генератора једнак је једној половини напона празног хода.

Емс другог генератора је  $E_2 = U_{12} - R_2I_{12} = 5 \text{ V}$ .

**259.** У колу на слици 259.1 је  $E = 24 \text{ V}$ ,  $R_1 = 8 \Omega$  и  $R_2 = 4 \Omega$ .

(а) Израчунати струју идеалног струјног генератора  $I_g$  тако да снага коју тај генератор прима буде максимална.  
(б) Израчунати ту максималну снагу.



Слика 259.1.

РЕЗУЛТАТ

(а) Струја генератора треба да буде  $I_g = -1,5 \text{ A}$ . Та струја је једнака једној половини струје Нортеновог генератора којим се замењује остатак кола у односу на генератор  $I_g$ .

(б) Максимална снага је  $P_{I_g \text{ max}} = 6 \text{ W}$ .

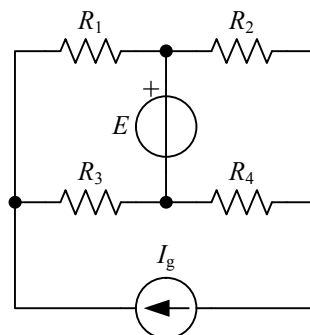
**260.** У колу на слици 260.1 је  $E = 4 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \Omega$  и  $R_4 = 300 \Omega$ . Израчунати

(а) јачину струје струјног генератора ( $I_g$ ) при којој је снага коју прима тај генератор највећа и  
(б) ту највећу снагу.

РЕЗУЛТАТ

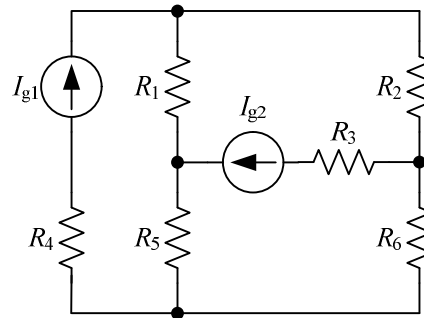
(а) Снага коју прима струјни генератор је највећа када је  $I_g = 4 \text{ mA}$ .

(б) Највећа снага је  $P_{I_g \text{ max}} = 2 \text{ mW}$ .



Слика 260.1.

**261.** У колу на слици 261.1 је  $I_{g1} = 6 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_6 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = R_4 = R_5 = 20 \Omega$  и  $R_3 = 15 \Omega$ . (а) Израчунати струју идеалног струјног генератора  $I_{g2}$  тако да снага коју прима тај генератор буде максимална. (б) Израчунати ту максималну снагу.



Слика 261.1.

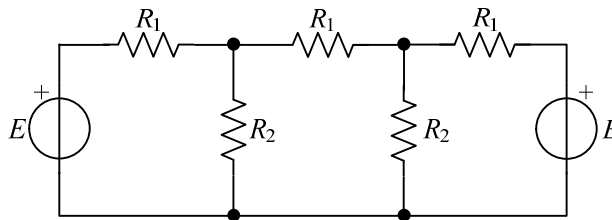
РЕЗУЛТАТ

(а) Снага коју прима струјни генератор је највећа када је  $I_{g2} = -0,5 \text{ A}$

(б) Највећа снага коју прима струјни генератор је  $P_{\max} = 7,5 \text{ W}$ .

## 4.7. Симетрија и бисекција

**262.** За коло са слике 262.1 познато је  $E = 12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$  и  $R_2 = 20 \Omega$ . Израчунати (а) струје свих грана кола и (б) укупну снагу Џулових губитака у колу.

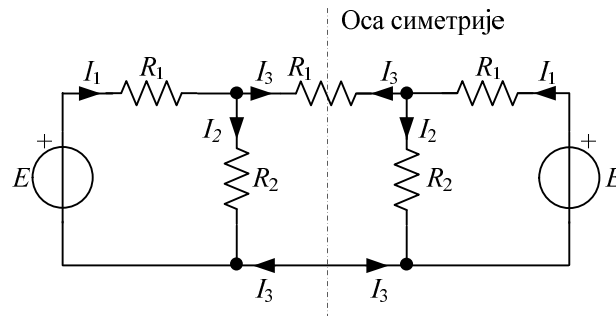


Слика 262.1.

РЕШЕЊЕ

(а) Посматрано коло је планарно и има једну осу симетрије, означену цртицама на слици 262.2. Расподела струја у колу, због симетрије, мора бити као на слици 262.2.

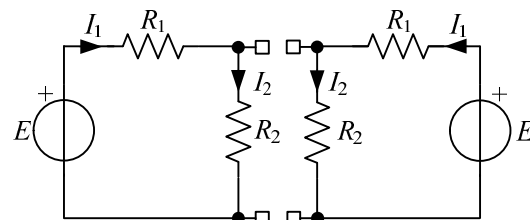




Слика 262.2.

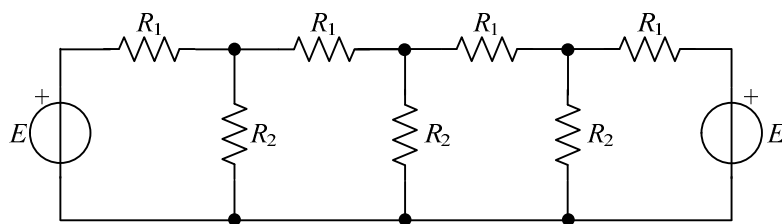
Струје грана које пресеца оса симетрије једнаке су нули ( $I_3 = 0$ ), па се те гране, по теорему компензације, могу заменити компензационим струјним генератором нулте струје, односно отвореном везом. Тако се добијају два идентична одвојена кола као на слици 262.3 (теорема бисекције). Довољно је решити само једно од та два проста кола, чиме се добија  $I_1 = I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,4 \text{ A}$ .

(б) Укупна снага Џулових губитака у колу је, по теорему одржања снаге,  $(P_R)_{\text{ук}} = (P_E)_{\text{ук}}$ , односно  $(P_R)_{\text{ук}} = 2EI_1 = 9,6 \text{ W}$ .



Слика 262.3.

**263.** За коло приказано на слици 263.1 је  $E = 17 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$  и  $R_2 = 20 \Omega$ . Израчунати укупну снагу Џулових губитака у колу.

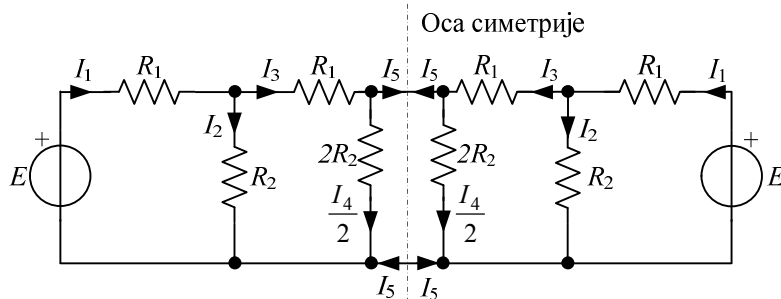


Слика 263.1.

**РЕШЕЊЕ**

Коло је планарно, а оса симетрије пролази кроз средишњи отпорник отпорности  $R_2$ . Због тога се тај отпорник може заменити паралелном везом два отпорника отпорности по  $2R_2$ , са струјама  $\frac{I_4}{2}$ , као што је приказано на слици 263.2. Како је због

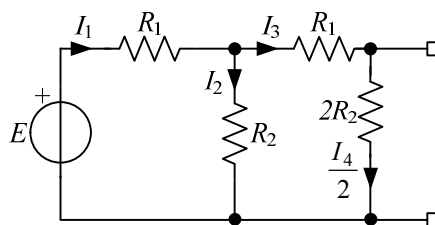
симетрије  $I_5 = 0$ , то се две половине кола могу одвојити (бисекција) и решавати само једна од њих (слика 263.3).



Слика 263.2.

У колу на слици 263.3, струја генератора је  $I_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2(R_1 + 2R_2)}{R_1 + 3R_2}} = 0,7 \text{ A}$ , па је укупна

снага Џулових губитака у задатом колу са слике 263.1  $(P_R)_{\text{ук}} = 2EI_1 = 23,8 \text{ W}$ .

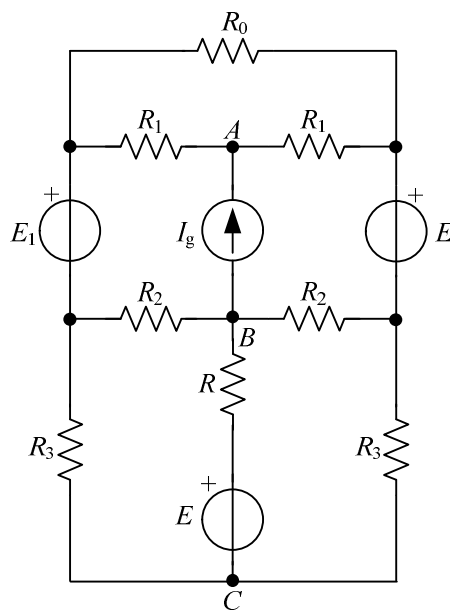


Слика 263.3.

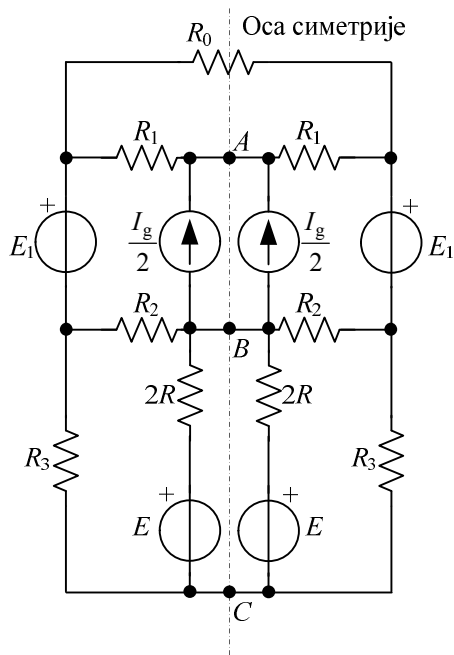
**264.** За коло са слике 264.1 познато је  $E = 30 \text{ V}$ ,  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $I_g = 4 \text{ A}$ ,  $R_0 = 6 \Omega$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$  и  $R = 5 \Omega$ . Израчунати (а) укупну снагу Џулових губитака у колу, (б) напон између тачака  $A$  и  $C$  и (в) снаге које развијају појединачни генератори у колу.

#### РЕШЕЊЕ

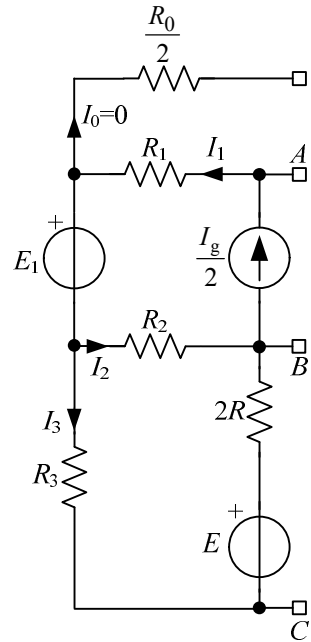
Коло има осу симетрије која пролази кроз тачке  $A$ ,  $B$  и  $C$ , па се може представити као на слици 264.2. То коло се може раздвојити на два идентична кола, од којих је једно приказано на слици 264.3. Решавање задатог кола може се спровести анализом само кола са слике 264.3.



Слика 264.1.



Слика 264.2.



Слика 264.3.

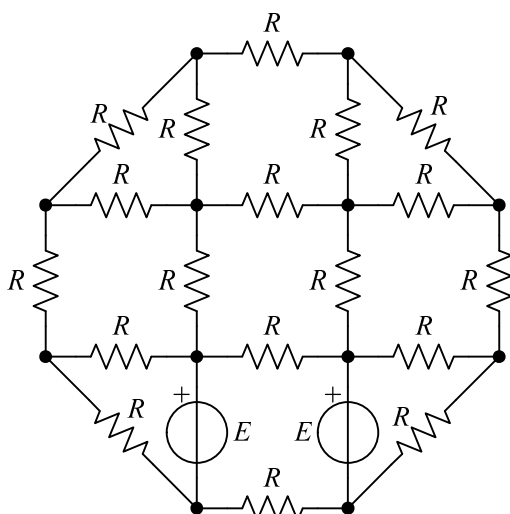
За коло са слике 264.3 је, на основу суперпозиције,  $I_1 = \frac{I_g}{2} = 2 \text{ A}$  и  $I_2 = -\frac{E}{2R + R_2 + R_3} + \frac{R_3 + 2R}{2R + R_2 + R_3} \frac{I_g}{2} = 0,75 \text{ A}$ , па је  $I_3 = I_1 - I_2 = 1,25 \text{ A}$ .

(а) Укупна снага Џулових губитака у задатом колу је  $(P_R)_{\text{ук}} = 2(R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + 2R I_3^2) = 121 \text{ W}$ .

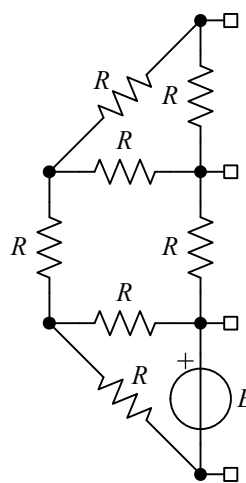
(б) Напон између тачака А и С је  $U_{AC} = R_3 I_3 + E_1 + R_1 I_1 = 41 \text{ V}$ .

(в) Снаге које развијају генератори су  $P_{E_1} = -E_1 I_1 = -24 \text{ W}$ ,  $P_E = 2E I_3 = 75 \text{ W}$  и  $P_{I_g} = 2U_{AB} \frac{I_g}{2} = U_{AB} I_g$ . Како је  $U_{AB} = R_2 I_2 + E_1 + R_1 I_1 = 23,5 \text{ V}$ , то је  $P_{I_g} = 94 \text{ W}$ .

**265.** У колу приказаном на слици 265.1 је  $E = 10 \text{ V}$  и  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Израчунати укупну снагу свих отпорника.



Слика 265.1.

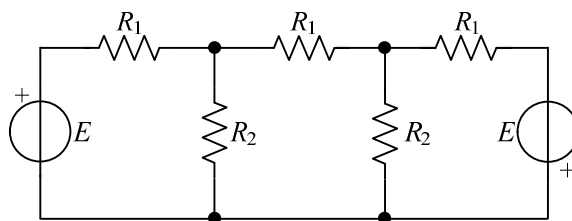


Слика 265.2.

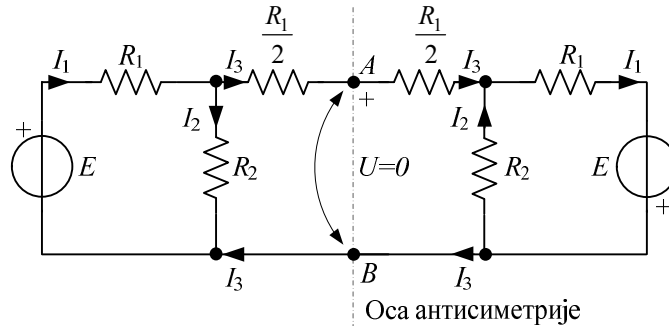
РЕШЕЊЕ

На основу теореме бисекције, коло се може поделити на два независна дела, од којих је један приказан на слици 265.2. Еквивалентна отпорност коју види генератор у колу са слике 2 је  $R_e \approx 1,727R$ . Снага генератора једнака је снази Џулових губитака и износи  $\frac{E^2}{R_e} \approx 57,9 \text{ mW}$ . Снага Џулових губитака у колу са слике 265.1 је два пута већа,  $P_j \approx 115,8 \text{ mW}$ .

**266.** На слици 266.1 приказано је коло са једном осом антисиметрије. Познато је  $E = 18 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$  и  $R_2 = 10 \Omega$ . Израчунати (а) струје грана кола и (б) укупну снагу Џулових губитака у колу.

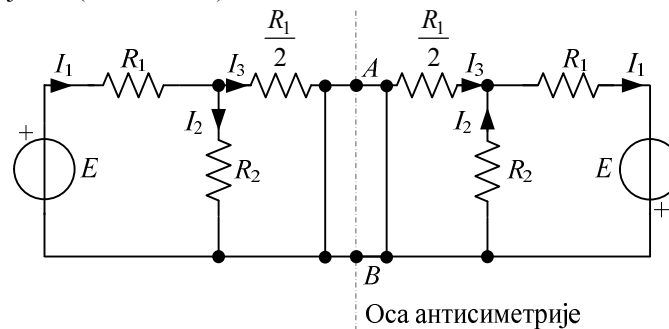


Слика 266.1.

РЕШЕЊЕ

Слика 266.2.

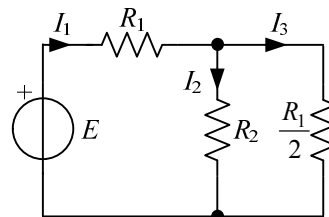
Због антисиметрије, напон између тачака  $A$  и  $B$  на оси антисиметрије (слика 266.2) је  $U_{AB} = 0$ . По теореди компензације се између тачака  $A$  и  $B$  може ставити напонски компензациони генератор емс  $E_k = 0$ , односно тачке  $A$  и  $B$  се могу кратко спојити (слика 266.3). Тиме се добијају два независна кола, од којих је довољно решавати само једно (слика 266.4).



Слика 266.3.

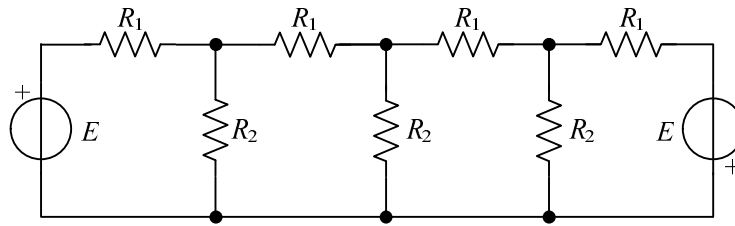
(а) За коло на 266.4, струје грана су  $I_1 = 0,72 \text{ A}$ ,  $I_2 = 0,36 \text{ A}$  и  $I_3 = 0,36 \text{ A}$ .

(б) Укупна снага коју развијају генератори је  $(P_E)_{\text{ук}} = 2EI_1 = 25,92 \text{ W}$ , па је укупна снага Џулових губитака  $(P_R)_{\text{ук}} = (P_E)_{\text{ук}} = 25,92 \text{ W}$ .

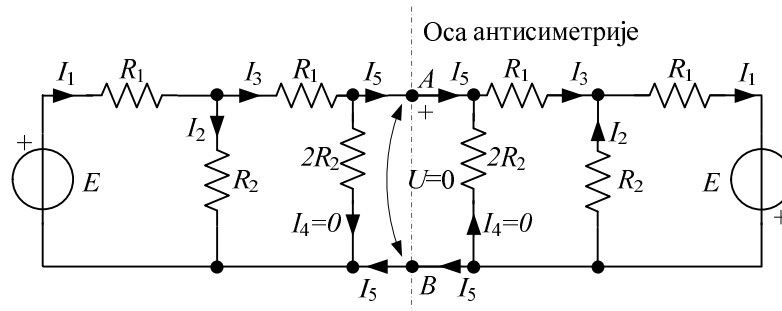


Слика 266.4.

**267.** За коло са једном осом антисиметрије са слике 267.1 познато је  $E = 12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$  и  $R_2 = 5 \Omega$ . Израчунати (а) струје грана кола и (б) снаге које развијају генератори.



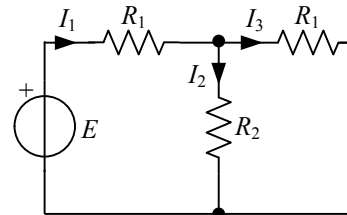
Слика 267.1.

РЕШЕЊЕ

Слика 267.2.

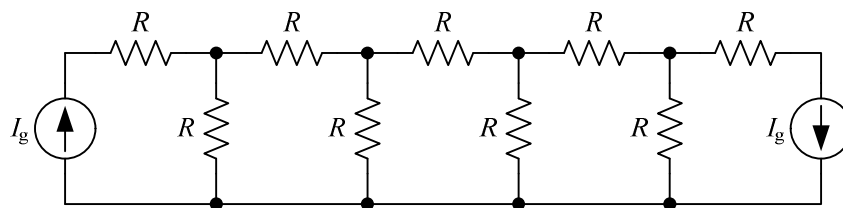
(а) Према шеми са слике 267.2 добија се шема са слике 267.3, за коју је  $I_1 = 0,5 \text{ A}$ ,  $I_2 = 0,4 \text{ A}$  и  $I_3 = 0,1 \text{ A}$ .

(б) Генератори развијају снагу  $(P_E)_{\text{uk}} = 2EI_1 = 12 \text{ W}$ .



Слика 267.3.

**268.** У колу сталне струје са слике 268.1 је  $I_g = 2 \text{ mA}$  и  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Израчунати укупну снагу Џулових губитака у отпорницима.

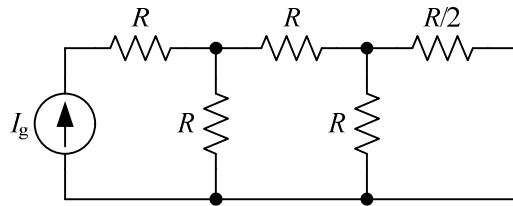


Слика 268.1.

РЕШЕЊЕ

Користећи се симетријом (теоремом бисекције), коло са слике 268.1 распада се на два независна кола, од којих је једно приказано на слици 268.2. То коло се може решити методом пропорционалних величина.

Из тог решења се добија напон струјног генератора  $U \approx 3,143 \text{ V}$ . Снага генератора је  $P_{I_g} = UI_g \approx 6,286 \text{ mW}$ , па је снага Цулових губитака у свим отпорницима у колу са слике 268.1  $P = 2P_{I_g} \approx 12,57 \text{ mW}$ .

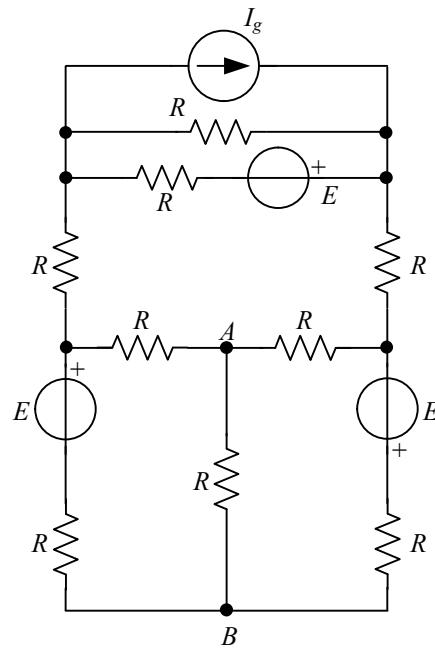


Слика 268.2.

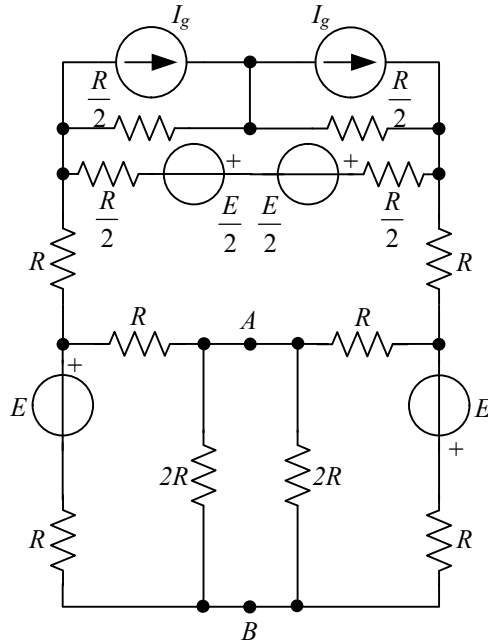
**269.** На слици 269.1 приказано је коло са једном осом антисиметрије која пролази кроз тачке  $A$  и  $B$ . Познато је  $E = 21 \text{ V}$ ,  $I_g = 0,35 \text{ A}$  и  $R = 20 \Omega$ . Израчунати снагу струјног генератора.

#### РЕШЕЊЕ

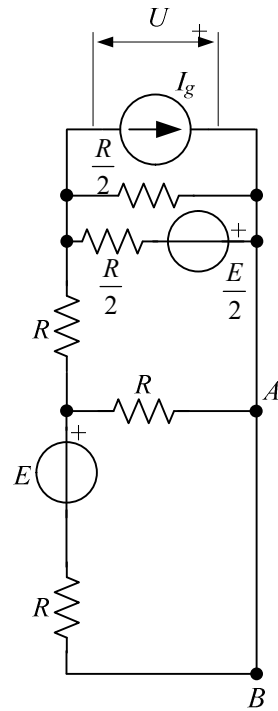
На слици 269.2 приказано је задато коло после припреме за примену теореме бисекције, а на слици 269.3 приказан је један део кола после раздвајања. Снага коју развија струјни генератор је  $P_{I_g} = 2UI_g$ , па треба одредити напон  $U$ .



Слика 269.1.

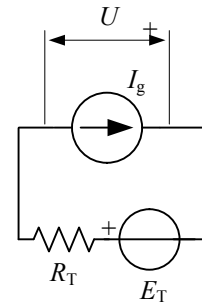


Слика 269.2.



Слика 269.3.

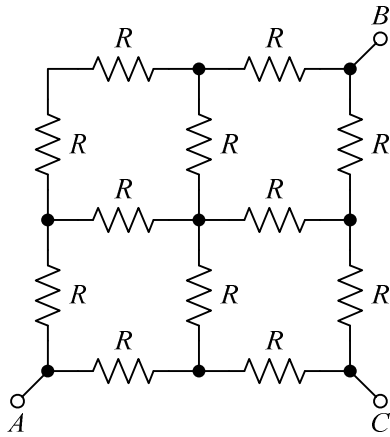
Применом Тевененове теореме, добија се просто коло као на слици 269.4, при чему је  $R_T = \frac{3}{14}R = \frac{30}{7}\Omega$  и  $E_T = -\frac{E}{7} = -3\text{ V}$ . Напон између крајева струјног генератора у колу на слици 269.4 је  $U = R_T I_g - E_T = 4,5\text{ V}$ , па је снага струјног генератора у колу на слици 269.1  $P_{I_g} = 3,15\text{ W}$ .



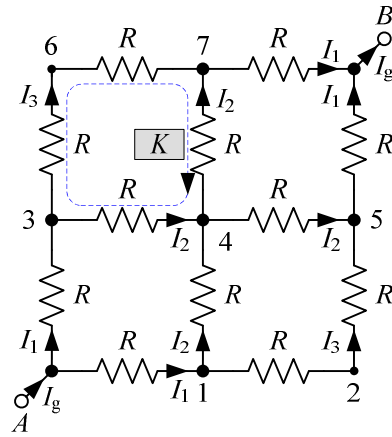
Слика 269.4.

**270.** На слици 270.1 приказана је мрежа за коју је  $R = 10\Omega$ . Израчунати улазну отпорност између тачака (а)  $A$  и  $B$  и (б)  $A$  и  $C$ .





Слика 270.1.

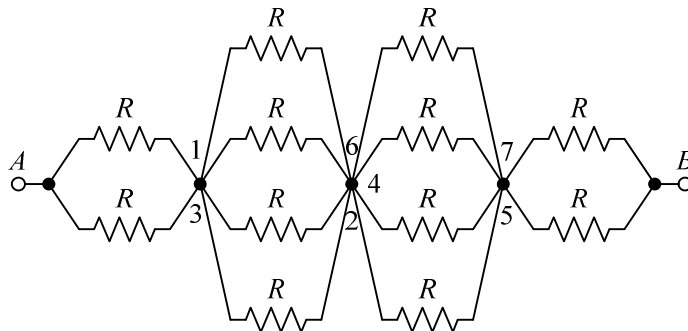


Слика 270.2.

РЕШЕЊЕ

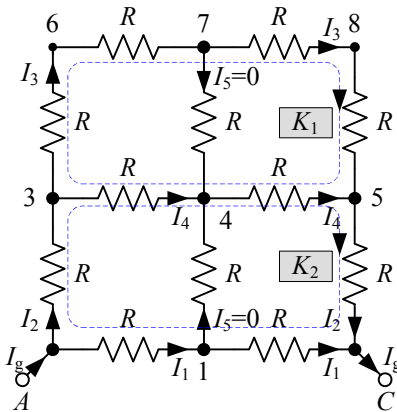
(а) Побуђујући задату мрежу идеалним струјним генератором, струје  $I_g$ , везаним између тачака  $A$  и  $B$ , улазна отпорност се може одредити као  $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_g}$ . Због симетрије, расподела струје у мрежи је као на слици 270.2. По другом Кирхофовом закону, за контуру  $K$  је  $-2RI_3 + 2RI_2 = 0$ , одакле је  $I_2 = I_3$ . По првом Кирхофовом закону, за чвор 3 је  $I_2 + I_3 = I_1$ , па је  $I_1 = 2I_3$ , док је за чвор  $A$   $I_g = 2I_1 = 4I_3$ . Такође је  $U_{AB} = 2RI_1 + 2RI_3 = 6RI_3$ , па је  $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_g} = \frac{3}{2}R = 15\ \Omega$ .

До решења се може доћи и на други начин. Са слике 270.2 се види да су на истом потенцијалу тачке 3 и 1, тачке 6, 4 и 2, а такође и тачке 7 и 5. Одговарајуће тачке се могу кратко спојити, чиме се добије мрежа као на слици 270.3. Сада је  $R_{AB} = \frac{R}{2} \oplus \frac{R}{4} \oplus \frac{R}{4} \oplus \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R = 15\ \Omega$ .

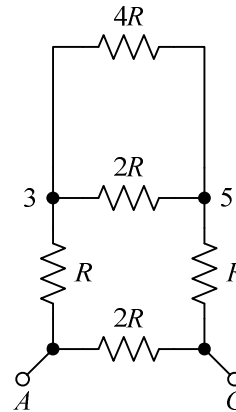


Слика 270.3.

(б) За струјну побуду између тачака  $A$  и  $C$ , расподела струје у мрежи је као на слици 270.4. За контуру  $K_1$  је  $-4RI_3 + 2RI_4 = 0$ , па је  $I_3 = \frac{I_4}{2}$ . За чвор 3 важи  $I_2 = I_3 + I_4$ , одакле је  $I_2 = \frac{3}{2}I_4$ . За контуру  $K_2$  је  $-2RI_2 - 2RI_4 + 2RI_1 = 0$ , па је  $I_1 = I_2 + I_4 = \frac{5}{2}I_4$ . За чвор  $A$  је  $I_g = I_1 + I_2 = 4I_4$ . Такође је  $U_{AC} = 2RI_1 = 5RI_4$ , па је  $R_{AC} = \frac{U_{AC}}{I_g} = \frac{5}{4}R = 12,5\ \Omega$ .



Слика 270.4.

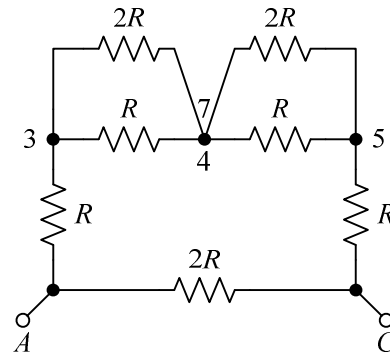


Слика 270.5.

Решавајући на други начин, уочимо да су тачке 1, 4 и 7 у колу на слици 270.4 на истом потенцијалу. Због тога је  $I_5 = 0$ , гране везане између чворова 1 и 4, односно 4 и 7, могу се прекинути, па се задата мрежа може представити као на слици 270.5. Према тој слици 270.5 је  $R_{AC} = 2R \parallel (R \oplus 2R \parallel 4R \oplus R) = \frac{5}{4}R = 12,5\ \Omega$ .

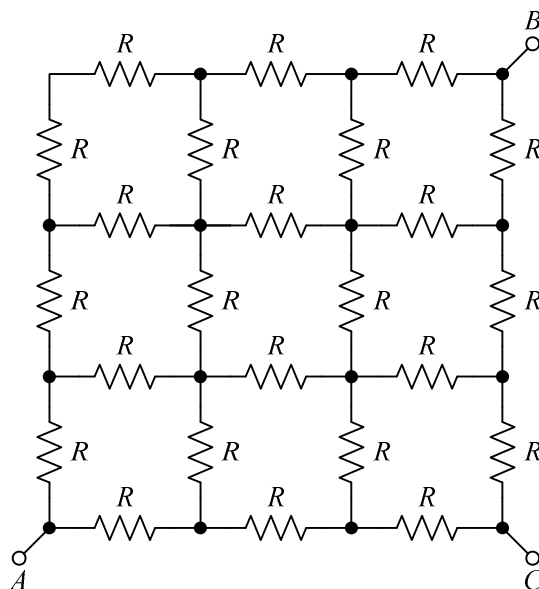
Еквивалентна отпорност кола са слике 270.4 може се израчунати и тако што се тачке 4 и 7 кратко споје, јер су на истом потенцијалу. Тиме се добија мрежа на слици 270.6, за коју је  $R_{AC} = 2R \parallel (R \oplus 2R \parallel R \oplus 2R \parallel R \oplus R) = \frac{5}{4}R = 12,5\ \Omega$ .

Читаоцу се препоручује да реши овај део задатка и тако што ће кратко спојити тачке 1, 4 и 7 на слици 270.4.



Слика 270.6.

**271.** Отпорност отпорника у мрежи са слике 271.1 је  $R = 2,1 \Omega$ . Израчунати еквивалентну отпорност мреже између тачака (а)  $A$  и  $B$ , и (б)  $A$  и  $C$ .



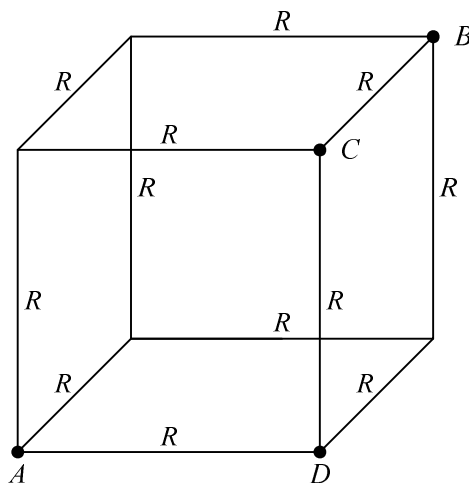
Слика 271.1.

РЕЗУЛТАТ

(а) Еквивалентна отпорност између тачака  $A$  и  $B$  је  $R_{AB} = \frac{13}{7}R = 3,9 \Omega$ .

(б) Еквивалентна отпорност између тачака  $A$  и  $C$   $R_{AC} \approx 3,4 \Omega$ .

**272.** Отпорност сваке ивице коцке приказане на слици 272.1 је  $R$ . Одредити отпорност ове мреже између тачака  $A$  и  $B$ .



Слика 272.1.

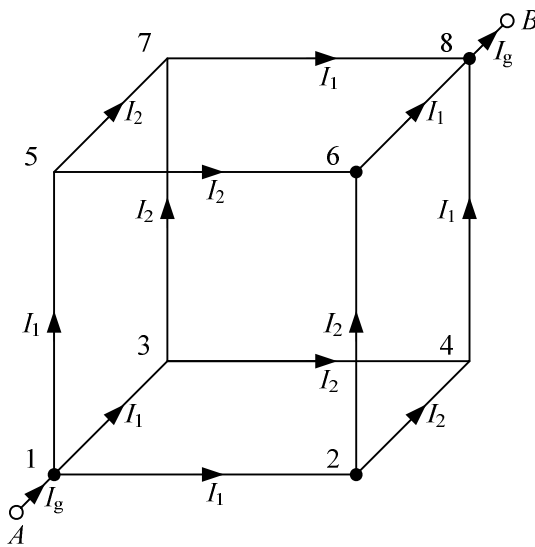
РЕШЕЊЕ

После прикључења струјног генератора струје  $I_g$  између тачака  $A$  и  $B$ , расподела струја у ивицама коцке биће, због симетрије, као на слици 272.2. При овоме је  $I_g = 3I_1$ ,

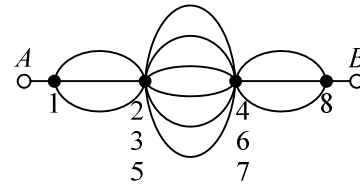
$$I_1 = 2I_2 \text{ и } U_{AB} = R(2I_1 + I_2) = 5RI_2. \text{ Сада је } R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_g} = \frac{5RI_2}{6I_2} = \frac{5}{6}R.$$

Задатак се може решити и на други начин. Због симетрије на истом потенцијалу су тачке 2, 3 и 5, а такође и тачке 4, 6 и 7, па се шема мреже може представити као на слици

$$272.3. \text{ Са те слике је } R_{AB} = \frac{R}{3} \oplus \frac{R}{6} \oplus \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R.$$



Слика 272.2.



Слика 272.3.

**273.** Одредити отпорност мреже приказане на слици 272.1 између тачака  $A$  и  $C$ .

#### РЕШЕЊЕ

Побуђујући задату мрежу струјним генератором струје  $I_g$  између тачака  $A$  и  $C$ , а на основу симетрије, расподела струја у мрежи ће бити као на слици 273.1. Из Кирхофових закона

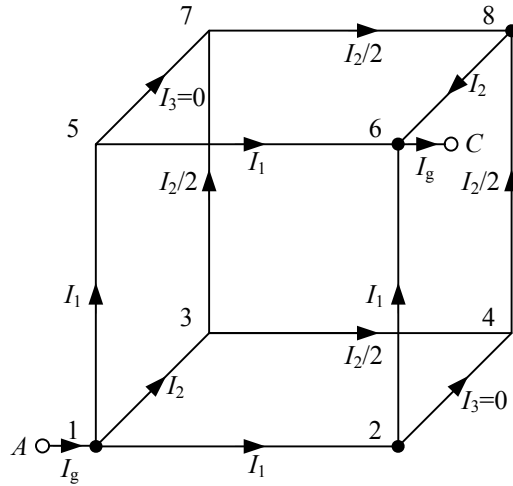
произилази  $I_1 = \frac{3}{2}I_2$ ,  $I_g = 2I_1 + I_2 = 4I_2$

и  $U_{AC} = 2RI_1 = 3RI_2$ , па је

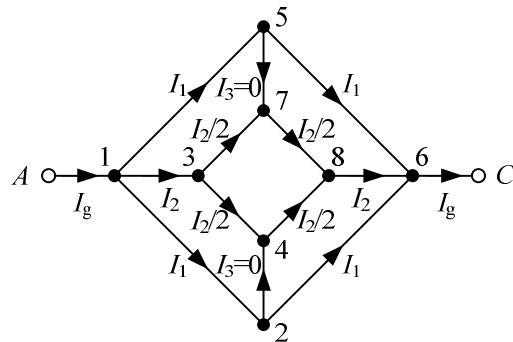
$$R_{AC} = \frac{U_{AC}}{I_g} = \frac{3}{4}R.$$

Задатак се може још једноставније решити ако се мрежа прегледније нацрта мрежа као на слици 273.2. Са те слике се види да су тачке 2, 4, 7 и 5 на истом потенцијалу, па се гране везане између тих чворова могу прекинути, тако да се мрежа своди на редно-паралелну везу отпорника. Алтернативно, тачке 2, 4, 7 и 5 се могу спојити у једну тачку. У сваком случају, као крајњи резултат

добива се  $R_{AC} = \frac{3}{4}R$ .



Слика 273.1.



Слика 273.2.

274. За мрежу отпорника са слике 272.1 одредити еквивалентну отпорност између тачака  $A$  и  $D$ .

РЕШЕЊЕ

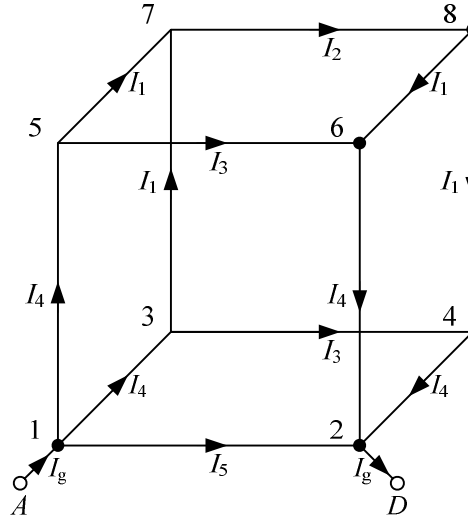
Због симетрије, расподела струја у мрежи је као на слици 274.1, што је прегледније представљено на слици 274.2. Из Кирхофових закона се добија  $I_2 = 2I_1$ ,

$$I_3 = \frac{R(2I_1 + I_2)}{R} = 4I_1, \quad I_4 = I_1 + I_3 = 5I_1,$$

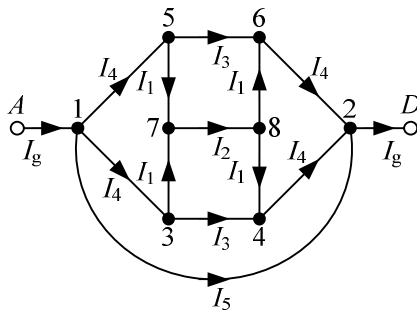
$$I_5 = \frac{R(2I_4 + I_3)}{R} = 14I_1, \quad I_g = 2I_4 + I_5 = 24I_1$$

и  $U_{AD} = RI_5 = 14RI_1$ , па је

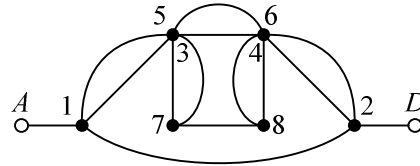
$$R_{AD} = \frac{U_{AD}}{I_g} = \frac{7}{12}R.$$



Слика 274.1.



Слика 274.2.



Слика 274.3.

Алтернативно, са слика 274.1 и 274.2 се види да су тачке 3 и 5 на истом потенцијалу, а такође и тачке 4 и 6, па се задата мрежа може представити као на слици 274.3. Са слике 274.3 је  $R_{AD} = R \parallel (R \parallel R \oplus (R \parallel R)) \parallel (R \parallel R \oplus R \oplus R \parallel R) \oplus R \parallel R$ , односно

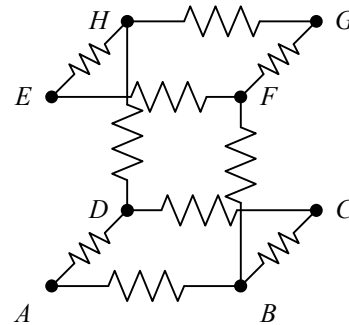
$$R_{AD} = \frac{7}{12}R.$$

**275.** Десет отпорника једнаких отпорности  $R$  везано је као на слици 275.1. Одредити еквивалентну отпорност између тачака (а)  $A$  и  $C$  и (б)  $B$  и  $D$ .

РЕЗУЛТАТ

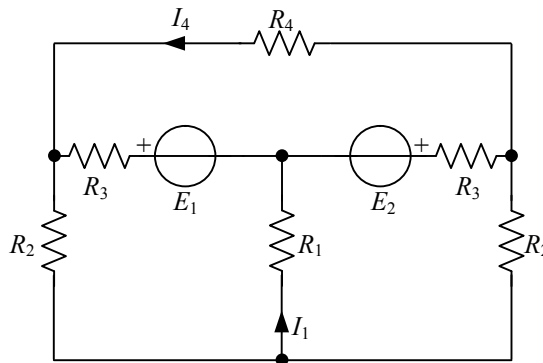
Еквивалентне отпорности су (а)  $R_{AC} = R$  и

(б)  $R_{BD} = \frac{3}{4}R$ .



Слика 275.1

**\*276.** У стационарном стању у колу са слике 276.1, електромоторне силе генератора су  $E_1 = 20\text{ V}$  и  $E_2 = 30\text{ V}$ , а струје првог и четвртог пријемника су  $I_1 = 25\text{ mA}$  и  $I_4 = 20\text{ mA}$ . Колике су струје ових пријемника у стационарном стању када је  $E'_1 = 40\text{ V}$  и  $E'_2 = -10\text{ V}$ ?



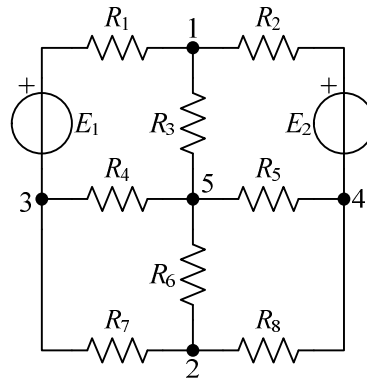
Слика 276.1.

РЕШЕЊЕ

По теореме суперпозиције, струје пријемника су  $I_1(E_1, E_2) = I_1(E_1) + I_1(E_2)$  и  $I_4(E_1, E_2) = I_4(E_1) + I_4(E_2)$ . Према теореме линеарности, струја гране  $I_k$  када у колу делује само генератор емс  $E_k$  је  $I_k = a_k E_k$ , где фактор  $a_k$  има природу проводности и зависи искључиво од састава кола. На основу тога је  $I_1 = a_{11}E_1 + a_{12}E_2$  и  $I_4 = a_{41}E_1 + a_{42}E_2$ . Због симетрије је  $a_{11} = a_{12} = a_1$  и  $a_{41} = -a_{42} = a_2$ , па је  $I_1 = a_1(E_1 + E_2)$  и  $I_4 = a_2(E_1 - E_2)$ .

После промене емс је  $I'_1 = a_1(E'_1 + E'_2)$  и  $I'_4 = a_2(E'_1 - E'_2)$ . Елиминацијом фактора  $a_1$  и  $a_2$  добија се  $I'_1 = \frac{E'_1 + E'_2}{E_1 + E_2} I_1 = 15\text{ mA}$  и  $I'_4 = \frac{E'_1 - E'_2}{E_1 - E_2} I_4 = -100\text{ mA}$ .

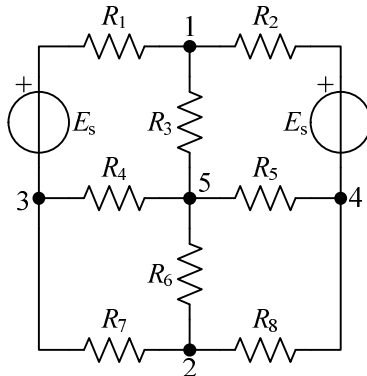
\*277. За коло приказано на слици 277.1 је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_2 = 24 \text{ V}$  и  $R_i = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $i = 1, \dots, 8$ . Израчунати напоне  $U_{12}$  и  $U_{34}$ .



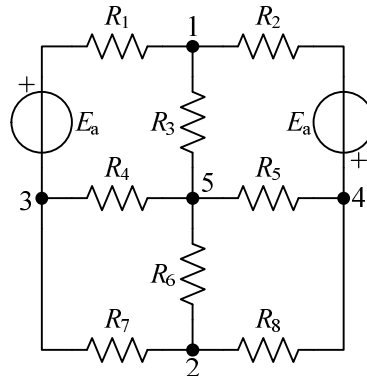
Слика 277.1

РЕШЕЊЕ

Отпорници на слици 277.1 чине симетричну мрежу, али задате екситације не одговарају ни симетричном случају (слика 277.2), ни антисиметричном случају (277.3).



Слика 277.2.



Слика 277.3.

Међутим, ако се узме  $E_s = \frac{E_1 + E_2}{2} = 18 \text{ V}$  и  $E_a = \frac{E_1 - E_2}{2} = -6 \text{ V}$ , стање у колу са слике 277.1 разлаже се на симетричан и антисиметричан случај, односно стање у задатом колу се добија као суперпозиција стања у колима са слика 277.2 и 277.3.

У симетричном случају је  $U_{34s} = 0$ . У циљу одређивања напона  $U_{12s}$  може се применити теорема бисекције, одакле се добија  $U_{12s} = 12 \text{ V}$ .

У антисиметричном случају је  $U_{12a} = 0$ . Помоћу теореме бисекције добија се  $U_{35a} = 2 \text{ V}$ , а на основу тога је  $U_{34a} = 2U_{35a} = 4 \text{ V}$ .

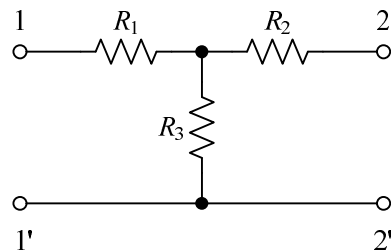
Суперпозицијом се добијају тражени напони,  $U_{12} = U_{12s} + U_{12a} = 12 \text{ V}$  и  $U_{34} = U_{34s} + U_{34a} = 4 \text{ V}$ .



## 5. Четворополи и контролирани генератори

### 5.1. Четворополи

**\*\*278.** Израчунати резистансне параметре четворопола приказаног на слици 278.1 ако је  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ .



Слика 278.1.

#### РЕШЕЊЕ

Између напона и струја линеарне мреже са два приступа (слика 278.2), која се састоји од отпорника и, евентуално, контролираних генератора, али у којој нема независних генератора, важе релације

$$U_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2, \quad (278.1)$$

$$U_2 = r_{21}I_1 + r_{22}I_2, \quad (278.2)$$

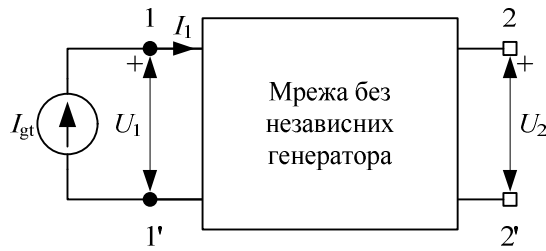
где су  $r_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{21}$  и  $r_{22}$  резистансни параметри мреже, који се називају и импедансни параметри мреже. Мрежа састављена од отпорника је реципрочна, односно важи  $r_{12} = r_{21}$ .

Резистансни параметри мреже могу се одредити тако што се мрежа на једном приступу побуди идеалним струјним (тест) генератором, струје  $I_{\text{gt}}$ , а други приступ остави отвореним, одреде напони на приступима, па одатле израчунају параметри.

На слици 278.3 је приказан случај када је побуђен први приступ. Тада је  $I_1 = I_{\text{gt}}$  и  $I_2 = 0$ , па се из (278.1) и (278.2) добија  $r_{11} = \frac{U_1}{I_{\text{gt}}}$  и  $r_{21} = \frac{U_2}{I_{\text{gt}}}$ . Слично томе, када се побуди приступ 2, а приступ 1 остави отвореним, добија се  $r_{12} = \frac{U_1}{I_{\text{gt}}}$  и  $r_{22} = \frac{U_2}{I_{\text{gt}}}$ .

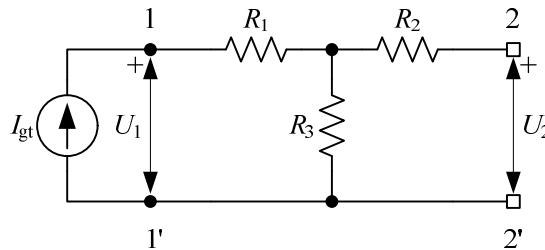


Слика 278.2.



Слика 278.3.

Када се побуди први приступ задате мреже, као на слици 278.4, добија се  $U_1 = (R_1 + R_3)I_{gt}$  и  $U_2 = R_3 I_{gt}$ , одакле је  $r_{11} = R_1 + R_3 = 4 \text{ k}\Omega$  и  $r_{21} = R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ . Када се побуди други приступ, добија се  $U_1 = R_3 I_{gt}$  и  $U_2 = (R_2 + R_3)I_{gt}$ , па је  $r_{12} = R_3 = 3 \text{ k}\Omega$  (очигледно,  $r_{12} = r_{21}$ ) и  $r_{22} = R_2 + R_3 = 5 \text{ k}\Omega$ .

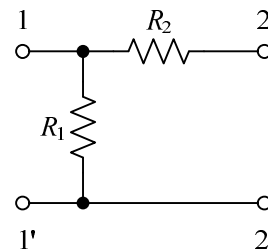


Слика 278.4.

Читаоцу се препоручује да формира матрицу резистансних параметара мреже,

$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$ , и да инверзијом те матрице израчуна кондуктансне параметре.

**\*\*279.** Израчунати кондуктансне параметре отпорничке мреже са два приступа приказане на слици 279.1 ако је  $R_1 = R_2 = 100 \Omega$ .



Слика 279.1.

#### РЕШЕЊЕ

Између напона и струја линеарне мреже са два приступа (слика 278.2), у којој нема независних генератора, важе релације

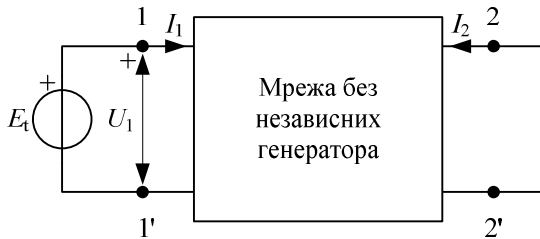
$$I_1 = g_{11}U_1 + g_{12}U_2, \quad (279.1)$$

$$I_2 = g_{21}U_1 + g_{22}U_2, \quad (279.2)$$

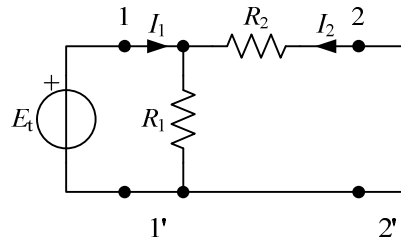
где су  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  и  $g_{22}$  кондуктансни параметри мреже, који се називају и адмитансни параметри мреже. Ако је мрежа састављена од отпорника, важи  $g_{12} = g_{21}$  (мрежа је реципрочна).

Кондуктансни параметри мреже могу се одредити тако што се мрежа на једном приступу побуди идеалним напонским (тест) генератором, емс  $E_t$ , а други приступ кратко споји, одреде струје на приступима, па одатле израчунају параметри. Када је побуђен први приступ (слика 279.2), тада је  $U_1 = E_t$  и  $U_2 = 0$ , па из (279.1) и (279.2) следи  $g_{11} = \frac{I_1}{E_t}$  и  $g_{21} = \frac{I_2}{E_t}$ . Када се тест генератор пребаци на приступ 2, а приступ 1

кратко споји, добија се  $g_{12} = \frac{I_1}{E_t}$  и  $g_{22} = \frac{I_2}{E_t}$ .



Слика 279.2.



Слика 279.3.

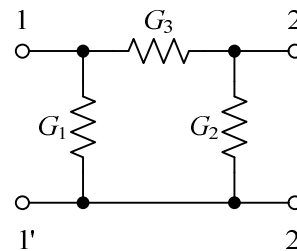
Према слици 279.3, када се побуди први приступ задате мреже, тада је  $I_1 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) E_t$  и  $I_2 = -\frac{1}{R_2} E_t$ , па је  $g_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 20 \text{ mS}$  и  $g_{21} = -\frac{1}{R_2} = -10 \text{ mS}$ .

Када се побуди други приступ, тада је  $I_1 = -\frac{1}{R_2} E_t$  и  $I_2 = \frac{1}{R_2} E_t$ , па је

$$g_{21} = -\frac{1}{R_2} = -10 \text{ mS} = g_{12} \text{ и } g_{22} = \frac{1}{R_2} = 10 \text{ mS}.$$

Читаоцу се препоручује да израчуна резистансне параметре задате мреже (а) инверзијом матрице кондуктансних параметара и (б) одговарајућим побуђивањем приступа, као у претходном задатку.

**\*\*280.** Израчунати (а) резистансне и (б) кондуктансне параметре четворопола приказаног на слици 280.1 ако је  $G_1 = 1 \text{ mS}$ ,  $G_2 = 2 \text{ mS}$  и  $G_3 = 3 \text{ mS}$ .



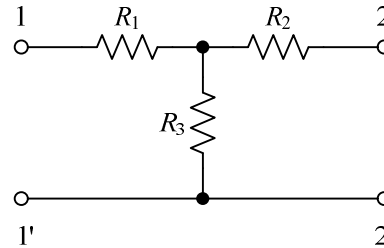
Слика 280.1.

#### РЕЗУЛТАТ

Параметри мреже су  $r_{11} = \frac{5}{11} \text{ k}\Omega$ ,  $r_{12} = r_{21} = \frac{3}{11} \text{ k}\Omega$ ,  $r_{22} = \frac{4}{11} \text{ k}\Omega$ ;  $g_{11} = 4 \text{ mS}$ ,  $g_{12} = g_{21} = -3 \text{ mS}$  и  $g_{22} = 5 \text{ mS}$ .

Да ли ће се променити параметри мреже ако се троугао са слике 280.1 трансфигурише у еквивалентну звезду?

**\*\*281.** Израчунати отпорности Т-четворопола са слике 281.1 тако да кондуктансни параметри мреже буду  $g_{11} = 1 \text{ mS}$ ,  $g_{12} = g_{21} = -500 \text{ }\mu\text{S}$  и  $g_{22} = 1,5 \text{ mS}$ .

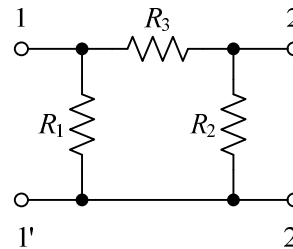


Слика 281.1.

РЕШЕЊЕ

Матрица кондуктансних параметара мреже је  $[G] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ mS}$ . Матрица резистансних параметара је  $[R] = [G]^{-1} = \begin{bmatrix} 1200 & 400 \\ 400 & 800 \end{bmatrix} \Omega$ , односно резистансни параметри мреже су  $r_{11} = 1200 \Omega$ ,  $r_{12} = r_{21} = 400 \Omega$  и  $r_{22} = 800 \Omega$ . За мрежу са слике 281.1 је  $r_{11} = R_1 + R_3$ ,  $r_{12} = r_{21} = R_3$  и  $r_{22} = R_2 + R_3$ , одакле следи  $R_3 = r_{12} = r_{21} = 400 \Omega$ ,  $R_1 = r_{11} - r_{12} = 800 \Omega$  и  $R_2 = r_{22} - r_{21} = 400 \Omega$ .

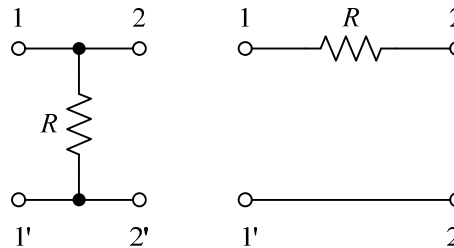
**\*\*282.** Израчунати отпорности  $\pi$ -четворопола са слике 282.1 тако да кондуктансни параметри мреже буду  $g_{11} = 1 \text{ mS}$ ,  $g_{12} = g_{21} = -500 \text{ }\mu\text{S}$  и  $g_{22} = 1,5 \text{ mS}$ .



Слика 282.1.

РЕШЕЊЕ

За мрежу са слике 282.1 је  $g_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}$ ,  $g_{12} = g_{21} = -\frac{1}{R_3}$  и  $g_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ , па је  $R_3 = -\frac{1}{g_{12}} = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = \frac{1}{g_{11} + g_{12}} = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_2 = \frac{1}{g_{22} + g_{21}} = 1 \text{ k}\Omega$ .



Слика 283.1.

Слика 283.2.

**\*\*283.** Одредити резистансне и кондуктансне параметре отпорничке мреже са слике (а) 283.1 и (б) 283.2.

РЕШЕЊЕ

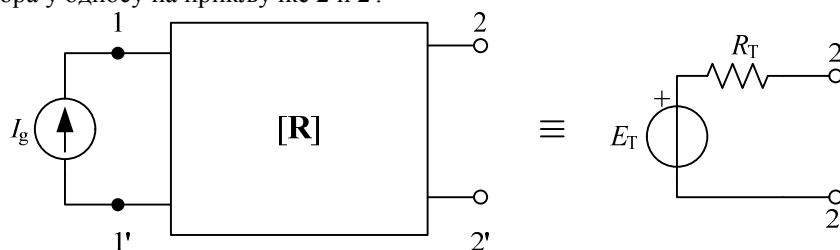
(а) Када се приступ 1 побуди идеалним струјним генератором струје  $I_{g1}$ , а приступ 2 остави отвореним, као на слици 278.3, тада је  $U_1 = U_2 = RI_{g1}$ , па је  $r_{11} = r_{21} = R$ . Слично томе, када се побуди приступ 2, добија се  $r_{12} = r_{22} = R$ . Матрица резистансних параметара је  $[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$ .

Међутим, кондуктансни параметри мреже су бесконачни, у шта се можемо уверити на два начина. Прво, ако се на приступ 1 прикључи идеални напонски генератор, као на слици 279.2, приступ 2 се не сме кратко спојити, јер би тада струја генератора била бесконачна, па би биле бесконачне струје оба приступа. Исто важи и ако се побуди приступ 2. Друго, детерминанта матрице  $[\mathbf{R}]$  је  $|\mathbf{R}| = 0$ , односно матрица је сингуларна, па се не може одредити њој инверзна матрица  $[\mathbf{G}]$ .

(б) Дуално претходном случају, за мрежу са слике 283.2 могу се одредити кондуктансни параметри,  $g_{11} = -g_{21} = -g_{12} = g_{22} = \frac{1}{R}$ , али се не могу одредити

резистансни параметри. Матрица кондуктансних параметара,  $[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$ , је сингуларна.

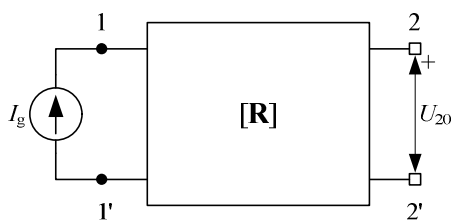
**\*\*284.** Резистансни параметри четворопола приказаног на слици 284.1 су  $r_{11} = 1200 \Omega$ ,  $r_{12} = r_{21} = 400 \Omega$  и  $r_{22} = 800 \Omega$ . На први приступ четворопола прикључен је идеални струјни генератор струје  $I_g = 1 \text{ A}$ . Израчунати параметре Тевененовог генератора у односу на прикључке 2 и 2'.



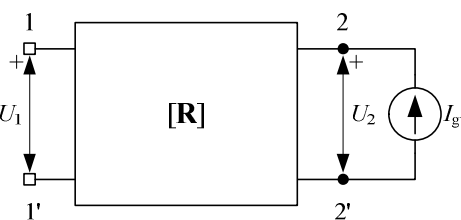
Слика 284.1.

РЕШЕЊЕ

На основу израза (278.2), напон празног хода четворопола је (слика 284.2)  $U_{20} = r_{21}I_g = 400 \text{ V} = E_T$  (јер је  $I_2 = 0$ ). Када се уклони идеални струјни генератор са приступа 1, а приступ 2 побуди тест генератором (слика 284.3), тада је  $I_1 = 0$ , па из (278.2) следи  $U_2 = r_{22}I_{gt}$ . Одавде је  $R_T = \frac{U_2}{I_{gt}} = r_{22} = 800 \Omega$ , што смо могли и одмах закључити, јер је  $r_{22}$  отпорност гледано у приступ 2 када је приступ 1 отворен.

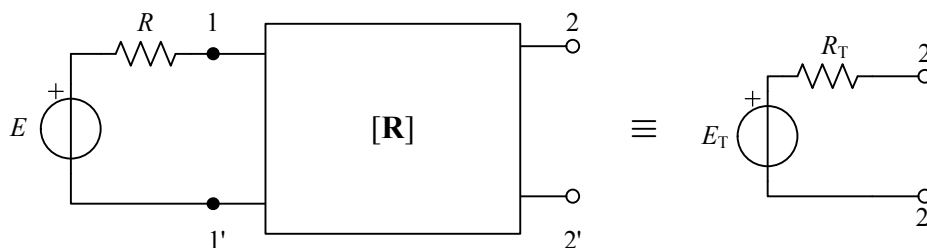


Слика 284.2.



Слика 284.3.

**\*\*285.** Резистансни параметри четворопола приказаног на слици 285.1 су  $r_{11} = 1200 \, \Omega$ ,  $r_{12} = r_{21} = 400 \, \Omega$  и  $r_{22} = 800 \, \Omega$ . На први приступ четворопола прикључен је реални напонски генератор параметара  $E = 16 \, \text{V}$  и  $R = 400 \, \Omega$ . Израчунати параметре Тевененовог генератора у односу на прикључке 2 и 2'.



Слика 285.1.

#### РЕЗУЛТАТ

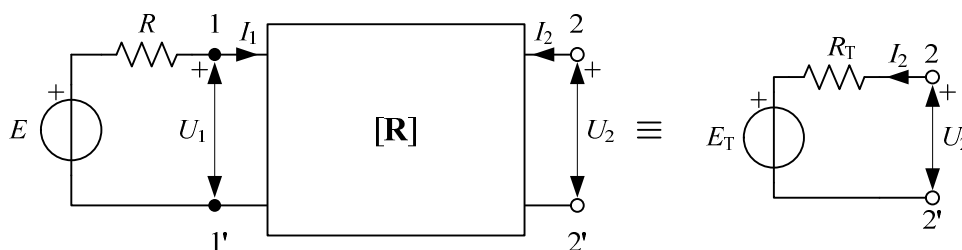
Усвајајући референтне смерове напона и струја на приступима као на слици 285.2, за посматрану мрежу важи  $U_1 = E - RI_1$ . Заменом у (278.1) добија се  $E = (r_{11} + R)I_1 + r_{12}I_2$ , одакле је  $I_1 = \frac{E - r_{12}I_2}{r_{11} + R}$ . Заменом овог израза за  $I_1$  у (278.2) добија

се  $U_2 = \frac{r_{21}}{r_{11} + R} E + \left( r_{22} - \frac{r_{12}r_{21}}{r_{11} + R} \right) I_2$ . Упоредјујући са релацијом између напона и струје

Тевененовог генератора,  $U_2 = E_T + R_T I_2$ , види се да је  $E_T = \frac{r_{21}}{r_{11} + R} E = 4 \, \text{V}$  и

$$R_T = r_{22} - \frac{r_{12}^2}{r_{11} + R} = 700 \, \Omega.$$

Читаоцу се препоручује да за овај пример, као и за пример из задатка 284, одреди и параметре Нортеновог генератора, и то на два начина: (а) рачунајући струју кратког споја и еквивалентну проводност мреже и (б) трансфигурацијом Тевененовог генератора.



Слика 285.2.

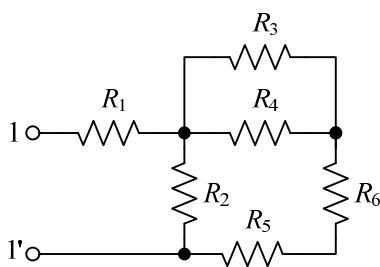
**\*\*\*286.** Посматра се произвољна мрежа са једним приступом, састављена само од линеарних отпорника. Доказати да ако се прекине било која грана у овој мрежи, еквивалентна отпорност мреже се неће смањити (повећаће се или, евентуално, остати непромењена).

РЕШЕЊЕ

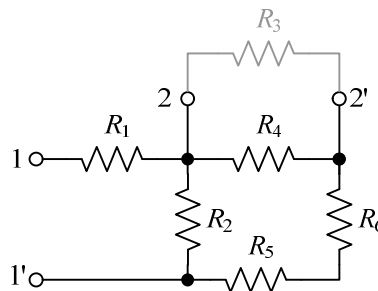
Посматрајмо, као пример, мрежу приказану на слици 286.1, за коју је  $R_i = i \, \Omega$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Еквивалентна отпорност између прикључака 1 и 1' је

$$R_e = R_1 \oplus (R_2 \parallel (R_3 \parallel R_4 \oplus R_5 \oplus R_6)) = R_1 + \frac{R_2 \left( \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_5 + R_6 \right)}{R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_5 + R_6} \approx 2,728 \, \Omega. \quad \text{Ако се}$$

грана са отпорником  $R_3$  прекине, еквивалентна отпорност између тачака 1 и 1' ће се повећати јер је сада  $R'_e = R_1 \oplus (R_2 \parallel (R_4 \oplus R_5 \oplus R_6)) = R_1 + \frac{R_2 (R_4 + R_5 + R_6)}{R_2 + R_4 + R_5 + R_6} \approx 2,765 \, \Omega$ .



Слика 286.1.



Слика 286.2.

Да бисмо показали да је то увек случај, посматрајмо мрежу са слике 286.1 као да је у питању мрежа са два приступа приказана на слици 286.2. Резистансни параметри те мреже су  $r_{11}$ ,  $r_{12} = r_{21}$  и  $r_{22}$ . (Конкретно,  $r_{11} \approx 2,765 \, \Omega$ ,  $r_{12} = r_{21} \approx 0,471 \, \Omega$  и  $r_{22} \approx 3,059 \, \Omega$ .) Када је на приступ 2 везан отпорник  $R_3$ , еквивалентна отпорност гледано у приступ 1 је

$$R_e = r_{11} - \frac{r_{12}^2}{r_{22} + R_3} \quad (286.1)$$

( $R_e = 2,728 \Omega$ ), што је исто као отпорност мреже са слике 286.1 када је грана са отпорником  $R_3$  на свом месту. Када је у мрежи са слике 286.2 отпорник  $R_3$  уклоњен, а приступ 2 остављен отвореним, тада је еквивалентна отпорност гледано у приступ 1 једнака  $R'_e = r_{11}$  ( $R'_e = 2,765 \Omega$ ). С обзиром на то да мора бити  $R_3 \geq 0$ ,  $r_{11} \geq 0$  и  $r_{22} \geq 0$  ( $r_{ii}$ ,  $i=1,2$  је еквивалентна отпорност гледано у један приступ мреже када је други приступ отворен, а мрежа отпорника је пасивна), то је  $\frac{r_{12}^2}{r_{22} + R_3} > 0$ , па је увек  $R'_e \geq R_e$ .

Знак једнакости важи ако је  $r_{12} = r_{21} = 0$  (на пример, ако је отпорник  $R_3$  у једној грани уравнотеженог моста).

Из израза (286.1) следи и општији закључак: еквивалентна отпорност се повећава (или, евентуално, не мења) када се једна отпорност у мрежи повећава.

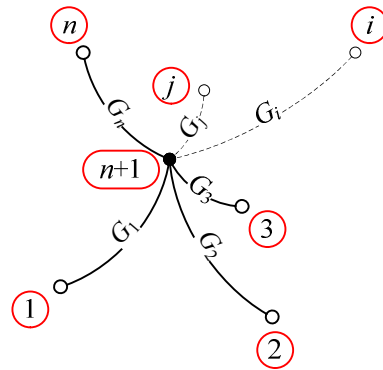
Читаоцу се препоручује да докаже да ако се у отпорничкој мрежи са једним приступом кратко споје две тачке, улазна отпорност мреже ће се смањити (или, евентуално, остати непромењена).

**\*\*\*287.** Извести еквиваленцију  $n$ -токраке звезде и полигона.

#### РЕШЕЊЕ

На слици 287.1 приказана је звезда која има  $n$  кракова, односно  $n$  прикључака (1, 2, ...,  $n$ ). Звездиште је означено са  $n+1$ . Отпорности грана звезде су  $R_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , односно проводности су  $G_i = \frac{1}{R_i}$ ,  $i=1, \dots, n$ . На слици, једноставности

ради, отпорници нису нацртани, али су означене њихове проводности.



Слика 287.1.

Претпостављамо да је звезда везана у коло, али остатак кола није нацртан. Звезда је за остатак кола везана у тачкама 1, 2, ...,  $n$ , док звездиште није везано за остатак кола.

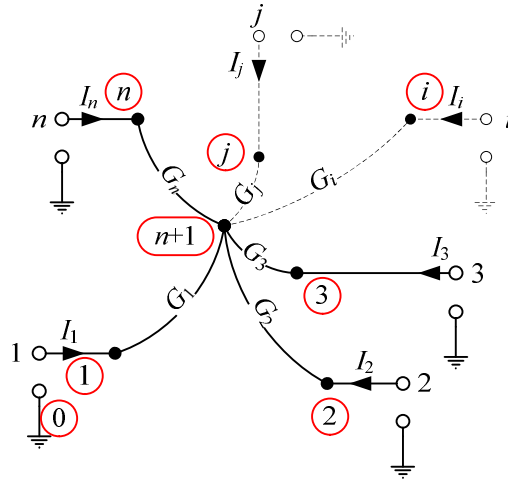
Уведимо референтну тачку (масу) која се налази било где у остатку кола. Између сваког прикључка звезде и масе дефинишимо по један приступ. Тиме добијамо мрежу са  $n$  приступа, као на слици 287.2. Према ознакама на тој слици, напони на приступима мреже су  $U_{10}, U_{20}, \dots, U_{n0}$ , а струје су  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Слично као код мрежа са два приступа, струје и напони на приступима линеарне мреже са  $n$  приступа (у којој нема независних генератора) повезани су релацијама

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}U_{10} + g_{12}U_{20} + \dots + g_{1n}U_{n0}, \\ I_2 &= g_{21}U_{10} + g_{22}U_{20} + \dots + g_{2n}U_{n0}, \\ &\vdots \\ I_n &= g_{n1}U_{10} + g_{n2}U_{20} + \dots + g_{nn}U_{n0}, \end{aligned} \quad (287.1)$$



где су  $g_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  константне величине за посматрану мрежу ( $g$ -параметри, кондуктансни параметри), које су по природи проводности. За реципрочну мрежу, као што је мрежа састављена само од отпорника, важи  $g_{ij} = g_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ .

Кондуктансни параметри мреже се могу добити тако што се мрежа побуди на једном приступу идеалним напонским генератором, остали приступи кратко споје, па се одреде струје прикључака мреже. Количник струје приступа и емс побудног генератора једнак је одговарајућем  $g$ -параметру. Поступак се понавља побуђујући један по један приступ.



Слика 287.2.

Као пример, на слици 287.3 приказана је ситуација када је посматрана мрежа побуђена на првом приступу. Од чвора 1 до звездишта (чвора  $n+1$ ) везан је отпорник проводности  $G_1$ . Од звездишта према маси (односно према осталим, кратко спојеним приступима) паралелно су везани отпорници проводности  $G_2, \dots, G_n$ , чија је

еквивалентна проводност  $G_{e1} = \sum_{k=2}^n G_k$ . Очигледно,  $I_1 = \frac{E}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_{e1}}} = \frac{E}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{\sum_{k=2}^n G_k}}$ , па је

$$g_{11} = \frac{I_1}{E} = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{\sum_{k=2}^n G_k}} \quad (\text{еквивалентна проводност гледано у први приступ када су остали}$$

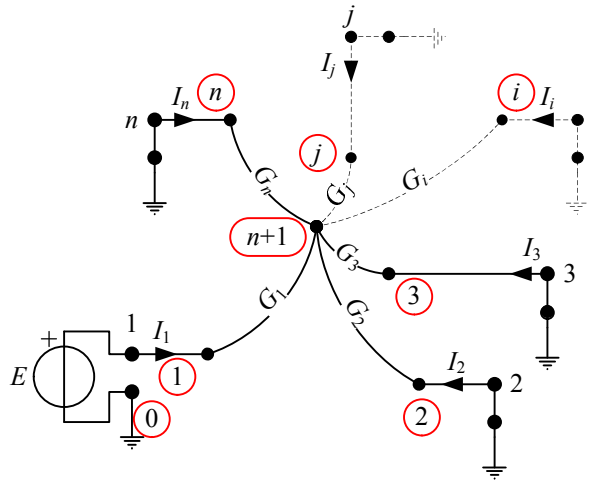
приступу у кратком споју). Напон између звездишта и масе је  $U_{n+1,0} = \frac{I_1}{G_{e1}}$ , струје

осталих приступа су  $I_i = -G_i U_{n+1,0} = -\frac{E}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{\sum_{k=2}^n G_k}} \frac{G_i}{G_{e1}}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , па је преносна

проводност  $g_{i1} = \frac{I_i}{E} = \frac{-1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{\sum_{k=2}^n G_k}} \frac{G_i}{G_{e1}}$ . Аналогним поступком се добијају и сви

остали кондуктансни параметри, па су параметри мреже  $g_{jj} = \frac{1}{\frac{1}{G_j} + \frac{1}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n G_k}} = \frac{G_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$ ,

$$j=1, \dots, n, \text{ и } g_{ij} = \frac{-1}{\frac{1}{G_j} + \frac{1}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n G_k}} \frac{G_i}{\sum_{k=1}^n G_k} = -\frac{G_i G_j}{\sum_{k=1}^n G_k} = g_{ji}, \quad i, j=1, \dots, n, i \neq j.$$



Слика 287.3.

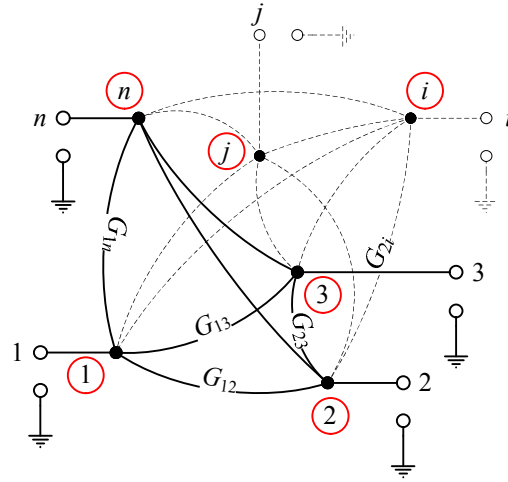
На слици 287.4 приказан је генерални полигон који има  $n$  чворова, посматран као мрежа са  $n$  приступа. Кондуктансни параметри ове мреже су  $g_{jj} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n G_{jk}$ ,

$g_{ij} = -G_{ij} = -G_{ji} = g_{ji}$ ,  $i, j=1, \dots, n$ . Упоредивањем израза за параметар  $g_{ij}$  ( $i \neq j$ ) звезде и полигона, добија се

$$G_{ij} = \frac{G_i G_j}{\sum_{k=1}^n G_k}, \quad i, j=1, \dots, n, i \neq j. \quad (287.2)$$

Уочимо да је за обе посматране мреже  $g_{jj} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n g_{jk}$ . Стога, испуњавајући услове за једнакост параметара  $g_{ij}$ , аутоматски смо испунили услове за једнакост параметара  $g_{jj}$ .

Овим смо показали да се, за произвољну звезду, може наћи еквивалентан полигон. Међутим, у општем случају, за задати полигон не може се наћи еквивалентна звезда. Полигон има  $n(n-1)/2$  грана (отпорника), а звезда  $n$ . За  $n > 3$ , број грана полигона је већи од броја грана звезде, па је број услова који се постављају да би се добила еквиваленција (једнак броју грана полигона) већи од броја расположивих параметара (броја грана звезде). Ти услови су, у општем случају несагласни, односно решење не постоји. Изузетак је  $n = 3$ , када је увек могуће трансформисати полигон (троугао) у троуглаку звезду, и обрнуто.



Слика 287.4.

У посебном случају када је  $n = 3$ , из (287.2) се добија  $G_{12} = \frac{1}{R_{12}} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$ , одакле је  $R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$ . Слично томе, добијају се изрази за отпорности преосталих грана троугла.

Еквиваленција звезде и полигона може се извести и на следећи начин. Посматрајмо звезду отпорника у колу. Нека су чворови за које су везане гране звезде нумерисани са 1, 2, 3, ...,  $n$ , а звездисте је  $(n+1)$ , као на слици 287.1. Осим тих чворова, коло има и других чворова. Звездисте не сме бити референтни чвор. Напишимо једначине потенцијала чворова. За звездисте, једначина гласи  $V_{n+1} \sum_{k=1}^n G_k - \sum_{k=1}^n G_k V_k = 0$ , одакле је

$$V_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^n G_k V_k}{\sum_{k=1}^n G_k}. \text{ У једначини за чвор } j \text{ постоји члан } -G_j V_{n+1}. \text{ Заменом израза за } V_{n+1},$$

$$\text{добија се } -G_j V_{n+1} = -G_j \frac{\sum_{k=1}^n G_k V_k}{\sum_{k=1}^n G_k}. \text{ Сваки члан облика } -\frac{G_j G_i}{\sum_{k=1}^n G_k} V_i \text{ одговара отпорнику}$$

$$\text{проводности } G_{ji} = G_{ij} = \frac{G_j G_i}{\sum_{k=1}^n G_k} \text{ везаном између чворова } i \text{ и } j. \text{ Стога се посматрана звезда}$$

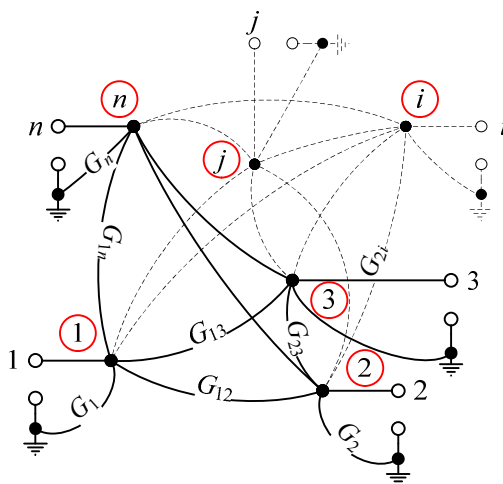
може заменити потпуним полигоном чије су проводности грана  $G_{ji} = G_{ij} = \frac{G_j G_i}{\sum_{k=1}^n G_k}$ ,

$i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ .

**\*\*\*288.** Пројектовати отпорничку мрежу са  $n$  приступа ако је позната матрица кондуктанских параметара те мреже  $[g]$ .

#### РЕЗУЛТАТ

Мрежа је приказана на слици 288.1, а састоји се од потпуног отпорничког полигона везаног између врућих прикључака приступа, чије су проводности грана  $G_{ij} = -g_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n, j > i$ , и отпорника везаних паралелно сваком приступу, чије су проводности  $G_j = \sum_{k=1}^n g_{jk}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .



Слика 288.1.

**\*\*\*289.** Доказати да се еквивалентна отпорност произвољне мреже отпорника са једним приступом може одредити употребљавајући трансфигурацију из задатка 287.

#### РЕШЕЊЕ

Претпоставимо да мрежа отпорника има  $n$  чворова, од којих су чворови 1 и 2 истовремено и прикључци мреже. Остали чворови су „унутрашњи“. Између два (било која) чвора мреже може бити везано више отпорника, један отпорник или ниједан отпорник. Ако је везано више отпорника, они се могу заменити једним еквивалентним отпорником. Уколико не постоји отпорник, можемо, у циљу ове анализе, сматрати да је ипак везан отпорник, али нулте проводности (бесконачне отпорности). Тако сада између свака два чвора имамо везан један и само један отпорник.

Циљ је да се, постепеним трансфигурацијама, ослободимо унутрашњих чворова. Посматрајмо један унутрашњи чвор. За тај чвор је везано  $(n-1)$  отпорника. Ти отпорници чине звезду са  $(n-1)$  кракова, а посматрани чвор је одговарајуће звездиште. Трансфигурацијом из задатка 287, звезда се може заменити еквивалентним полигоном. Тиме се укида посматрани унутрашњи чвор. Свака грана добијеног полигона везана је паралелно одговарајућој грани оригиналне мреже. Такав пар грана се може заменити једним еквивалентним отпорником, а као резултат добија се полигон који има  $(n-1)$  чвор.

Поступак се наставља све док се не укину сви унутрашњи чворови, а мрежа редукује само на један отпорник везан између тачака 1 и 2.

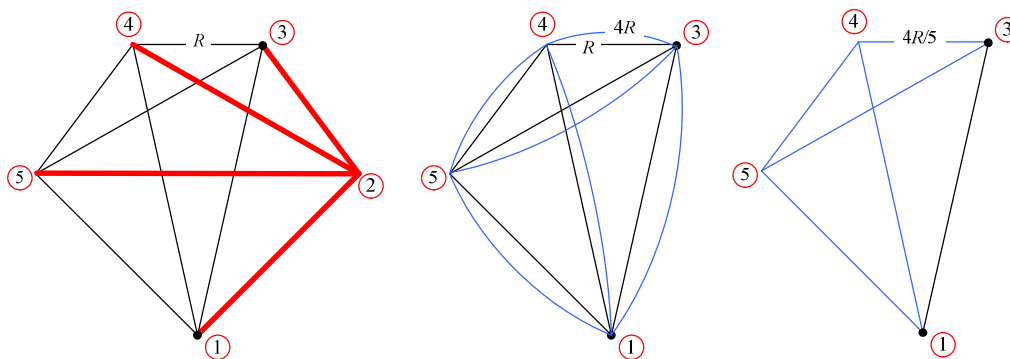
Читаоцу се оставља да покаже да је описани поступак еквивалентан постављању једначина по методу потенцијала чворова, који се решава Гаусовим методом елиминације. При томе је између чворова 1 и 2 везан идеални струјни генератор (тест генератор), а чворове треба тако ренумерисати да је чвор 2 референтни, а чвор 1 последњи од „врхуних“ чворова.

**\*\*\*290.** Задатак 161 решити применом трансфигурације звезде у полигон из задатка 287.

#### РЕШЕЊЕ

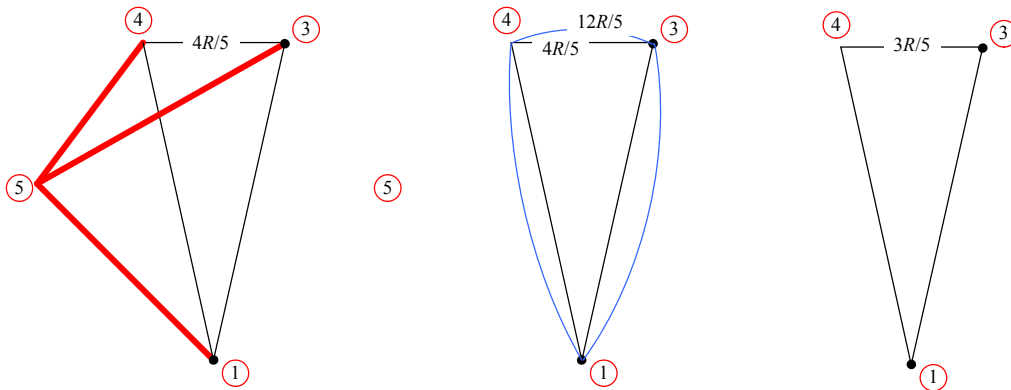
На слици 290.1 приказан је поступак трансфигурација. Уочимо четворокраку звезду чије је звездиште чвор 2. Звезда се може заменити еквивалентним потпуним четвороуглом чије су отпорности, на основу израза (287.2),  $4R$ . Свака грана тог четвороугла везана је паралелно једној од преосталих грана оригиналног потпуног петоугла. Еквивалентна отпорност паралелне везе је  $4R/5$ .

Тако се добија мрежа чије су све отпорности опет међусобно једнаке. Та мрежа се, посматрано са приступа 1-3, састоји од уравнотеженог моста паралелно везаног једном отпорнику. Еквивалентна отпорност моста је  $4R/5$ , па је тражена еквивалентна отпорност  $R_e = 2R/5 = 0,4R$ .



Слика 290.1.

Алтернативно, уместо моста, може се уочити трокрака звезда (слика 290.2) и заменити еквивалентним троуглом отпорности  $12R/5$ . Гране троугла су везане паралелно гранама четвороугла које су преостале после трансфигурације. Еквивалентна отпорност паралелне везе је  $3R/5$ . Овом трансфигурацијом добија се редно-паралелна веза чија је еквивалентна отпорност  $R_e = 2R/5 = 0,4R$ .



Слика 290.2.

**\*\*\*291.** Генерализовати задатак 290 на потпуни полигон са  $n$  темена који се састоји од идентичних отпорника отпорности  $R$ .

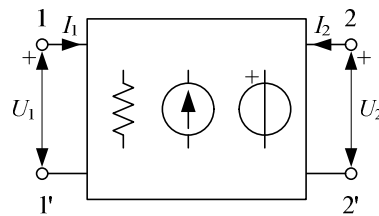
#### РЕШЕЊЕ

Уочи се звезда чије је звездиште један чвор полигона који није прикључак мреже. Број грана звезде је  $n-1$ , а број грана преосталог (нетрансфигурисаног) дела полигона је  $n(n-1)/2 - (n-1) = (n-1)(n-2)/2$ . На основу задатка 287, звезда се може заменити потпуним полигоном који има  $n-1$  чвор и  $(n-1)(n-2)/2$  грана чије су отпорности  $(n-1)R$ . Гране тог полигона везане су паралелно гранама нетрансфигурисаног дела оригиналног полигона. Заменом сваке паралелне везе еквивалентним отпорником отпорности  $((n-1)R) \parallel R = \frac{n-1}{n}R$ , добија се потпуни полигон чији је број темена  $n-1$ , а отпорности свих грана једнаке.

На тај полигон се, у следећем кораку, примени исти поступак, после кога се добија потпуни полигон чији је број темена  $n-2$ , а отпорност сваке гране је  $\frac{n-2}{n-1} \frac{n-1}{n} R = \frac{n-2}{n} R$ . Поступак се понавља све док се не добије троугао као на слици 290.2, чије су отпорности грана  $\frac{3}{n}R$ , па је тражена еквивалентна отпорност

$$R_e = \frac{2}{3} \frac{3}{n} R = \frac{2}{n} R.$$

**\*\*292.** Извести везу између напона и струја линеарне мреже са два приступа, приказане на слици 292.1, која се састоји од отпорника, контролисаних генератора<sup>31</sup> и независних генератора.

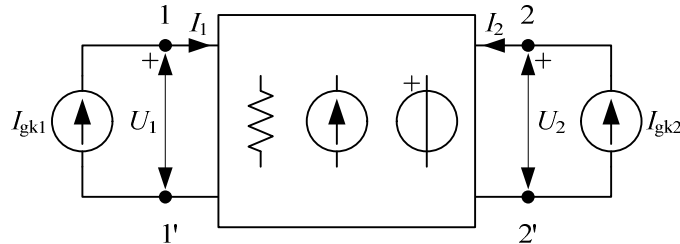


Слика 292.1.

<sup>31</sup> Контролисани генератори су обрађени у одељку 5.2.

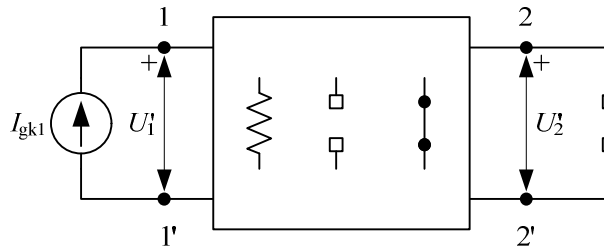
РЕШЕЊЕ

По теореме компензације, мреже које су везане на приступ 1 и на приступ 2 посматране мреже могу се заменити компензационим струјним генераторима (слика 292.2). Струје тих генератора су  $I_{gk1} = I_1$  и  $I_{gk2} = I_2$ . Осим тих генератора, у посматраној мрежи постоје независни (аутономни) напонски и струјни генератори, а могу постојати и контролирани генератори.

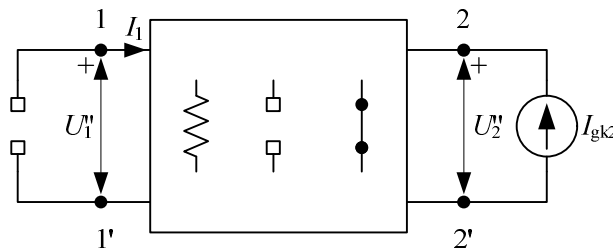


Слика 292.2.

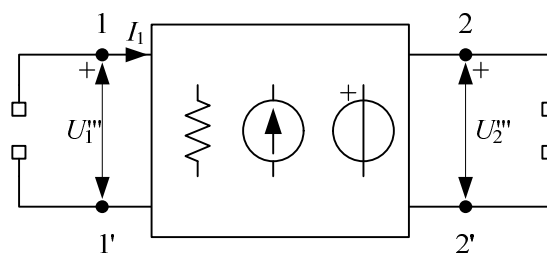
По теореме суперпозиције, напон  $U_1$  се може добити сабирањем напона у три стања у колу: прво, када делује само генератор  $I_{gk1}$ , а сви остали независни генератори су искључени (анулирано је дејство генератора  $I_{gk2}$  и свих независних генератора у мрежи), као на слици 292.3; друго, када делује само  $I_{gk2}$ , а сви остали независни генератори су искључени (слика 292.4); и треће, када делују сви независни генератори који се налазе у посматраној мрежи, али је  $I_{gk1} = I_{gk2} = 0$  (слика 292.5), односно  $U_1 = U'_1 + U''_1 + U'''_1$ . Напоменимо да се контролирани генератори не смеју искључивати ни у једном од ових стања.



Слика 292.3.



Слика 292.4.



Слика 292.5.

У првом стању, у колу делује само један генератор. Према теореди пропорционалности, напон  $U_1$  је линеарно сразмеран струји генератора  $I_{gk1}$ , што можемо писати у облику  $U_1' = r_{11}I_{gk1}$ , где је  $r_{11}$  константна величина која има исто значење као одговарајући резистансни параметар код мрежа без независних генератора. Када делује само генератор струје  $I_{gk2}$ , важи  $U_1'' = r_{12}I_{gk2}$ . Најзад, када делују само независни генератори који су у посматраној мрежи, мрежа је у празном ходу на оба приступа, можемо писати  $U_1''' = U_1^{(o)}$ , па је  $U_1 = r_{11}I_{gk1} + r_{12}I_{gk2} + U_1^{(o)}$ . Исто резонување важи и за напон  $U_2$ , па одмах имамо  $U_2 = r_{21}I_{gk1} + r_{22}I_{gk2} + U_2^{(o)}$ .

Заменом израза за струје компензационих генератора, добијају се тражене релације,

$$U_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2 + U_1^{(o)}, \quad (292.1)$$

$$U_2 = r_{21}I_1 + r_{22}I_2 + U_2^{(o)}. \quad (292.2)$$

Ове релације су аналогне вези између напона и струје Тевененовог генератора за мрежу са једним приступом.

Из овог извођења произилази и поступак одређивања параметара у релацијама (292.1) и (292.2). Из шеме на слици 292.3 одређују се параметри  $r_{11}$  и  $r_{21}$  (као количници одговарајућих напона и струје  $I_{gk1}$ ), из шеме на слици 292.4 одређују се  $r_{12}$  и  $r_{22}$ , а константе  $U_1^{(o)}$  и  $U_2^{(o)}$  су напони празног хода у шеми на слици 292.5.

Уколико у мрежи нема независних генератора, напони празног хода на приступима мреже су нула (јер тада нема независних екситација), па се релације (292.1) и (292.2) свде на (278.1) и (278.2).

Ако мрежа не садржи контролисане генераторе, за стања на сликама 292.3 и 292.4 важи теорема реципроцитета, па је за такве мреже  $r_{12} = r_{21}$ .

Уколико се пође од напонске компензације, истим резонувањем се могу добити релације преко кондуктансних параметара,

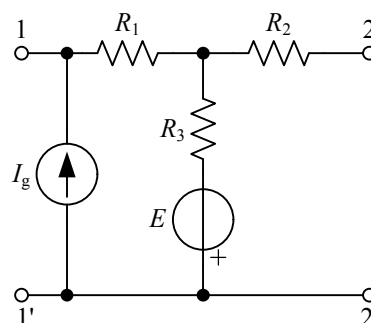
$$I_1 = g_{11}U_1 + g_{12}U_2 + I_1^{(ks)}, \quad (292.3)$$

$$I_2 = g_{21}U_1 + g_{22}U_2 + I_2^{(ks)}, \quad (292.4)$$

где су  $I_1^{(ks)}$  и  $I_2^{(ks)}$  струје када су оба приступа кратко спојена, што одговара Нортоновом генератору.



**\*\*293.** Израчунати параметре (а) Тевененовог генератора и (б) Нортеновог генератора еквивалентног четворополу приказаном на слици 293.1 ако је  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_g = 5 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ .



Слика 293.1.

РЕШЕЊЕ

(а) Везе између напона и струја мреже са два приступа које одговарају Тевененовом генератору, дате су релацијама (292.1) и (292.2). Параметри  $r_{11}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{12}$  и  $r_{22}$  одређују се, према сликама 292.3 и 292.4, када се анулирају независне побуде у мрежи. По уклањању генератора из мреже на слици 293.1, добија се иста мрежа као на слици 278.1. На основу тога, ти параметри су исти за обе мреже, односно

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ k}\Omega.$$

Параметри  $U_1^{(0)}$  и  $U_2^{(0)}$  су напони празног хода на приступима мреже, а одређују се као на слици 292.5. За мрежу са слике 293.1 је  $U_1^{(0)} = -E + (R_1 + R_3)I_g = 10 \text{ V}$  и  $U_2^{(0)} = -E + R_3I_g = 5 \text{ V}$ .

(б) Везе између напона и струја мреже са два приступа које одговарају Нортеновом генератору, дате су релацијама (292.3) и (292.4). Параметре у тим релацијама можемо одредити на следећи начин.

Релације (292.1) и (292.2) се могу написати у матричном облику,

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^{(0)} \\ U_2^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (293.1)$$

односно

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{R}][\mathbf{I}] + [\mathbf{U}^{(0)}]. \quad (293.2)$$

Множењем са леве стране обе стране једначине (293.2) матрицом

$[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$  и сређивањем, добија се

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{G}][\mathbf{U}] + [\mathbf{I}^{(ks)}], \quad (293.3)$$

где је  $\begin{bmatrix} I_1^{(ks)} \\ I_2^{(ks)} \end{bmatrix} = -[R]^{-1} \begin{bmatrix} U_1^{(o)} \\ U_2^{(o)} \end{bmatrix}$ , односно

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1^{(ks)} \\ I_2^{(ks)} \end{bmatrix}, \quad (293.4)$$

што је матрични облик једначина (292.3) и (292.4). На основу тога, за задато коло је  $g_{11} = \frac{5}{11} \text{ mS}$ ,  $g_{12} = g_{21} = \frac{-3}{11} \text{ mS}$ ,  $g_{22} = \frac{4}{11} \text{ mS}$ ,  $I_1^{(ks)} = \frac{-35}{11} \text{ mA}$  и  $I_2^{(ks)} = \frac{10}{11} \text{ mA}$ .

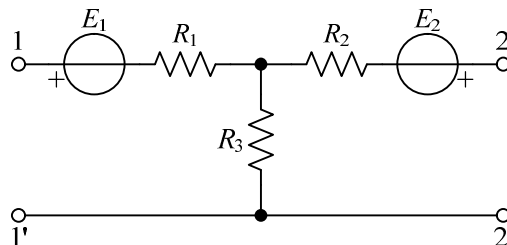
Читаоцу се препоручује да струје кратког споја одреди и директно, решавајући задату мрежу кратко спојену на оба приступа.

**\*\*294.** (а) Познати су параметри  $r_{11}$ ,  $r_{21} = r_{12}$ ,  $r_{22}$ ,  $U_1^{(o)}$  и  $U_2^{(o)}$  мреже са два приступа, где је  $r_{11}, r_{22} > r_{12} > 0$ . Пројектовати мрежу у облику као на слици 294.1. (б) Познати су параметри  $g_{11}$ ,  $g_{21} = g_{12}$ ,  $g_{22}$ ,  $I_1^{(ks)}$  и  $I_2^{(ks)}$  мреже са два приступа, где је  $g_{11}, g_{22} > -g_{12} > 0$ . Пројектовати мрежу у облику као на слици 294.2.

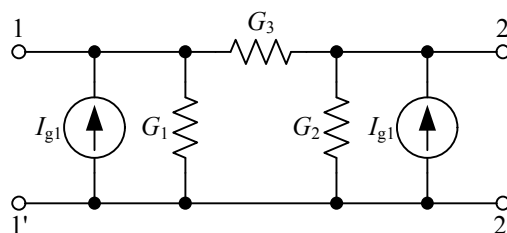
#### РЕЗУЛТАТ

(а) Параметри елемената кола са слике 294.1 су  $R_1 = r_{11} - r_{12}$ ,  $R_2 = r_{22} - r_{12}$ ,  $R_3 = r_{12}$ ,  $E_1 = U_1^{(o)}$  и  $E_2 = U_2^{(o)}$ .

(б) Параметри елемената кола са слике 294.2 су  $G_1 = g_{11} + g_{12}$ ,  $G_2 = g_{22} + g_{12}$ ,  $G_3 = -g_{12}$ ,  $I_{g1} = -I_1^{(ks)}$  и  $I_{g2} = -I_2^{(ks)}$ .



Слика 294.1.



Слика 294.2.

**\*\*295.** Показати да из релација (292.1) и (292.2), односно (292.3) и (292.4) следе теореме (а) пропорционалности, (б) суперпозиције, (в) линеарности, (г) линеарне зависности одзива од побуде и (д) Тевененова и Нортенова теорема за мрежу са једним приступом. (ђ) Под којим условом из тих једначина следе теореме реципроцитета?

#### РЕШЕЊЕ

(а) Претпоставимо да у „црној кутији“ на слици 292.1 нема независних генератора (већ само отпорника и, евентуално, контролираних генератора). Тада између напона и струја мреже важе једноставније релације, (278.1) и (278.2), односно (279.1) и (279.2).

Ако се на први приступ прикључи идеални струјни генератор струје  $I_g$  (чији је референтни смер од тачке 1' ка тачки 1), а други приступ остави отвореним, из (278.1) следи  $U_1 = r_{11}I_g$ , а из (278.2) се добија  $U_2 = r_{21}I_g$  јер је  $I_1 = I_g$ , а  $I_2 = 0$ .

Ако је на приступу 1 идеални струјни генератор, а приступ 2 је кратко спојен, из (278.1) је  $U_1 = \frac{I_g}{g_{11}}$ , па је из (278.2)  $I_2 = g_{21}U_1 = \frac{g_{21}}{g_{11}}I_g$ .

Ако је побуда идеалним напонским генератором, докази су дуални. Ако се на приступ 1 прикључи идеални напонски генератор емс  $E$  (референтни смер је од 1' ка 1), а приступ 2 остави отвореним, тада је  $I_1 = \frac{E}{r_{11}}$  и  $U_2 = \frac{r_{21}}{r_{11}}E$ . Ако се приступ 2 кратко споји, тада је  $I_1 = g_{11}E$  и  $I_2 = g_{21}E$ .

У свим случајевима, када у колу делује само једна побуда, одзив је линеарно сразмеран тој побуди, односно између одзива и побуде важи релација облика  $y = ax$ , где је  $a$  константна величина.

(б) Замислимо да су на приступима мреже (у којој постоје независни генератори) прикључени идеални струјни генератори, као на слици 292.2. Нека су струје тих генератора  $I_{g1}$  и  $I_{g2}$ . Једначина (292.1) даје укупан одзив (напон на првом приступу). Ако се анулирају све побуде осим  $I_{g1}$ , добија се  $U'_1 = r_{11}I_{g1}$ . Ако се анулирају све побуде осим  $I_{g2}$ , добија се  $U''_1 = r_{12}I_{g2}$ . Ако се анулирају струје прикључених струјних генератора, али остану све побуде које су у „црној кутији“, добија се  $U'''_1 = U_1^{(0)}$ . Очигледно,  $U_1 = U'_1 + U''_1 + U'''_1$ , што представља исказ теореме суперпозиције. Читаоцу се оставља да покаже да важи теорема суперпозиције и ако су на приступима идеални напонски генератори, као и ако је на једном приступу идеални напонски, а на другом приступу идеални струјни генератор.

(в) Математички облик теореме линеарности се најјасније види ако у мрежи нема независних генератора. Свака од једначина (292.1)-(292.4) је тада линеарна хомогена форма (слободни члан не постоји). Зависност струја и напона на приступима од независних генератора који се налазе у мрежи, није експлицитно исказана једначинама (292.1)-(292.4).

(г) Претпоставимо да је на приступ 1 прикључен идеални струјни генератор струје  $I_g$ , а приступ 2 отворен. Тада једначина (292.1) гласи  $U_1 = r_{11}I_g + U_1^{(0)}$ , што је математички исказ теореме која тврди да је одзив, у колу у коме има више побуда, линеарна функција једне побуде. Одзив је облика  $y = ax + b$ , где су  $a$  и  $b$  константне величине. Слободни члан представља одзив на све остале побуде осим те, посматране побуде.

Читаоцу се оставља да изведе једначине и за остале случајеве (када се посматра побуда идеалним струјним генератором, а одзив је струја другог приступа, и када се посматра побуда идеалним напонским генератором).

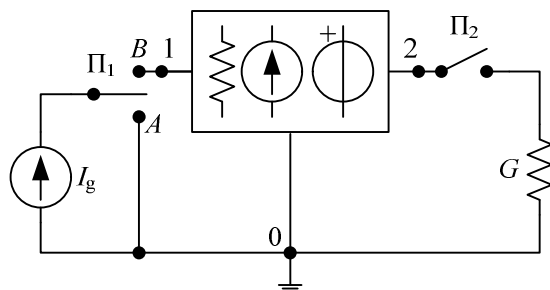
(д) Ако је приступ 2 стално отворен, мрежу са слике 292.1 можемо посматрати и као мрежу са једним приступом (1-1'). Тада се једначина (292.1) своди на  $U_1 = r_{11}I_1 + U_1^{(0)}$ ,

што је иста релација као за Тевененов генератор. Трансфигурацијом Тевененовог, добија се Нортонов генератор, а релација између напона и струје гласи  $I_1 = \frac{U_1 - U_1^{(0)}}{r_{11}}$ .

Читаоцу се оставља да изведе релације за Тевененов и Нортонов генератор када је приступ 2 кратко спојен или затворен отпорником отпорности  $R$ . У свим случајевима, читаоцу се препоручује да скицира те генераторе и утврди референтне смерове емс Тевененовог генератора, односно струје Нортоновог генератора.

(h) Теореме реципроцитета важе ако је  $r_{12} = r_{21}$ , односно  $g_{12} = g_{21}$ , што се оставља читаоцу да покаже.

**\*\*296.** Мрежа сталне струје приказана на слици 296.1 састоји се од отпорника, као и независних напонских и струјних генератора. Мрежа има три прикључка, као на слици. Преклопник  $\Pi_1$  је у положају (A), а прекидач  $\Pi_2$  је отворен. При томе је  $V_2 = 4 \text{ V}$ . Када се преклопник пребаци у положај (B), у коло се укључи генератор струје  $I_g = 0,2 \text{ A}$ , а потенцијали тачака 1 и 2 се промене за  $\Delta V_1 = 8 \text{ V}$  и  $\Delta V_2 = 5 \text{ V}$ . Затим се затвори прекидач  $\Pi_2$ . Потенцијал тачке 2 се при томе врати на првобитну вредност, а потенцијал тачке 1 се промени, у односу на претходно стационарно стање, за  $\Delta V_1' = -4 \text{ V}$ . Израчунати проводност  $G$ .



Слика 296.1.

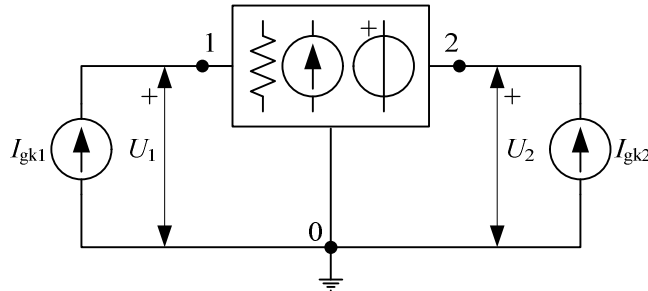
#### РЕШЕЊЕ

За мрежу са слике 296.1 важе једначине (292.1) и (292.2), при чему је  $V_1 = U_1$  и  $V_2 = U_2$ , а референтни смерови струја су ка мрежи на оба приступа. Мрежа је реципрочна ( $r_{12} = r_{21}$ ).

У првом стационарном стању струје оба приступа су нула, па из (292.2) следи  $U_2^{(0)} = V_2 = 4 \text{ V}$ .

Применимо теорему струјне компензације за оба приступа (слика 296.2). Укључење струјног генератора  $I_g$  еквивалентно је промени струје компензационог генератора  $I_{gk1}$  са 0 на  $I_g$ , односно прираштају  $\Delta I_{gk1} = I_g$ . Пошто је при томе  $I_2 = 0$ , из (292.1) се добија прираштај напона на првом приступу (прираштај потенцијала тачке 1),

$\Delta U_1 = \Delta V_1 = r_{11} \Delta I_{\text{gk1}}$ , па је  $r_{11} = \frac{\Delta V_1}{\Delta I_{\text{gk1}}} = 40 \Omega$ . Слично томе, прираштај потенцијала тачке 2 је  $\Delta V_2 = r_{21} \Delta I_{\text{gk1}}$ , одакле је  $r_{21} = 25 \Omega$ .



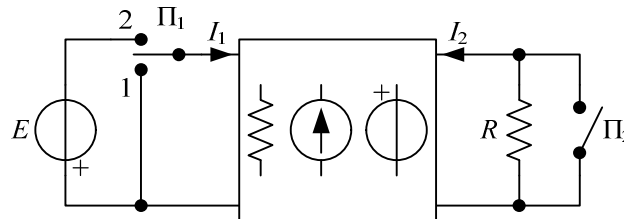
Слика 296.2.

Затварањем прекидача  $\Pi_2$  мења се струја компензационог струјног генератора  $I_{\text{gk2}}$  са 0 на непознату вредност  $I$ , при чему се струја првог генератора не мења. Из познатог прираштаја потенцијала тачке 1,  $\Delta V'_1 = r_{12} \Delta I_{\text{gk2}} = r_{12} I$ , добија се  $I = \frac{\Delta V'_1}{r_{21}} = -0,16 \text{ A}$  јер је  $r_{12} = r_{21}$ . На основу услова задатка, одговарајући прираштај потенцијала друге тачке је  $\Delta V'_2 = -5 \text{ V} = r_{22} \Delta I_{\text{gk2}}$ , где је  $\Delta I_{\text{gk2}} = I$ , па је  $r_{22} = 31,25 \Omega$ . Нови потенцијал је  $V_2'' = 4 \text{ V}$ , па је  $G = -\frac{I}{V_2''} = 40 \text{ mS}$ .

**\*\*297.** Када је у колу са слике 297.1 прекидач  $\Pi_2$  затворен, а преклопник  $\Pi_1$  у положају (1), тада је струја  $I_2 = 5 \text{ mA}$ . Пребацавањем преклопника  $\Pi_1$  у положај (2), у коло се укључује генератор емс  $E = 2 \text{ V}$ . При томе је прираштај струје  $I_2$  у односу на претходно стање  $\Delta I_2 = 4 \text{ mA}$ . Када се затим отвори прекидач  $\Pi_2$ , струја друге гране постане иста као и пре пребацивања преклопника  $\Pi_1$  у положај (2), а прираштај струје прве гране према претходном стању је  $\Delta I'_1 = 10 \text{ mA}$ . Израчунати отпорност  $R$ .

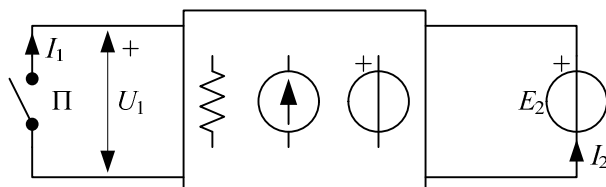
РЕЗУЛТАТ

На основу једначина (292.3) и (292.4) добија се да је отпорност  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .



Слика 297.1.

**\*\*298.** Мрежа на слици 298.1 састоји се од отпорника и независних генератора. Позната је електромоторна сила  $E_2^{(1)} = 10 \text{ V}$ . Напон између крајева отвореног прекидача П је  $U_1' = 2,5 \text{ V}$ , при чему је струја генератора  $E_2$ ,  $I_2' = 175 \text{ mA}$ . При затвореном прекидачу П познате су струја прекидача,  $I_1'' = -50 \text{ mA}$ , и струја генератора,  $I_2'' = 200 \text{ mA}$ . Колика је струја прекидача ако се емс  $E_2$  промени на  $E_2^{(2)} = 5 \text{ V}$ ?



Слика 298.1.

РЕШЕЊЕ

Референтни смерови на слици 298.1 одговарају смеровима на слици 292.1, уз  $U_2 = E_2$ , а једначине (292.3) и (292.4) за прво стационарно стање (када је прекидач П отворен) гласе

$$0 = g_{11}U_1' + g_{12}E_2^{(1)} + I_1^{(ks)}, \quad (298.1)$$

$$I_2' = g_{12}U_1' + g_{22}E_2^{(1)} + I_2^{(ks)}, \quad (298.2)$$

јер је струја првог приступа нула. Мрежа са слике 298.1 је реципрочна, па је  $g_{12} = g_{21}$ . У другом стационарном стању је

$$I_1'' = g_{12}E_2^{(1)} + I_1^{(ks)}, \quad (298.3)$$

$$I_2'' = g_{22}E_2^{(1)} + I_2^{(ks)}, \quad (298.4)$$

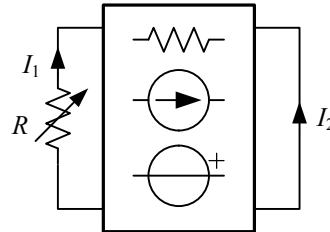
јер је напон првог приступа нула. Из (298.2) и (298.4) се добија  $I_2' = g_{12}U_1' + I_2''$ , одакле је  $g_{12} = \frac{I_2' - I_2''}{U_1'} = -10 \text{ mS}$ . Из (298.3) је сада  $I_1^{(ks)} = I_1'' - g_{12}E_2^{(1)} = 50 \text{ mA}$ .

У трећем стационарном стању, када је емс напонског генератора  $E_2 = E_2^{(2)} = 5 \text{ V}$ , једначина (298.3) даје тражену струју прекидача,  $I_1''' = g_{12}E_2^{(2)} + I_1^{(ks)} = 0$ .

**\*\*299.** У грани 1 разгранатог кола налази се отпорник променљиве отпорности  $R$  (слика 299.1). Показати да је струја  $I_2$  гране 2 дата изразом

$$I_2(R) = I_2(R \rightarrow +\infty) + \frac{I_2(R=0) - I_2(R \rightarrow +\infty)}{R + R_e} R_e, \text{ где}$$

је  $R_e$  еквивалентна отпорност гледано од отпорника  $R$  ка остатку кола (када су све екситације у колу анулиране).



Слика 299.1.

#### РЕШЕЊЕ

По теореме компензације, грана са отпорником  $R$  може се заменити компензационим струјним генератором струје  $I_{\text{gk}} = I_1$  (слика 299.2).

По теореме суперпозиције је  $I_2 = I'_2 + I''_2$ , где је  $I'_2$  струја гране 2 када у колу делују сви независни генератори, а компензациони генератор струје  $I_{\text{gk}} = I_1$  је искључен, док је  $I''_2$  је струја гране 2 када у колу делује само компензациони генератор, а сви независни генератори су искључени. Промена отпорности  $R$  мења само члан  $I''_2$ .

На основу теореме линеарности, струја  $I''_2$  је линеарно сразмерна са  $I_{\text{gk}} = I_1$ , односно

$$I_2 = aI_1 + I'_2, \quad (299.1)$$

где је  $a$  бездимензиона константна величина. Када  $R \rightarrow +\infty$ , тада је  $I_1 = 0$ , па из (299.1) следи

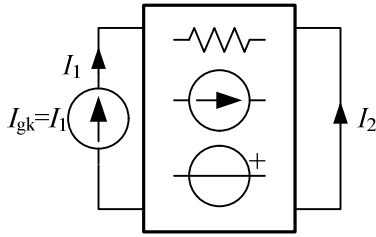
$$I'_2 = I_2(R \rightarrow +\infty). \quad (299.2)$$

Када је  $R = 0$ , из (299.1) је  $I_2(R=0) = aI_1(R=0) + I'_2$ , па је

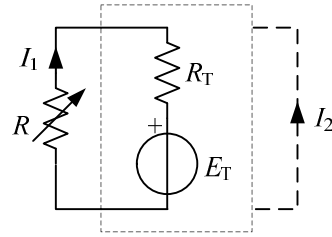
$$a = \frac{I_2(R=0) - I_2(R \rightarrow +\infty)}{I_1(R=0)}. \quad (299.3)$$

Заменом (299.2) и (299.3) у (299.1) добија се

$$I_2(R) = I_2(R \rightarrow +\infty) + \frac{I_2(R=0) - I_2(R \rightarrow +\infty)}{I_1(R=0)} I_1(R). \quad (299.4)$$



Слика 299.2.



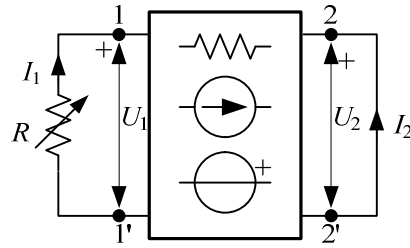
Слика 299.3.

Ако се остатак кола, десно од променљивог отпорника, замени Тевененовим генератором (слика 299.3), тада је  $I_1(R) = -\frac{E_T}{R_T + R}$ , одакле је  $\frac{I_1(R)}{I_1(R=0)} = \frac{R_T}{R_T + R}$ . Како је  $R_T = R_e$ , из (299.4) се добија

$$I_2(R) = I_2(R \rightarrow +\infty) + \frac{I_2(R=0) - I_2(R \rightarrow +\infty)}{R + R_e} R_e, \quad (299.5)$$

што је и требало доказати.

Задатак се може решити и преко кондуктансних параметара. Посматрајмо коло са слике 299.1 као мрежу са два приступа (слика 299.4). На први приступ је прикључен променљиви отпорник, а други приступ је у кратком споју ( $U_2 = 0$ ), па се једначине (292.3) и (292.4) свODE на



Слика 299.4.

$$I_1 = g_{11}U_1 + I_1^{(ks)}, \quad (299.6)$$

$$I_2 = g_{21}U_1 + I_2^{(ks)}. \quad (299.7)$$

Једначина (299.6) описује Нортонов генератор гледано у приступ 1, а  $\frac{1}{g_{11}} = R_e$  је еквивалентна отпорност тог генератора. Трансфигурацијом у Тевененов генератор, добија се, према смеровима на слици 299.3,  $E_T = -R_e I_1^{(ks)} = U_1(R \rightarrow +\infty)$ , што је напон празног хода на првом приступу. Из простог кола са слике 299.3 следи

$$U_1 = E_T \frac{R}{R + R_e} = U_1(R \rightarrow +\infty) \frac{R}{R + R_e}. \quad (299.8)$$

Када је први приступ у кратком споју,  $U_1 = U_1(R=0) = 0$ , па једначина (299.7) даје  $I_2(R=0) = I_2^{(ks)}$ . Заменом овог израза и израза (299.8) у (299.7) добија се

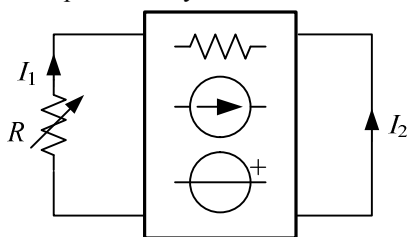
$$I_2 = g_{21}U_1(R \rightarrow +\infty) \frac{R}{R + R_e} + I_2(R=0). \quad (299.9)$$



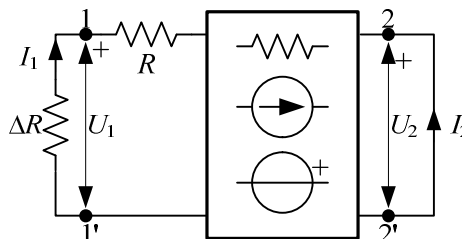
Када  $R \rightarrow +\infty$ , тада  $\frac{R}{R+R_e} \rightarrow 1$ , па је  $I_2(R \rightarrow +\infty) = g_{21}U_1(R \rightarrow +\infty) + I_2(R=0)$ , одакле је  $g_{21}U_1(R \rightarrow +\infty) = I_2(R \rightarrow +\infty) - I_2(R=0)$ , што, заменом у (299.9), даје тражени израз.

Да ли се изрази аналогни изразима (299.4) и (299.5) могу извести и за напоне грана?

**\*\*300.** Делови двеју грана разгранатог кола са генераторима приказани су на слици 300.1. У првом стационарном стању, када је отпорност променљивог отпорника једнака  $R$ , позната је струја  $I_2 = 60 \text{ mA}$ . У другом стационарном стању, када се отпорност промени тако да је њен прираштај  $\Delta R' = 1 \Omega$  у односу на прво стање, познате су струје  $I_1' = 30 \text{ mA}$  и  $I_2' = 84 \text{ mA}$ . У трећем стационарном стању, када се, у односу на прво стање, отпорност промени за  $\Delta R_2'' = -5 \Omega$ , позната је струја  $I_1'' = 48 \text{ mA}$ . (а) Колика је струја отпорника у првом стационарном стању ( $I_1$ )? (б) Колика је струја  $I_2''$  у трећем стационарном стању?



Слика 300.1.



Слика 300.2.

## РЕШЕЊЕ

Прираштај отпорности  $R$  може се приказати редним везивањем додатног отпорника отпорности  $\Delta R$ , као на слици 300.2. Мрежу са слике 300.1 (означену као „црна кутија“) заједно са отпорником отпорности  $R$  посматраћемо као мрежу са два приступа. На први приступ је везан отпорник отпорности  $\Delta R$ , а други приступ је у кратком споју.

На коло са слике 300.2 могу се применити једначине (299.6) и (299.7). У првом стационарном стању је  $\Delta R = 0$  (отпорност променљивог отпорника је  $R$ ). Тада је  $U_1 = 0$ , па је струја отпорника  $I_1 = I_1^{(ks)}$ .

Када се отпорност променљивог отпорника промени за  $\Delta R'$  у односу на почетну вредност, тада је  $U_1' = -\Delta R' I_1'$ , па је из (299.6)  $I_1' = \frac{I_1^{(ks)}}{1 + g_{11}\Delta R'}$ . Одговарајући прираштај струје прве гране је  $\Delta I_1' = I_1' - I_1 = g_{11}U_1' = -g_{11}\Delta R' I_1'$ , односно

$$\Delta I_1' = -\frac{g_{11}\Delta R' I_1^{(ks)}}{1 + g_{11}\Delta R'}. \quad (300.1)$$

На сличан начин се из (299.7) добија и  $\Delta I_2' = I_2' - I_2 = g_{21}U_1' = -g_{21}\Delta R' I_1'$ , односно

$$\Delta I'_2 = -\frac{g_{21}\Delta R'I_1^{(ks)}}{1+g_{11}\Delta R'} . \quad (300.2)$$

Напоменимо да је  $g_{11}$  еквивалентна проводност (улазна кондуктанса) мреже са слике 300.2 гледано у први приступ, при кратко спојеном другом приступу. Та проводност обухвата и отпорник отпорности  $R$ . Параметар  $g_{21}$  је транскондуктанса, односно преносни параметар од првог до другог приступа.

Изрази (300.1) и (300.2) представљају варијациону теорему. Теоремом су дати изрази за прираштаје струја грана када се промени отпорност једне гране.

У задатом случају дефинисана су три стационарна стања у колу.

Прво, када је  $\Delta R = 0$ , тада је  $I_1 = I_1^{(ks)}$  и  $I_2 = I_2^{(ks)} = 60 \text{ mA}$ .

Друго, када је  $\Delta R = \Delta R' = 1 \Omega$ , тада је

$$I'_1 = \frac{I_1^{(ks)}}{1+g_{11}\Delta R'} = 30 \text{ mA} , \quad (300.3)$$

$$I'_2 = -\frac{g_{21}\Delta R'I_1^{(ks)}}{1+g_{11}\Delta R'} + I_2^{(ks)} = 84 \text{ mA} . \quad (300.4)$$

Треће, када је  $\Delta R = \Delta R'' = -5 \Omega$ , тада је

$$I''_1 = \frac{I_1^{(ks)}}{1+g_{11}\Delta R''} = 48 \text{ mA} . \quad (300.5)$$

Деобом израза (300.3) и (300.5) и решавањем добијене једначине по  $g_{11}$ , добија се  $g_{11} = \frac{1}{15} \text{ S}$ , што, заменом у (300.3), даје  $I_1^{(ks)} = I_1 = 32 \text{ mA}$ .

Из (300.4), прираштај струје друге гране од првог до другог стационарног стања је

$$\Delta I'_2 = -\frac{g_{21}\Delta R'I_1^{(ks)}}{1+g_{11}\Delta R'} = 24 \text{ mA} . \text{ На сличан начин се добија прираштај од првог до трећег}$$

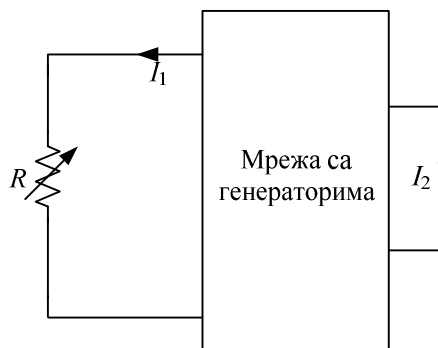
стационарног стања,  $\Delta I''_2 = -\frac{g_{21}\Delta R''I_1^{(ks)}}{1+g_{11}\Delta R''}$ , па је  $\frac{\Delta I''_2}{\Delta I'_2} = \frac{\Delta R''(1+g_{11}\Delta R')}{\Delta R'(1+g_{11}\Delta R'')} = -8$  и  $\Delta I''_2 = -192 \text{ mA}$ , одакле је  $I_2'' = -132 \text{ mA}$ .

Читаоцу се препоручује да израчуна параметар  $g_{21}$ . Да ли се знак тог параметра мења ако се промени референтни смер струје  $I_2$ ? Да ли се при томе мења знак параметра  $g_{22}$ ?

**\*\*301.** При отпорности  $R$  отпорника са слике 301.1 је  $I_1 = 60 \text{ mA}$  и  $I_2 = -12 \text{ mA}$ . Када се отпорност  $R$  повећа за  $20 \Omega$ , познате су струје  $I'_1 = 52,5 \text{ mA}$  и  $I'_2 = -7,5 \text{ mA}$ . Колике су струје  $I''_1$  и  $I''_2$  када се отпорност  $R$  смањи за  $40 \Omega$  у односу на првобитну вредност?

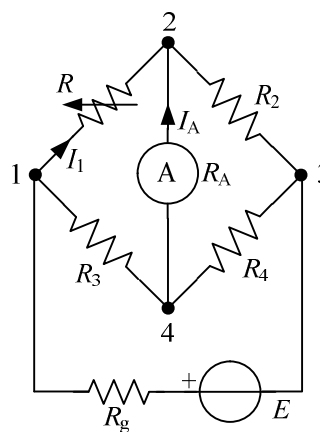
РЕЗУЛТАТ

Применом поступка из задатка 300 добија се  $I''_1 = 84 \text{ mA}$  и  $I''_2 = -26,4 \text{ mA}$ .



Слика 301.1.

**\*\*302.** При отпорности  $R$  успостављена је равнотежа моста са слике 302.1. Тада је струја отпорника  $I_1 = 1 \text{ A}$ . Када се отпорност  $R$  повећа за  $2 \Omega$ , мост изађе из равнотеже и при томе су струје  $I'_1 = 0,75 \text{ A}$  и  $I'_A = 0,125 \text{ A}$ . Израчунати струју амперметра,  $I''_A$ , када се мост изведе из равнотеже смањивањем отпорности  $R$  за  $2 \Omega$  у односу на првобитну вредност.



Слика 302.1.

РЕЗУЛТАТ

Упутство. Применити варијациону теорему из задатка 300. Када је  $\Delta R = 0$ , мост је у равнотежи, па је  $I_A = 0$ .

Када је  $\Delta R' = -2 \Omega$ , струја амперметра је  $I''_A = -0,25 \text{ A}$ .

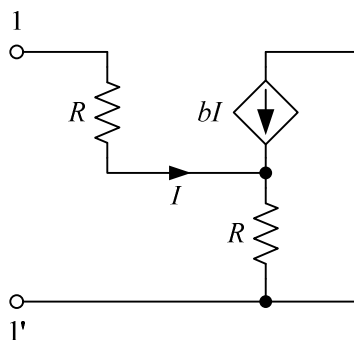
## 5.2. Контролисани генератори

**\*\*303.** Одредити улазну отпорност мреже са слике 303.1 сматрајући да су параметри  $R$  и  $b$  познати.

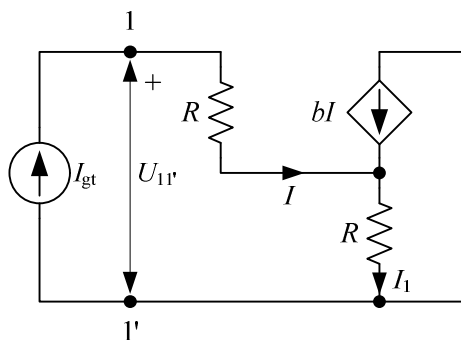
РЕШЕЊЕ

Улазна отпорност се најлакше одређује везујући идеални струјни тест генератор на прикључке мреже, као на слици 303.2. Контролишућа струја је  $I = I_{gt}$ . Из првог

Кирхофовог закона је  $I_1 = I + bI$ , па је  $U_{11'} = R(1+b)I + RI = R(2+b)I_{gt}$ . Одавде је улазна отпорност  $R_e = \frac{U_{11'}}{I_{gt}} = (2+b)R$ .



Слика 303.1.



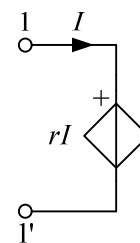
Слика 303.2

Под којим условом улазна отпорност мреже на слици 303.1 може да буде негативна?

**\*\*304.** Одредити улазну отпорност мреже са слике 304.1 за коју је познато  $r = 100 \Omega$ .

РЕЗУЛТАТ

Улазна отпорност је  $R_e = r = 100 \Omega$ . Контролисани генератор се понаша као отпорник отпорности  $r$ .

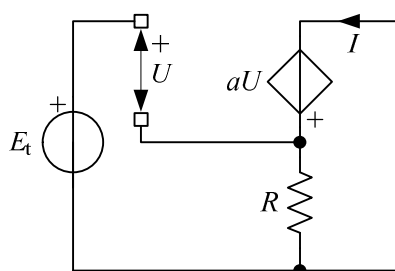


Слика 304.1

**\*\*305.** У колу на слици 305.1 је  $E_t = 12 \text{ mV}$ ,  $a = 5$  и  $R = 10 \text{ k}\Omega$ . Израчунати струју  $I$ .

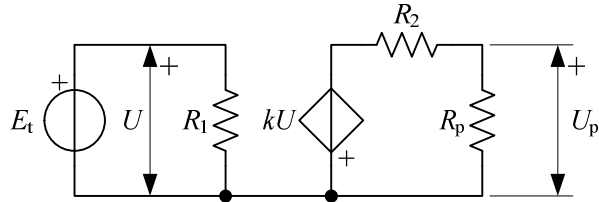
РЕЗУЛТАТ

Тражена струја је  $I = 1 \mu\text{A}$ .



Слика 305.1.

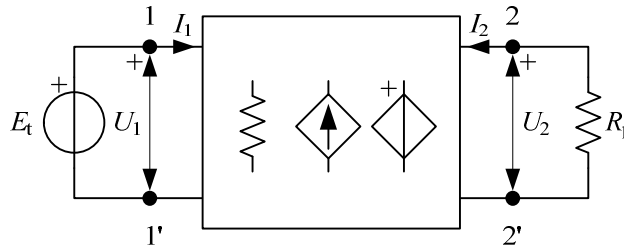
**\*\*306.** У колу приказаном на слици 306.1 је  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_p = 10 \text{ k}\Omega$  и  $k = 30$ . Израчунати напонску преносну функцију  $T = \frac{U_p}{E_t}$ .



Слика 306.1.

**РЕШЕЊЕ**

Коло са слике 306.1 може се посматрати као четворопол (слика 306.2), који се састоји од отпорника и контролираних генератора (без независних генератора), на чији је први приступ прикључен тест генератор емс  $E_t$ , а други приступ је завршен отпорником  $R_p$ . Упоредјујући слике 306.1 и 306.2, види се да је  $U = U_1$  и  $U_p = U_2$ .



Слика 306.2.

Преносна функција четворопола је, у општем случају, количник напона или струје на излазу и напона или струје на улазу<sup>32</sup>. Код активних четворопола (на пример, код четворопола који садрже транзисторе), преносна функција се назива и појачање.

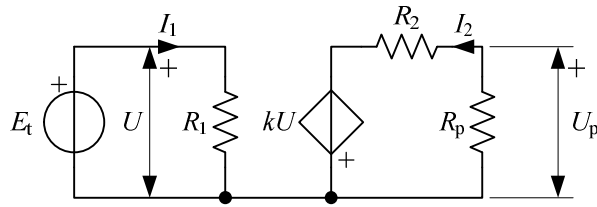
У смислу опште дефиниције, параметри  $r_{21}$  (трансрезистанса) и  $g_{21}$  (транскондуктанса) спадају у преносне функције. Међутим, у пракси се чешће употребљава напонска преносна функција (трансмитанса напона), која је дефинисана као количник напона на излазу и на улазу четворопола,  $T = \frac{U_2}{U_1}$ . Да би напон  $U_1$  био

лакше дефинисан при анализи кола, улаз четворопола се побуђује идеалним напонским генератором (тест генератором), као на слици 306.2. Очигледно је  $U_1 = E_t$ . Осим тога, мора бити дефинисана ситуација на излазу четворопола. Некада се излаз оставља отвореним ( $I_2 = 0$ ), а некада се на излазне прикључке везује отпорник познате отпорности (као у посматраном примеру).

Коло са слике 306.1 састоји се од два проста кола (која имају једну заједничку тачку). Контролишући напон је  $U = E_t$  (слика 306.3). Даље је  $I_2 = \frac{kU}{R_2 + R_p}$  и

$$U_p = -R_p I_2. \text{ Одавде је тражена напонска преносна функција } T = \frac{U_p}{E_t} = -\frac{kR_p}{R_2 + R_p} = -20.$$

<sup>32</sup> Често се посматрати и количник снаге на излазу и на улазу четворопола.

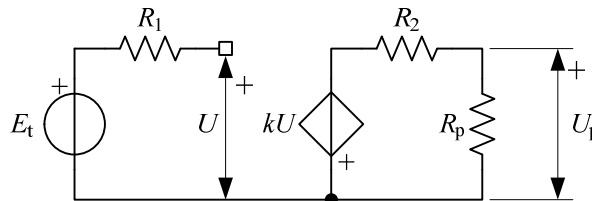


Слика 306.3.

По апсолутној вредности, напон на излазу је већи од напона на улазу, па шема са слике 306.1 моделује појачавач. Ако је преносна функција појачавача негативна, за појачавач се каже да је инвертујући: повећање улазног напона доводи до смањења излазног напона, и обрнуто, смањењем улазног напона, излазни се повећава. Ако је преносна функција позитивна, појачавач је неинвертујући. Напонска преносна функција појачавача (напонско појачање) обично се означава са  $A$ .

Читаоцу се препоручује да за коло са слике 306.3 израчуна и улазну отпорност, која се дефинише као<sup>33</sup>  $R_{ul} = \frac{U_1}{I_1}$ .

**\*\*307.** У колу приказаном на слици 307.1 је  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_p = 30 \text{ k}\Omega$  и  $k = 20$ . Израчунати напонску преносну функцију  $\frac{U_p}{E_t}$ .



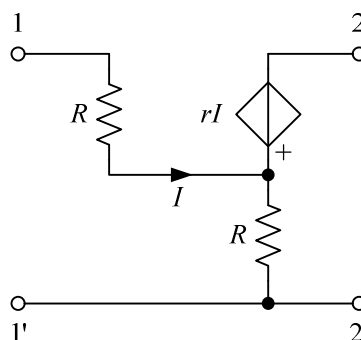
Слика 307.1.

#### РЕШЕЊЕ

У отпорнику  $R_1$  нема струје, па је  $U = E_t$ . Даље је, као у претходном задатку,  $U_p = -\frac{R_p k U}{R_2 + R_p}$ , па је напонска преносна функција  $\frac{U_p}{E_t} = -\frac{k R_p}{R_2 + R_p} = -15$ . Коло са слике 307.1 је инвертујући појачавач.

<sup>33</sup> У конкретном случају улазна отпорност не зависи од тога чиме је други приступ оптерећен, што није случај код свих кола.

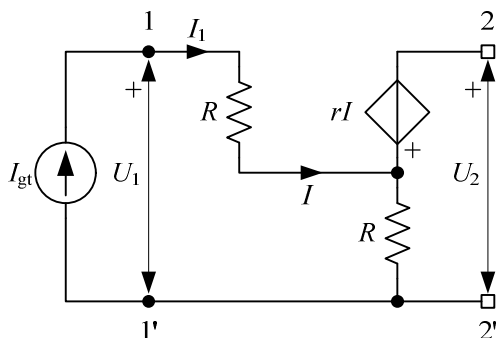
**\*\*308.** За мрежу на слици 308.1 је  $R = 1 \text{ k}\Omega$  и  $r = 11 \text{ k}\Omega$ . Израчунати  $r$ -параметре ове мреже.



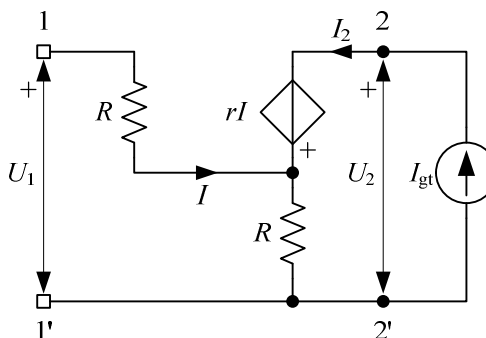
Слика 308.1.

**РЕШЕЊЕ**

Да би се одредили резистансни параметри  $r_{11}$  и  $r_{21}$ , мрежу треба побудити идеалним струјним (тест) генератором на приступу 1, а приступ 2 оставити отвореним, као на слици 308.2. Тада је  $I = I_1 = I_{\text{gt}}$ , па је  $U_1 = 2RI$  и  $U_2 = (R - r)I$ , одакле је  $r_{11} = 2R = 2 \text{ k}\Omega$  и  $r_{21} = R - r = -10 \text{ k}\Omega$ .



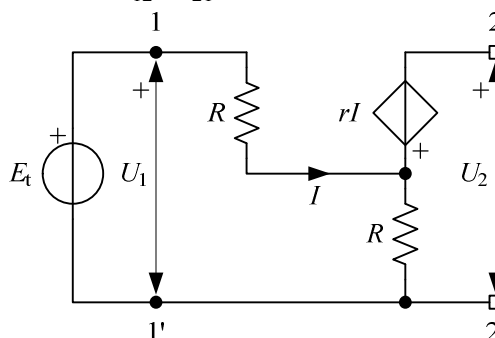
Слика 308.2.



Слика 308.3

Параметри  $r_{12}$  и  $r_{22}$  се одређују из шеме са слике 308.3, где је  $I = 0$  и  $I_2 = I_{\text{gt}}$ , па је  $U_2 = RI_{\text{gt}}$  и  $U_1 = U_2$ , одакле је  $r_{22} = R = 1 \text{ k}\Omega$  и  $r_{12} = R = 1 \text{ k}\Omega$ . Мрежа није реципрочна јер садржи контролисане генераторе, па је  $r_{12} \neq r_{21}$ .

**\*\*309.** Мрежа из задатка 308.1 побуђена је на првом приступу идеалним напонским генератором, а приступ 2 је отворен, као на слици 309.1. Израчунати (а) напонско појачање  $\frac{U_2}{U_1}$ , (б) улазну отпорност и (в) излазну отпорност овог појачавача.



Слика 309.1.

РЕШЕЊЕ

(а) У односу на референтне смерове струје као на слици 308.2, за коло са слике 309.1 је  $I = I_1$  и  $I_2 = 0$ . Једначине (278.1) и (278.2) сада гласе  $U_1 = r_{11}I$  и  $U_2 = r_{21}I$ .

Дељењем ових једначина добија се тражено напонско појачање,  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{r_{21}}{r_{11}} = -5$ .

До истог резултата може се доћи и анализом кола са слике 309.1. Кроз контролисани напонски генератор нема струје, па је  $U_1 = 2RI$ . Излазни напон је

$$U_2 = (R - r)I, \text{ па је } \frac{U_2}{U_1} = \frac{R - r}{2R} = -5.$$

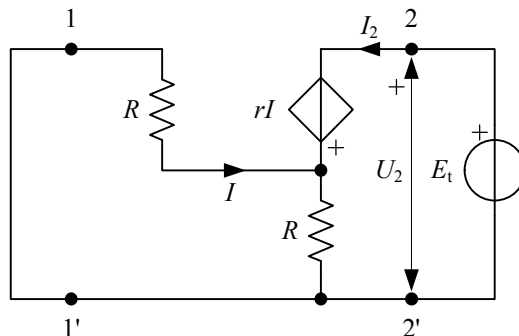
(б) Да би се одредила улазна отпорност, појачавач треба побудити тест генератором на првом приступу, одредити напон и струју тог приступа, па из количника напона и струје израчунати улазну отпорност. При томе се из кола не смеју искључити контролисани генератори, а излаз треба да остане оптерећен (или неоптерећен) на исти начин као када се одређује појачање. У конкретном случају (слика 309.1), излаз треба да остане отворен.

Шема са слике 309.1 је већ подешена за одређивање улазне отпорности. Струја тест генератора је  $I$ , при чему је  $U_1 = E_t = 2RI$ . Улазна отпорност је  $R_{ul} = \frac{E_t}{I} = 2R = 2 \text{ k}\Omega$ .

(в) Излазна отпорност се може одредити из шеме на слици 309.2. Тест генератор се прикључи на излаз појачавача. При томе је важно да улаз појачавача буде затворен на одговарајући начин. Ако је дефинисано да се појачавач побуђује идеалним напонским генератором (као у овом задатку), онда је, код одређивања излазне отпорности неопходно кратко спојити улазне прикључке, што одговара анулирању побуде на првом приступу. Ако се појачавач побуђује реалним напонским (или струјним) генератором, први приступ мора остати затворен одговарајућим отпорником. Уколико се појачавач побуђује идеалним струјним генератором, код рачунања излазне отпорности први приступ мора да остане отворен.

У шеми на слици 309.2 два идентична отпорника су везана паралелно, па су им и струје једнаке (у односу на одговарајуће референтне смерове). Зато је  $I_2 = -2I$ . Даље је

$$U_2 = E_t = -(R + r)I = (R + r)\frac{I_2}{2}, \text{ па је излазна отпорност } R_{iz} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{R + r}{2} = 6 \text{ k}\Omega.$$



Слика 309.2.

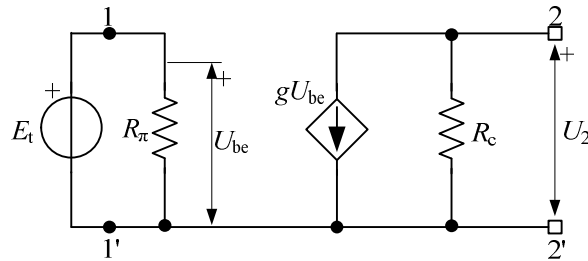


Напоменимо да, у општем случају, улазна и излазна отпорност нису исто што и параметри  $r_{11}$  и  $r_{22}$ , јер се код одређивања резистансних параметара непобуђени приступ увек остави отворен.

Читаоцу се препоручује да до резултата за улазну и излазну отпорност дође полазећи од резистансних параметара мреже. Такође се препоручује да се одреде појачање, улазна и излазна отпорност када је између излазних прикључака везан отпорник отпорности  $R_p = 24 \text{ k}\Omega$ .

**\*\*310.** Одредити (а) напонско појачање  $A = \frac{U_2}{E_t}$ , (б) улазну

отпорност и (в) излазну отпорност појачавача са слике 310.1, сматрајући познатим параметре  $R_\pi$ ,  $R_c$  и  $g$ .



Слика 310.1.

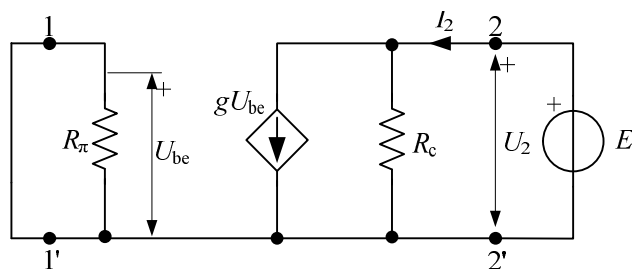
РЕШЕЊЕ

(а) Напон на улазу појачавача је  $U_1 = E_t = U_{be}$ , напон између отворених прикључака излаза је  $U_2 = -gU_{be}R_c$ , па је појачање појачавача је  $A = -gR_c$ .

(б) Струја тест генератора са слике 310.1 (у односу на референтни смер који се поклапа са смером емс) је  $I_1 = \frac{E_t}{R_\pi}$ , па је улазна отпорност  $R_{ul} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{E_t}{I_1} = R_\pi$ .

(в) Излазна отпорност се може одредити са слике 310.2. Пошто је сада  $U_{be} = 0$ , то је и струја контролисаног генератора нула, па је  $I_2 = \frac{E_t}{R_c}$ . Излазна отпорност је

$$R_{iz} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{E_t}{I_2} = R_c.$$

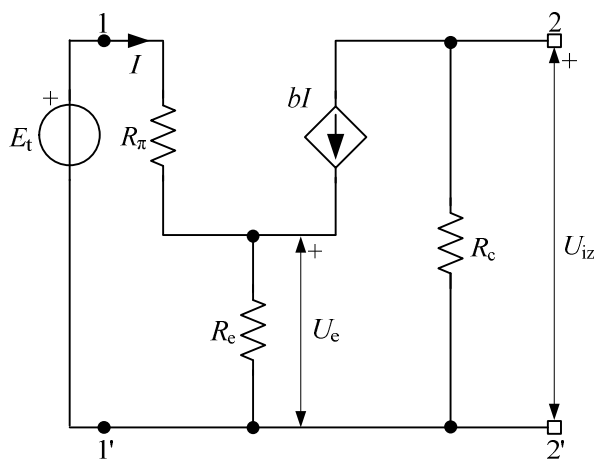


Слика 310.2.

Због особене конфигурације шеме са слике 310.1, код прорачуна улазне и излазне отпорности небитно је чиме је затворен други приступ.

Читаоцу се препоручује да израчуна резистансне параметре овог појачавача.

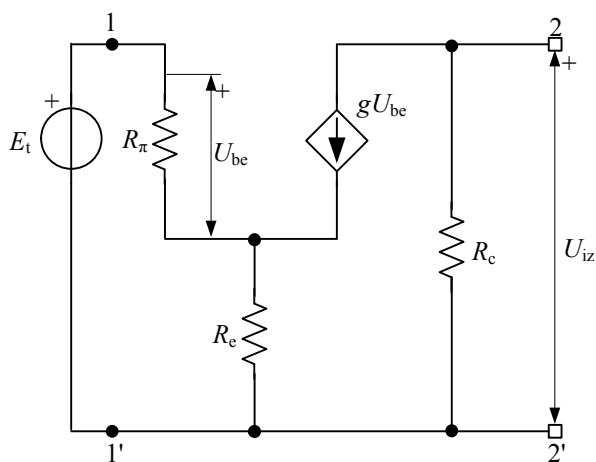
**\*\*311.** Одредити појачање, улазну отпорност и излазну отпорност појачавача са слике 311, као и напон  $U_e$ .



Слика 311.1.

РЕЗУЛТАТ

Појачање појачавача је  $A = \frac{U_{iz}}{E_t} = -\frac{bR_c}{R_\pi + (1+b)R_e}$ , улазна отпорност је  $R_{ul} = R_\pi + (1+b)R_e$ , излазна отпорност је  $R_{iz} = R_c$ , а тражени напон је  $U_e = \frac{(1+b)R_e E_t}{R_\pi + (1+b)R_e}$ .



**\*\*312.** Одредити напонско појачање, улазну и излазну отпорност појачавача са слике 312.1.

Слика 312.1.

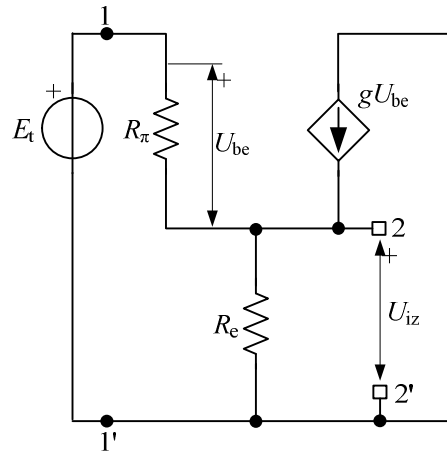
РЕЗУЛТАТ

Појачање је  $A = \frac{U_{iz}}{E_t} = -\frac{gR_\pi R_c}{R_\pi + (1 + gR_\pi)R_e}$ , улазна отпорност је  $R_{ul} = R_\pi + (1 + gR_\pi)R_e$ , а излазна отпорност је  $R_{iz} = R_c$ .

**\*\*313.** За појачавач чија је шема приказана на слици 313.1 одредити појачање, улазну отпорност и излазну проводност.

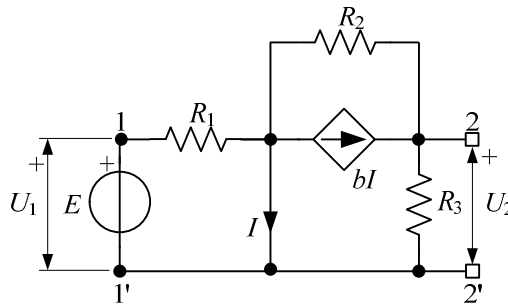
РЕЗУЛТАТ

Појачање појачавача је  $A = \frac{U_{iz}}{E_t} = \frac{1}{1 + \frac{R_\pi}{(1 + gR_\pi)R_e}}$ , улазна отпорност је  $R_{ul} = R_\pi + (1 + gR_\pi)R_e$ , а излазна проводност је  $G_{iz} = g + \frac{1}{R_\pi} + \frac{1}{R_e}$ .



Слика 313.1.

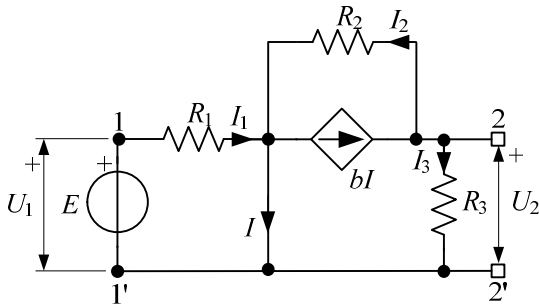
**\*\*314.** За појачавач са слике 314.1 одредити (а) количник  $\frac{U_2}{U_1}$  и (б) Тевененов генератор између тачака 2 и 2'.



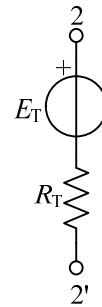
Слика 314.1.

РЕШЕЊЕ

(а) За оријентације са слике 314.2 је  $I_1 = \frac{E}{R_1}$ ,  $R_2 I_2 = R_3 I_3$ ,  $I_1 + I_2 = I + bI$  и  $bI = I_2 + I_3$ . Из ових једначина се добија  $I_3 = \frac{bR_2 E}{R_1((1+b)R_2 + R_3)}$ , па је напон између тачака 2 и 2',  $U_2 = R_3 I_3 = \frac{bR_2 E}{R_1 \left(1 + (1+b)\frac{R_2}{R_3}\right)}$ . Одавде је  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{E} = \frac{bR_2 R_3}{R_1(R_2(1+b) + R_3)}$ .



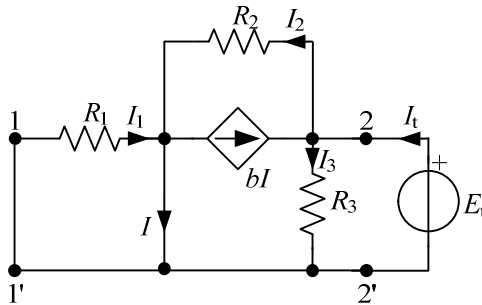
Слика 314.2.



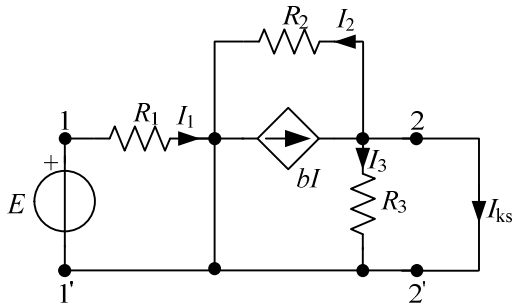
Слика 314.3.

(б) Емс Тевененовог генератора (слика 314.3) је  $E_T = U_2$  (јер је појачавач у празном ходу), па је  $E_T = \frac{bR_2R_3E}{R_1(R_2(1+b) + R_3)}$ .

На слици 314.4. је приказано коло за одређивање Тевененове отпорности, за које је  $I_3 = \frac{E_t}{R_3}$ ,  $I_2 = \frac{E_t}{R_2}$ ,  $I_1 = 0$  и  $I_2 = I(1+b)$ , одакле је  $I = \frac{E_t}{R_2(1+b)}$ . Сада је  $I_t = I + I_3 = E_t \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2(1+b)} \right)$ . Тевененова отпорност је  $R_T = \frac{E_t}{I_t} = \frac{R_2R_3(1+b)}{R_2(1+b) + R_3}$ .



Слика 314.4.



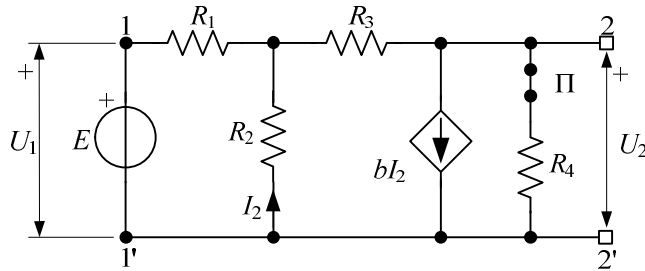
Слика 314.5.

Тевененова отпорност се може одредити и користећи се количником напона празног хода и струје кратког споја,  $R_T = \frac{U_{ph}}{I_{ks}}$ , где је  $U_{ph} = E_T = U_2$  већ одређено.

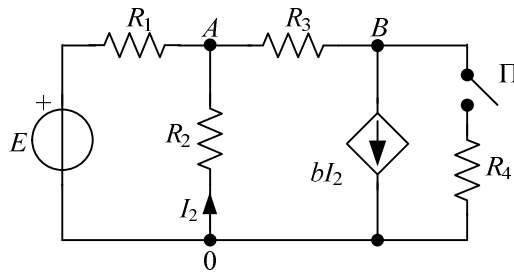
Ради одређивања струје кратког споја ( $I_{ks}$ ), посматра се коло са слике 314.5. Са те слике је  $I_1 = \frac{E}{R_1}$ ,  $I_2 = 0$ ,  $I_3 = 0$  и  $I_1 = I + bI$ , одакле је  $I = \frac{E}{R_1(1+b)}$ . Сада је

$$I_{ks} = bI = \frac{bE}{R_1(1+b)}, \text{ па је } R_T = \frac{R_2R_3(1+b)}{R_2(1+b) + R_3}.$$

**\*\*315.** За коло са  
слике 315.1. одредити  
количник  $\frac{U_2}{U_1}$  при  
затвореном прекидачу  
П.



Слика 315.1.

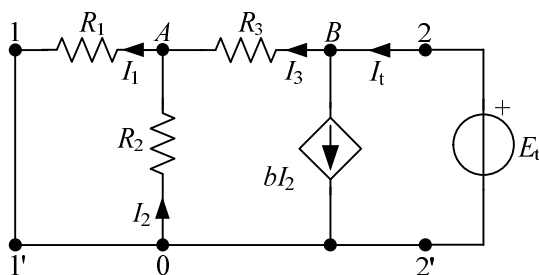
РЕШЕЊЕ

Слика 315.2.

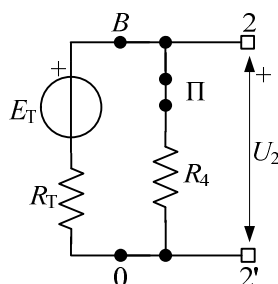
По методу потенцијала чворова, за коло са слике 315.2, при отвореном прекидачу П, важи једначина  $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_A = \frac{E}{R_1} - bI_2$ . Како је  $I_2 = -\frac{V_A}{R_2}$ , то се из ових једначина добија  $V_A = \frac{ER_2}{(1-b)R_1 + R_2}$ . Тевененова емс је  $E_T = V_B = V_A - R_3bI_2 = V_A + bR_3\frac{V_A}{R_2}$ , односно  $E_T = \frac{R_2 + bR_3}{(1-b)R_1 + R_2}E$ .

На слици 315.3. је приказано коло за одређивање Тевененове отпорности из  $R_T = \frac{E_t}{I_t}$ . За то коло је  $I_t = bI_2 + I_3$ ,  $I_3 = \frac{E_t}{R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$  и  $I_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}I_3$ , па је

$$I_t = \frac{(1-b)R_1 + R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}E_t, \text{ одакле је } R_T = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{(1-b)R_1 + R_2}.$$



Слика 315.3.

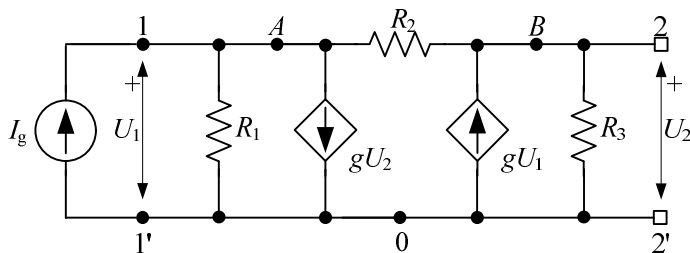


Слика 315.4.

По затварању прекидача П добија се коло са слике 315.4 за које је  $U_2 = \frac{R_4}{R_T + R_4} E_T$ , па је  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{E} = \frac{R_4(R_2 + bR_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + R_4((1-b)R_1 + R_2)}$ .

Читаоцу се препоручује да задатак реши и тако што ће, при затвореном прекидачу, одредити кондуктансне параметре четворопола са слике 315.1 (не укључујући побудни генератор  $E$ ), па из тих параметара одредити напонско појачање.

**\*\*316.** За коло са слике 316.1 познате су отпорности  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , струја струјног генератора  $I_g$  и транскондуктанса  $g$  напонски контролисаних струјних генератора. Извести изразе за (а) однос напона  $\frac{U_2}{U_1}$ , (б) еквивалентну отпорност између тачака 1 и 1' и (в) параметре Тевененовог генератора према тачкама 2 и 2'.



Слика 316.1.

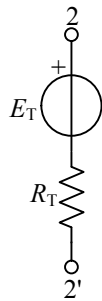
РЕШЕЊЕ

(а) По методу потенцијала чворова је  $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_A - \frac{1}{R_2}V_B = I_g - gU_2$  и  $-\frac{1}{R_2}V_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_B = gU_1$ . Како је  $U_1 = V_A$  и  $U_2 = V_B$ , једначине по методу

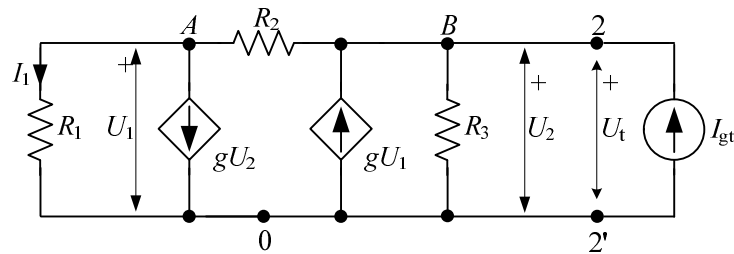
потенцијала чворова постају  $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_A - \left(\frac{1}{R_2} - g\right)V_B = I_g$  и  $-\left(\frac{1}{R_2} + g\right)V_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_B = 0$ . Из последње једначине је  $\frac{V_B}{V_A} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1 + gR_2}{1 + \frac{R_2}{R_3}}$ .

(б) Из претходних једначина се добија  $V_A \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \frac{(gR_2)^2 - 1}{1 + \frac{R_2}{R_3}} \right) = I_g$ , па је

$$\text{улазна отпорност } R_{\text{ул}} = \frac{V_A}{I_g} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + g^2 R_1 R_2 R_3}.$$



Слика 316.2.



Слика 316.3.

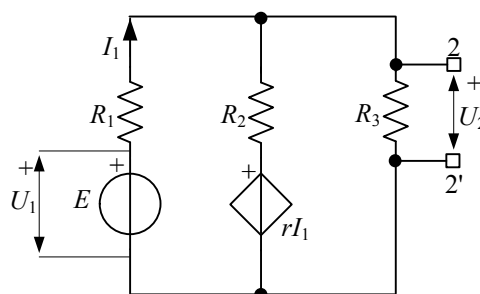
(в) Емс Тевененовог генератора са слике 316.2 једнака је напону празног хода између тачака 2 и 2',  $E_T = (U_{22'})_{\text{ph}}$ , односно  $E_T = V_B = \frac{1 + gR_2}{1 + \frac{R_2}{R_3}} V_A$ , што даје

$$E_T = \frac{R_1 R_3 (1 + gR_2) I_g}{R_1 + R_2 + R_3 + g^2 R_1 R_2 R_3}.$$

Ради одређивања Тевененове отпорности, посматра се коло са слике 316.3, за које је  $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_A - \frac{1}{R_2}V_B = -gV_B$  и  $-\frac{1}{R_2}V_A + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_B = gV_A + I_{\text{gt}}$ . Из ових једначина се добија  $R_T = \frac{U_t}{I_{\text{gt}}} = \frac{V_B}{I_{\text{gt}}} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + g^2 R_1 R_2 R_3}$ .

**\*\*317.** За коло са слике 317.1 позната је емс  $E$ , отпорности  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , као и трансрезистанса  $r$  струјно контролисаног напонског генератора. Одредити

(а) количник напона  $\frac{U_2}{U_1}$ , (б) улазну отпорност ( $R_{ul} = E/I_1$ ) и (в) параметре Тевененовог генератора према прикључцима 2 и 2'.



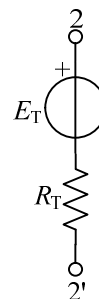
Слика 317.1.

## РЕЗУЛТАТ

(а) Појачање је  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1 + \frac{r}{R_2}}{1 + \frac{r}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}}$ .

(б) Улазна отпорност је  $R_{ul} = R_1 + R_3 \frac{1 + \frac{r}{R_2}}{1 + \frac{R_3}{R_2}}$ .

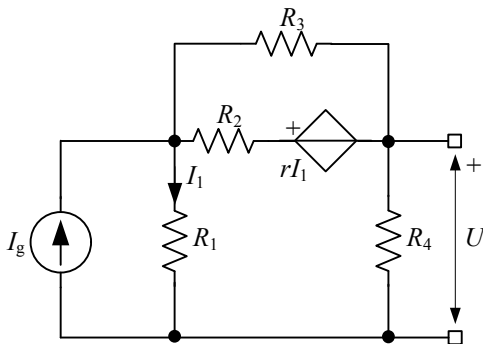
(в) Емс Тевененовог генератора (слика 317.2) је  $E_T = \frac{\left(1 + \frac{r}{R_2}\right)E}{1 + \frac{r}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}}$ , а отпорност  $R_T = \frac{R_1}{1 + \frac{r}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}}$ .



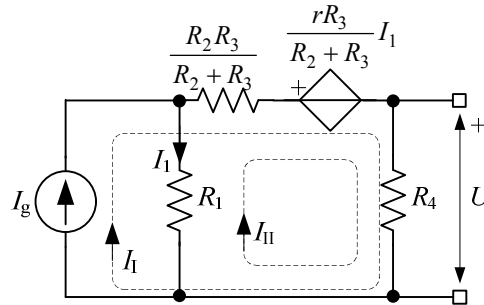
Слика 317.2.

**\*\*318.** За коло са слике 318.1 израчунати напон  $U$  и улазну отпорност коју види идеални струјни генератор. Познато је  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 200 \Omega$ ,  $R_4 = 20 \Omega$ ,  $I_g = 1 \text{ mA}$  и  $r = 100 \Omega$ .





Слика 318.1.



Слика 318.2.

РЕШЕЊЕ

Задато коло се може трансфигурисати као на слици 318.2. Једначине по методу контурних струја за то коло су  $I_1 = I_g$  и

$$\left(R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right) I_g + \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4\right) I_{II} = -\frac{r R_3}{R_2 + R_3} I_1 \quad \text{Како је } I_1 = -I_{II}, \text{ то је}$$

$$\left(R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right) I_g + \left(R_1 + R_4 + \frac{R_3(R_2 - r)}{R_2 + R_3}\right) I_{II} = 0, \quad \text{па је}$$

$$I_{II} = -\frac{R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + R_4 + \frac{R_3(R_2 - r)}{R_2 + R_3}} I_g = -0,7 \text{ mA} . \quad \text{Напон отпорника } R_4 \text{ је}$$

$$U = R_4(I_1 + I_{II}) = R_4 \left( I_g - \frac{R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + R_4 + \frac{R_3(R_2 - r)}{R_2 + R_3}} I_g \right) = 6 \text{ mV}, \quad \text{а отпорност коју види струјни}$$

$$\text{генератор је } R_e = \frac{R_1 I_1}{I_g} = \frac{-R_1 I_{II}}{I_g} = R_1 \frac{R_4 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + R_4 + \frac{R_3(R_2 - r)}{R_2 + R_3}} = 70 \Omega .$$

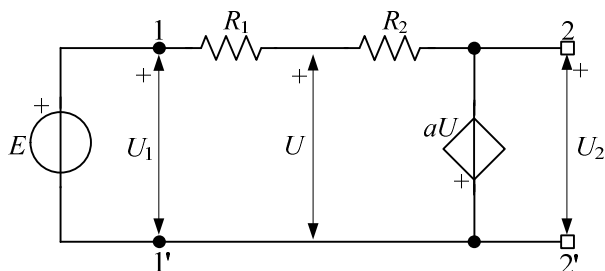
Задатак може да се реши и преко кондуктансних параметара. Ти параметри су  $g_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{R_1 - r}{R_1 R_2} = 15 \text{ mS}$ ,  $g_{21} = -\frac{1}{R_3} - \frac{R_1 - r}{R_1 R_2} = -5 \text{ mS}$ ,  $g_{12} = -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} = -\frac{25}{3} \text{ mS}$  и

$g_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{7}{120} \text{ S}$ . Детерминанта матрице ових параметара је

$D = \frac{2500}{3} \cdot 10^{-6} \text{ S}^2$ . Улазна отпорност мреже је  $R_{ul} = r_{11} = \frac{g_{22}}{D} = 70 \Omega$ , а излазни напон је

$U = r_{21} I_g = -\frac{g_{21}}{D} I_g = 6 \text{ mV}$ , што су идентични резултати као они добијени преко метода контурних струја.

**\*\*319.** Одредити напонско појачање појачавача са слике 319.1,  $A = \frac{U_2}{U_1}$ , улазну отпорност и параметре Тевененовог генератора у односу на излазне прикључке (2-2'). Познато је  $E$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  и  $a > 0$ .

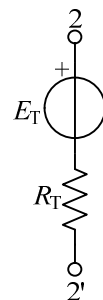


Слика 319.1.

**РЕШЕЊЕ**

Резистансни параметри четворопола 1-1'-2-2' су  $r_{11} = R_1 + \frac{R_2}{1+a}$ ,  $r_{21} = -\frac{aR_2}{1+a}$ ,  $r_{12} = 0$  и  $r_{22} = 0$ . Када се на улаз прикључи генератор емс  $E$ , а излазни прикључци су отворени, добија се  $A = \frac{U_2}{U_1} = \frac{r_{21}}{r_{11}} = -\frac{aR_2}{(1+a)R_1 + R_2}$ . Улазна отпорност је  $R_{ul} = r_{11} = R_1 + \frac{R_2}{1+a}$ .

Према референтном смеру са слике 319.2, емс Тевененовог генератора је  $E_T = U_2 = AU_1 = -\frac{aR_2E}{(1+a)R_1 + R_2}$ , а отпорност (када се идеални напонски генератор  $E$  замени кратким спојем) је  $R_T = R_{iz} = r_{22} - \frac{r_{12}r_{21}}{r_{11}} = 0$ .

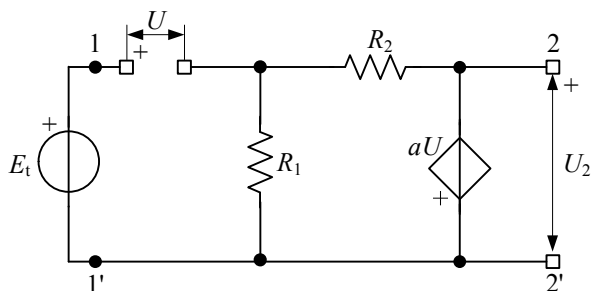


Слика 319.2.

Да ли се за посматрани четворопол могу одредити кондуктансни параметри? Образложити одговор.

Чему тежи овог појачавача појачање када  $a \rightarrow +\infty$ ?

**\*\*320.** Одредити напонско појачање,  $A = \frac{U_2}{E_t}$ , улазну отпорност и излазну отпорност појачавача са слике 320.1. Познато је  $E_t$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $a$ .



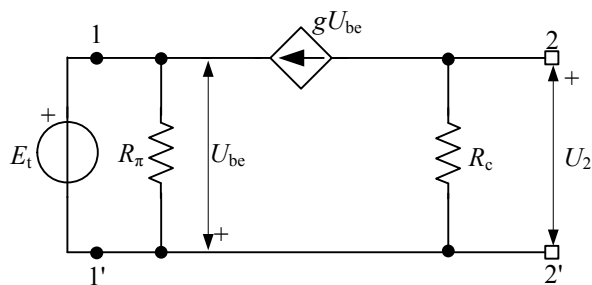
Слика 320.1.

РЕЗУЛТАТ

Напонско појачање је  $A = -\frac{a(R_1 + R_2)}{(1-a)R_1 + R_2}$ , улазна отпорност је бесконачна, а излазна нула.

Да ли се за четворопол са слике 320.1 могу одредити резистансни и кондуктансни параметри?

**\*\*321.** Одредити напонско појачање,  $A = \frac{U_2}{E_t}$ , улазну и излазну отпорност појачавача са слике 321.1. Познато је  $E_t$ ,  $R_\pi$ ,  $g$  и  $R_c$ .



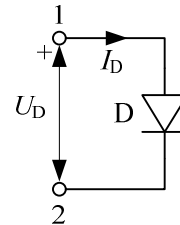
Слика 321.1.

РЕЗУЛТАТ

Појачање појачавача је  $A = \frac{U_2}{E_t} = gR_c$ , улазна отпорност је  $R_{ul} = \frac{R_\pi}{1 + gR_\pi}$ , а излазна отпорност је  $R_{iz} = R_c$ .

## 6. Нелинеарна кола

**322.** Карактеристика полупроводничке диоде приказане на слици 322.1 дата је изразом  $I_D = I_0(e^{U_D/U_0} - 1)$ , где је  $I_0 = 1 \text{ nA}$  и  $U_0 = 50 \text{ mV}$ . Одредити снагу коју диода прима, у зависности од јачине струје диоде.

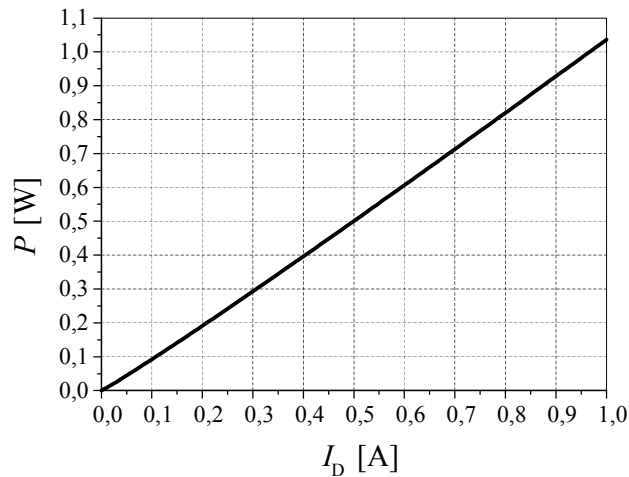


Слика 322.1.

### РЕШЕЊЕ

При усаглашеним референтним смеровима напона и струје, као на слици 322.1, снага диоде је  $P = U_D I_D$ . Напон диоде, у функцији јачине струје, је  $U_D = U_0 \ln\left(\frac{I_D}{I_0} + 1\right)$ . Израз има смисла само за  $I_D > -I_0$ .

Одавде је снага диоде  $P = U_0 I_D \ln\left(\frac{I_D}{I_0} + 1\right)$ . Снага је приказана на слици 322.2. Део криве за  $-I_0 < I_D < 0$  се не види због усвојене размере слике.



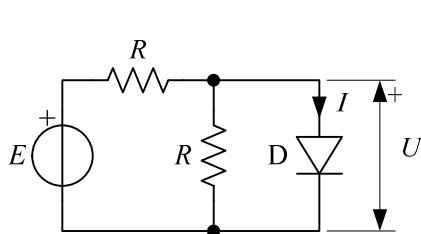
Слика 322.2.

Колика је снага диоде када је  $I_D = 0$ ?

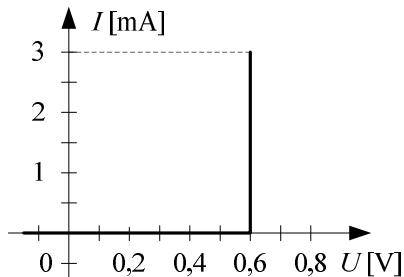
Да ли напон и струја диоде (при усклађеним референтним смеровима) могу бити различитог знака?

Читаоцу се препоручује да одреди и снагу диоде у функцији напона.

**323.** У колу приказаном на слици 323.1 је  $E = 2 \text{ V}$  и  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Карактеристика диоде је приказана на слици 323.2. Израчунати јачину струје диоде.



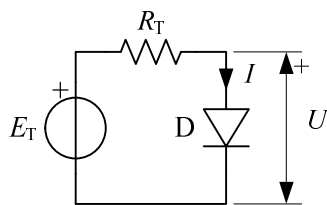
Слика 323.1.



Слика 323.2.

РЕШЕЊЕ

Линеарни део кола са слике 323.1 (идеални напонски генератор и два отпорника) може се заменити Тевененовим генератором, параметара  $E_T = 1 \text{ V}$  и  $R_T = 500 \Omega$ , чиме се добија коло као на слици 323.3.

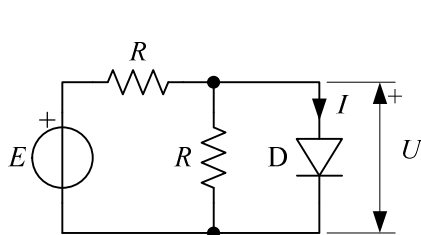


Слика 323.3.

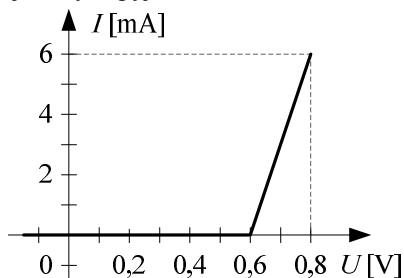
С обзиром на то да је  $E_T > U_p$  (где је, према карактеристици на слици 323.2, праг провођења диоде  $U_p = 0,6 \text{ V}$ ), радна тачка диоде је на вертикалном делу карактеристике. Напон диоде је  $U = U_p$ , па је струја диоде  $I = \frac{E_T - U}{R_T} = 0,8 \text{ mA}$ .

Читаоцу се препоручује да у карактеристику диоде са слике 323.2 уцрта радну праву и графички провери добијено решење.

**\*324.** У колу приказаном на слици 324.1 је  $E = 2 \text{ V}$  и  $R = 200 \Omega$ . Карактеристика диоде је приказана на слици 324.2. Израчунати јачину струје диоде.



Слика 324.1.



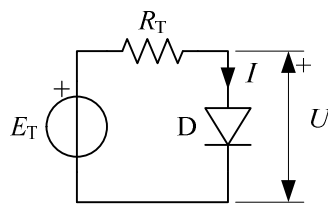
Слика 324.2.

РЕШЕЊЕ

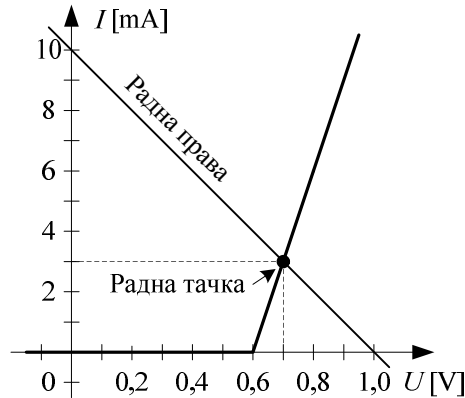
Линеарни део кола са слике 324.1 може се заменити Тевененовим генератором, параметара  $E_T = 1 \text{ V}$  и  $R_T = 100 \Omega$ , чиме се добија коло као на слици 324.3. Једначина

радне праве је  $I = \frac{E_T - U}{R_T}$ , односно, после замене бројних вредности,  $I_{[\text{mA}]} = 10(1 - U_{[\text{V}]})$ . Радна права је уцртана на слици 324.4. Очитавајући са те слике ординату радне тачке, добија се струја диоде,  $I = 3 \text{ mA}$ .

Читаоцу се препоручује да координате радне тачке одреди и аналитички, одређујући пресек радне праве и косог линеарног сегмента карактеристике диоде.

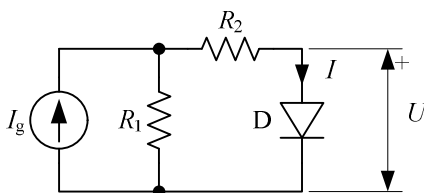


Слика 324.3.

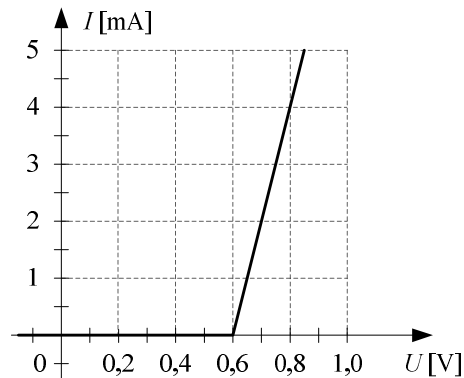


Слика 324.4.

**\*325.** У колу приказаном на слици 325.1 је  $I_g = 7,5 \text{ mA}$  и  $R_1 = R_2 = 200 \, \Omega$ . Карактеристика диоде је приказана на слици 325.2. Израчунати јачину струје диоде.



Слика 325.1.

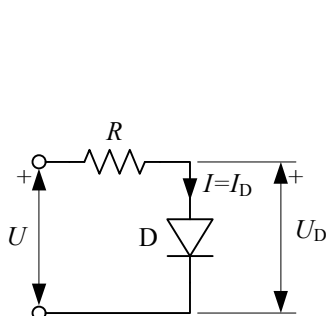


Слика 325.2.

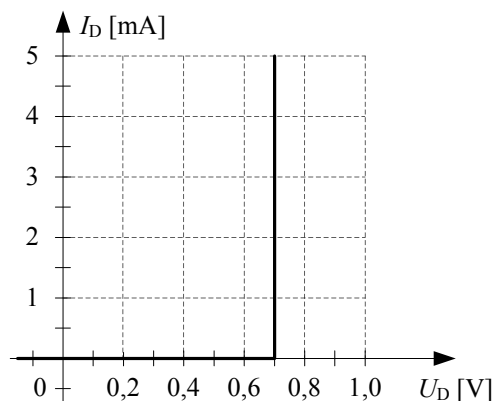
#### РЕЗУЛТАТ

Струја диоде је  $I_D = 2 \text{ mA}$ .

**\*\*326.** На слици 326.1 приказана је редна веза отпорника отпорности  $R = 100 \, \Omega$  и диоде. Карактеристика диоде је приказана на слици 326.2. Скицирати еквивалентну карактеристику ове редне везе.



Слика 326.1.

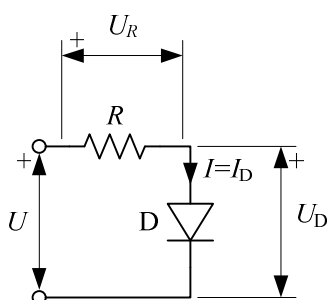


Слика 326.2.

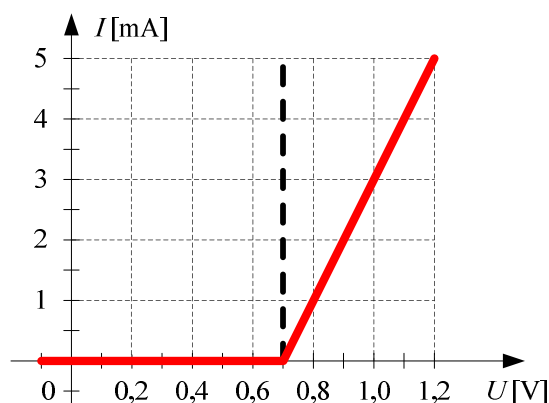
РЕШЕЊЕ

Усвојимо референтни смер напона отпорника као на слици 326.3. Тај напон је  $U_R = RI$ , па је напон редне везе  $U = U_D + U_R = U_D + RI$ .

Диода не може да проводи ако је напон диоде ( $U_D$ ) мањи од прага провођења,  $U_p = 0,7 \text{ V}$ . Тада је  $U_R = RI = 0$  и  $U = U_D$ , па се карактеристика редне везе поклапа са карактеристиком диоде за  $U < U_p$  (слика 326.4).



Слика 326.3.



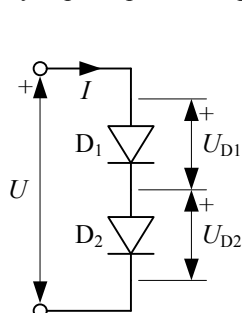
Слика 326.4.

На прагу провођења диоде је  $U = U_D = U_p$  јер је тада још увек  $I = 0$ . Када диода проведе ( $I > 0$ ), према карактеристици са слике 326.2, њен напон је сталан ( $U_D = U_p$ ), односно диода се понаша као идеални напонски генератор, па је  $U = U_p + RI$  за  $U > U_p$ , што одговара косом сегменту еквивалентне карактеристике на слици 326.4.

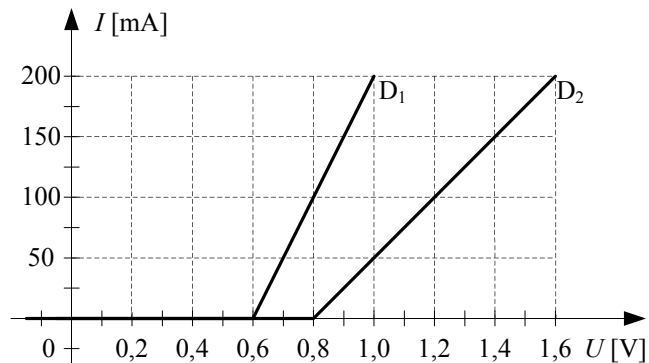
Читаоцу се препоручује да еквивалентну карактеристику одреди и графички, „сабирајући“ дуж апсцисе осе карактеристику диоде и карактеристику отпорника.

Читаоцу се такође препоручује да задатак реши и ако је карактеристика диоде, уместо сликом 326.2, дата сликом 325.2.

**\*\*327.** Одредити еквивалентну карактеристику редне везе две диоде са слике 327.1 чије су карактеристике приказане на слици 327.2.



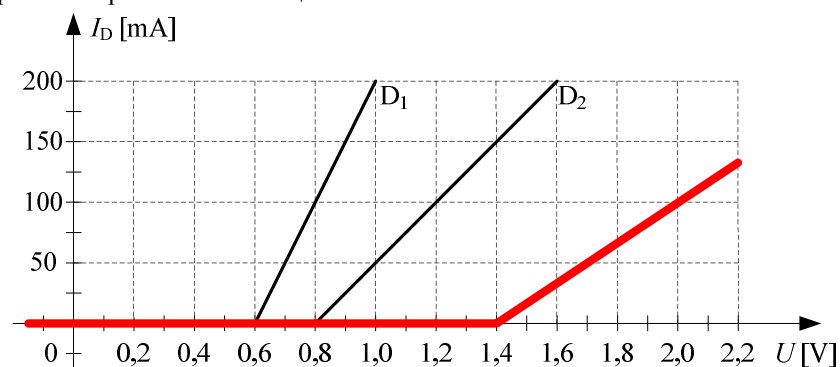
Слика 327.1.



Слика 327.2.

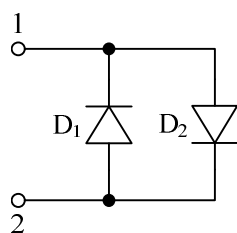
#### РЕЗУЛТАТ

„Сабирајући“ карактеристике диода по апсцисама, добија се еквивалентна карактеристика приказана на слици 327.3.

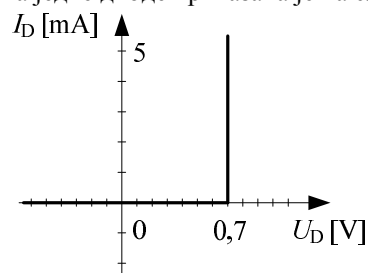


Слика 327.3.

**\*\*328.** Нацртати еквивалентну карактеристику паралелно везаних диода са слике 328.1. Диоде су идентичне, а карактеристика једне диоде приказана је на слици 328.2.



Слика 328.1.

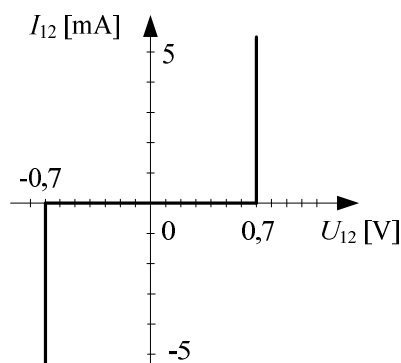


Слика 328.2.



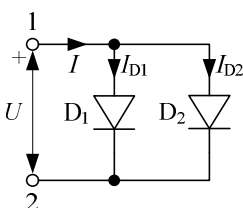
РЕЗУЛТАТ

Еквивалентна карактеристика је приказана на слици 328.3.

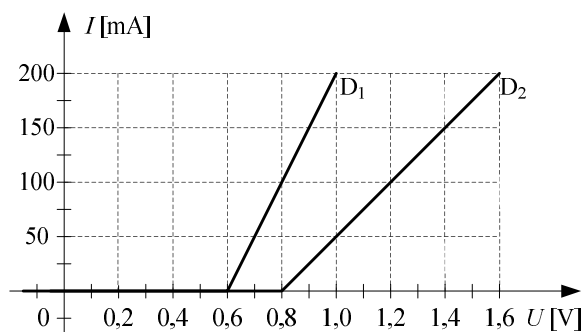


Слика 328.3.

**\*\*329.** (а) Одредити еквивалентну карактеристику паралелне везе две диоде са слике 329.1 чије су карактеристике приказане на слици 329.2. (б) Поновити прорачун ако се прикључци диоде  $D_2$  окрену. (в) У оба случаја, израчунати струје обе диоде и струју напојне гране ако је  $U = 0,9 \text{ V}$ .



Слика 329.1.

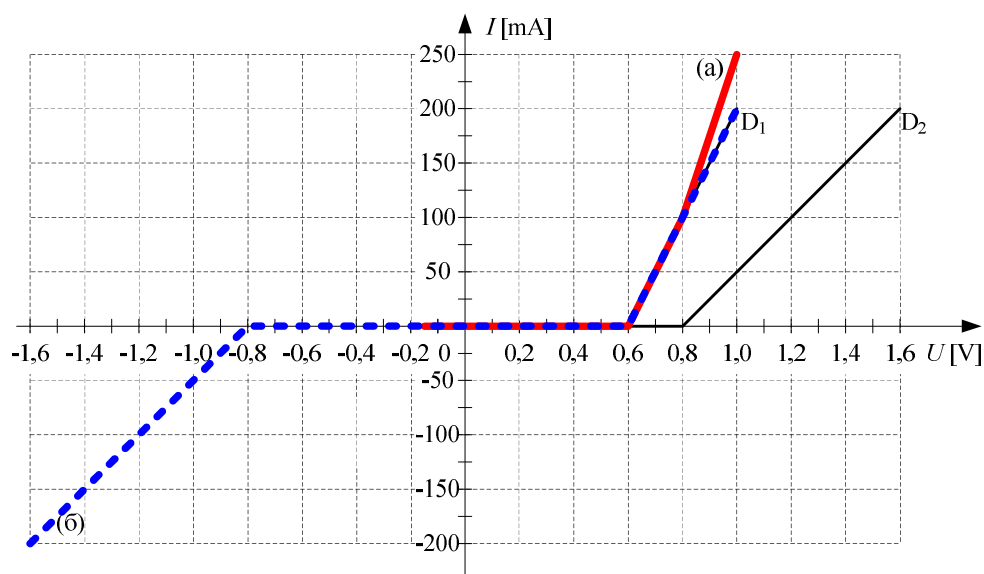


Слика 329.2.

РЕЗУЛТАТ

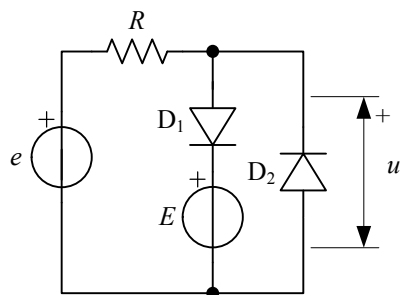
(а), (б) „Сабирајући“ карактеристике диода по ординатама, добија се еквивалентна карактеристика паралелне везе, приказана на слици 329.3 за оба случаја.

(в) У првом случају је  $I_1 = 150 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 25 \text{ mA}$  и  $I = 175 \text{ mA}$ , а у другом случају је  $I_1 = 150 \text{ mA}$ ,  $I_2 = 0$  и  $I = 150 \text{ mA}$ .

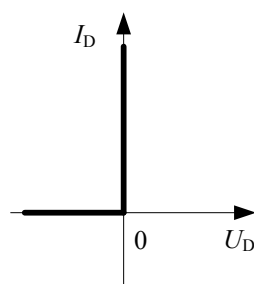


Слика 329.3.

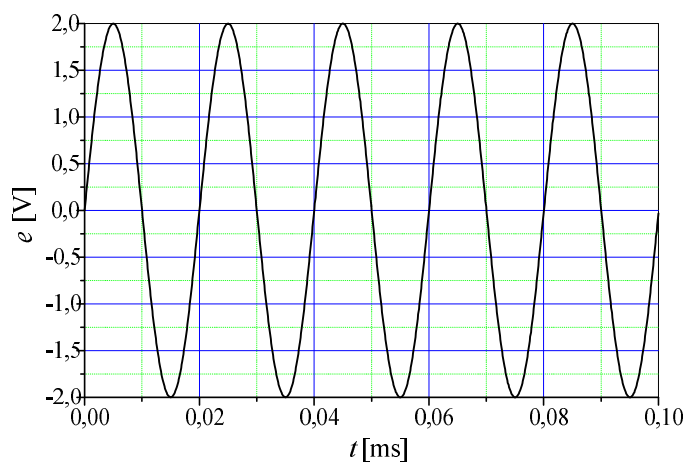
**\*\*330.** У колу на слици 330.1 електромоторна сила  $E$  је временски константна,  $E = 1 \text{ V}$ . Диоде су идеалне, а карактеристика им је приказана на слици 330.2. Електромоторна сила  $e$  је простопериодична функција времена,  $e(t) = 2 \sin \frac{2\pi}{T} t \text{ V}$ , где је  $T = 20 \mu\text{s}$  (слика 330.3). Одредити напон  $u$  у функцији времена.



Слика 330.1.



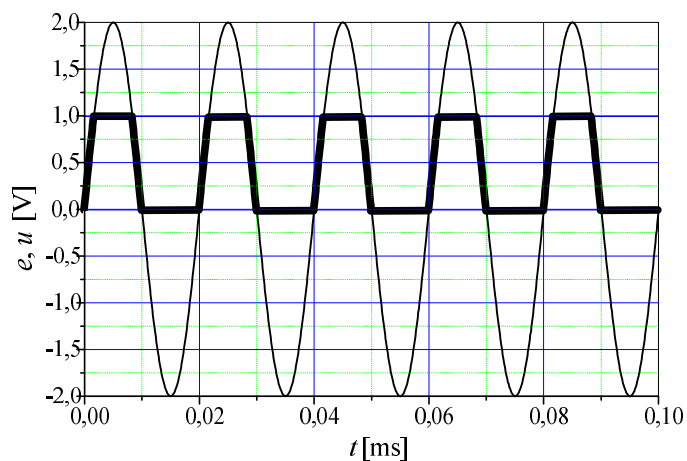
Слика 330.2.



Слика 330.3.

РЕШЕЊЕ

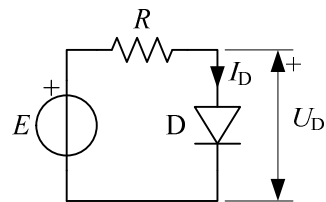
Напон  $u(t)$  је приказан на слици 330.3. Диода  $D_2$  проводи када је  $e(t) < 0$ , а тада је  $u(t) = 0$ . Диода  $D_1$  проводи када је  $e(t) > E$ , при чему је  $u(t) = E$ . Када је  $0 < e(t) < E$ , не проводи ниједна диода, у отпорнику нема струје, па је  $u(t) = e(t)$ .



Слика 330.3.

Читаоцу се препоручује да одреди и напон отпорника са слике 330.1, у функцији времена.

**\*\*331.** У колу приказаном на слици 331.1 карактеристика диоде дата је изразом  $I_D = I_0(e^{U_D/U_0} - 1)$ , где је  $U_0 = 50 \text{ mV}$  и  $I_0 = 1 \text{ nA}$ . Електромоторна сила генератора је  $E = 2 \text{ V}$ , а отпорност  $R = 10 \Omega$ . Написати програм (C, C++, Pascal, Matlab, Basic, Fortran...) за одређивање радне тачке диоде користећи се методом половљења сегмената.



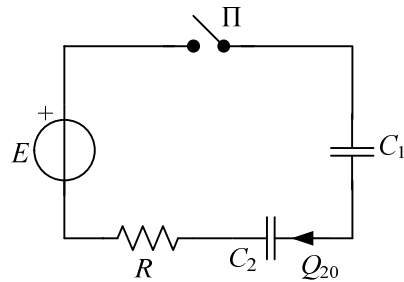
Слика 331.1.

РЕЗУЛТАТ

Напон диоде је  $U_D \approx 0,925 \text{ V}$ , а струја диоде је  $I_D \approx 0,108 \text{ A}$ , према референтним смеровима означеним на слици 331.1.

## 7. Кола са кондензаторима

**332.** Кондензатори капацитивности  $C_1 = 1 \mu\text{F}$  и  $C_2 = 0,5 \mu\text{F}$ , генератор сталне емс  $E = 12 \text{ V}$  и унутрашње отпорности  $R$ , и прекидач  $\Pi$ , везани су као на слици 332.1. У стационарном стању када је прекидач отворен, кондензатор  $C_1$  је неоптерећен, а оптерећеност кондензатора  $C_2$  је  $Q_{20} = 15 \mu\text{C}$ . Израчунати (а) напоне кондензатора у стационарном стању по затварању прекидача  $\Pi$  и (б) електрични рад претворен у топлоту од тренутка затварања прекидача  $\Pi$  до успостављања стационарног стања у колу.



Слика 332.1.

### РЕШЕЊЕ

При отвореном прекидачу  $\Pi$  напони кондензатора (слика 332.2) су  $(U_1)_0 = \frac{Q_{10}}{C_1} = 0$  и  $(U_2)_0 = \frac{Q_{20}}{C_2} = 30 \text{ V}$ . Енергија електростатичког поља у кондензаторима је

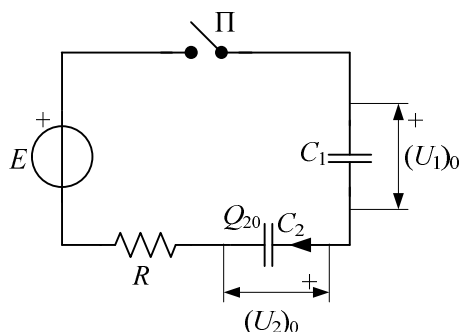
$$(W_c)_0 = \frac{1}{2} C_1 (U_1)_0^2 + \frac{1}{2} C_2 (U_2)_0^2 = 225 \mu\text{J}.$$

При затвореном прекидачу  $\Pi$  (слика 332.3), по другом Кирхофовом закону за затворени пут  $K$ , је  $E - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} = 0$ . По једначини континуитета, за кондензаторе важи  $Q_1 = q$ , односно  $Q_2 = Q_{20} + q$ . Из ових једначина је проток кроз коло по затварању

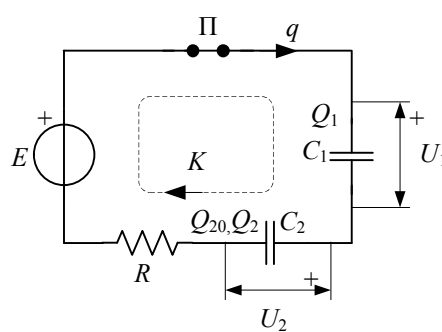
прекидача  $q = \frac{E - \frac{Q_{20}}{C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left( E - \frac{Q_{20}}{C_2} \right) = -6 \mu\text{C}$ . Крајње оптерећености

кондензатора су  $Q_1 = \frac{C_1 C_2 E - C_1 Q_{20}}{C_1 + C_2} = -6 \mu\text{C}$  и  $Q_2 = \frac{C_1 C_2 E + C_2 Q_{20}}{C_1 + C_2} = 9 \mu\text{C}$ , а напони

кондензатора су  $U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{C_2 E - Q_{20}}{C_1 + C_2} = -6 \text{ V}$  и  $U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{C_1 E + Q_{20}}{C_1 + C_2} = 18 \text{ V}$ .



Слика 332.2.



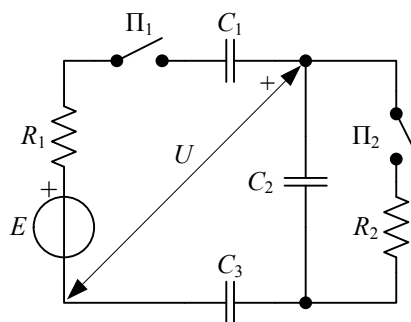
Слика 332.3.

Укупна енергија електричног поља у кондензаторима у другом стационарном стању је  $W_c = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 + \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = 99 \mu\text{J}$ . Прираштај енергије је  $\Delta W_c = W_c - (W_c)_0 = -126 \mu\text{J}$ . Рад генератора после затварања прекидача П је  $A_G = Eq = -72 \mu\text{J}$ , па је, према закону одржања рада и енергије, рад претворен у топлоту  $A_J = A_G - \Delta W_c = 54 \mu\text{J}$ .

Како би гласио израз за напон  $U_1$  да су оба кондензатора неоптерећена везана у коло? Како би гласио израз за напон  $U_1$  да је и  $Q_{10} \neq 0$ ?

**\*\*** Решити задатак замењујући кондензатор  $C_2$  редном везом неоптерећеног кондензатора и идеалног напонског генератора емс  $E_{20} = \frac{Q_{20}}{C_2}$ , чији је референтни смер супротан референтном смеру почетне оптерећености.

**333.** У колу са слике 333.1 познато је  $E = 2100 \text{ V}$ ,  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$  и  $C_3 = 500 \text{ nF}$ . Прекидачи  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  су отворени, а кондензатори су неоптерећени. Најпре се затвори прекидач  $\Pi_1$  и успостави се прво стационарно стање. Затим се затвори и прекидач  $\Pi_2$ , и успостави се друго стационарно стање. Најзад се прекидач  $\Pi_2$  поново отвори. Израчунати напон  $U$  у сва три случаја.



Слика 333.1.

РЕШЕЊЕ

По затварању прекидача  $\Pi_1$ , проток кроз коло је  $q$ . Кондензатори су били неоптерећени пре затварања прекидача, па су коначне оптерећености кондензатора једнаке протоку (слика 333.2),  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = q$ . Из једначине по другом Кирхофовом закону за контуру  $K$  означену на слици,  $E - \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_3}{C_3} = 0$ , добија се

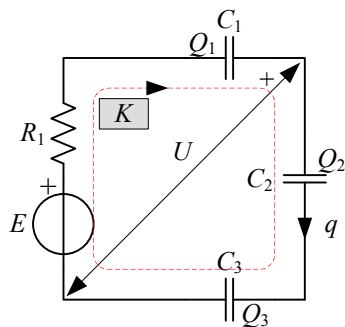
$$q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = E, \quad \text{одакле је} \quad q = \frac{E}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}, \quad \text{па је тражени напон}$$

$$U = \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_2}{C_2} = q \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} E = 1500 \text{ V}.$$

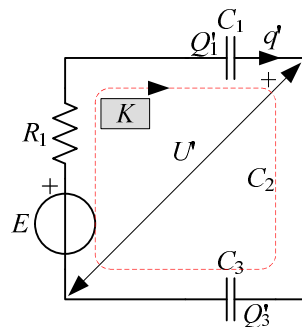
Када се затвори и прекидач  $\Pi_2$ , кондензатор  $C_2$  се испразни кроз отпорник  $R_2$ , а напон тог кондензатора падне на нулу. Од тренутка затварања тог прекидача, па до успостављања новог стационарног стања, кроз генератор протекне наелектрисање  $q'$ . Проток је исти кроз оба кондензатора  $C_1$  и  $C_3$ , па су коначне оптерећености тих кондензатора (слика 333.3)  $Q'_1 = Q_1 + q'$  и  $Q'_3 = Q_3 + q'$ . За коло сада важи

$$E - \frac{Q'_1}{C_1} - \frac{Q'_3}{C_3} = 0, \quad \text{одакле је} \quad (q' + q) \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) = E, \quad \text{па је} \quad Q'_1 = Q'_3 = \frac{E}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}} \quad \text{и}$$

$$U' = \frac{Q'_3}{C_3} = \frac{\frac{1}{C_3}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}} E = 1400 \text{ V}.$$



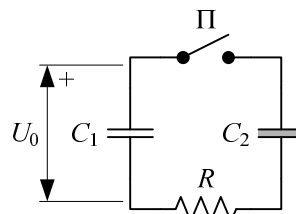
Слика 333.2.



Слика 333.3.

Када се прекидач  $\Pi_2$  поново отвори, у колу се неће ништа променити, неће постојати проток кроз коло, а напон ће остати  $U' = 1400 \text{ V}$ .

**334.** Кондензатори са слике 334.1 су плочасти, истих површина електрода и истог растојања између њих. Диелектрик првог кондензатора је ваздух, а његова капацитивност је  $C_1 = 500 \text{ pF}$ . Други кондензатор је испуњен хомогеним течним диелектриком релативне пермитивности  $\epsilon_r = 4$ . Прекидач  $\Pi$  је најпре отворен. При томе је напон првог кондензатора  $U_0 = 1 \text{ kV}$ , а други кондензатор је неоптерећен. (а) Израчунати напон првог кондензатора када се прекидач  $\Pi$  затвори и успостави се стационарно стање. (б) Израчунати напон првог кондензатора ако потом, при затвореном прекидачу  $\Pi$ , из другог кондензатора исцури течни диелектрик.



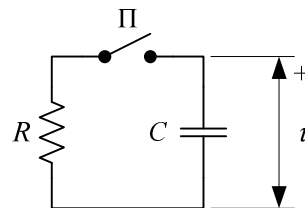
Слика 334.1.

РЕЗУЛТАТ

(а) Када се прекидач затвори, напон првог кондензатора, у односу на референтни смер као на слици 334.1, је  $U = 200 \text{ V}$ .

(б) Када исцури течни диелектрик, напон првог кондензатора је  $U' = 500 \text{ V}$ .

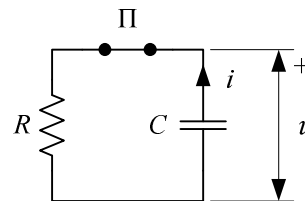
**\*\*335.** У колу приказаном на слици 335.1 познати су капацитивност  $C$  и отпорност  $R$ , а прекидач  $\Pi$  је отворен до тренутка  $t = 0$ . При томе је напон кондензатора  $u = U_0$ ,  $t < 0$ . Прекидач се затвори у тренутку  $t = 0$ . Показати да је напон кондензатора дат изразом  $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ ,  $t > 0$ , и одредити временску константу кола ( $\tau$ ).



Слика 335.1.

РЕШЕЊЕ

По затварању прекидача, кондензатор се растеређује кроз отпорник. У колу постоји струја  $i$ , за коју усвајамо референтни смер као на слици 335.1. Референтни смер струје и напона кондензатора су неусаглашени, па важи релација  $i(t) = -C \frac{du}{dt} = \frac{CU_0}{\tau} e^{-t/\tau}$ . Референтни смерови струје и напона отпорника су усаглашени, па важи  $i(t) = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$ . Ове две једначине ће бити у складу ако је  $\tau = RC$ .



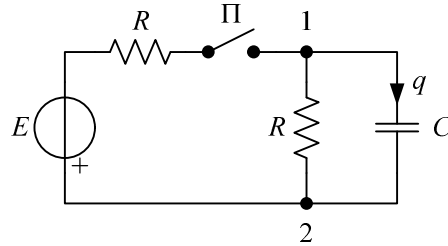
Слика 335.1.

Сада напон  $u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ ,  $t > 0$ , и струја  $i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$  задовољавају Кирхофове законе и везе напона и струја елемената кола са слике 335.1. Осим тога,  $u(0) = U_0$ , па је



задовољен и почетни услов. Стога задати напон представља решење посматраног проблема.

**336.** У колу приказаном на слици 336.1 је  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$  и  $C = 100 \text{ nF}$ , прекидач  $\Pi$  је отворен, а у колу је успостављено стационарно стање. Израчунати (а) проток кроз грану са кондензатором по затварању прекидача и (б) прираштај електричне енергије кондензатора.



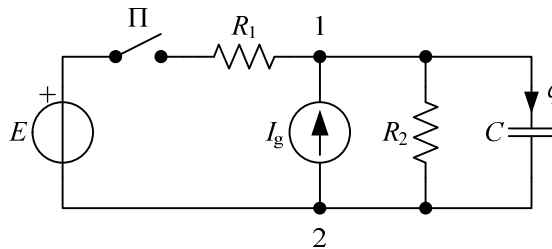
Слика 336.1.

РЕШЕЊЕ

(а) У стационарном стању када је прекидач отворен, напон кондензатора је нула ( $U_{12}^{(0)} = 0$ ), а кондензатор је неоптерећен ( $Q_0 = 0$ ). У стационарном стању које настане по затварању прекидача,  $U_{12}^{(z)} = -\frac{E}{2} = -5 \text{ V}$  и  $Q = CU_{12} = -500 \text{ nC}$ , па је проток  $q = Q - Q_0 = -500 \text{ nC}$ .

(б) Прираштај електричне енергије кондензатора је  $\Delta W_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = 1,25 \text{ }\mu\text{J}$ .

**337.** У колу на слици 337.1 је  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_g = 2 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$  и  $C = 5 \text{ }\mu\text{F}$ . Прекидач  $\Pi$  је отворен, а у колу је успостављено стационарно стање. Израчунати проток кроз грану са кондензатором по затварању прекидача  $\Pi$ .

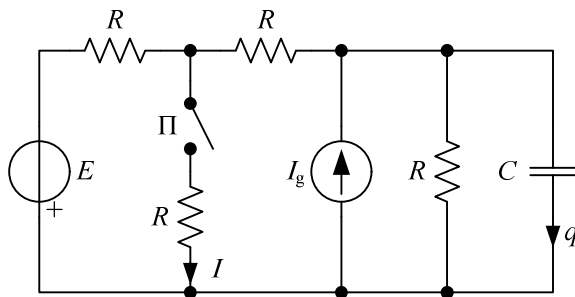


Слика 337.1.

РЕШЕЊЕ

У стационарном стању када је прекидач отворен, напон кондензатора је  $(U_{12})_0 = R_2 I_g = 40 \text{ V}$ , па је оптерећеност кондензатора  $Q_0 = C(U_{12})_0 = 200 \text{ }\mu\text{C}$ . У стационарном стању када је прекидач затворен, напон кондензатора је  $U_{12} = 20 \text{ V}$ , па је оптерећеност  $Q = CU_{12} = 100 \text{ }\mu\text{C}$ . Проток кроз грану са кондензатором, од тренутка затварања прекидача до успостављања стационарног стања, је  $q = Q - Q_0 = -100 \text{ }\mu\text{C}$ .

**338.** За коло приказано на 338.1 познато је  $R = 100 \, \Omega$  и  $C = 1 \, \mu\text{F}$ . Прекидач П је отворен и успостављено је стационарно стање. Затим се прекидач затвори, а до успостављања новог стационарног стања, кроз грану са кондензатором протекне наелектрисање  $q = 10 \, \mu\text{C}$ . Израчунати јачину струје  $I$  у другом стационарном стању.



Слика 338.1.

РЕЗУЛТАТ

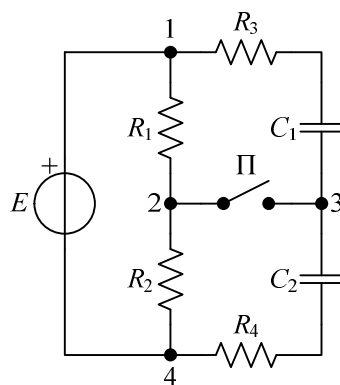
Применом теорема компензације и суперпозиције, добија се да је јачина струје  $I = -300 \, \text{mA}$ .

**339.** У колу стационарне струје са слике 339.1 је  $E = 300 \, \text{V}$ ,  $R_1 = R_3 = 60 \, \Omega$ ,  $R_2 = R_4 = 40 \, \Omega$ ,  $C_1 = 6 \, \mu\text{F}$  и  $C_2 = 4 \, \mu\text{F}$ . Кондензатори су неоптерећени прикључени у коло, а прекидач П је отворен. Колико наелектрисање протекне кроз прекидач по његовом затварању?

РЕШЕЊЕ

Отпорници  $R_1$  и  $R_2$  сачињавају отпорнички разделник напона. Напони отпорника су

$$U_{12} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E = 180 \, \text{V} \quad \text{и} \quad U_{24} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 120 \, \text{V}.$$



Слика 339.1.

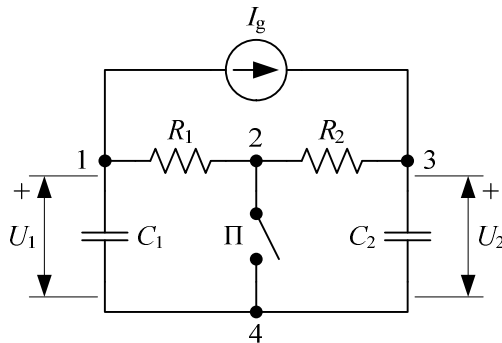
Када је прекидач отворен, кондензатори сачињавају капацитивни разделник напона. Напони кондензатора су  $(U_{13})_0 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} E = 120 \, \text{V}$  и  $(U_{34})_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} E = 180 \, \text{V}$ , а оптерећености кондензатора су  $Q_{10} = C_1 (U_{13})_0 = Q_{20} = C_2 (U_{34})_0 = 720 \, \mu\text{C}$  у односу на референтни смер од чвора 1 ка чвору 3, односно од чвора 3 ка чвору 4. Отпорници  $R_3$  и  $R_4$  не утичу на ове напоне јер је у стационарном стању струја тих отпорника нула. У прелазном режиму, међутим, отпорници  $R_3$  и  $R_4$  ограничавају струје кондензатора.

Када се затвори прекидач П, настане прелазни режим током кога постоје струје у гранама са кондензаторима, као и кроз прекидач. По окончању прелазног режима, у новом стационарном стању, у гранама са кондензаторима нема струје, као ни у прекидачу. Тада су напони отпорника  $R_1$  и  $R_2$  исти као и када је прекидач био отворен. Међутим, сада су напони кондензатора једнаки одговарајућим напонима отпорника  $R_1$  и

$R_2$ , односно  $U_{13} = U_{12} = 180 \text{ V}$  и  $U_{34} = U_{24} = 120 \text{ V}$ . Оптерећености кондензатора су  $Q_1 = C_1 U_{13} = 1080 \text{ } \mu\text{C}$  и  $Q_2 = C_2 U_{34} = 480 \text{ } \mu\text{C}$ . Проток кроз грану са кондензатором  $C_1$  по затварању прекидача је  $q_{13} = Q_1 - Q_{10} = 360 \text{ } \mu\text{C}$ , а проток кроз грану са кондензатором  $C_2$  је  $q_{34} = Q_2 - Q_{20} = -240 \text{ } \mu\text{C}$ .

Једначина континуитета за чвор 3 гласи  $-q_{23} - q_{13} + q_{34} = 0$ , одакле је тражени проток кроз прекидач  $q_{23} = -q_{13} + q_{34} = -600 \text{ } \mu\text{C}$ .

**340.** За коло приказано на 340.1 познато је  $I_g = 0,1 \text{ A}$ ,  $R_1 = 100 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 300 \text{ } \Omega$ ,  $C_1 = 0,5 \text{ } \mu\text{F}$  и  $C_2 = 0,2 \text{ } \mu\text{F}$ . У стационарном стању при отвореном прекидачу П је  $U_1/U_2 = 0,2$ . Одредити протекле количине електрицитета кроз гране са кондензаторима од тренутка затварања прекидача П до успостављања новог стационарног стања.

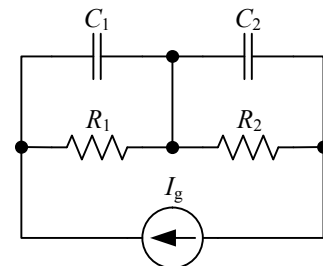


Слика 340.1.

РЕЗУЛТАТ

Протоци су  $q_{14} = -10 \text{ } \mu\text{C}$  и  $q_{34} = -4 \text{ } \mu\text{C}$ .

**341.** У колу на слици 341.1 струја струјног генератора је стална. Позната је капацитивност  $C_1 = 1 \text{ mF}$ . У стационарном стању однос снага отпорника је  $P_{R1}/P_{R2} = 2$ , а однос електричних енергија кондензатора је  $W_{C1}/W_{C2} = 2$ . Одредити капацитивност  $C_2$ .

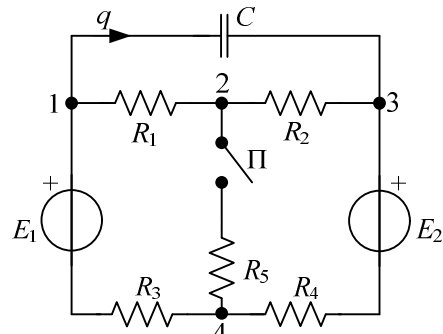


Слика 341.1.

РЕЗУЛТАТ

Тражена капацитивност је  $C_2 = 2C_1 = 2 \text{ mF}$ .

**342.** За коло са слике 342.1 познато је  $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  $E_2 = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 50 \Omega$ ,  $R_4 = 30 \Omega$ ,  $R_5 = 25 \Omega$  и  $C = 0,5 \mu\text{F}$ . Прекидач  $\Pi$  је отворен и успостављено је стационарно стање. Израчунати проток  $q$  кроз кондензатор после затварања прекидача.

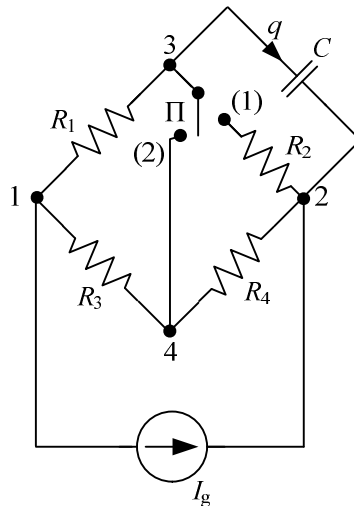


Слика 342.1.

РЕЗУЛТАТ

Проток је  $q = 2 \mu\text{C}$ .

**343.** За коло са слике 343.1 познато је  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_3 = 30 \Omega$ ,  $R_4 = 40 \Omega$ ,  $C = 2 \mu\text{F}$  и  $I_g = 50 \text{ mA}$ . Преклопник  $\Pi$  је у положају (1) и успостављено је стационарно стање. Израчунати проток кроз кондензатор после пребацивања преклопника у положај (2).

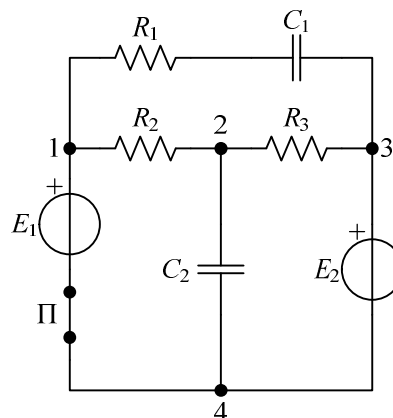


Слика 343.1.

РЕЗУЛТАТ

Проток је  $q = -2,6 \mu\text{C}$ .

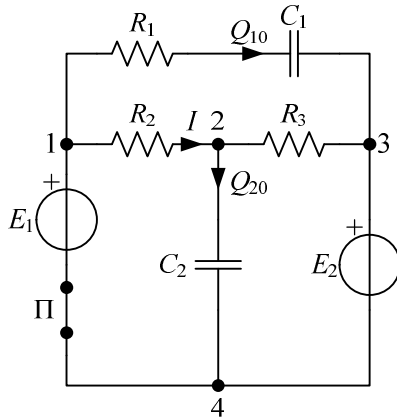
**344.** За коло са слике 344.1 познато је  $R_1 = R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 300 \Omega$ ,  $C_1 = 2,5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $E_1 = 14 \text{ V}$  и  $E_2 = 18 \text{ V}$ . Прекидач  $\Pi$  је затворен и успостављено је стационарно стање. Израчунати протоке кроз кондензаторе после отварања прекидача.



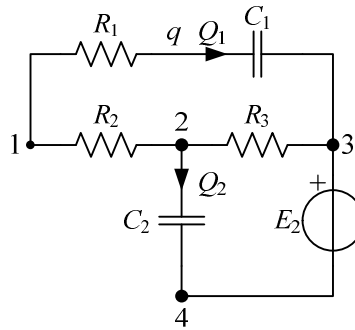
Слика 344.1.

РЕШЕЊЕ

При затвореном прекидачу са слике 344.2 је  $U_{13}^Z = E_1 - E_2 = -4 \text{ V}$  и  $U_{24}^Z = \frac{R_3 E_1 + R_2 E_2}{R_2 + R_3} = 15 \text{ V}$ , па је  $Q_{10} = C_1 U_{13}^Z = -10 \mu\text{C}$  и  $Q_{20} = C_2 U_{24}^Z = 30 \mu\text{C}$ .



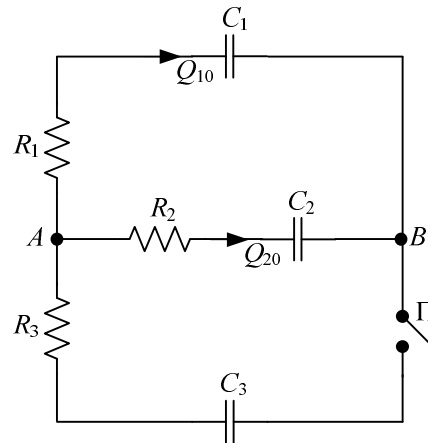
Слика 344.2.



Слика 344.3.

У стационарном стању при отвореном прекидачу (слика 344.3) нема струје ни у једном отпорнику, па је  $U_{13}^0 = 0$  и  $U_{24}^0 = E_2 = 18 \text{ V}$ , одакле је  $Q_1 = C_1 U_{13}^0 = 0$  и  $Q_2 = C_2 U_{24}^0 = 36 \mu\text{C}$ . Протоци кроз кондензаторе су  $q_1 = \Delta Q_1 = Q_1 - Q_{10} = 10 \mu\text{C}$  и  $q_2 = \Delta Q_2 = Q_2 - Q_{20} = 6 \mu\text{C}$ .

**345.** За коло са слике 345.1 је  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4 \mu\text{F}$  и  $C_3 = 5 \mu\text{F}$ . У стационарном стању при отвореном прекидачу П позната је оптерећеност кондензатора  $C_1$ ,  $Q_{10} = 20 \mu\text{C}$ , а кондензатор  $C_3$  је неоптерећен. Израчунати рад претворен у топлоту од момента затварања прекидача до успостављања новог стационарног стања.



Слика 345.1.

РЕШЕЊЕ

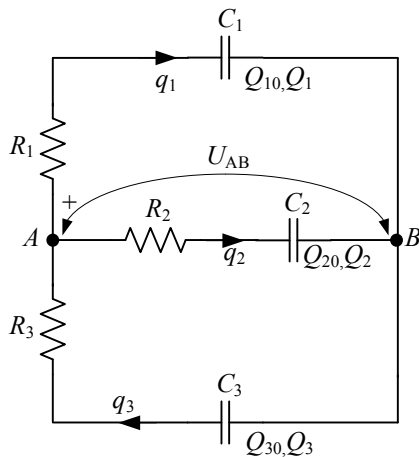
При отвореном прекидачу П је  $U_{AB}^0 = \frac{Q_{10}}{C_1} = \frac{Q_{20}}{C_2} = 20 \text{ V}$ , па је  $Q_{20} = \frac{C_2}{C_1} Q_{10} = 80 \mu\text{C}$ . Енергија кондензатора је  $W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_{10}^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{20}^2}{C_2} = 1 \text{ mJ}$ .

Слика 345.2 приказује коло при затвореном прекидачу П. Тачка А нема галванских путева који је повезују са околином. Због тога је збир наелектрисања електрода кондензатора које су везане за тачку А непроменљив, па је алгебарски збир оптерећености сва три кондензатора везана за ту тачку исти у свим стационарним стањима.

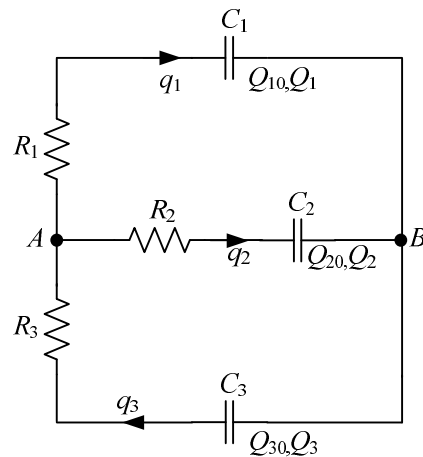
То се може доказати и на следећи начин. Према слици 345.2. је  $q_1 + q_2 - q_3 = 0$ , односно  $(Q_1 - Q_{10}) + (Q_2 - Q_{20}) - (Q_3 - Q_{30}) = 0$ , те је  $Q_1 + Q_2 - Q_3 = Q_{10} + Q_{20} - Q_{30} = \text{const}$ .

У задатом случају је  $Q_1 + Q_2 - Q_3 = Q_{10} + Q_{20}$ , односно  $C_1 U_{AB} + C_2 U_{AB} - (-C_3 U_{AB}) = Q_{10} + Q_{20}$ , одакле је  $U_{AB} = \frac{Q_{10} + Q_{20}}{C_1 + C_2 + C_3} = 10 \text{ V}$ .

Крајње оптерећености кондензатора по затварању прекидача П су  $Q_1 = C_1 U_{AB} = 10 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = C_2 U_{AB} = 40 \mu\text{C}$  и  $Q_3 = -C_3 U_{AB} = -50 \mu\text{C}$ . Укупна енергија сва три кондензатора је  $W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{Q_3^2}{C_3} = 0,5 \text{ mJ}$ , па је рад претворен у топлоту  $A_J = -\Delta W_C = -(W_2 - W_1) = 0,5 \text{ mJ}$ .



Слика 345.2.



Слика 345.3.

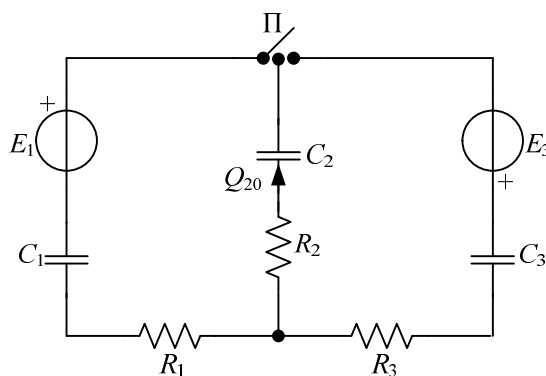
Задатак се може решити и користећи се једначинама, а према слици 345.3:  $q_1 + q_2 - q_3 = 0$ ,  $-\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = 0$ ,  $\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = 0$ ,  $Q_1 = Q_{10} + q_1$ ,  $Q_2 = Q_{20} + q_2$  и  $Q_3 = q_3$ . Из

ових једначина су протоци  $q_2 = \frac{Q_{10} - \frac{C_1 + C_3}{C_2} Q_{10}}{1 + \frac{C_1 + C_3}{C_2}} = -40 \mu\text{C}$ ,

$$q_3 = -C_3 \left( \frac{Q_{20}}{C_2} + \frac{q_2}{C_2} \right) = -50 \mu\text{C} \text{ и } q_1 = q_3 - q_2 = -10 \mu\text{C}.$$

Крајње оптерећености кондензатора су  $Q_1 = Q_{10} + q_1 = 10 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = Q_{20} + q_2 = 40 \mu\text{C}$  и  $Q_3 = q_3 = -50 \mu\text{C}$ . Напон кондензатора је  $U_{AB} = -\frac{Q_3}{C_3} = 10 \text{ V}$ , па је укупна енергија кондензатора  $W_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3)U_{AB}^2 = 0,5 \text{ mJ}$ , те је  $A_J = -(W_2 - W_1) = 0,5 \text{ mJ}$ .

**346.** За коло са слике 346.1 је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_3 = 6 \text{ V}$ ,  $C_1 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2,5 \mu\text{F}$  и  $C_3 = 5 \mu\text{F}$ . При отвореном прекидачу П кондензатори  $C_1$  и  $C_3$  су неоптерећени, а оптерећеност кондензатора  $C_2$  је  $Q_{20} = -1,25 \mu\text{C}$ . Израчунати укупан рад претворен у топлоту од момента затварања прекидача П до успостављања стационарног стања у колу.



Слика 346.1.

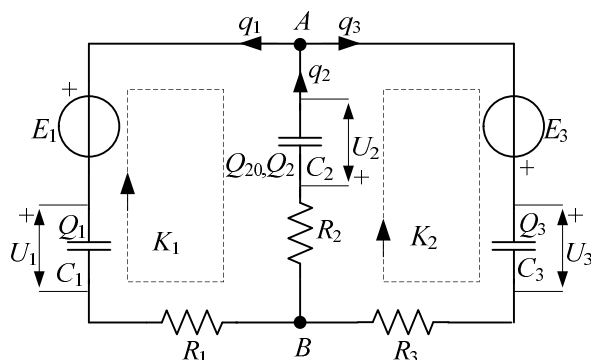
РЕШЕЊЕ

При отвореном прекидачу П електростатичка енергија у колу је  $(W_C)_0 = (W_{C_2})_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_{20}^2}{C_2} = 0,3125 \mu\text{J}$ . При затвореном прекидачу П, за чвор А (слика

346.2) је  $q_1 - q_2 + q_3 = 0$ , за контуру  $K_1$  је  $E_1 + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_1} = 0$ , а за контуру  $K_2$  је

$$E_3 - \frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_2}{C_2} = 0. \text{ Осим тога, важе једначине } Q_1 = q_1, Q_2 = Q_{20} + q_2 \text{ и } Q_3 = q_3, \text{ које}$$

омогућавају да се формира систем једначина или по протоцима, или по крајњим оптерећеностима.



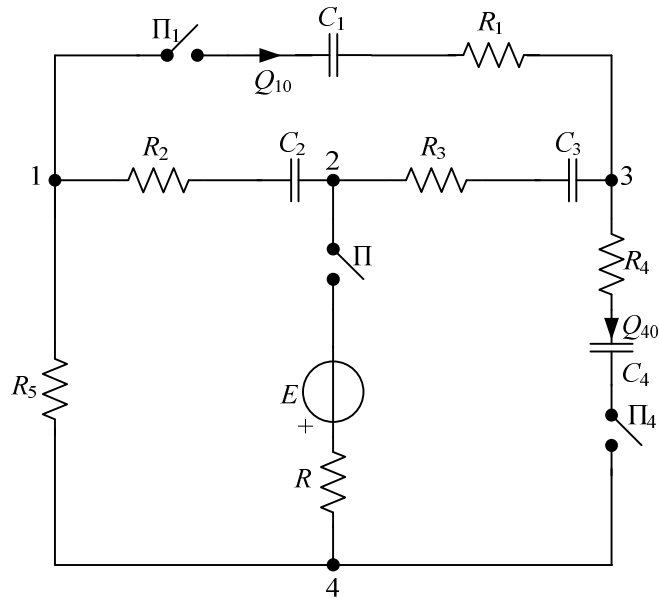
Слика 346.2.

Даље се добија  $q_1 - q_2 + q_3 = 0$ ,  $\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = -E_1 - \frac{Q_{20}}{C_2}$  и  $\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = E_3 - \frac{Q_{20}}{C_2}$ . Из ове три једначине је  $q_1 = -25 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 2,5 \mu\text{C}$  и  $q_3 = 27,5 \mu\text{C}$ . Крајње оптерећености кондензатора су  $Q_1 = q_1 = -25 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = Q_{20} + q_2 = 1,25 \mu\text{C}$  и  $Q_3 = q_3 = 27,5 \mu\text{C}$ , а напони кондензатора су  $U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = -12,5 \text{ V}$ ,  $U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 0,5 \text{ V}$  и  $U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 5,5 \text{ V}$ .

Укупна енергија кондензатора у овом стационарном стању је  $W_C = \frac{1}{2}(C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2 + C_3 U_3^2) = 232,1875 \mu\text{J}$ . Укупан рад генератора је  $A_G = -E_1 q_1 + E_3 q_3 = 465 \mu\text{J}$ . Прираштај енергије кондензатора је  $\Delta W_C = W_C - (W_C)_0 = 231,875 \mu\text{J}$ , па је рад претворен у топлоту  $A_J = A_G - \Delta W_C = 233,125 \mu\text{J}$ .

**347.** За коло са слике 347.1 је  $E = 40 \text{ V}$ ,  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = C_4 = 4 \mu\text{F}$ , а укупна отпорност кола је  $R_{\text{ук}} = R + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 526 \Omega$ . У стационарном стању када су сви прекидачи отворени, кондензатори  $C_1$  и  $C_4$  имају почетне оптерећености  $Q_{10} = 30 \mu\text{C}$  и  $Q_{40} = -260 \mu\text{C}$ , а кондензатори  $C_2$  и  $C_3$  су неоптерећени. Сва три прекидача се затварају истовремено. Израчунати укупан електрични рад претворен у топлоту од момента затварања свих прекидача до успостављања новог стационарног стања у колу.

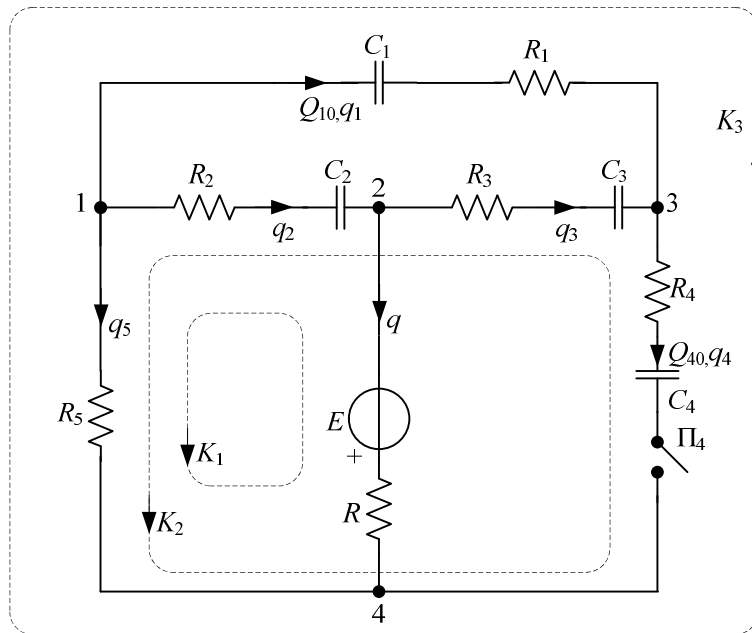




Слика 347.1.

РЕШЕЊЕ

Када су прекидачи отворени, укупна електростатичка енергија кондензатора је  $(W_C)_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_{10}^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{40}^2}{C_4} = 8,495 \text{ mJ}$ . Када су прекидачи затворени (слика 347.2), тада је за чвор 1  $q_1 + q_2 + q_5 = 0$ , за чвор 2 је  $-q_2 + q_3 + q = 0$ , за чвор 3 је  $q_1 + q_3 - q_4 = 0$ , за контуру  $K_1$  је  $-E + \frac{q_2}{C_2} = 0$ , за контуру  $K_2$  је  $\frac{Q_{40} + q_4}{C_4} + \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_2}{C_2} = 0$ , а за контуру  $K_3$  је  $\frac{Q_{10} + q_1}{C_1} + \frac{Q_{40} + q_4}{C_4} = 0$ .



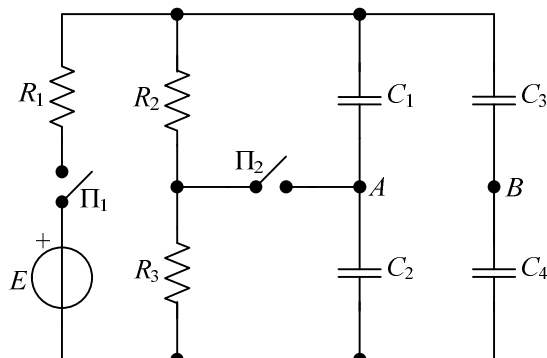
Слика 347.2.

Решавањем ових једначина се добијају протоци  $q_1 = 220 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 200 \mu\text{C}$ ,  $q_3 = -60 \mu\text{C}$ ,  $q_4 = 160 \mu\text{C}$ ,  $q_5 = -420 \mu\text{C}$  и  $q = 260 \mu\text{C}$ . Крајње оптерећености кондензатора су  $Q_1 = Q_{10} + q_1 = 250 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = q_2 = 200 \mu\text{C}$ ,  $Q_3 = q_3 = -60 \mu\text{C}$  и  $Q_4 = Q_{40} + q_4 = -100 \mu\text{C}$ . Укупна електростатичка енергија је

$$W_C = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{Q_3^2}{C_3} + \frac{1}{2} \frac{Q_4^2}{C_4} = 8,825 \text{ mJ}.$$

Рад генератора до успостављања стационарног стања је  $A_G = Eq = 10,4 \text{ mJ}$ , па је рад претворен у топлоту  $A_J = A_G - (W_C - (W_C)_0) = 10,07 \text{ mJ}$ .

**348.** За коло са слике 348.1 познато је  $E = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 60 \Omega$ ,  $R_3 = 40 \Omega$ ,  $C_1 = 6 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4 \mu\text{F}$  и  $C_3 = C_4 = 5 \mu\text{F}$ . У стационарном стању при отвореним прекидачима  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  сви кондензатори су неоптерећени. Прво се затвори прекидач  $\Pi_1$ , па по достизању стационарног стања, затвори се и прекидач  $\Pi_2$ . Израчунати прираштај напона  $U_{AB}$  после затварања прекидача  $\Pi_2$ .

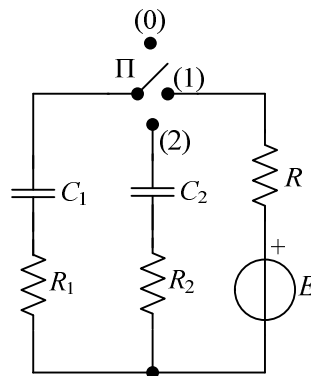


Слика 348.1.

РЕЗУЛТАТ

Прираштај напона је  $\Delta U_{AB} = -10 \text{ V}$ .

**349.** За коло са слике 349.1 познато је  $E = 12 \text{ V}$ ,  $C_1 = 1 \mu\text{F}$  и  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ . Када се преклопник  $\Pi$  налази у положају (0), оба кондензатора су неоптерећена. Затим се преклопник  $\Pi$  пребаци у положај (1), па се по достизању стационарног стања пребаци у положај (2), у коме остане. Израчунати рад претворен у топлоту у току успостављања појединих стационарних стања у колу.



Слика 349.1.

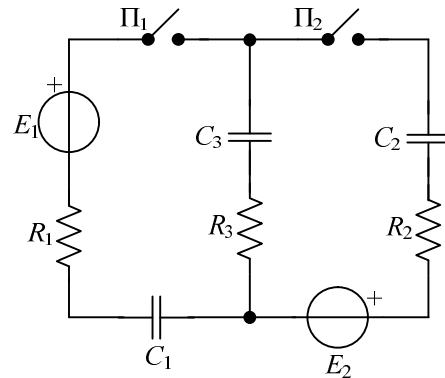
РЕЗУЛТАТ

Рад претворен у топлоту по пребацивању прекидача у положај (1) је  $A_J^{(1)} = 72 \mu\text{J}$ , а по пребацивању у положај (2) је  $A_J^{(2)} = 48 \mu\text{J}$ .

**350.** За коло приказано на слици 350.1 познато је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_2 = 6 \text{ V}$ ,  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5 \mu\text{F}$  и  $C_3 = 2 \mu\text{F}$ . Прекидачи  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  су отворени, а сви кондензатори су неоптерећени. Прво се затвори прекидач  $\Pi_1$ , па се, по успостављању стационарног стања, затвори и прекидач  $\Pi_2$ . Израчунати рад претворен у топлоту у току успостављања појединих стационарних стања.

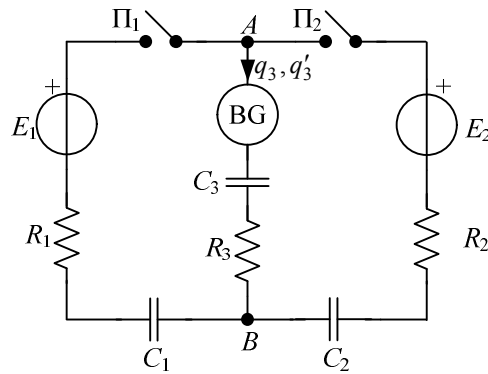
РЕЗУЛТАТ

Када се затвори прекидач  $\Pi_1$ , рад претворен у топлоту је  $A_{J_1} = 48 \mu\text{J}$ . Када се затвори и прекидач  $\Pi_2$ , рад претворен у топлоту је  $A_{J_2} = 3,75 \mu\text{J}$ .



Слика 350.1.

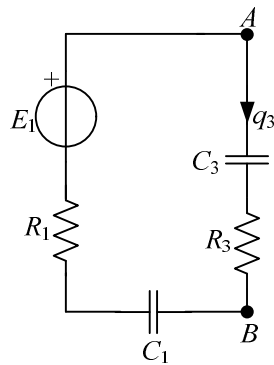
**351.** За коло са слике 351.1. познато је  $C_1 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4 \mu\text{F}$  и  $C_3 = 2 \mu\text{F}$ . При отвореним прекидачима  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  кондензатори су неоптерећени. Прво се затвори само прекидач  $\Pi_1$ , а до успостављања стационарног стања кроз галванометар протекне  $q_3 = 20 \mu\text{C}$ . Затим се затвори и прекидач  $\Pi_2$ , а нови проток кроз галванометар је  $q'_3 = -40 \mu\text{C}$ . Израчунати (а) електромоторне силе  $E_1$  и  $E_2$  и (б) рад претворен у топлоту при успостављању појединих стационарних стања.



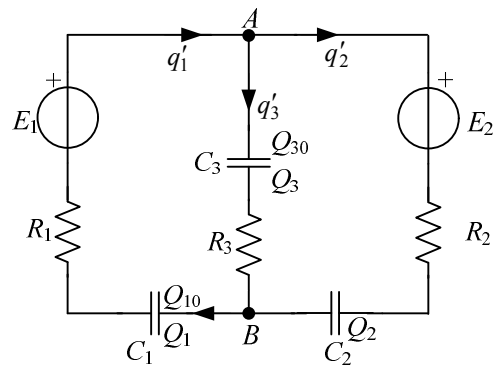
Слика 351.1.

РЕШЕЊЕ

По затварању прекидача  $\Pi_1$  (слика 351.2), је  $E_1 = q_3 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right)$ , одакле је  $E_1 = 20 \text{ V}$ . Рад генератора је  $A_{G_1} = E_1 q_3 = 0,4 \text{ mJ}$ . Оптерећености кондензатора су  $Q_{10} = Q_{30} = q_3$ . Енергија кондензатора је  $W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{Q_{10}^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_{30}^2}{C_3} = \frac{1}{2} q_3^2 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) = 0,2 \text{ mJ}$ , па је рад претворен у топлоту  $A_{J_1} = A_{G_1} - W_{\text{el}} = 0,2 \text{ mJ}$ .



Слика 351.2.



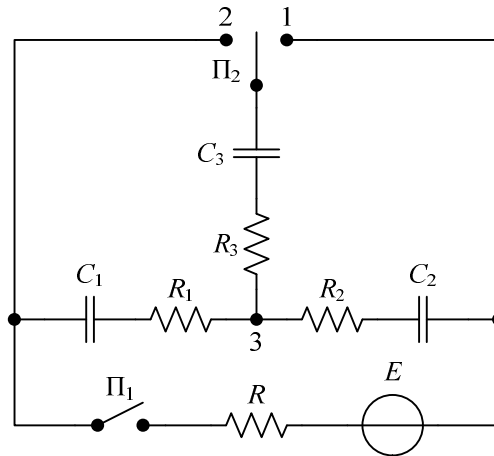
Слика 351.3.

После затварања прекидача  $\Pi_2$  (слика 351.3.) је  $q'_3 = Q_3 - Q_{30} = Q_3 - q_3$ , па је  $Q_3 = q_3 + q'_3 = -20 \mu\text{C}$ . Напон између тачака  $A$  и  $B$  је.  $U_{AB} = \frac{Q_3}{C_3} = -10 \text{ V}$ . Како је  $U_{AB} = -\frac{Q_1}{C_1} + E_1 = -\frac{Q_{10}}{C_1} - \frac{q'_1}{C_1} + E_1$ , то је нови проток кроз ту грану  $q'_1 = C_1(E_1 - U_{AB}) - q_3 = 40 \mu\text{C}$ . Из једначине  $q'_1 = q'_2 + q'_3$  добија се  $q'_2 = q'_1 - q'_3 = 80 \mu\text{C}$ , па је  $Q_2 = q'_2 = 80 \mu\text{C}$ .

Из израза  $U_{AB} = \frac{Q_2}{C_2} + E_2$  добија се  $E_2 = U_{AB} - \frac{Q_2}{C_2} = -30 \text{ V}$ . Крајње оптерећености кондензатора су  $Q_1 = Q_{10} + q'_1 = 60 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = q'_2 = 80 \mu\text{C}$  и  $Q_3 = Q_{30} + q'_3 = -20 \mu\text{C}$ , па је укупна енергија кондензатора  $W_{e2} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{1}{2} \frac{Q_3^2}{C_3} = 1,8 \text{ mJ}$ .

Рад оба генератора при успостављању другог стационарног стања је  $A_{G_2} = E_1 q'_1 - E_2 q'_2 = 3,2 \text{ mJ}$ . Прираштај енергије кондензатора је  $\Delta W_e = W_{e2} - W_{e1} = 1,6 \text{ mJ}$ , па је рад претворен у топлоту  $A_{J_2} = A_{G_2} - \Delta W_e = 1,6 \text{ mJ}$ .

**352.** Када је у колу на слици 352.1 прекидач  $\Pi_1$  отворен, а преклопник  $\Pi_2$  у положају (1), кондензатори капацитивности  $C_1 = 4 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 8 \text{ nF}$  и  $C_3 = 4 \text{ nF}$  су неоптерећени. Прво се прекидач  $\Pi_1$  затвори, а преклопник  $\Pi_2$  остави у положају (1). При томе је напон  $U_{13} = -5 \text{ V}$ . Затим се преклопник  $\Pi_2$  пребаци у положај (2). Израчунати рад претворен у топлоту у овом колу од тренутка пребацивања преклопника  $\Pi_2$  у положај (2) до успостављања стационарног стања.

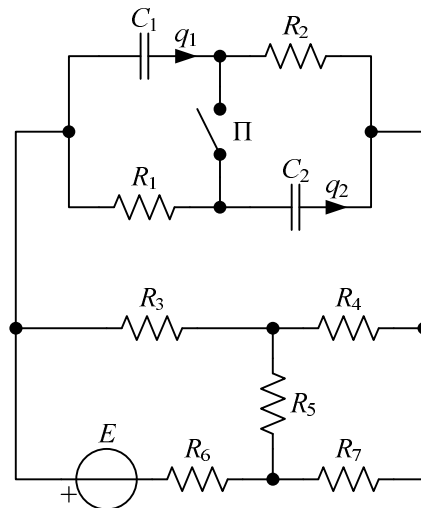


Слика 352.1.

РЕЗУЛТАТ

Рад претворен у топлоту је  $A_I = 600 \text{ nJ}$ .

**353.** За коло на слици 353.1 познато је  $E = 100 \text{ V}$ ,  $C_1 = 4 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 6 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $R_1 = 100 \text{ }\Omega$ ,  $R_2 = 75 \text{ }\Omega$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = 50 \text{ }\Omega$  и  $R_6 = R_7 = 150 \text{ }\Omega$ . Прекидач  $\Pi$  је отворен и у колу је успостављено стационарно стање. Одредити протоке кроз гране са кондензаторима од тренутка затварања прекидача  $\Pi$  до успостављања новог стационарног стања у колу.

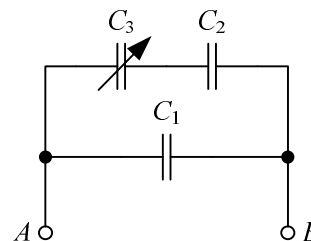


Слика 353.1.

РЕЗУЛТАТ

Тражени протоци су  $q_1 = -60 \text{ }\mu\text{C}$  и  $q_2 = -105 \text{ }\mu\text{C}$ .

**354.** На слици 354.1 приказана је група неоптерећених кондензатора за коју је  $C_1 = 2 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 1 \text{ nF}$ . Капацитивност  $C_3$  се може мењати у границама од  $1 \text{ nF}$  до  $4 \text{ nF}$ . (а) Извести израз за капацитивност кондензатора еквивалентног задатој групи кондензатора. (б) У којим границама се налази та еквивалентна капацитивност?

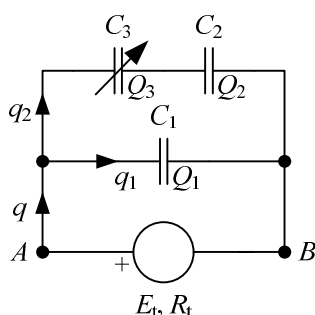


Слика 354.1.

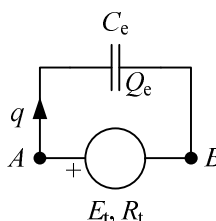
РЕШЕЊЕ

(а) Замислимо да је на прикључке кола мреже са слике 354.1 прикључен напонски тест генератор, емс  $E_t$  и унутрашње отпорности  $R_t$  (слика 354.2). По успостављању стационарног стања важе једначине  $U_{AB} = E_t$ ,  $q = q_1 + q_2$ ,  $Q_1 = q_1$ ,  $Q_2 = Q_3 = q_2$ ,  $U_{AB} = \frac{Q_1}{C_1}$  и  $U_{AB} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$ . Одавде је

$$U_{AB} = \frac{q}{C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}}. \quad (354.1)$$



Слика 354.2.



Слика 354.3.

Истовремено посматрајмо и еквивалентни кондензатор са слике 354.3, на који је прикључен исти тест генератор. У стационарном стању важи  $U_{AB} = E_t$ ,  $Q_e = q$  и  $U_{AB} = \frac{Q_e}{C_e}$ , па важи

$$U_{AB} = \frac{q}{C_e}. \quad (354.2)$$

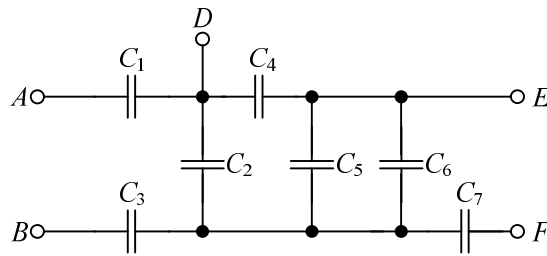
Еквиваленција постоји уколико у оба случаја (слике 354.2 и 354.3) постоји иста релација између напона  $U_{AB}$  и протока  $q$ . Упоредивањем израза (354.1) и (354.2) добија се  $C_e = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$ .

До истог резултата смо могли доћи и на основу образаца за еквивалентну капацитивност редне и паралелне везе кондензатора. Еквивалентна капацитивност редне везе кондензатора капацитивности  $C_2$  и  $C_3$  је  $C_{e23} = C_2 \oplus C_3 = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$ , а еквивалентна капацитивност паралелне везе кондензатора капацитивности  $C_1$  и  $C_{e23}$  је  $C_e = C_1 \parallel C_{e23} = C_1 + C_{e23}$ , па је  $C_e = C_1 \parallel (C_2 \oplus C_3) = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$ .

(б) Еквивалентна капацитивност монотонно расте са порастом капацитивности  $C_3$ . Заменом задатих граница капацитивности  $C_3$  добија се  $C_{e \min} = 2,5 \text{ nF}$  и  $C_{e \max} = 2,8 \text{ nF}$ .

У којим је границама еквивалентна капацитивност ако се  $C_3$  може мењати у границама  $0 \leq C_3 < +\infty$ ? Чему је еквивалентан променљиви кондензатор ако је  $C_3 = 0$ , а чему када  $C_3 \rightarrow +\infty$ ?

**355.** За мрежу неоптерећених кондензатора са слике 355.1 познато је  $C_1 = 2 \text{ } \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 1 \text{ } \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 3 \text{ } \mu\text{F}$ ,  $C_4 = 5 \text{ } \mu\text{F}$ ,  $C_5 = 2,5 \text{ } \mu\text{F}$ ,  $C_6 = 1,5 \text{ } \mu\text{F}$  и  $C_7 = 6 \text{ } \mu\text{F}$ . Израчунати еквивалентну капацитивност између свих парова тачака, сматрајући да су остале тачке у празном ходу.



Слика 355.1.

РЕЗУЛТАТ

Тражене капацитивности су:

$$(a) C_{AB} = \frac{\frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} \left( C_2 + \frac{C_4 (C_5 + C_6)}{C_4 + C_5 + C_6} \right)}{\frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + C_2 + \frac{C_4 (C_5 + C_6)}{C_4 + C_5 + C_6}} = \frac{174}{199} \mu\text{F} \approx 0,87 \mu\text{F},$$

$$(б) C_{AD} = C_1 = 2 \mu\text{F},$$

$$(в) C_{AE} = \frac{C_1 \left( C_4 + \frac{C_2 (C_5 + C_6)}{C_2 + C_5 + C_6} \right)}{C_1 + C_4 + \frac{C_2 (C_5 + C_6)}{C_2 + C_5 + C_6}} = \frac{58}{39} \mu\text{F} \approx 1,49 \mu\text{F},$$

$$(г) C_{AF} = \frac{\frac{C_1 C_7}{C_1 + C_7} \left( C_2 + \frac{C_4 (C_5 + C_6)}{C_4 + C_5 + C_6} \right)}{\frac{C_1 C_7}{C_1 + C_7} + C_2 + \frac{C_4 (C_5 + C_6)}{C_4 + C_5 + C_6}} = \frac{87}{85} \mu\text{F} \approx 1,02 \mu\text{F},$$

$$(д) C_{BD} = \frac{C_3 \left( C_2 + \frac{C_4 (C_5 + C_6)}{C_4 + C_5 + C_6} \right)}{C_3 + C_2 + \frac{C_4 (C_5 + C_6)}{C_4 + C_5 + C_6}} = \frac{87}{56} \mu\text{F} \approx 1,55 \mu\text{F},$$



$$(ђ) C_{BE} = \frac{C_3 \left( \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} + C_5 + C_6 \right)}{C_3 + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} + C_5 + C_6} = \frac{87}{47} \mu\text{F} \approx 1,85 \mu\text{F},$$

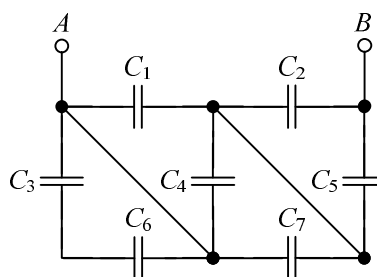
$$(е) C_{BF} = \frac{C_3 C_7}{C_3 + C_7} = 2 \mu\text{F},$$

$$(ж) C_{DE} = C_4 + \frac{C_2 (C_5 + C_6)}{C_2 + C_5 + C_6} = \frac{29}{5} \mu\text{F} = 5,8 \mu\text{F},$$

$$(з) C_{DF} = \frac{C_7 \left( C_2 + \frac{C_4 (C_5 + C_6)}{C_4 + C_5 + C_6} \right)}{C_7 + C_2 + \frac{C_4 (C_5 + C_6)}{C_4 + C_5 + C_6}} = \frac{174}{83} \mu\text{F} \approx 2,1 \mu\text{F} \text{ и}$$

$$(и) C_{EF} = \frac{C_7 \left( \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} + C_5 + C_6 \right)}{C_7 + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} + C_5 + C_6} = \frac{174}{65} \mu\text{F} \approx 2,68 \mu\text{F}.$$

**356.** За мрежу неоптерећених кондензатора са слике 356.1 је  $C_1 = 1,5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0,5 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 3 \mu\text{F}$ ,  $C_4 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_5 = 1,5 \mu\text{F}$ ,  $C_6 = 6 \mu\text{F}$  и  $C_7 = 3,5 \mu\text{F}$ . Израчунати еквивалентну капацитивност мреже између тачака  $A$  и  $B$ .



Слика 356.1.

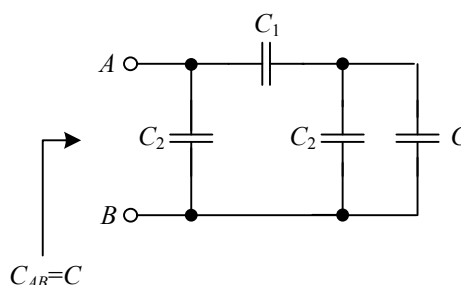
РЕЗУЛТАТ

Еквивалентна капацитивност је  $C_e = \frac{(C_1 + C_4 + C_7)(C_2 + C_5)}{C_1 + C_4 + C_7 + C_2 + C_5} = \frac{5}{3} \mu\text{F}$ .

**357.** За мрежу кондензатора са слике 357.1 одредити капацитивност  $C$  тако да буде  $C_{AB} = C$ .

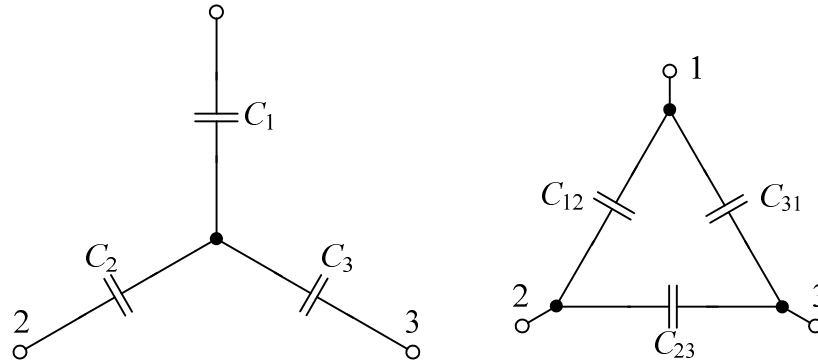
РЕЗУЛТАТ

Тражена капацитивност је  $C = C_2 \sqrt{1 + \frac{2C_1}{C_2}}$ .



Слика 357.1.

**358.** На основу сличности са изразима за проводности из задатка 152, написати изразе за трансфигурацију трокраке звезде неоптерећених кондензатора у троугао (слика 358.1), и обрнуто.



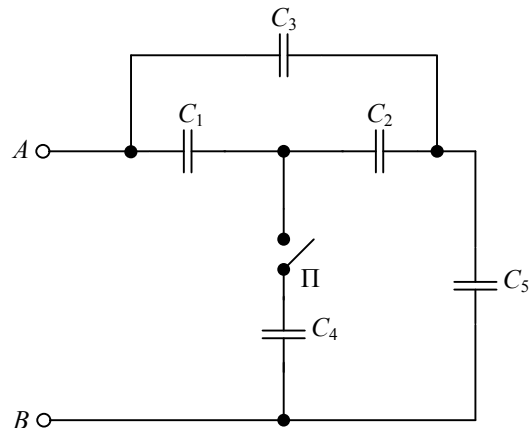
Слика 358.1.

РЕЗУЛТАТ

Изрази за трансфигурацију трокраке звезде у троугао су:  $C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$ ,  
 $C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$  и  $C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$ .

Изрази за трансфигурацију троугла у трокраку звезду су:  $C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{31}}{C_{23}}$ ,  
 $C_2 = C_{23} + C_{12} + \frac{C_{23} C_{12}}{C_{31}}$  и  $C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31} C_{23}}{C_{12}}$ .

**359.** За мрежу неоптерећених кондензатора са слике 359.1 је  $C_1 = 0,4 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0,8 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 1,6 \mu\text{F}$ ,  $C_4 = 1 \mu\text{F}$  и  $C_5 = 2 \mu\text{F}$ . Израчунати прираштај улазне капацитивности мреже између тачака  $A$  и  $B$  услед затварања прекидача  $\Pi$ .



Слика 359.1.

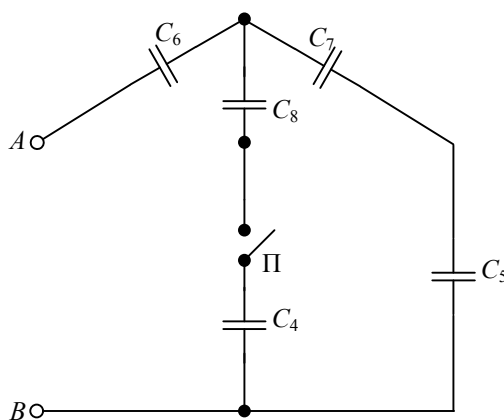
РЕШЕЊЕ

Кондензатори капацитивности  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  образују троугао, па их је могуће заменити трокраком звездом  $C_6$ ,  $C_7$  и  $C_8$ , као на слици 359.2, при чему је

$$C_6 = C_1 + C_3 + \frac{C_1 C_3}{C_2} = 2,8 \mu\text{F},$$

$$C_7 = C_2 + C_3 + \frac{C_2 C_3}{C_1} = 5,6 \mu\text{F},$$

$$C_8 = C_1 + C_2 + \frac{C_1 C_2}{C_3} = 1,4 \mu\text{F}.$$



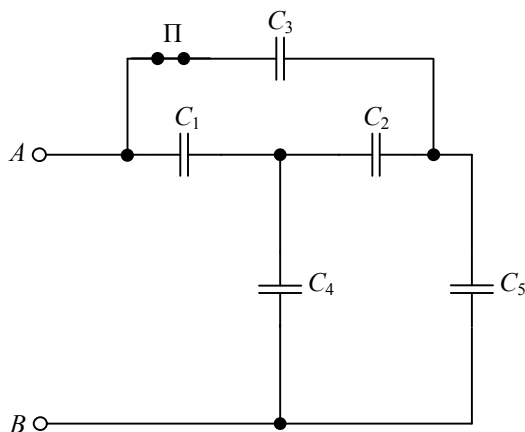
Слика 359.2.

При отвореном прекидачу је  $C_{AB}^0 = \frac{C_5 C_6 C_7}{C_5 C_6 + C_5 C_7 + C_6 C_7} = 0,97 \mu\text{F}$ . При затвореном

прекидачу је  $C_{AB}^Z = \frac{C_6 \left( \frac{C_4 C_8}{C_4 + C_8} + \frac{C_5 C_7}{C_5 + C_7} \right)}{C_6 + \frac{C_4 C_8}{C_4 + C_8} + \frac{C_5 C_7}{C_5 + C_7}} = 1,19 \mu\text{F}$ . Прираштај капацитивности је

$$\Delta C_{AB} = C_{AB}^Z - C_{AB}^0 \approx 0,22 \mu\text{F}.$$

**360.** Капацитивности неоптерећених кондензатора са слике 360.1 су  $C_1 = 1,75 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 7 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_4 = 3,5 \mu\text{F}$  и  $C_5 = 2 \mu\text{F}$ . Колики је прираштај улазне капацитивности између тачака  $A$  и  $B$  услед отварања прекидача  $\Pi$ ?

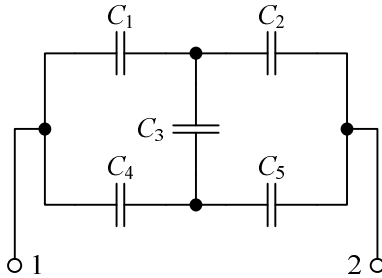


Слика 360.1.

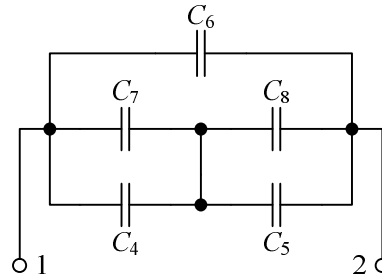
РЕЗУЛТАТ

Прираштај капацитивности је  $\Delta C_{AB} = C_{AB}^0 - C_{AB}^Z = -1,6 \mu\text{F}$ .

**361.** Израчунати еквивалентну капацитивност мреже неоптерећених кондензатора са слике 361.1 ако је  $C_1 = C_2 = C_3 = 90 \text{ nF}$ ,  $C_4 = 20 \text{ nF}$  и  $C_5 = 30 \text{ nF}$ .



Слика 361.1.



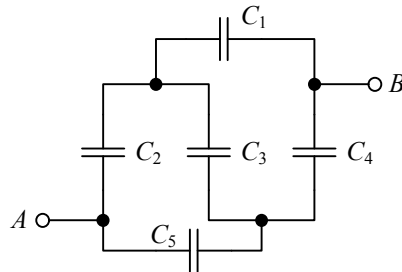
Слика 361.2.

РЕШЕЊЕ

Трансфигурацијом трокраке звезде коју сачињавају кондензатори  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  добија се симетрични троугао капацитивности  $C_6 = C_7 = C_8 = 30 \text{ nF}$ , као на слици 361.2. Тиме се мост са слике 361.1 своди на редно-паралелну везу кондензатора, па је

$$C_e = ((C_4 \parallel C_7) \oplus (C_5 \parallel C_8)) \parallel C_6 = \frac{(C_4 + C_7)(C_5 + C_8)}{C_4 + C_7 + C_5 + C_8} + C_6 \approx 57,3 \text{ nF}.$$

**362.** Капацитивности неоптерећених кондензатора са слике 362.1 су  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$  и  $C_3 = C_4 = 3 \mu\text{F}$ . (а) Колика треба да буде капацитивност  $C_5$  да би мост био у равнотежи? (б) Колика је при томе еквивалентна капацитивност ове мреже?



Слика 362.1.

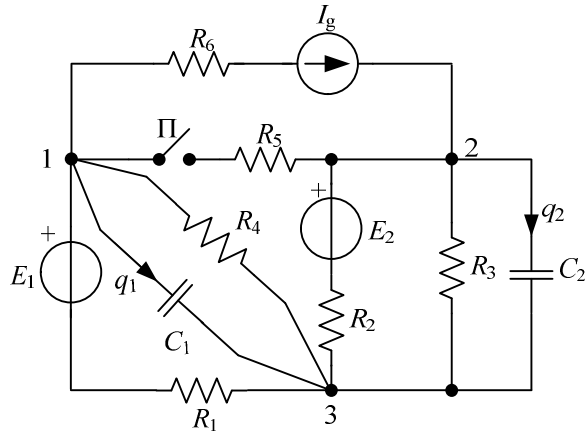
РЕШЕЊЕ

(а) Да би мост био у равнотежи, потребно је да буде  $C_5 = C_4 \frac{C_2}{C_1} = 6 \mu\text{F}$ .

(б) Када је мост у равнотежи, дијагонала са кондензатором  $C_3$  се може или прекинути, или кратко спојити, па је еквивалентна капацитивност

$$C_F = (C_1 \oplus C_2) \parallel (C_4 \oplus C_5) = (C_1 \parallel C_4) \oplus (C_2 \parallel C_5) = \frac{8}{3} \mu\text{F}.$$

**363.** За коло са слике 363.1 познато је  $R_1 = 120 \, \Omega$ ,  $R_2 = 200 \, \Omega$ ,  $R_3 = 100 \, \Omega$ ,  $R_4 = 200 \, \Omega$ ,  $R_5 = 250 \, \Omega$ ,  $C_1 = 2 \, \mu\text{F}$  и  $C_2 = 4 \, \mu\text{F}$ . Прекидач П је затворен и у колу је успостављено стационарно стање. После отварања прекидача, до успостављања новог стационарног стања, кроз кондензатор  $C_2$  протекне  $q_2 = -20 \, \mu\text{C}$ . Колики је при томе проток  $q_1$  кроз кондензатор  $C_1$ ?



Слика 363.1.

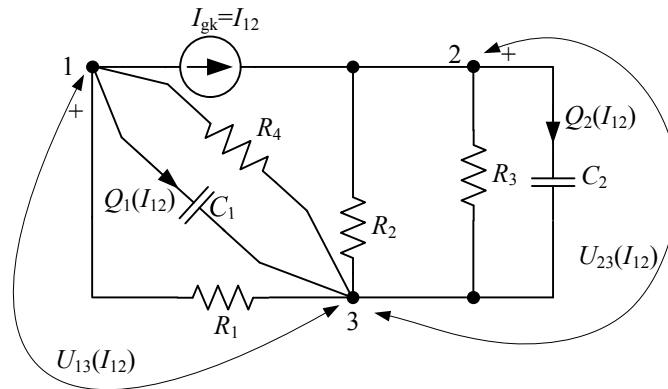
РЕШЕЊЕ

Користећи се теоремом компензације, грана са прекидачем П може се заменити струјним компензационим генератором струје  $I_{\text{gk}} = \begin{cases} 0, & \text{П отворен} \\ I_{12}, & \text{П затворен} \end{cases}$ . По теореме суперпозиције је  $q_2 = Q_2^0 - Q_2^Z = -Q_2(I_{\text{gk}} = I_{12})$ , па је  $Q_2(I_{12}) = -q_2 = 20 \, \mu\text{C}$ . Аналогно томе је и  $q_1 = -Q_1(I_{\text{gk}} = I_{12})$ .

На слици 363.2 је представљено коло у коме делује само струјни генератор струје  $I_{\text{gk}} = I_{12}$ . Како је  $Q_2(I_{12}) = C_2 \cdot U_{23}(I_{12})$ , то је  $U_{23}(I_{12}) = -\frac{q_2}{C_2} = 5 \, \text{V}$ . Са слике 363.2 је и

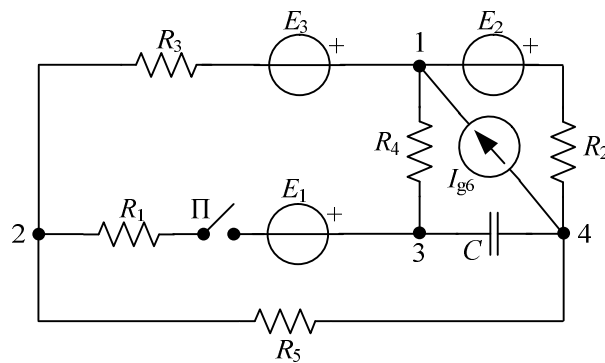
$$U_{23}(I_{12}) = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} I_{12}, \quad \text{па је} \quad I_{12} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} U_{23}(I_{12}) = 75 \, \text{mA}.$$

$$U_{13}(I_{12}) = -\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} I_{12} = -5,625 \, \text{V}, \quad \text{па је} \quad q_1 = -C_1 \cdot U_{13}(I_{12}) = 11,25 \, \mu\text{C}.$$



Слика 363.2.

**364.** За коло сталне струје са слике 364.1 је  $E_3 = 5 \text{ V}$ ,  $R_1 = 150 \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 100 \Omega$ ,  $R_4 = 50 \Omega$ ,  $R_5 = 300 \Omega$  и  $C = 1 \mu\text{F}$ . Прекидач П је затворен и у колу је успостављено стационарно стање. При томе је позната струја  $I_{42} = 20 \text{ mA}$ . По отварању прекидача П кроз кондензатор протекне  $q_{34} = 0,7 \mu\text{C}$ . Израчунати оптерећеност кондензатора  $Q$  при отвореном прекидачу П.



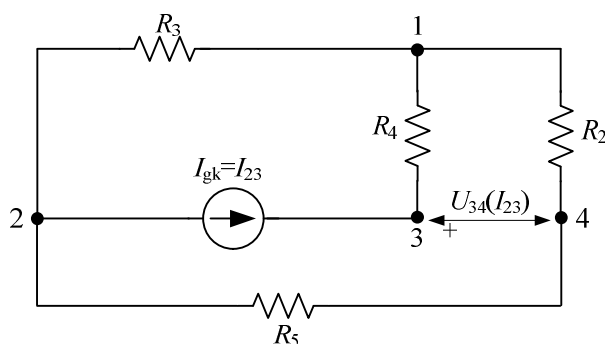
Слика 364.1.

РЕШЕЊЕ

Заменом гране између тачака 2 и 3 струјним компензационим генератором струје

$I_{gk} = \begin{cases} 0, & \text{П отворен} \\ I_{23}, & \text{П затворен} \end{cases}$  и применом теореме суперпозиције, добија се

$$q_{34} = C(U_{34}^0 - U_{34}^3) = -CU_{34}(I_{23}), \text{ одакле је } U_{34}(I_{23}) = -\frac{q_{34}}{C} = -0,7 \text{ V}.$$



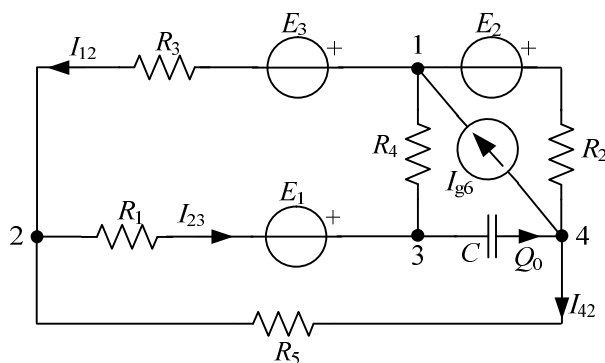
Слика 364.2.

Према слици 364.2 је  $U_{34}(I_{23}) = R_2 \frac{R_3 I_{23}}{R_2 + R_3 + R_5} + R_4 I_{23}$ , па је

$$I_{23} = \frac{-\frac{q_{34}}{C}}{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_5} + R_4} = -10 \text{ mA} . \text{ Према слици 364.3 је } I_{12} = I_{23} - I_{42} = -30 \text{ mA} , \text{ па је}$$

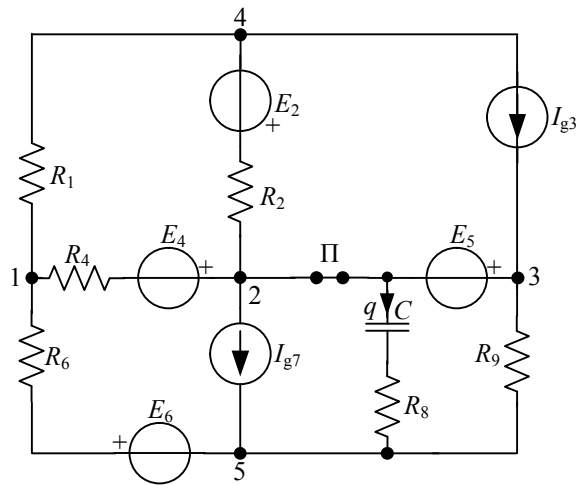
$$U_{34} = -R_5 I_{42} + R_3 I_{12} + E_3 + R_4 I_{23} = -4,5 \text{ V} .$$

Оптерећеност кондензатора при затвореном прекидачу П је  $Q_0 = Q^3 = C U_{34} = -4,5 \text{ } \mu\text{C}$ , а оптерећеност кондензаторе при отвореном прекидачу је  $Q = Q_0 + q = -3,8 \text{ } \mu\text{C}$ .



Слика 364.3.

**365.** За коло приказано на слици 365.1 познато је  $E_2 = 5 \text{ V}$ ,  $E_4 = 6 \text{ V}$ ,  $E_5 = 10 \text{ V}$ ,  $E_6 = 1 \text{ V}$ ,  $I_{g3} = 5 \text{ mA}$ ,  $I_{g7} = 14 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_6 = R_8 = 0,5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_9 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ . Прекидач П је затворен и у колу је успостављено стационарно стање. По отварању прекидача кроз кондензатор протекне  $q = 1,4 \text{ mC}$ . Израчунати отпорност  $R_4$ .

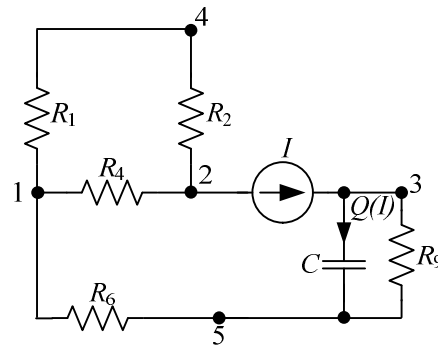


Слика 365.1.

**РЕШЕЊЕ**

Замењујући грану са прекидачем П струјним компензационим генератором и примењујући суперпозицију, добија се коло са слике 365.2, при чему је  $q = -Q(I) = -CR_9 I$ , одакле је

$$I = \frac{-q}{C \cdot R_9} = -7 \text{ mA}.$$



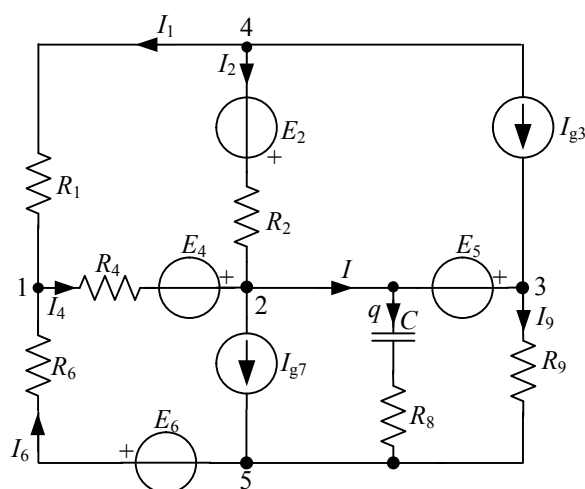
Слика 365.2.

Према слици 365.3 је  $I_9 = I + I_{g3} = -2 \text{ mA}$ ,  $I_6 = I_9 + I_{g7} = 12 \text{ mA}$  и  $U_{12} = E_5 - R_9 I_9 + E_6 - R_6 I_6 = 9 \text{ V}$ .

Такође је  $I_1 + I_2 + I_{g3} = 0$  и  $U_{12} = R_2 I_2 - E_2 - R_1 I_1 = 9 \text{ V}$ . Из ове две једначине је  $I_1 = -\frac{U_{12} + R_2 I_{g3} + E_2}{R_1 + R_2} = -9,5 \text{ mA}$ , па је  $I_4 = I_1 + I_6 = 2,5 \text{ mA}$ . Како је  $U_{12} = -E_4 + R_4 I_4$ ,

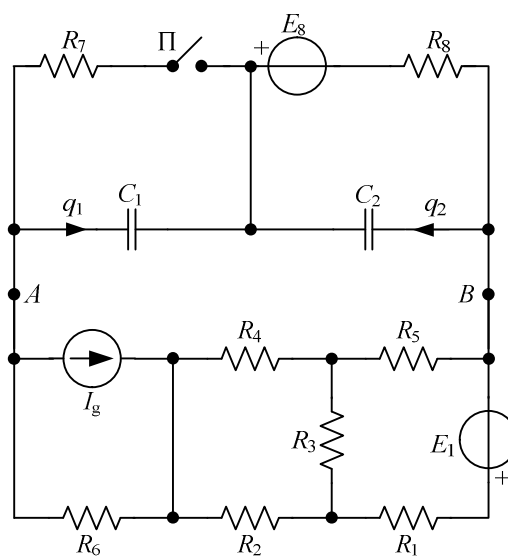
$$\text{то је } R_4 = \frac{U_{12} + E_4}{I_4} = 6 \text{ k}\Omega.$$





Слика 365.3.

**366.** За коло приказано на слици 366.1 је  $E_8 = 7 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = R_8 = 100 \Omega$ ,  $R_6 = 50 \Omega$ ,  $R_7 = 200 \Omega$ ,  $C_1 = 0,5 \mu\text{F}$  и  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ . Прекидач П је отворен и у колу је успостављено стационарно стање. Израчунати протоке  $q_1$  и  $q_2$  кроз кондензаторе после затварања прекидача П, ако је оптерећеност кондензатора  $C_1$  у новом стационарном стању  $Q_1 = 1 \mu\text{C}$ .



Слика 366.1.

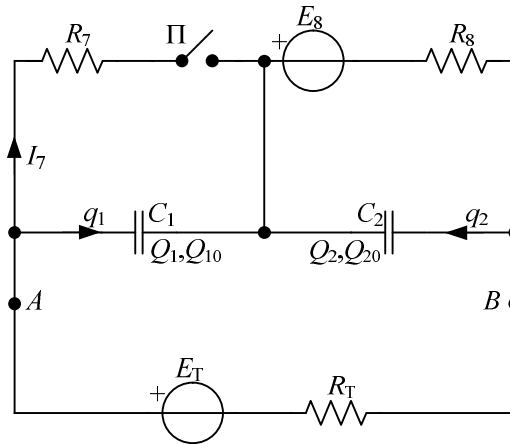
РЕШЕЊЕ

Применом Тевененове теореме може се формирати коло са слике 366.2. Отпорност Тевененовог генератора је  $R_T = 200 \Omega$ .

При затвореном прекидачу је

$$Q_1 = C_1 R_7 I_7 = C_1 R_7 \frac{E_T - E_8}{R_T + R_7 + R_8},$$

одакле се добија  $E_T = 12 \text{ V}$ .  
Оптерећеност кондензатора  $C_2$  је

$$Q_2 = C_2 (-E_8 - R_8 I_7) = -16 \mu\text{C}.$$


Слика 366.2.

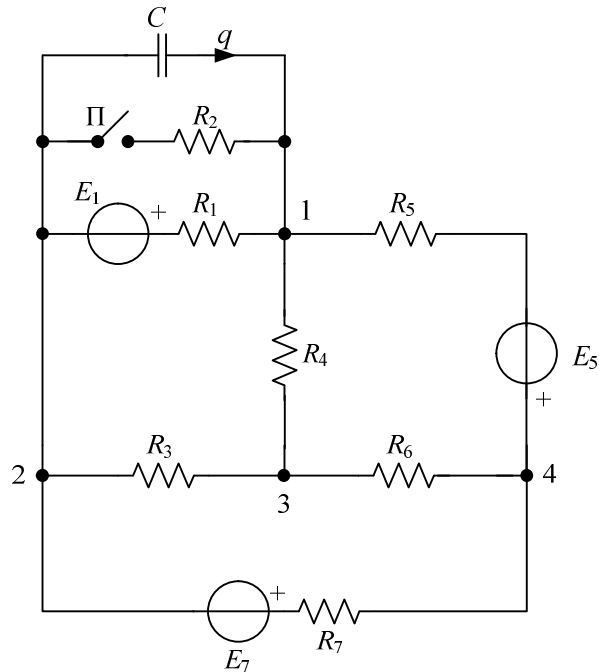
При отвореном прекидачу оптерећености кондензатора су

$$Q_{10} = C_1 (-E_8 + E_T) = 2,5 \mu\text{C} \quad \text{и} \quad Q_{20} = -C_2 E_8 = -14 \mu\text{C}.$$

Протоци су

$$q_1 = Q_1 - Q_{10} = -1,5 \mu\text{C} \quad \text{и} \quad q_2 = Q_2 - Q_{20} = -2 \mu\text{C}.$$

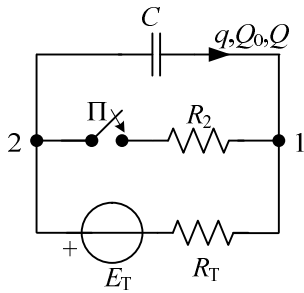
**367.** За коло са слике 367.1 је  $R_1 = R_3 = 100 \Omega$ ,  $R_4 = 700 \Omega$ ,  $R_5 = 350 \Omega$ ,  $R_6 = 175 \Omega$ ,  $R_7 = 150 \Omega$  и  $C = 0,5 \mu\text{F}$ . У стационарном стању када је прекидач П отворен, познате су струје  $I_{23} = 15 \text{ mA}$  и  $I_{34} = 10 \text{ mA}$ . По затварању прекидача П, до успостављања новог стационарног стања, кроз кондензатор протекне  $q = q_{21} = -0,5 \mu\text{C}$ . Израчунати отпорност  $R_2$ .



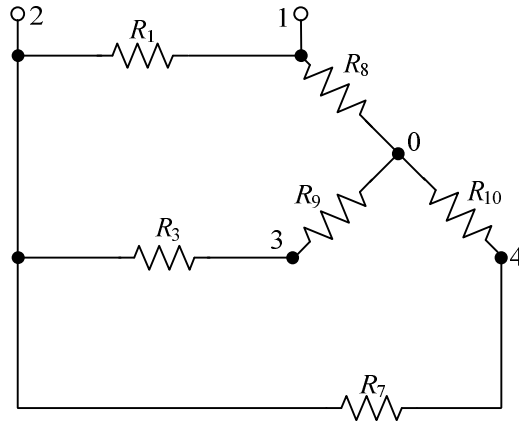
Слика 367.1.

РЕШЕЊЕ

Користећи се Тевененовом теоремом може се формирати еквивалентно коло приказано на слици 367.2. Тевененова отпорност се добија према слици 367.3, при чему је  $R_9 = \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 100 \, \Omega$ ,  $R_8 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = 200 \, \Omega$  и  $R_{10} = \frac{R_5 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 50 \, \Omega$ , па је  $R_T = R_{e12}'' = R_1 \parallel (R_8 \oplus (R_3 \oplus R_9) \parallel (R_7 \oplus R_{10}))$ , односно  $R_T = 75 \, \Omega$ .



Слика 367.2.

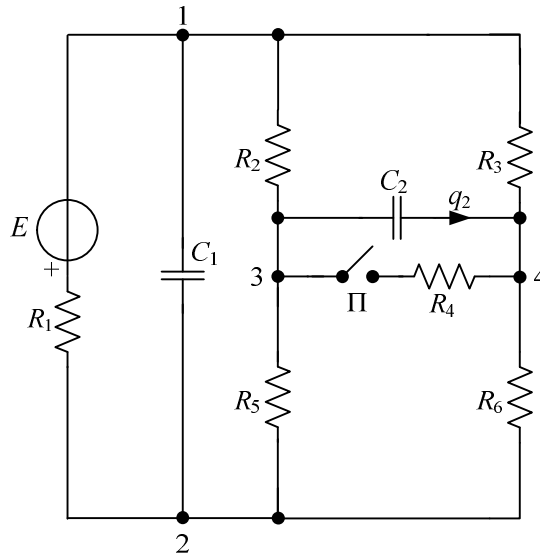


Слика 367.3.

Са слике 367.1 је  $I_{31} = I_{23} - I_{34} = 5 \, \text{mA}$ , па је Тевененова емс  $E_T = U'_{21} = R_4 I_{31} + R_3 I_{23} = 5 \, \text{V}$ .

Оптерећеност кондензатора при отвореном прекидачу П је  $Q_0 = C E_T = 2,5 \, \mu\text{C}$ , а при затвореном прекидачу је  $Q = Q_0 + q = 2 \, \mu\text{C}$ . Како је  $Q = C \frac{R_2 E_T}{R_2 + R_T}$ , добија се  $R_2 = 300 \, \Omega$ .

**368.** За коло сталне струје са слике 368.1 је  $E = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_6 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 2 \text{ }\mu\text{F}$  и  $C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ . Прекидач П је отворен и у колу је успостављено стационарно стање. Затим се прекидач П затвори. Прираштај енергије кондензатора  $C_1$  до успостављања новог стационарног стања је  $\Delta W_{C1} = -59 \text{ }\mu\text{J}$ . Израчунати проток  $q_2$  по затварању прекидача П и отпорност  $R_4$ .



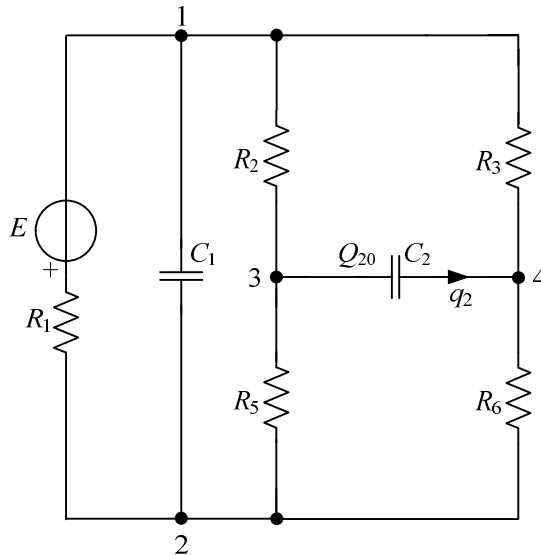
Слика 368.1.

РЕШЕЊЕ

Слика 368.2 приказује коло при отвореном прекидачу П. Тада је

$$U_{21}^0 = \frac{\frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_5} + \frac{1}{R_3 + R_6}} = 30 \text{ V} \quad \text{и} \quad U_{34}^0 = \left( \frac{R_2}{R_2 + R_5} - \frac{R_3}{R_3 + R_6} \right) U_{21}^0 = -10 \text{ V}, \quad \text{па је}$$

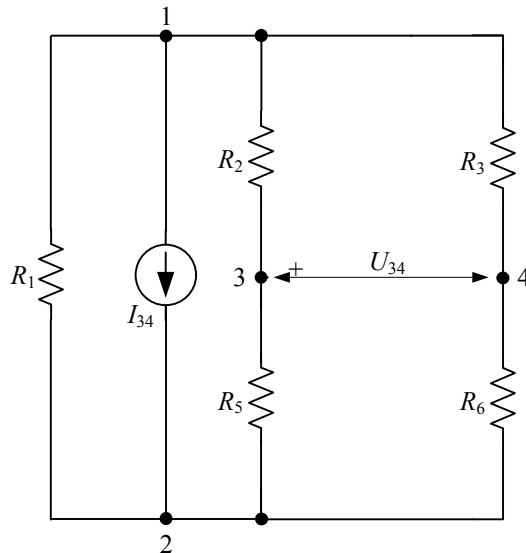
оптерећеност кондензатора  $C_2$  при отвореном прекидачу П  $Q_{20} = C_2 U_{34}^0 = -10 \text{ }\mu\text{C}$ .



Слика 368.2.

Како је  $\Delta W_{C1} = \frac{1}{2} C_1 \Delta(U_{21}^2) = \frac{1}{2} C_1 ((U_{21}^z)^2 - (U_{21}^o)^2)$ , то је напон кондензатора  $C_1$  при затвореном прекидачу П  $U_{21}^z = \pm \sqrt{\frac{2\Delta W_{C1}}{C_1} + (U_{21}^o)^2} = \pm 29 \text{ V}$ . С обзиром на поларитет емс  $E$  као јединог генератора у колу, мора бити  $U_{21}^z > 0$ , па је  $U_{21}^z = 29 \text{ V}$ .

Отпорност  $R_4$  се може одредити као  $R_4 = \frac{U_{34}^z}{I_{34}}$ , па треба одредити и струју, и напон те гране при затвореном прекидачу П. Замењујући грану са отпорником компензационим струјним генератором струје  $I_{\text{gk}} = \begin{cases} 0, & \text{П отворен} \\ I_{34}, & \text{П затворен} \end{cases}$  и примењујући теорему суперпозиције, добија се  $U_{21}(E, I_{\text{gk}}) = U_{21}(E) + U_{21}(I_{\text{gk}})$ , па је  $\Delta U_{21} = U_{21}(I_{34})$  јер се  $E$  не мења, па се не мења ни  $U_{21}(E)$ . Одавде је  $U_{21}(I_{34}) = \Delta U_{21} = U_{21}^z - U_{21}^o = -1 \text{ V}$ .



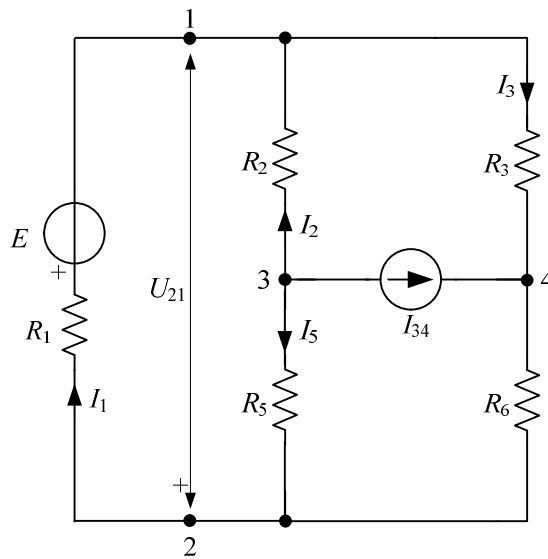
Слика 368.3.

Струја  $I_{34}$  се може израчунати применом теореме реципроцитета, као на слици 368.3, при чему је  $U_{34} = -U_{21}(I_{34})$ , где је  $U_{34}$  напон у колу са слике 368.3, а  $U_{21}(I_{34}) = -1 \text{ V}$  је промена напона услед затварања прекидача у колу са слике 368.1.

Анализа кола са слике 368.3 даје  $U_{21}(I_{34}) = U_{34} = \frac{\frac{R_2}{R_2 + R_5} - \frac{R_3}{R_3 + R_6}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_5} + \frac{1}{R_3 + R_6}} I_{34}$ , одакле је

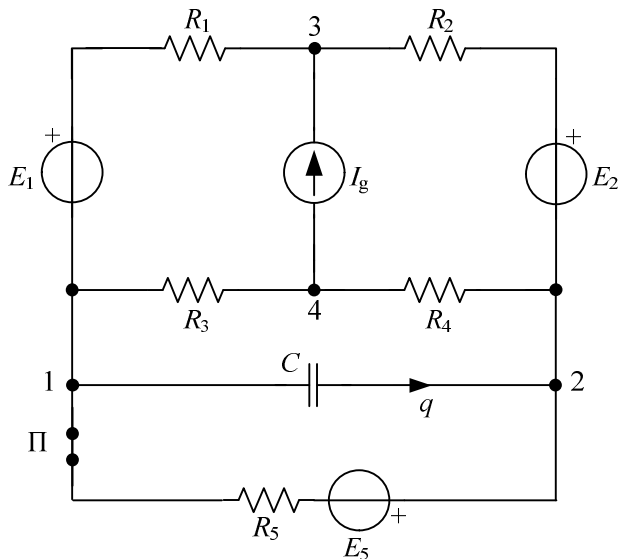
$$I_{34} = -1 \text{ mA}.$$

Ради израчунавања напона  $U_{34}^Z$  посматра се коло са слике 368.4, за које је  $I_1 = \frac{U_{21}^Z - E}{R_1} = -7,1 \text{ mA}$ ,  $I_2 + I_5 + I_{34} = 0$ ,  $U_{21}^Z = R_2 I_2 - R_5 I_5$  и  $I_1 = -I_2 + I_3$ . Из ових једначина је  $I_2 = 2,6 \text{ mA}$  и  $I_3 = -4,5 \text{ mA}$ , па је  $U_{34}^Z = R_3 I_3 + R_2 I_2 = -5 \text{ V}$ . Оптерећеност кондензатора при затвореном прекидачу П је  $Q_2 = C_2 U_{34}^Z = -5 \mu\text{C}$ , па је проток  $q_2 = Q_2 - Q_{20} = 5 \mu\text{C}$ . Тражена отпорност је  $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$ .



Слика 368.4.

**369.** У колу приказаном на слици 369.1 је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_2 = 6 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $C = 1 \mu\text{F}$ . У првом стационарном стању прекидач П је отворен. (а) Израчунати емс  $E_5$  тако да у стационарном стању после затварања прекидача П снага коју прима грана  $E_5 - R_5$  буде максимална. (б) Колики је проток  $q$  кроз кондензатор по затварању прекидача?



Слика 369.1.

РЕШЕЊЕ

Горњи део кола са слике 369.1 може се заменити Тевененовим генератором (слика 369.2) емс  $E_T = U'_{21} = (R_3 + R_4) \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 4 \text{ V}$ . Како је  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ , мост је у равнотежи, па емс  $E_T$  не зависи од струје струјног генератора  $I_g$ . Отпорност Тевененовог генератора је  $R_T = R'_{e12} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{4}{3} \text{ k}\Omega$ .

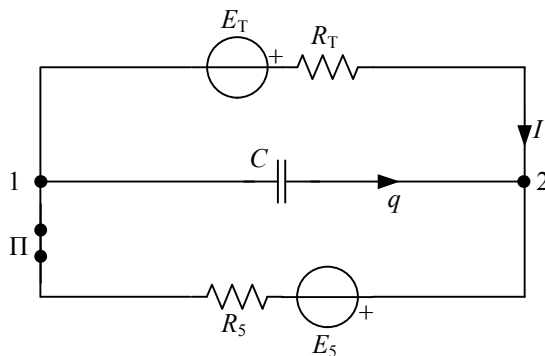
По затварању прекидача успоставља се струја  $I = \frac{E_T - E_5}{R_T + R_5}$ . Снага коју прима грана

$E_5 - R_5$  је  $P_5 = U_{21} I = E_T I - R_T I^2$ . Максимум ове снаге се достиже за  $\frac{dP_5}{dI} = 0$ , односно

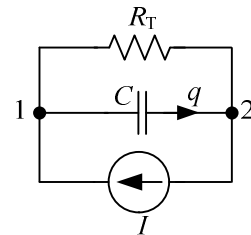
$I = \frac{E_T}{2R_T}$ , при чему је  $U_{21} = 2 \text{ V}$  и  $(P_5)_{\max} = 3 \text{ mW}$ .

(а) Тражена емс је  $E_5 = U_{21} - R_5 I = -1 \text{ V}$ .

(б) До протока кроз кондензатор долази усред прикључења нове гране, па је, по теореме компензације (слика 369.3),  $q = Q(I) = C R_T I = 2 \text{ }\mu\text{C}$ . До истог резултата се може доћи и преко  $q = \Delta Q = Q - Q_0 = C(U_{12} + E_T) = 2 \text{ }\mu\text{C}$ .



Слика 369.2.

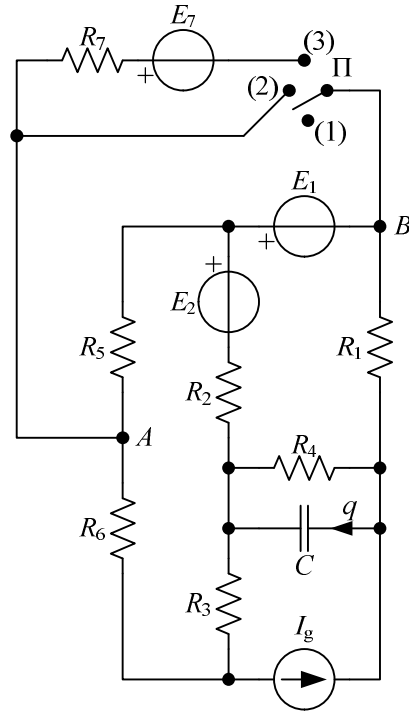


Слика 369.3.

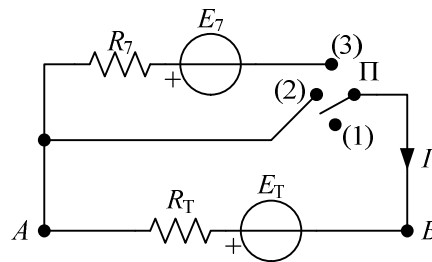
**370.** За коло сталне струје са слике 370.1 је  $R_1 = 100 \, \Omega$ ,  $R_2 = 300 \, \Omega$ ,  $R_3 = 150 \, \Omega$ ,  $R_4 = 50 \, \Omega$ ,  $R_5 = 150 \, \Omega$ ,  $R_6 = 50 \, \Omega$ ,  $R_7 = 200 \, \Omega$ ,  $E_7 = 6 \, \text{V}$  и  $C = 3 \, \mu\text{F}$ . Преклопник П се налази у положају (1) и у колу је успостављено стационарно стање. По пребацивању преклопника из положаја (1) у положај (2), до успостављања новог стационарног стања, кроз кондензатор протекне  $q = 1 \, \mu\text{C}$ . Колики је проток кроз кондензатор када се, затим, преклопник из положаја (2) пребаци у положај (3)?

#### РЕШЕЊЕ

Доњи део кола, у односу на прикључке  $A$  и  $B$ , може се заменити Тевененовим генератором отпорности  $R_T = R_5 \parallel (R_6 \oplus R_3 \oplus R_2 \parallel (R_1 \oplus R_4))$ , односно  $R_T = 100 \, \Omega$ , и непознате емс  $E_T$ , као на слици 370.2. Када је преклопник у положају (1), тада је  $I^{(1)} = 0$ , а када је у положају (2), тада је  $I^{(2)} = \frac{E_T}{R_T}$ . Ако одредимо  $I^{(2)}$ , добићемо  $E_T = R_T I^{(2)}$ .



Слика 370.1.

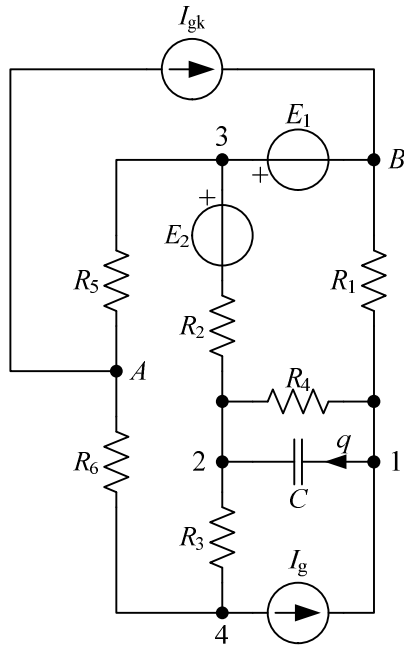


Слика 370.2.

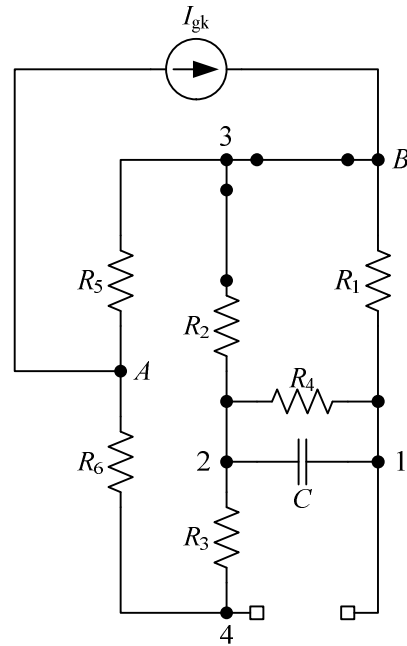
Горњи део кола на слици 370.1 може се заменити компензационим генератором струје  $I_{\text{gk}} = I$ , као на слици 370.3. Када се преклопник пребаци из положаја (1) у положај (2), струја компензационог генератора се промени за  $\Delta I_{\text{gk}} = I^{(2)} - I^{(1)} = I^{(2)}$ . Та промена проузроковаће промену напона кондензатора, услед чега ће кроз кондензатор протећи наелектрисање. Проток је  $q = C \Delta U_{12}$ .



С обзиром на то да се у колу на слици 370.3 мења једино струја  $I_{\text{gk}}$ , на основу теореме линеарне зависности одзива од побуде следи  $\Delta U_{12} = a \Delta I_{\text{gk}} = a I^{(2)}$ , где је  $a$  константна величина. На основу задатих података,  $\Delta U_{12} = \frac{q}{C} = \frac{1}{3} \text{ V}$ .



Слика 370.3.



Слика 370.4.

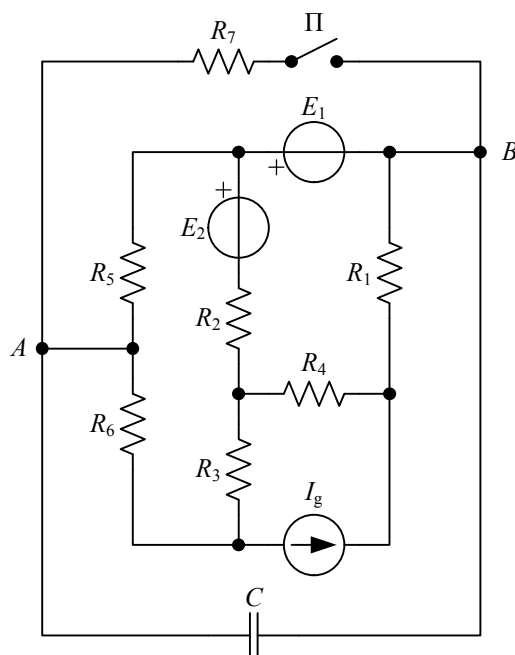
По теореме суперпозиције, када у колу са слике 370.3 делује само генератор  $I_{\text{gk}}$ , а остале екситације су анулиране, тада је  $U'_{12} = a I_{\text{gk}}$  (слика 370.4). Анализом кола са слике 370.4 добија се  $U'_{12} = \frac{R_5}{R_5 + R_6 \oplus R_3 \oplus R_2 \parallel (R_1 \oplus R_4)} \frac{R_2}{R_2 + R_4 + R_1} R_4 I_{\text{gk}}$ , па је  $a = \frac{1}{90} \text{ k}\Omega$ ,  $I^{(2)} = 30 \text{ mA}$  и  $E_T = 3 \text{ V}$ .

Знајући параметре Тевененовог генератора, из кола на слици 370.2 може се израчунати струја када је преклопник у положају (3),  $I^{(3)} = \frac{E_T - E_7}{R_T + R_7} = -10 \text{ mA}$ . На основу линеарности је  $\Delta U'_{12} = a(I^{(3)} - I^{(2)}) = -\frac{4}{9} \text{ V}$ , па је нови проток кроз кондензатор  $q' = C \Delta U'_{12} = -\frac{4}{3} \mu\text{C}$ .

**371.** За коло приказано на слици 371.1 познато је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_2 = 2 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = R_5 = 150 \Omega$ ,  $R_4 = R_6 = 50 \Omega$ ,  $R_7 = 500 \Omega$  и  $C = 1,6 \mu\text{F}$ . Прекидач  $\Pi$  је отворен и у колу је успостављено стационарно стање. По затварању прекидача  $\Pi$ , кроз грану са кондензатором протекне наелектрисање  $q_{BA} = 0,8 \mu\text{C}$ . Одредити струју струјног генератора  $I_g$ .

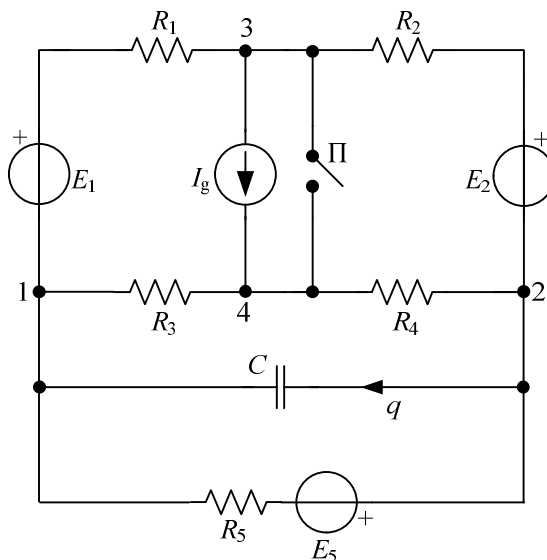
РЕЗУЛТАТ

Струја струјног генератора је  $I_g = 0,1 \text{ A}$ .



Слика 371.1.

**372.** У колу приказаном на слици 372.1 је  $E_1 = 12 \text{ V}$ ,  $E_2 = 6 \text{ V}$ ,  $E_5 = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_4 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = R_5 = 2 \text{ k}\Omega$  и  $C = 1 \mu\text{F}$ . Прекидач  $\Pi$  је затворен и у колу је успостављено стационарно стање. Затим се прекидач  $\Pi$  отвори. Од тренутка отварања прекидача до успостављања другог стационарног стања, проток кроз грану са кондензатором је  $q = -1 \mu\text{C}$ . Израчунати снагу идеалног струјног генератора у стационарном стању када је прекидач отворен.



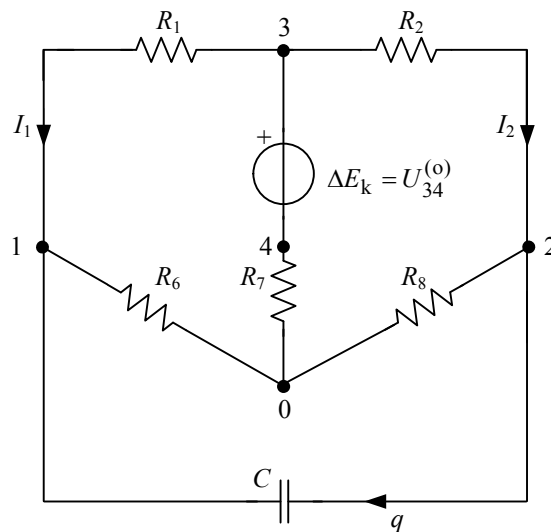
Слика 372.1.

РЕШЕЊЕ

Део кола између тачака 3 и 4, са струјним генератором и прекидачем, може се заменити компензационим напонским генератором за који је  $E_k = \begin{cases} 0, & \Pi \text{ затворен} \\ U_{34}^{(0)}, & \Pi \text{ отворен} \end{cases}$ , где

је  $U_{34}^{(0)}$  напон при отвореном прекидачу. Референтни смер емс  $E_k$  је од чвора 4 ка чвору 3. Отварањем прекидача, та емс се промени за  $\Delta E_k = U_{34}^{(0)}$ .

На основу теореме линеарне зависности одзива од побуде, проток кроз кондензатор по отварању прекидача је  $q = CU'_{21}(\Delta E_k)$ , где је  $U'_{21}(\Delta E_k)$  напон када у колу делује само генератор емс  $\Delta E_k$ . Из задатих података је  $U'_{21}(\Delta E_k) = \frac{q}{C} = -1 \text{ V}$ . После трансформације троугла  $R_3 - R_4 - R_5$  у трокраку звезду  $R_6 - R_7 - R_8$ , где је  $R_6 = 0,8 \text{ k}\Omega$ ,  $R_7 = 0,4 \text{ k}\Omega$  и  $R_8 = 0,4 \text{ k}\Omega$ , добија се коло са слике 372.2. У том колу је познат напон  $U'_{21} = -1 \text{ V}$  и све отпорности, па се решавањем кола добија  $\Delta E_k = U_{34}^{(0)} = 5 \text{ V}$ .



Слика 372.2.

Снага коју развија струјни генератор у колу на слици 372.1 је  $P_{I_g} = -U_{34}^{(0)} I_g$ , па треба одредити струју  $I_g$ . Узимајући чвор 4 за референтни, при отвореном прекидачу П је, по методу потенцијала чворова,

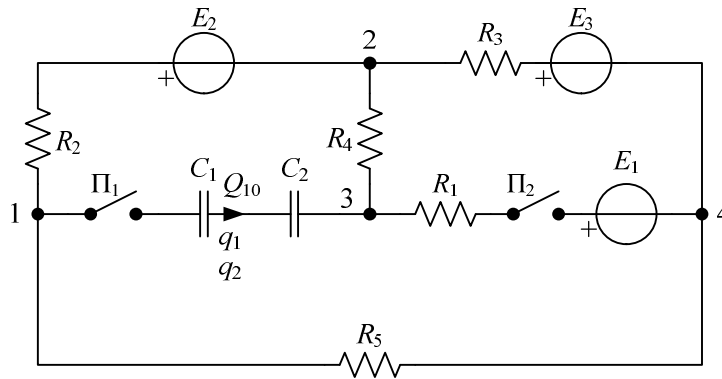
$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) V_1 - \frac{1}{R_5} V_2 - \frac{1}{R_1} V_3 = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_5}{R_5}, \quad (372.1)$$

$$-\frac{1}{R_5} V_1 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_2 - \frac{1}{R_2} V_3 = \frac{E_5}{R_5} - \frac{E_2}{R_2}, \quad (372.2)$$

$$-\frac{1}{R_1} V_1 - \frac{1}{R_2} V_2 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_3 = \frac{E_1}{R_1} - I_g + \frac{E_2}{R_2}, \quad (372.3)$$

где је  $V_3 = U_{34}^{(0)} = 5 \text{ V}$ . Решавањем овог система добија се  $V_1 = -4 \text{ V}$ ,  $V_2 = -1 \text{ V}$  и  $I_g = 3 \text{ mA}$ , па је снага струјног генератора  $P_{I_g} = -15 \text{ mW}$ .

**373.** За коло сталне струје са слике 373.1 познато је  $E_1 = 6 \text{ V}$ ,  $E_3 = 5 \text{ V}$ ,  $R_1 = 150 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 100 \Omega$ ,  $R_4 = 50 \Omega$ ,  $R_5 = 300 \Omega$ ,  $C_1 = 1 \mu\text{F}$  и  $C_2 = 2,5 \mu\text{F}$ . При отвореним прекидачима  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  први кондензатор је оптерећен, а други није. Прво се затвори само прекидач  $\Pi_1$  и установи проток  $q_1 = 6 \mu\text{C}$ . Затим се затвори и прекидач  $\Pi_2$ , а нови проток је  $q_2 = -0,5 \mu\text{C}$ . Одредити почетну оптерећеност првог кондензатора,  $Q_{10}$ , при отвореним прекидачима.



Слика 373.1.

РЕШЕЊЕ

По затварању прекидача  $\Pi_1$  проток  $q_1$  је одређен једначином  $\frac{Q_{10} + q_1}{C_1} + \frac{q_1}{C_2} = U_{13}$ .

По затварању прекидача  $\Pi_2$  успоставља се струја у грани са тим прекидачем јачине  $I_{34}$ , а напон редне везе кондензатора се мења на  $U'_{13}$ . Одговарајући проток,  $q_2$ ,

одређен је једначином  $\frac{Q_{10} + q_1 + q_2}{C_1} + \frac{q_1 + q_2}{C_2} = U'_{13}$ , односно  $\frac{q_2}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = U'_{13} - U_{13}$ ,

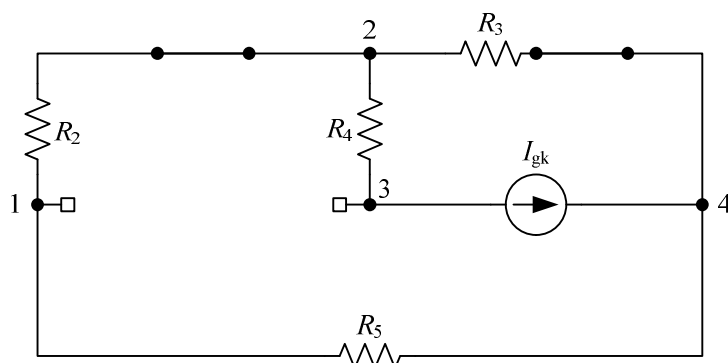
одакле је  $U'_{13} - U_{13} = -0,7 \text{ V}$ . На основу теорема компензације и суперпозиције, прираштај  $U'_{13} - U_{13}$  једнак је напону између тачака 1 и 3 у колу приказаном на слици 373.2 у коме делује само компензациони струјни генератор струје  $I_{\text{gk}} = I_{34}$ , односно

$$U'_{13} - U_{13} = R_4 I_{\text{gk}} + R_2 I_{\text{gk}} \frac{R_3}{R_2 + R_5 + R_3}, \quad \text{одакле је } I_{\text{gk}} = -10 \text{ mA}. \quad \text{Даље је}$$

$$U_{24} = E_1 + (R_1 + R_4) I_{\text{gk}} = 4 \text{ V}, \quad I_{24} = \frac{U_{24} - E_3}{R_3} = -10 \text{ mA} \quad \text{и}$$

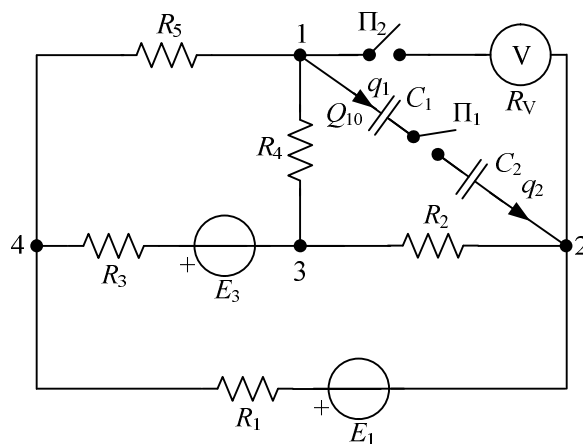
$$I_{14} = -I_{24} - I_{34} = 20 \text{ mA} = \frac{U_{24} + E_2}{R_2 + R_5}, \quad \text{одакле је } E_2 = 4 \text{ V} \quad \text{и}$$

$U'_{13} = R_4 I_{34} + E_2 - R_2 I_{14} = 1,5 \text{ V}$ . У стационарном стању када је прекидач  $\Pi_2$  отворен,  $U_{13} = 2,2 \text{ V}$ , па је тражено почетно наелектрисање првог кондензатора  $Q_{10} = -6,2 \mu\text{C}$ .



Слика 373.2.

**374.** За коло са слике 374.1 познато је  $R_1 = 600 \, \Omega$ ,  $R_2 = 150 \, \Omega$ ,  $R_3 = 50 \, \Omega$ ,  $R_4 = 100 \, \Omega$ ,  $R_5 = 400 \, \Omega$ ,  $C_1 = 4 \, \mu\text{F}$  и  $C_2 = 1 \, \mu\text{F}$ . У стационарном стању када су прекидачи  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  отворени, кондензатор  $C_1$  је оптерећен, а кондензатор  $C_2$  неоптерећен. Прво се затвори само прекидач  $\Pi_1$ , а до успостављања стационарног стања кроз кондензаторе протекне  $q_1 = -1,2 \, \mu\text{C}$ . Затим се затвори и  $\Pi_2$ . До успостављања новог стационарног стања кроз кондензаторе протекне  $q_2 = -0,16 \, \mu\text{C}$ , а показивање волтметра је  $U_{12} = 5,8 \, \text{V}$ . Израчунати (а) унутрашњу отпорност волтметра и (б) оптерећеност кондензатора  $C_1$  у првом стационарном стању, када су оба прекидача отворена.



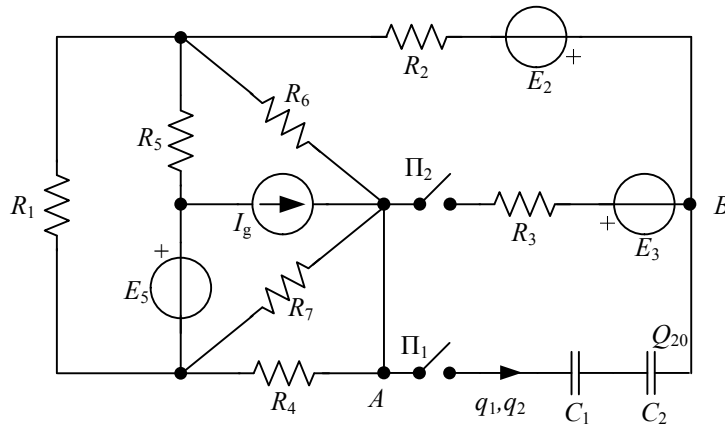
Слика 374.1.

РЕЗУЛТАТ

(а) Унутрашња отпорност волтметра је  $R_V = 5,8 \, \text{k}\Omega$ .

(б) Почетна оптерећеност кондензатора  $C_1$  при отвореним прекидачима је  $Q_{10} = 30 \, \mu\text{C}$ .

**375.** За коло сталне струје са слике 375.1 познато је  $R_1 = 300 \, \Omega$ ,  $R_2 = 100 \, \Omega$ ,  $R_3 = 130 \, \Omega$ ,  $R_4 = 135 \, \Omega$ ,  $R_5 = 450 \, \Omega$ ,  $R_6 = 360 \, \Omega$ ,  $R_7 = 540 \, \Omega$ ,  $C_1 = 10 \, \mu\text{F}$  и  $C_2 = 20 \, \mu\text{F}$ . При отвореним прекидачима први кондензатор је неоптерећен, а други има почетну оптерећеност  $Q_{20} = 40 \, \mu\text{C}$ . Прво се затвори само прекидач  $\Pi_1$ , после чега, до успостављања стационарног стања, кроз грану са кондензаторима протекне  $q_1 = 120 \, \mu\text{C}$ . Затварањем прекидача  $\Pi_2$  у коло се укључује грана  $E_3 - R_3$ . Израчунати (а) емс  $E_3$  тако да, у стационарном стању, грана  $E_3 - R_3$  прима максималну снагу и (б) проток  $q_2$  кроз грану са кондензаторима по затварању прекидача  $\Pi_2$ .



Слика 375.1.

**РЕШЕЊЕ**

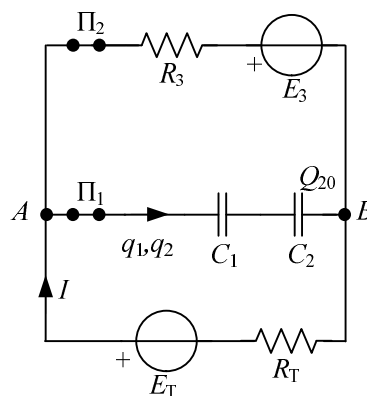
Користећи се Тевененовом теоремом, задато коло може се упростити као на слици 375.2, при чему је  $R_T = (R_4 \parallel R_7 \oplus R_1 \parallel R_5) \parallel R_6 \oplus R_2 = 260 \, \Omega$ . Када је прекидач  $\Pi_1$  затворен, а прекидач  $\Pi_2$  отворен,  $E_T = \frac{Q_{20} + q_1}{C_2} + \frac{q_1}{C_1} = \frac{Q_{20}}{C_2} + q_1 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 20 \, \text{V}$ .

Снага коју прима грана  $E_3 - R_3$  када се затвори прекидач  $\Pi_2$  је  $P_3 = U_{AB} I = (E_T - R_T I) I = E_T I - R_T I^2$ .

Екстремум ове снаге постиже се за  $\frac{dP_3}{dI} = 0$ , односно  $E_T - 2R_T I = 0$ , при чему је  $I = \frac{E_T}{2R_T}$ . У питању је максимум јер је

$\frac{d^2 P_3}{dI^2} = -2R_T < 0$ . Како је  $I = \frac{E_T - E_3}{R_T + R_3}$ , то

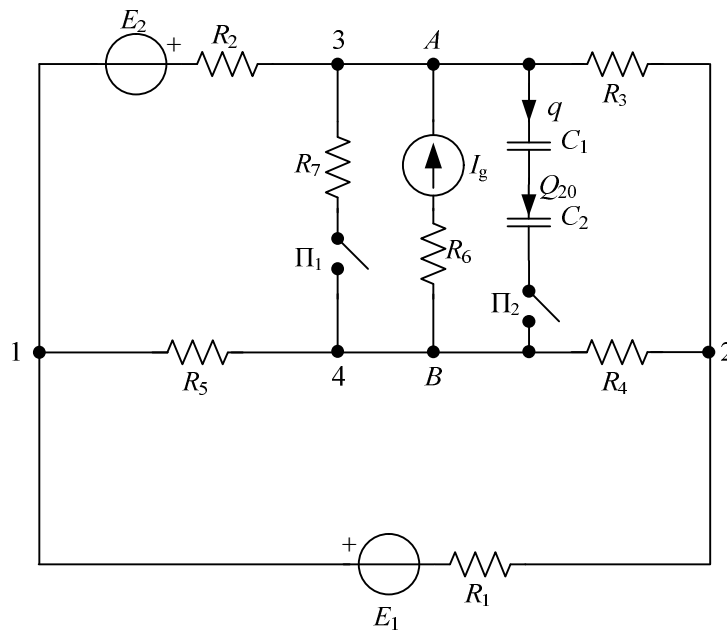
$$E_3 = \frac{R_T - R_3}{2R_T} E_T = 5 \, \text{V}.$$



Слика 375.2.

Напон гране са кондензаторима при затвореном прекидачу  $\Pi_2$  је  $U_{AB} = E_T - R_T I = \frac{E_T}{2} = 10 \text{ V}$ , односно  $U_{AB} = \frac{Q_{20} + q_1 + q_2}{C_2} + \frac{q_1 + q_2}{C_1} = E_T + q_2 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$ , па је  $\frac{E_T}{2} = E_T + q_2 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$ , одакле је  $q_2 = \frac{-E_T C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} = -\frac{200}{3} \mu\text{C}$ .

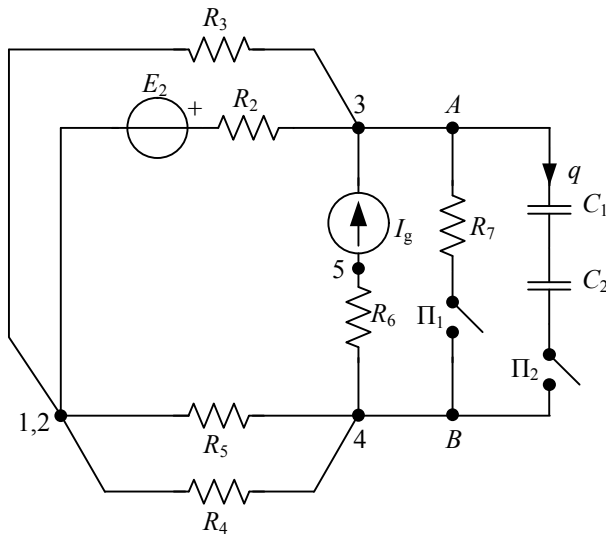
**376.** За коло сталне струје са слике 376.1 познато је  $E_2 = 10 \text{ V}$ ,  $I_g = 40 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 500 \Omega$ ,  $R_4 = R_5 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_6 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 3 \mu\text{F}$  и  $C_2 = 6 \mu\text{F}$ . Прекидач  $\Pi_1$  је затворен, а прекидач  $\Pi_2$  отворен. При томе је оптерећеност кондензатора  $C_2$ ,  $Q_{20} = 10 \mu\text{C}$ , док је кондензатор  $C_1$  неоптерећен. Прво се затвори прекидач  $\Pi_2$ , па по достигнутом стационарном стању у колу, отвори прекидач  $\Pi_1$ . Од тренутка отварања прекидача  $\Pi_1$ , па до успостављања новог стационарног стања, прираштај снаге коју развија идеални струјни генератор је  $\Delta P_{I_g} = 0,7 \text{ W}$ . Израчунати (а) отпорност  $R_7$  и (б) проток  $q$  кроз грану са кондензаторима после отварања прекидача  $\Pi_1$ .



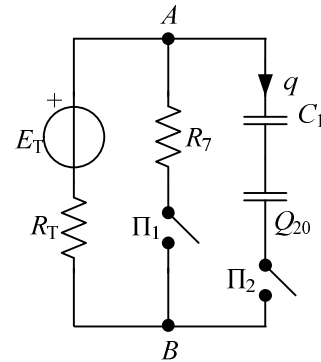
Слика 376.1.

РЕШЕЊЕ

Како је  $R_2 R_4 = R_3 R_5$ , мост је у равнотежи, па грана  $E_1 - R_1$  нема утицај на гране везане између тачака  $A$  и  $B$ . Стога се грана  $E_1 - R_1$ , може заменити било чим, па и кратким спојем, као на слици 376.2.



Слика 376.2.



Слика 376.3.

Користећи се Тевененовом теоремом, добија се коло као на слици 376.3, при чему је

$$R_T = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = 750 \, \Omega \text{ и } E_T = \left( \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right) I_g + \frac{R_3 E_2}{R_2 + R_3} = 35 \, \text{V}.$$

Прираштај снаге струјног генератора услед отварања прекидача  $\Pi_1$  је (слика 376.2)

$$\Delta P_{I_g} = I_g \Delta U_{35} = I_g \Delta (R_6 I_g + U_{34}) = I_g (\Delta (R_6 I_g) + \Delta U_{34}) = I_g \Delta U_{34} = I_g \Delta U_{AB}, \quad \text{јер је}$$

$$\Delta (R_6 I_g) = 0. \text{ Одавде је } \Delta U_{AB} = \frac{\Delta P_{I_g}}{I_g} = 17,5 \, \text{V}. \text{ Како је } \Delta U_{AB} = U_{AB}^o - U_{AB}^z = E_T - U_{AB}, \text{ то}$$

је  $U_{AB} = E_T - \Delta U_{AB} = 17,5 \, \text{V}$ , при чему је  $U_{AB} = U_{AB}^z$ .

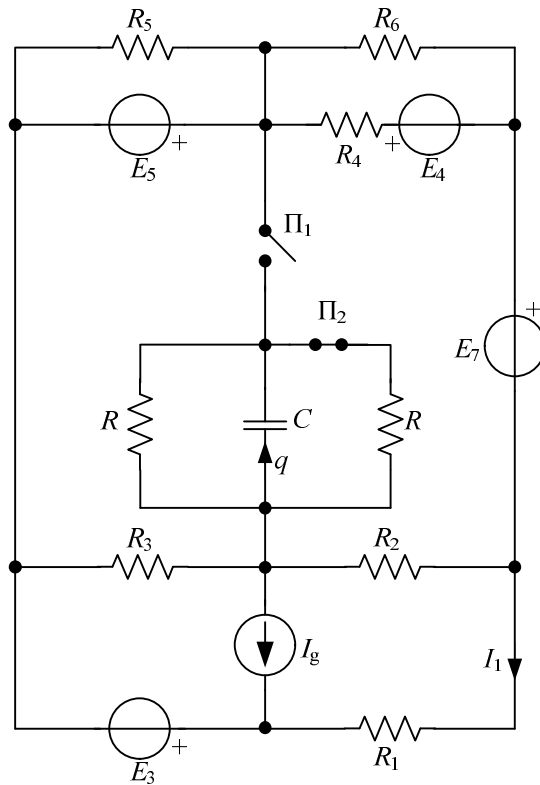
Струја у колу са слике 376.3 је  $I_7 = \frac{E_T - U_{AB}}{R_T} = \frac{70}{3} \, \text{mA}$ , па је тражена отпорност

$$R_7 = \frac{U_{AB}}{I_7} = 750 \, \Omega. \text{ Када је } \Pi_1 \text{ отворен, а } \Pi_2 \text{ затворен, тада је}$$

$$E_T = \frac{Q_{20} + q_1 + q_2}{C_2} + \frac{q_1 + q_2}{C_1} = U_{AB} + q_2 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right), \text{ одавде је } q_2 = 35 \, \mu\text{C}.$$



377. У колу сталне струје са слике 377.1 је  $E_3 = 8 \text{ V}$ ,  $I_g = 0,1 \text{ A}$ ,  $R_1 = 60 \Omega$ ,  $R_2 = R_4 = R_6 = 120 \Omega$ ,  $R_3 = R_5 = 300 \Omega$  и  $C = 1 \mu\text{F}$ . Прекидач  $\Pi_1$  је отворен, прекидач  $\Pi_2$  затворен и успостављено је стационарно стање. По затварању прекидача  $\Pi_1$ , кроз грану са кондензатором протекне  $q = -9 \mu\text{C}$ , у отпорнику  $R_1$  се успостави струја  $I_1 = \frac{50}{3} \text{ mA}$ , а снага струјног генератора је  $P_{I_g} = 0,5 \text{ W}$ . Израчунати (а) отпорност  $R$  и (б) проток кондензатора када се при затвореном прекидачу  $\Pi_1$ , отвори прекидач  $\Pi_2$ .



Слика 377.1.

РЕШЕЊЕ

(а) При отвореном прекидачу  $\Pi_1$  кондензатор је неоптерећен ( $Q_0 = 0$ ) јер у отпорнику  $R$  нема струје, па је напон тог отпорника нула. При затвореним прекидачима  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (слика 377.2) снага струјног генератора је  $P_{I_g} = U_{I_g} I_g$ , одакле је

$$U_{I_g} = \frac{P_{I_g}}{I_g} = 5 \text{ V}. \text{ Даље је } I_{R_2} = \frac{-R_1 I_1 - U_{I_g}}{R_2} = -50 \text{ mA} \text{ и } I_{R_3} = \frac{E_3 - U_{I_g}}{R_3} = 10 \text{ mA}, \text{ па је}$$

$$I_R = \frac{1}{2}(I_{R_2} + I_{R_3} + I_g) = 30 \text{ mA}. \text{ Како је при овоме оптерећеност кондензатора}$$

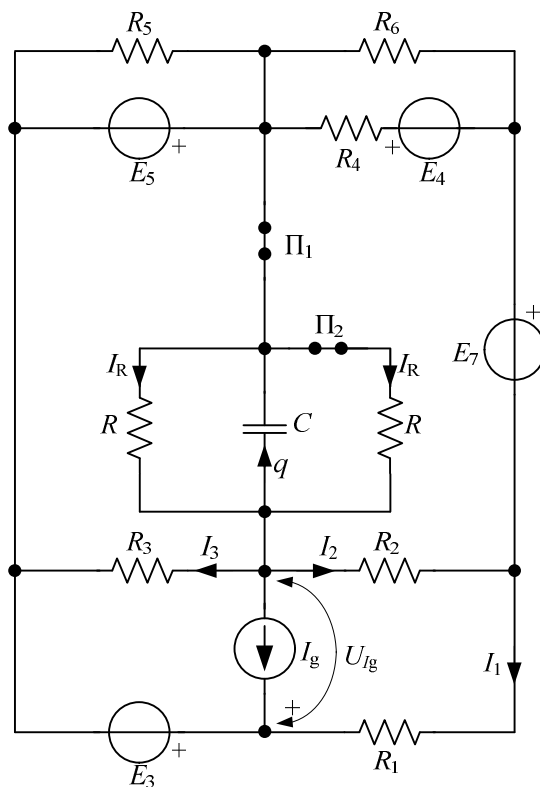
$$Q_1 = q = -C R I_R, \text{ то је тражена отпорност } R = -\frac{q}{C I_R} = 300 \Omega.$$

(б) Проток  $q_1$  услед отварања прекидача  $\Pi_2$  последица је киданја гране са струјом  $I_R$ . На основу тога се, применом струјне компензације, добија коло са слике 377.3, при чему је

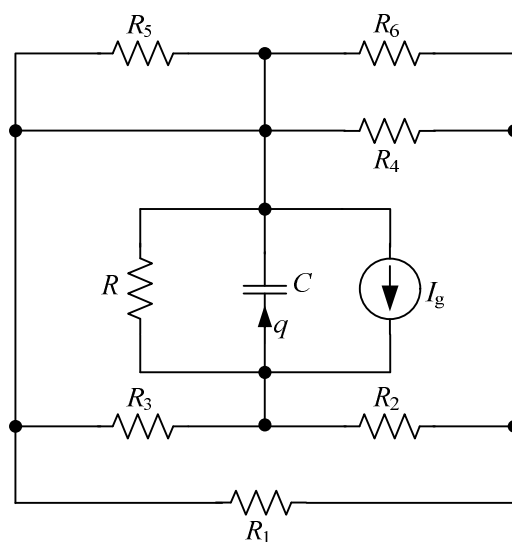
$$I_{gk} = \begin{cases} I_R, & \Pi_2 \text{ затворен} \\ 0, & \Pi_2 \text{ отворен} \end{cases}. \text{ По теореме суперпозиције је } q_1 = Q(\Delta I_{gk}), \text{ где је}$$

$$\Delta I_{gk} = 0 - I_R = -I_R \text{ прираштај струје компензационог генератора услед отварања}$$

прекидача  $\Pi_2$ . Према слици 377.3 је  $q_1 = CR_e \Delta I_{gk} = -CR_e I_R$ , где је  $R_e = R \parallel R_3 \parallel (R_2 + R_1 \parallel R_4 \parallel R_6) = 75 \Omega$ , па је тражени проток  $q_1 = -2,25 \mu C$ .

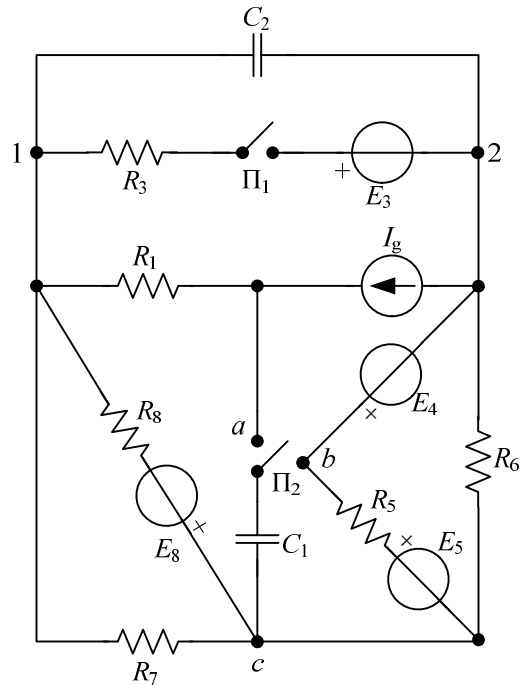


Слика 377.2.



Слика 377.3.

378. За коло сталне струје са слике 378.1 је  $E_3 = 30 \text{ V}$ ,  $E_4 = 20 \text{ V}$ ,  $I_g = 20 \text{ mA}$ ,  $R_3 = 300 \Omega$ ,  $R_5 = 500 \Omega$ ,  $R_6 = 750 \Omega$ ,  $R_7 = R_8 = 400 \Omega$ ,  $C_1 = 0,5 \mu\text{F}$  и  $C_2 = 0,2 \mu\text{F}$ . При отвореном прекидачу  $\Pi_1$ , преклопник  $\Pi_2$  се пребаци из положаја (a) у положај (b), при чему, између два стационарна стања, кроз кондензатор  $C_1$  протекне  $q_{bc} = -20 \mu\text{C}$ . По затварању прекидача  $\Pi_1$  кроз кондензатор  $C_2$  протекне  $q_{12} = -3,125 \mu\text{C}$ . Израчунати отпорност  $R_1$ .

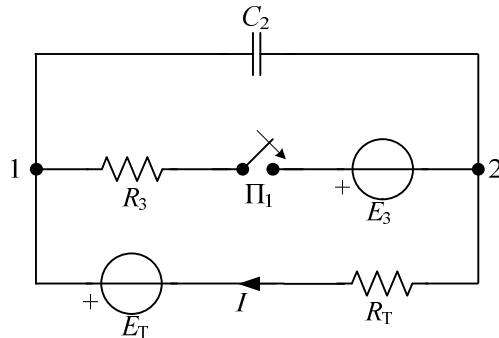


Слика 378.1.

РЕШЕЊЕ

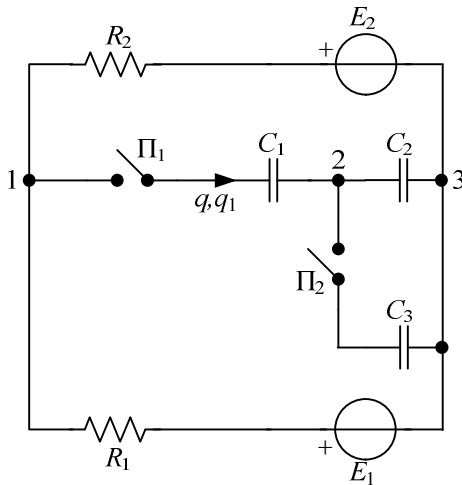
Користећи се Тевененовом теоремом може се формирати коло приказано на слици 378.2, при чему је  $R_T = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} + \frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8} = 500 \Omega$ . Проток услед пребацивања преклопника  $\Pi_2$  из положаја (a) у положај (b) је  $q_{bc} = Q_{bc} - Q_{ac} = C_1(U_{bc} - U_{ac}) = C_1(U_{bc} + U_{ca}) = C_1 U_{ba}$ . Одавде је  $U_{ba} = \frac{q_{bc}}{C_1} = -40 \text{ V}$ . Такође је  $E_T = U'_{12} = E_4 - U_{ba} - R_1 I_g = 60 - 2 \cdot 10^{-2} R_1$ , у јединицама SI система.

Проток услед затварања прекидача  $\Pi_1$  је  $q_{12} = C_2 \left( -R_T \frac{E_T - E_3}{R_T + R_3} + E_T - E_3 \right)$ , одакле је  $\frac{q_{12}}{C_2} = -\frac{R_T}{R_T + R_3} (E_T - E_3)$ . Из овог израза је  $E_T = 55 \text{ V}$ , па је тражена отпорност  $R_1 = 250 \Omega$ .

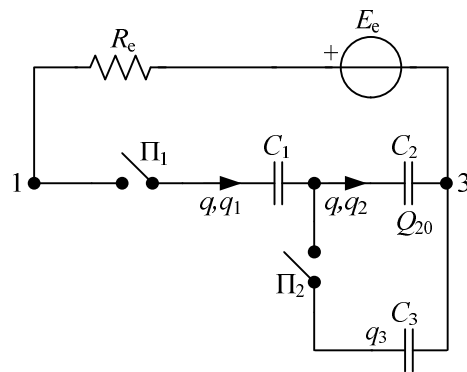


Слика 378.2.

**379.** За коло сталне струје са слике 379.1 је  $E_1 = 15 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 0,4 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 1 \mu\text{F}$  и  $C_3 = 4 \mu\text{F}$ . При отвореним прекидачима  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  кондензатори  $C_1$  и  $C_3$  су неоптерећени. Прво се затвори само прекидач  $\Pi_1$  и до успостављања стационарног стања установи проток  $q = 20 \mu\text{C}$ . Затим се затвори и прекидач  $\Pi_2$  и установи нови проток кроз кондензатор  $C_1$ ,  $q_1 = -40 \mu\text{C}$ . Израчунати (а) оптерећеност кондензатора  $C_2$  при отвореним прекидачима  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  и (б) емс  $E_2$ .



Слика 379.1.



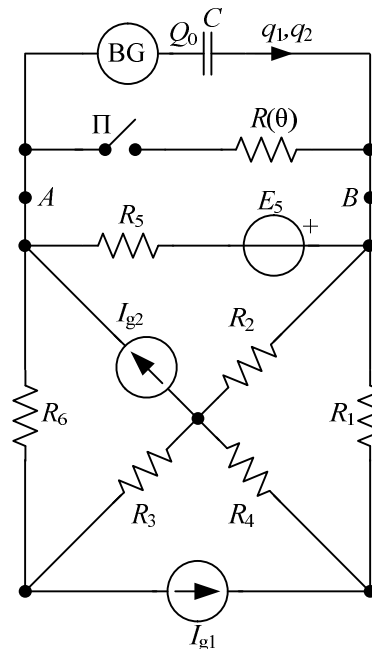
Слика 379.2.

**РЕШЕЊЕ**

Задато коло се може трансфигурисати и представити колом са слике 379.2, при чему је  $E_e = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}$  и  $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ . При затвореном прекидачу  $\Pi_1$  и отвореном прекидачу  $\Pi_2$  је  $E_e = \frac{q}{C_1} + \frac{Q_{20} + q}{C_2}$ .

Када су оба прекидача затворена, тада је  $q_1 = q_2 + q_3$ ,  $\frac{q_3}{C_3} = \frac{Q_{20} + q + q_2}{C_2}$  и  $E_e = \frac{q + q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3}$ . Из ових једначина се добија  $Q_{20} = -55 \mu\text{C}$  и  $E_e = -25 \text{ V}$ , па је  $E_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) E_e - \frac{R_2}{R_1} E_1 = -41 \text{ V}$ .

**380.** За коло сталне струје са слике 380.1. познате су отпорности које се не мењају са температуром  $R_1 = 20 \, \Omega$ ,  $R_2 = 60 \, \Omega$ ,  $R_3 = 30 \, \Omega$ ,  $R_4 = 10 \, \Omega$ ,  $R_5 = 30 \, \Omega$  и  $R_6 = 10 \, \Omega$ . У стационарном стању када је прекидач П отворен, оптерећеност кондензатора капацитивности  $C = 2 \, \mu\text{F}$  је  $Q_0 = 26 \, \mu\text{C}$ . Затварањем прекидача П у коло се, на собној температури  $\theta_1$ , укључује жичани отпорник  $R(\theta)$ , чија отпорност зависи од температуре. До успостављања новог стационарног стања у колу, кроз кондензатор протекне  $q_1 = -20,8 \, \mu\text{C}$ . Услед протицања електрицитета, овај отпорник се потом загреје, његова температура се повећа од  $\theta_1$  на  $\theta_2$ , и даље се не мења. У периоду промене температуре отпорника кроз кондензатор протекне  $q_2 = 0,8 \, \mu\text{C}$ . Сматрајући да је температурни коефицијент жице од које је начињен овај отпорник  $\alpha = 0,004 \, \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}$  и да је константан у целом опсегу температуре, израчунати прираштај температуре отпорника.



Слика 380.1.

РЕШЕЊЕ

Сматраћемо да су промене температуре отпорника много спорије од успостављања стационарног стања у колу.

Применом Тевененове теореме, коло се може представити као на слици 380.2, при чему је  $E_T = \frac{Q_0}{C} = 13 \, \text{V}$  и  $R_T = R_5 \parallel (R_3 + R_6 + R_2 \parallel (R_1 + R_4)) = 20 \, \Omega$ . У врло кратком прелазном периоду после затварања прекидача П долази до промене напона  $U_{AB}$  (између прикључака отпорника). Прираштај тог напона је  $\Delta U_{AB}^{(1)} = \frac{q_1}{C} = -10,4 \, \text{V}$ . Како је  $\Delta U_{AB}^{(1)} = -E_T + U_{AB}^{(1)}$ , следи  $U_{AB}^{(1)} = E_T + \Delta U_{AB}^{(1)} = 2,6 \, \text{V}$ .

Струја у колу је  $I^{(1)} = \frac{E_T - U_{AB}^{(1)}}{R_T} = 0,52 \, \text{A}$ , па је отпорност жичаног отпорника на

собној температури  $\theta_1$ ,  $R(\theta_1) = \frac{U_{AB}^{(1)}}{I^{(1)}} = 5 \, \Omega$ .

Прираштај напона услед загревања отпорника  $R(\theta)$  је  $\Delta U_{AB}^{(2)} = \frac{q_2}{C} = 0,4 \text{ V}$ , па

је  $U_{AB}^{(2)} = U_{AB}^{(1)} + \Delta U_{AB}^{(2)} = 3 \text{ V}$ , а струја је

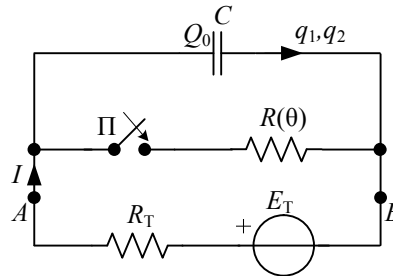
$$I^{(2)} = \frac{E_T - U_{AB}^{(2)}}{R_T} = 0,5 \text{ A} . \quad \text{Отпорност}$$

жичаног отпорника на температури  $\theta_2$  је

$$R(\theta_2) = \frac{U_{AB}^{(2)}}{I^{(2)}} = 6 \Omega . \quad \text{Како је}$$

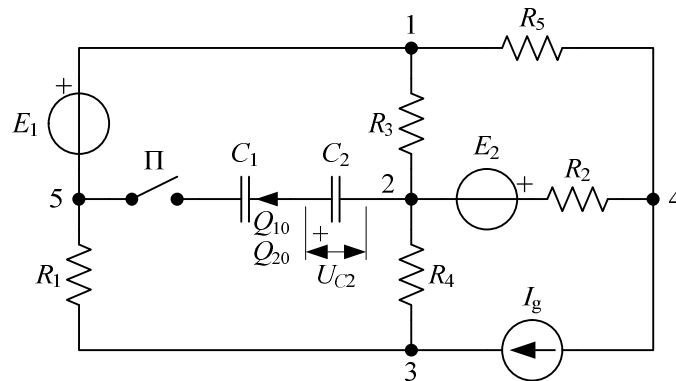
$R(\theta_2) = R(\theta_1)(1 + \alpha \Delta \theta)$ , то је прираштај температуре жичаног отпорника

$$\Delta \theta = \theta_1 - \theta_2 = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{R(\theta_2)}{R(\theta_1)} - 1 \right) = 50^\circ \text{C} .$$



Слика 380.2.

**381.** За коло сталне струје приказано на слици 381.1 познато је  $E_1 = 24 \text{ V}$ ,  $E_2 = 32 \text{ V}$ ,  $I_g = 20 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 120 \Omega$ ,  $R_4 = 300 \Omega$ ,  $R_5 = 200 \Omega$ ,  $C_1 = 0,5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 1 \mu\text{F}$  и оптерећености кондензатора у стационарном стању при отвореном прекидачу П  $Q_{10} = 16 \mu\text{C}$  и  $Q_{20} = 4 \mu\text{C}$ . Одредити отпорност  $R_2$  тако да у стационарном стању при затвореном прекидачу П напон кондензатора  $C_2$  буде  $U_{C2} = 2 \text{ V}$ .



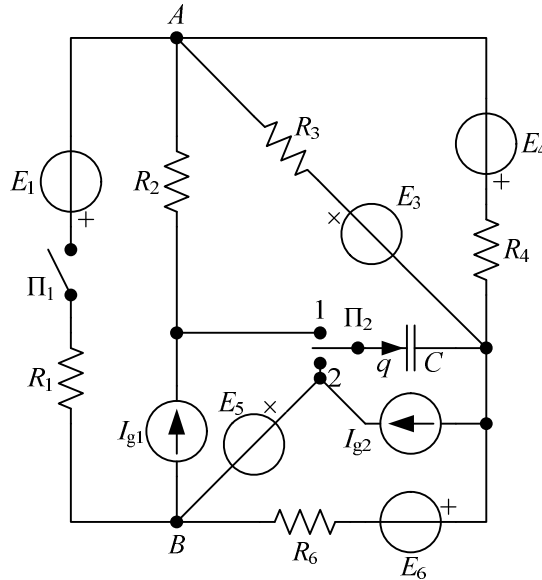
Слика 381.1.

#### РЕШЕЊЕ

По затварању прекидача, проток кроз грану са кондензаторима је  $q = -6 \mu\text{C}$ , коначне оптерећености кондензатора су  $Q_1 = 10 \mu\text{C}$  и  $Q_2 = -2 \mu\text{C}$ , па је  $U_{25} = 18 \text{ V}$ . Из  $I_{23} + I_g = I_{35}$  и  $U_{25} = R_4 I_{23} + R_1 I_{35}$  следи  $I_{23} = 20 \text{ mA}$  и  $I_{35} = 40 \text{ mA}$ . Из  $U_{25} = E_1 - R_3 I_{12}$  добија се  $I_{12} = 50 \text{ mA}$ . Из првог Кирхофовог закона добија се

$I_{24} = 30 \text{ mA}$  и  $I_{41} = 10 \text{ mA}$ . Из  $U_{42} = R_3 I_{12} + R_5 I_{41} = E_2 - R_2 I_{24} = 8 \text{ V}$  добија се  $R_2 = 800 \Omega$ .

**382.** За коло сталне струје приказано на слици 382.1 познато је  $R_1 = R_2 = 250 \Omega$ ,  $R_3 = 600 \Omega$ ,  $R_4 = R_6 = 300 \Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $E_1 = E_5 = 20 \text{ V}$ ,  $I_{g1} = 20 \text{ mA}$  и  $I_{g2} = 50 \text{ mA}$ . Прекидач  $\Pi_1$  је отворен и у колу је успостављено стационарно стање. Преклопник  $\Pi_2$  се затим пребаци из положаја (1) у положај (2), у коме и остане. По пребацивању преклопника, кроз кондензатор протекне наелектрисање  $q = -40 \mu\text{C}$ . Израчунати (а) напон  $U_{AB}$  када је прекидач  $\Pi_1$  отворен и (б) прираштај снаге струјног генератора  $I_{g1}$  када се затвори прекидач  $\Pi_1$ .



Слика 382.1.

РЕШЕЊЕ

(а) На основу протока кроз кондензатор, добија се напон  $U_{12} = -\frac{q}{C} = 40 \text{ V}$ . Тражени напон је  $U_{AB} = E_5 + U_{12} - R_2 I_{g1} = 55 \text{ V}$ .

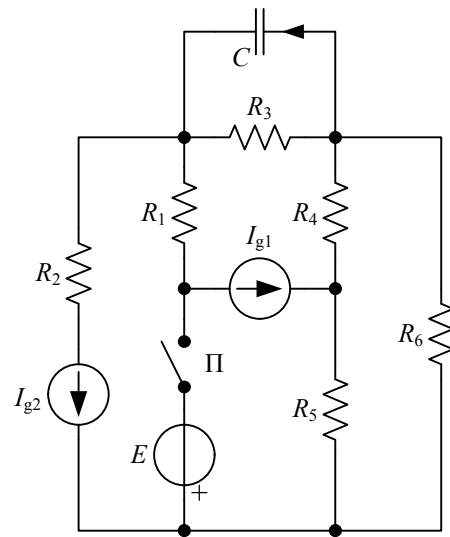
(б) Део кола десно од гране са  $E_1$  и  $R_1$  може се заменити Тевененовим генератором, чија је електромоторна сила (у односу на референтни смер на горе)  $E_T = U_{AB}$ . Отпорност Тевененовог генератора је  $R_T = R_3 \parallel R_4 \oplus R_6 = 500 \Omega$ . Струја кроз прекидач  $\Pi_1$ , по његовом затварању, је  $I_1 = I_{AB} = \frac{E_T + E_1}{R_T + R_1} = 100 \text{ mA}$ . Грана са  $R_1$ ,  $E_1$  и

$\Pi_1$  може се заменити компензационим струјним генератором струје  $I_k = \begin{cases} 0, & \Pi_1 \text{ отворен} \\ I_1, & \Pi_2 \text{ затворен} \end{cases}$ , чији је прираштај  $\Delta I_k = I_1$ . Прираштај напона струјног генератора  $I_{g1}$ , за усаглашене референтне смерове напона и струје на том генератору, је  $\Delta U_{I_{g1}} = -(R_6 \oplus R_3 \parallel R_4) \Delta I_k = -50 \text{ V}$ . Одатле је  $\Delta P_{I_{g1}} = I_{g1} \Delta U_{I_{g1}} = -1 \text{ W}$ .

**383.** У колу сталне струје приказаном на слици 383.1 је  $I_{g1} = 4 \text{ mA}$ ,  $I_{g2} = 2 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_5 = 1,2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 900 \Omega$ ,  $R_4 = 600 \Omega$ ,  $R_6 = 1,8 \text{ k}\Omega$  и  $C = 100 \mu\text{F}$ . У стационарном стању када је прекидач отворен, оптерећеност кондензатора је два пута већа него када је прекидач затворен. Израчунати електромоторну силу  $E$ .

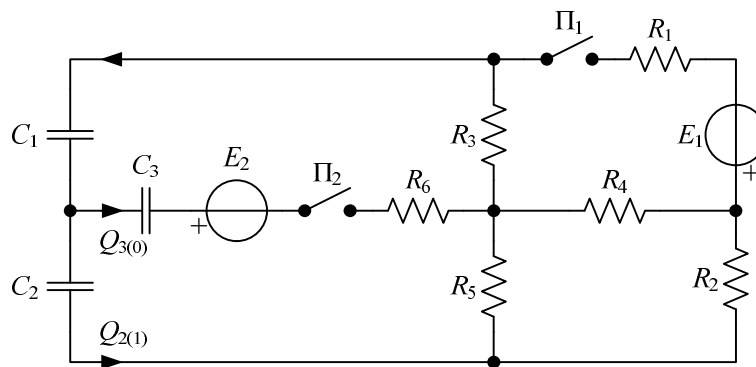
## РЕЗУЛТАТ

Тражена емс је  $E = 4,2 \text{ V}$ .



Слика 383.1.

**384.** За коло сталне струје са слике 384.1 познато је  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0,5 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 2 \mu\text{F}$ ,  $R_2 = 50 \Omega$ ,  $R_3 = 60 \Omega$ ,  $R_4 = 150 \Omega$ ,  $R_5 = 300 \Omega$ ,  $R_6 = 200 \Omega$  и  $E_2 = 2 \text{ V}$ . У стационарном стању када су прекидачи  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  отворени, кондензатори  $C_1$  и  $C_2$  су неоптерећени, а оптерећеност кондензатора  $C_3$  је  $Q_{3(0)} = -0,4 \mu\text{C}$ , према референтним смеровима са слике. Прво се затвори прекидач  $\Pi_1$  и, до успостављања новог стационарног стања, установи оптерећеност другог кондензатора  $Q_{2(1)} = 4 \mu\text{C}$ . Затим се затвори и прекидач  $\Pi_2$ . Израчунати оптерећеност свих кондензатора у стационарном стању по затварању прекидача  $\Pi_2$ .



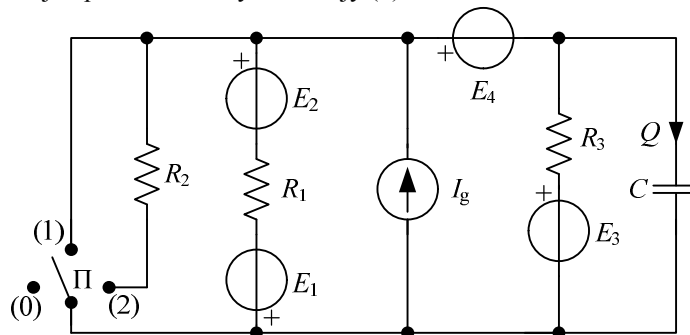
Слика 384.1.



РЕЗУЛТАТ

У односу на референтне смерове са слике 384.1, оптерећености кондензатора су  $Q_1 = \frac{24}{7} \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = \frac{30}{7} \mu\text{C}$  и  $Q_3 = -\frac{8,8}{7} \mu\text{C}$ .

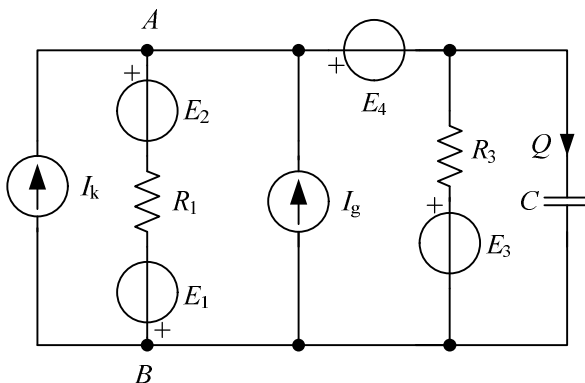
**385.** У колу сталне струје приказаном на слици 385.1 је  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $E_2 = 1 \text{ V}$  и  $C = 3 \mu\text{F}$ . Када је преклопник П у положају (0), оптерећеност кондензатора, према референтном смеру са слике 385.1, је  $Q^{(0)} = 15 \mu\text{C}$ . Када је преклопник П у положају (1), познато је  $Q^{(1)} = -45 \mu\text{C}$ . Израчунати оптерећеност кондензатора када је преклопник П у положају (2).



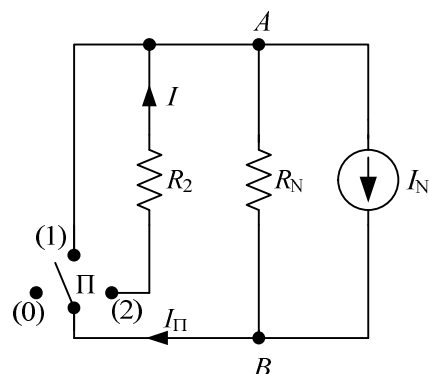
Слика 385.1.

РЕШЕЊЕ

На основу теореме компензације, струја преклопника може се заменити компензационим струјним генератором струје  $I_k = \begin{cases} I_{\Pi}^{(0)} = 0, & \Pi \rightarrow (0) \\ I_{\Pi}^{(1)}, & \Pi \rightarrow (1) \text{ (слика 385.2).} \\ I_{\Pi}^{(2)}, & \Pi \rightarrow (2) \end{cases}$



Слика 385.2.



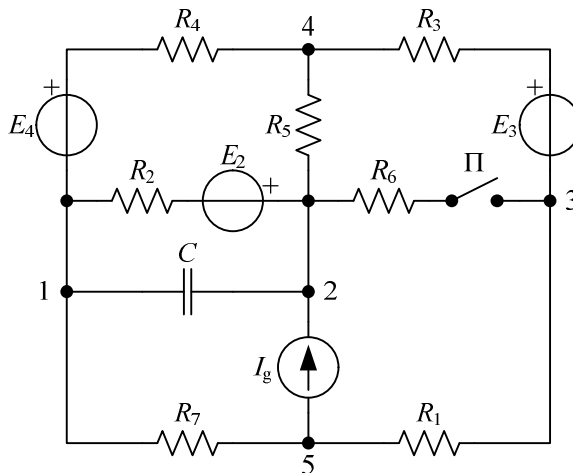
Слика 385.3.

На основу теореме суперпозиције, прираштај оптерећености кондензатора при пребацивању преклопника из положаја (0) у положај (1) последица је само прираштаја струје компензационог струјног генератора  $\Delta I'_k = I_{\Pi}^{(1)}$ . Решавањем кола са укинутим свим побудама сем  $\Delta I'_k$ , добија се  $I_{\Pi}^{(1)} = \frac{Q^{(1)} - Q^{(0)}}{C} \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} = -40 \text{ mA}$ .

Струја  $I_{\Pi}^{(1)}$  представља струју еквивалентног Нортоновог генератора којим се може заменити коло са слике 385.1 десно од отпорника  $R_2$  (слика 385.3),  $I_{\Pi}^{(1)} = I_N$ . Отпорност Нортоновог генератора је  $R_N = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 500 \Omega$ .

Пребацивањем преклопника у положај (2), параметри Нортоновог генератора се не мењају, па је струја кроз отпорник  $R_2$ ,  $I = I_{\Pi}^{(2)} = \frac{R_N}{R_2 + R_N} I_N = -8 \text{ mA}$ . Проток кроз кондензатор при пребацивању преклопника из положаја (1) у (2) последица је само прираштаја струје компензационог струјног генератора  $\Delta I''_k = I_{\Pi}^{(2)} - I_{\Pi}^{(1)} = 32 \text{ mA}$ , па је проток кроз кондензатор  $q = \Delta I''_k C R_N = 48 \mu\text{C}$ . Када је преклопник у положају (2), оптерећеност кондензатора је  $Q^{(2)} = Q^{(1)} + q = 3 \mu\text{C}$ .

**386.** За коло приказано на слици 386.1 познато је  $E_3 = 12 \text{ V}$ ,  $I_g = 20 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 600 \Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 1,8 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 1,2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_7 = 300 \Omega$  и  $C = 500 \text{ nF}$ . Прекидач П је најпре затворен и у колу је успостављено стационарно стање. При томе је  $U_{23} = -6 \text{ V}$ . По отварању прекидача П, кроз грану са кондензатором протекне наелектрисање  $q_{12} = 2 \mu\text{C}$ . Одредити отпорност  $R_6$ .

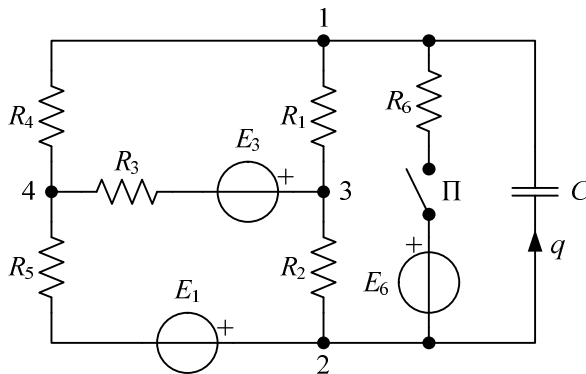


Слика 386.1.

РЕЗУЛТАТ

Отпорност је  $R_6 = 600 \Omega$ .

**387.** За коло сталне струје приказано на слици 387.1 познато је  $R_1 = R_2 = 150 \, \Omega$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = 50 \, \Omega$ ,  $R_6 = 25 \, \Omega$ ,  $C = 4 \, \mu\text{F}$  и  $E_3 = 7 \, \text{V}$ . У стационарном стању при отвореном прекидачу је  $U_{12} = 15 \, \text{V}$ . По затварању прекидача, кроз грану са кондензатором протекне наелектрисање  $q = -1,8 \, \mu\text{C}$ . Одредити електромоторне силе  $E_1$  и  $E_6$ .

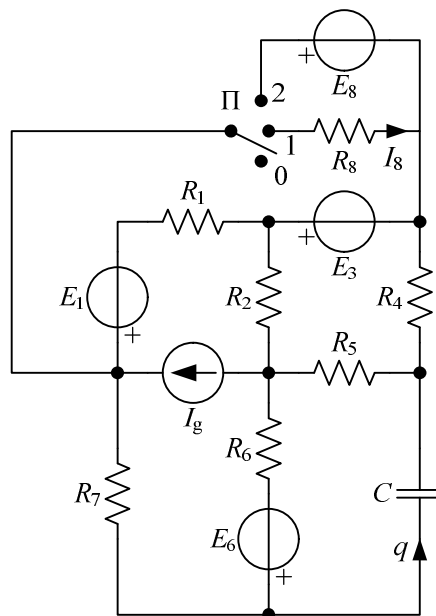


Слика 387.1.

РЕЗУЛТАТ

Тражене електромоторне силе су  $E_1 = -20 \, \text{V}$  и  $E_6 = 15,6 \, \text{V}$ .

**388.** За коло сталне струје приказано на слици 388.1 познато је  $R_1 = R_6 = 300 \, \Omega$ ,  $R_2 = 600 \, \Omega$ ,  $R_4 = 200 \, \Omega$ ,  $R_5 = R_7 = R_8 = 100 \, \Omega$ ,  $E_8 = 9 \, \text{V}$  и  $C = 3 \, \mu\text{F}$ . Преклопник  $\Pi$  се налази у положају (0) и у колу је успостављено стационарно стање. Затим се преклопник  $\Pi$  пребаци у положај (1), а до успостављања новог стационарног стања кроз кондензатор протекне количина електрицитета  $q = -22 \, \mu\text{C}$  према референтном смеру на слици. (а) Израчунати струју отпорника  $R_8$  када је преклопник у положају (1). (б) Израчунати снагу идеалног напонског генератора  $E_8$  у стационарном стању насталом након пребацивања преклопника  $\Pi$  у положај (2).



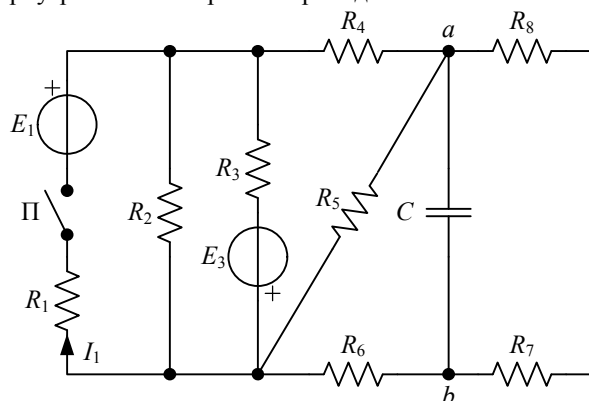
Слика 388.1.

РЕЗУЛТАТ

(а) Струја отпорника је  $I_8 = 60 \, \text{mA}$  у односу на референтни смер на слици 388.1.

(б) Снага идеалног напонског генератора је  $P_{E_8} = -405 \, \text{mW}$ .

**389.** За коло приказано на слици 389.1 познато је  $E_3 = 12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $R_3 = 150 \Omega$  и  $R_6 = 200 \Omega$ . У стационарном стању при затвореном прекидачу П познате су струја  $I_1 = 60 \text{ mA}$  и оптерећеност кондензатора  $Q_{ab} = -0,2 \mu\text{C}$ . Одредити проток кроз кондензатор проузрокован отварањем прекидача П.

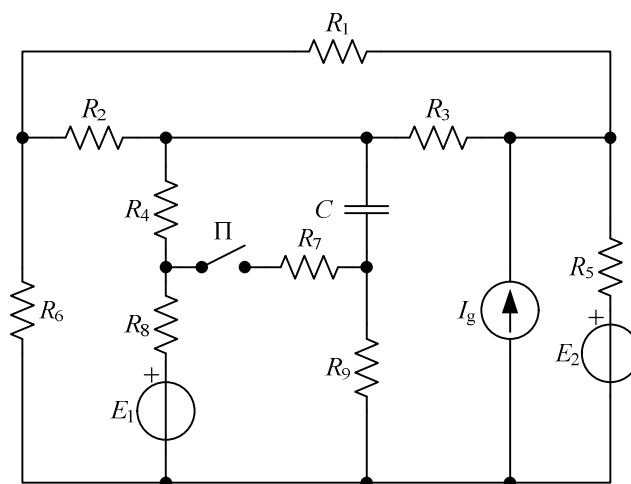


Слика 389.1.

РЕЗУЛТАТ

Проток је  $q_{ab} = -0,6 \mu\text{C}$ .

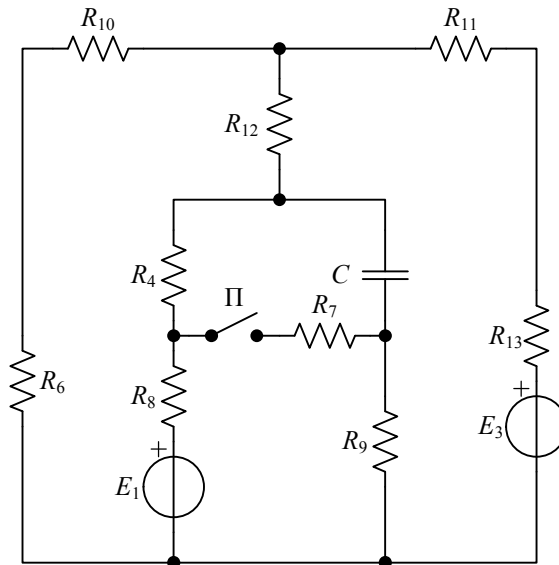
**390.** За коло приказано на слици 390.1 познато је  $E_1 = 20 \text{ V}$ ,  $E_2 = 16 \text{ V}$ ,  $I_g = 1 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_8 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $R_3 = 60 \Omega$ ,  $R_4 = R_6 = R_9 = 7 \Omega$ ,  $R_5 = 4 \Omega$  и  $C = 32 \mu\text{F}$ . Прекидач П је отворен и у колу је успостављено стационарно стање. Прекидач П се затим затвори и успостави се ново стационарно стање. При томе је прираштај енергије кондензатора у односу на претходно стационарно стање  $\Delta W_c = -3,825 \text{ mJ}$ . Израчунати отпорност  $R_7$ .



Слика 390.1.

РЕШЕЊЕ

После трансфигурације троугла  $R_1 - R_2 - R_3$  у звезду и трансфигурације мреже  $I_g - R_5 - E_2$  у еквивалентни напонски генератор, добија се коло на слици 390.2, у коме је  $R_{10} = 3 \Omega$ ,  $R_{11} = 6 \Omega$ ,  $R_{12} = 18 \Omega$ ,  $R_{13} = 4 \Omega$  и  $E_3 = 20 \text{ V}$ . После трансфигурације мреже  $R_6 - R_{10} - E_3 - R_{13} - R_{11} - R_{12}$  добија се коло као на слици 390.3, у коме је  $E_4 = 10 \text{ V}$  и  $R_{14} = 23 \Omega$ .



Слика 390.2.

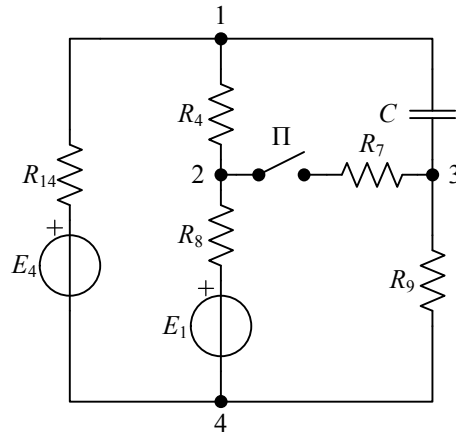
У стационарном стању када је прекидач отворен,  $U_{13} = 15,75 \text{ V}$ , а енергија кондензатора је  $W_C = 3,969 \text{ mJ}$ . Према условима задатка, енергија кондензатора у стационарном стању по затварању прекидача је  $W'_C = 144 \mu\text{J} = \frac{1}{2} C U_{13}^{\prime 2}$ . Одавде се добијају два решења,  $U_{13}^{\prime(1)} = 3 \text{ V}$  и  $U_{13}^{\prime(2)} = -3 \text{ V}$ .

Када је прекидач  $\Pi$  затворен, ако се у колу на слици 391.3 чвор 4 усвоји за референтни, из једначине написане по методу потенцијала чворова добија се

$$U'_{24} = V'_2 = \frac{\frac{E_1}{R_8} + \frac{E_4}{R_{14} + R_4}}{\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_{14} + R_4} + \frac{1}{R_7 + R_9}}. \quad \text{Са друге стране, напон кондензатора је}$$

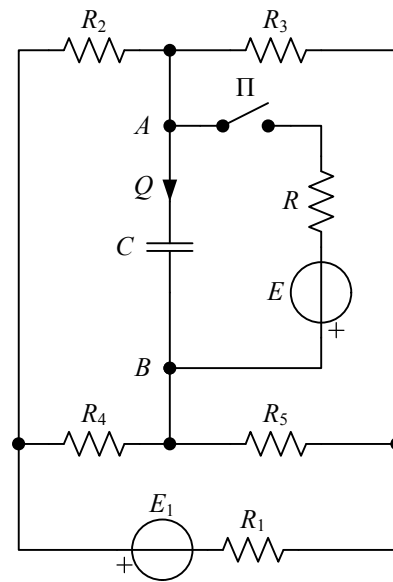
$$U'_{13} = R_7 I'_{23} + R_4 I'_{12} = \frac{R_7}{R_7 + R_9} U'_{24} + \frac{R_4}{R_{14} + R_4} (E_4 - U'_{24}). \quad \text{Елиминацијом напона } U'_{24}$$

добија се једначина по  $R_7$ . Када је  $U_{13}^{\prime(1)} = 3 \text{ V}$ , решење је  $R_7^{(1)} = 3 \Omega$ , а за  $U_{13}^{\prime(2)} = -3 \text{ V}$ , решење је  $R_7^{(2)} = -2,6 \Omega$ . Друго решење отпада као физички нереално, па је тражена отпорност  $R_7 = 3 \Omega$ .



Слика 390.3.

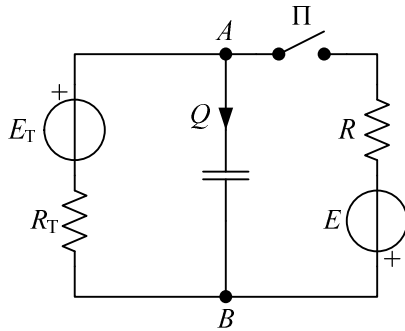
**391.** За коло на слици 391.1 познато је  $E = 60 \text{ V}$ ,  $C = 20 \text{ nF}$ ,  $R_1 = R_3 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 50 \Omega$ ,  $R_4 = 540 \Omega$  и  $R_5 = 520 \Omega$ . Прекидач  $\Pi$  је отворен и у колу је успостављено стационарно стање. При томе је оптерећеност кондензатора  $Q = 2 \mu\text{C}$ . Одредити отпорност  $R$  тако да се у стационарном стању насталом у колу после затварања прекидача  $\Pi$  новоприкључена грана понаша као генератор и да прираштај електростатичке енергије према претходном стационарном стању у колу буде  $\Delta W_C = -75 \mu\text{J}$ .



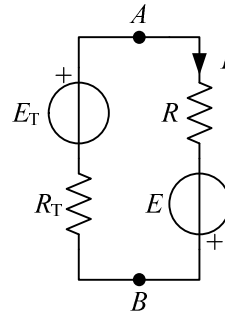
Слика 391.1.

РЕШЕЊЕ

У односу на кондензатор и новоприкључену грану, остатак кола се може заменити Тевененовим генератором (слика 391.2). Емс тог генератора,  $E_T = U_{AB} = \frac{Q}{C} = 100 \text{ V}$ , једнака је напону кондензатора када је прекидач  $\Pi$  отворен, а отпорност је  $R_T = 300 \Omega$ . Прираштај енергије кондензатора је  $\Delta W_C = \frac{1}{2} C (U'_{AB}{}^2 - U_{AB}^2)$ , одакле се добијају два решења за напон кондензатора у другом стационарном стању,  $U'_{AB} = \pm 50 \text{ V}$ .



Слика 391.2.



Слика 391.3.

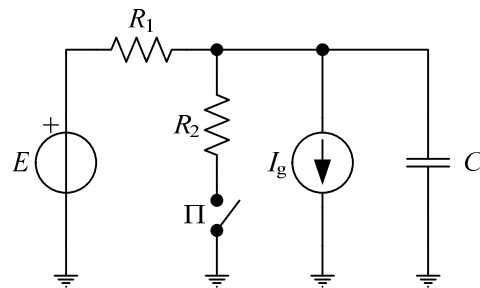
Анализом простог кола које се добија по затварању прекидача (слика 391.3), добија се  $U'_{AB} = -R_T I + E_T$  и  $U'_{AB} = RI - E$ . Елиминацијом струје из ових једначина, добија се

$$R = \frac{U'_{AB} + E}{E_T - U'_{AB}} R_T.$$

Да би напон новоприкључене гране био  $U'_{AB} = 50 \text{ V}$ , потребно је да буде  $R = 660 \Omega$ . Снага коју при томе прима новоприкључена грана је  $P = U'_{AB} I = \frac{25}{3} \text{ W} > 0$ , па се та грана понаша као пријемник, што не одговара условима задатка.

Да би напон био  $U'_{AB} = -50 \text{ V}$ , треба да буде  $R = 20 \Omega$ . При томе је снага коју грана прима  $P = -25 \text{ W} < 0$ , односно грана се понаша као генератор. То одговара условима задатка, па је решење  $R = 20 \Omega$ .

**392.** У колу на слици 392.1 је  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_g = 300 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$  и  $C = 10 \mu\text{F}$ . У првом стационарном стању прекидач П је отворен. Затим се прекидач затвори и успостави се друго стационарно стање. При томе је прираштај енергије кондензатора  $\Delta W_C = -1,5 \text{ mJ}$ . Израчунати отпорност  $R_2$ .



Слика 392.1.

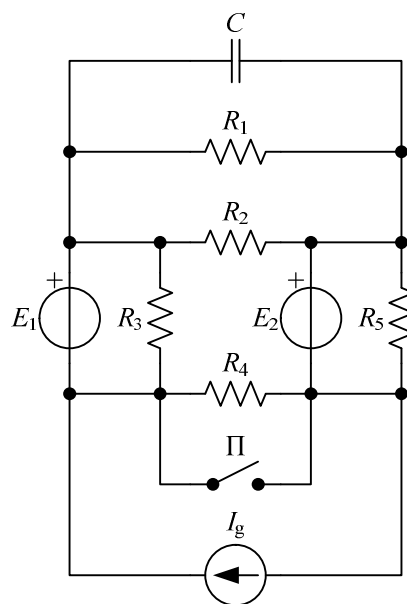
#### РЕЗУЛТАТ

Тражена отпорност је  $R_2 = 100 \Omega$ .

**393.** У колу приказаном на слици 393.1 познато је  $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  $E_2 = 20 \text{ V}$ ,  $I_g = 500 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 300 \Omega$ ,  $R_3 = 100 \Omega$ ,  $R_5 = 200 \Omega$  и  $C = 100 \mu\text{F}$ . Прекидач П је најпре отворен и успостављено је стационарно стање. Прекидач П се затим затвори и успостави се ново стационарно стање. Прираштај енергије кондензатора између два стационарна стања је  $\Delta W_e = 4,2 \text{ mJ}$ . Израчунати отпорност  $R_4$ .

РЕЗУЛТАТ

Задатак има два решења:  $R_4^{(1)} = 30 \Omega$  и  $R_4^{(2)} = 11,25 \Omega$ .



Слика 393.1.



## Литература

- [1] М. Ранојевић: „Основы електротехнике“, Грађевинска књига, Београд, 1964.
- [2] Б. Поповић: „Основы електротехнике 1“, Грађевинска књига, Београд, 1976.
- [3] Б. Поповић, А. Ђорђевић: „Основы електротехнике 3: Збирка питања и задатака са кратким теоријским уводима“, Грађевинска књига, Београд, 1979.
- [4] Ј. Сурутка: „Основы електротехнике: Електростатика, сталне једносмерне струје“, Научна књига, Београд, 1978.
- [5] Х. Божиловић, Г. Божиловић и Ж. Спасојевић: „Збирка задатака из Основа електротехнике: Електростатика, Сталне једносмерне струје“, Научна књига, Београд, 1983.
- [6] Г. Божиловић: „Задаци из Основа електротехнике“, Научна књига, Београд, 1982.
- [7] А. Ђорђевић, Г. Божиловић и Б. Нотарош: „Збирка решених испитних задатака из Основа електротехнике, I део“, Електротехнички факултет, Академска мисао, Београд, 1997.
- [8] А. Ђорђевић, „Основы електротехнике, 2. део, Сталне струје“, Академска мисао, Београд, 2007.