# P.1 Gráficas y modelos

- **Trazar la gráfica de una ecuación.**
- **Encontrar las intersecciones de una gráfica con los ejes.**
- **Analizar las posibles simetrías de una gráfica con respecto a un eje y el origen.**
- **Encontrar los puntos de intersección de dos gráficas.**
- **Interpretar modelos matemáticos con datos de la vida real.**

Archive Photos

**RENÉ DESCARTES (1596-1650)**
Descartes hizo numerosas contribuciones a la filosofía, la ciencia y las matemáticas. En su libro *La Géométrie*, publicado en 1637, describió la idea de representar los puntos del plano por medio de pares de números reales y las curvas en el plano mediante ecuaciones.

## La gráfica de una ecuación

En 1637, el matemático francés René Descartes revolucionó las matemáticas al unir sus dos ramas principales: álgebra y geometría. Con ayuda del plano coordenado de Descartes, los conceptos geométricos se pudieron formular de manera analítica y los algebraicos visualizarse de forma gráfica. La potencia de este método es tal que durante un siglo se consiguió desarrollar la mayor parte del cálculo.

Las posibilidades de éxito en el cálculo aumentarán siguiendo el mismo método. Es decir, realizar el cálculo desde múltiples perspectivas —*gráfica*, *analítica* y *numérica*— incrementará la comprensión de los conceptos fundamentales.

Considerar la ecuación $3x + y = 7$. El punto $(2, 1)$ es un **punto solución** de la ecuación puesto que esta última se satisface (es verdadera) cuando se sustituye $x$ por 2 y $y$ por 1. Esta ecuación tiene muchas otras soluciones, como $(1, 4)$ y $(0, 7)$. Para encontrarlas de manera sistemática, despejar $y$ de la ecuación inicial.

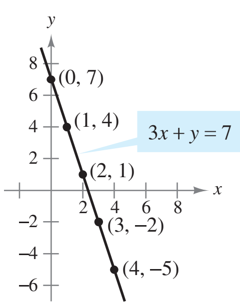
$y = 7 - 3x$ Método analítico.

Ahora, elaboramos una **tabla de valores** dando valores de $x$.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 4 | 1 | $-2$ | $-5$ |

Método numérico.

A partir de la tabla, puede verse que $(0, 7)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, -2)$ y $(4, -5)$ son soluciones de la ecuación inicial $3x + y = 7$. Al igual que muchas ecuaciones, ésta tiene una cantidad infinita de soluciones. El conjunto de todos los puntos solución constituye la **gráfica** de la ecuación, como ilustra la figura P.1.




Procedimiento gráfico: $3x + y = 7$
**Figura P.1**

**NOTA** Aunque se mencione el dibujo de la figura P.1 como la gráfica de $3x + y = 7$, en realidad sólo representa una *porción* de la misma. La gráfica completa se extendería fuera de la página.

En este curso se estudiarán varias técnicas para la representación gráfica. La más simple consiste en dibujar puntos hasta que la forma esencial de la gráfica se haga evidente.

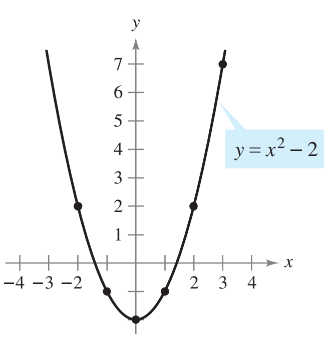
### *EJEMPLO 1* Dibujo de una gráfica mediante el trazado de puntos

Dibujar la gráfica de $y = x^2 - 2$.

**Solución** Primero construimos una tabla de valores. A continuación, marcamos los puntos dados en la tabla.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | $-1$ | $-2$ | $-1$ | 2 | 7 |

Por último, unir los puntos con una *curva suave*, como se muestra en la figura P.2. Esta gráfica es una **parábola**. Se trata de una de las cónicas que se estudiarán en el capítulo 10.

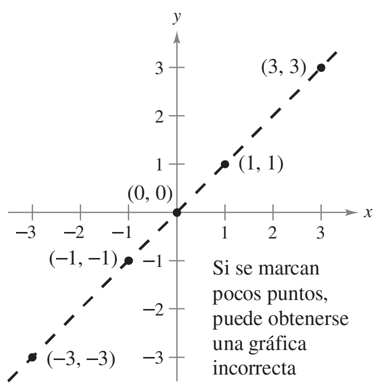



La parábola $y = x^2 - 2$
**Figura P.2**

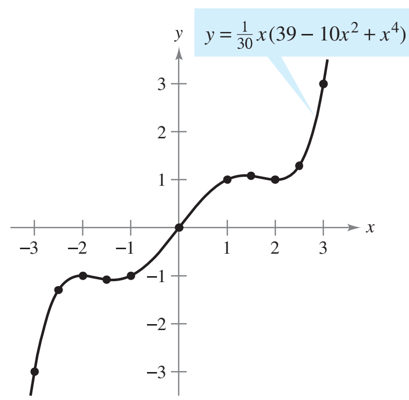
Uno de los inconvenientes de la representación mediante el trazado de puntos radica en que la obtención de una idea confiable de la forma de una gráfica puede exigir que se marque un gran número de puntos. Utilizando sólo unos pocos, se corre el riesgo de obtener una visión deformada de la gráfica. Por ejemplo, suponiendo que para dibujar la gráfica de

$$y = \frac{1}{30}x(39 - 10x^2 + x^4)$$

se han marcado sólo cinco puntos: $(-3, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(3, 3)$, como se muestra en la figura P.3*a*. A partir de estos cinco puntos, se podría concluir que la gráfica es una recta. Sin embargo, esto no es correcto. Trazando varios puntos más puede verse que la gráfica es más complicada, como se observa en la figura P.3*b*.




*a*)



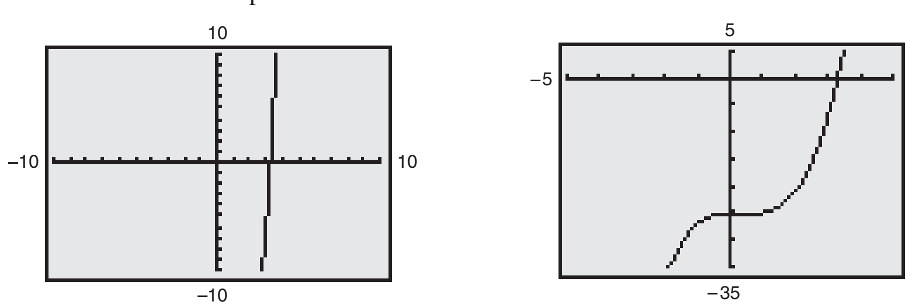

*b*)

**Figura P.3**

**TECNOLOGÍA** La tecnología moderna ha simplificado el dibujo de gráficas. No obstante, incluso recurriendo a ella, es posible desfigurar una gráfica. Por ejemplo, las pantallas de una herramienta de graficación de la figura P.4 muestran una porción de la gráfica de

$$y = x^3 - x^2 - 25.$$

La pantalla de la izquierda puede inducir a pensar que la gráfica es una recta. Sin embargo, la de la derecha muestra que no es así. Entonces, cuando se dibuja una gráfica ya sea a mano o mediante una herramienta de graficación, debe tenerse en cuenta que las diferentes ventanas de representación pueden dar lugar a imágenes muy distintas de la gráfica. Al elegir una ventana, la clave está en mostrar una imagen de la gráfica que se adecue al contexto del problema.




Visualizaciones en la pantalla de una herramienta de graficación de $y = x^3 - x^2 - 25$
**Figura P.4**

**NOTA** En este libro, el término *herramienta de graficación* se refiere a una calculadora graficadora o a un programa graficador como *Maple*, *Mathematica* o a la calculadora TI-89.

**EXPLORACIÓN**

***Comparación de los métodos gráfico y analítico*** Utilizar una herramienta de graficación para representar cada una de las siguientes ecuaciones. En cada caso, encontrar una ventana de representación que muestre las principales características de la gráfica.

***a***) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$
***b***) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 25$
***c***) $y = -x^3 - 3x^2 + 20x + 5$
***d***) $y = 3x^3 - 40x^2 + 50x - 45$
***e***) $y = -(x + 12)^3$
***f***) $y = (x - 2)(x - 4)(x - 6)$

Resolver este problema usando sólo métodos gráficos conllevaría una estrategia simple de “intuición, comprobación y revisión”. ¿Qué tipo de aspectos podría involucrar un planteamiento analítico? Por ejemplo, ¿tiene simetrías la gráfica?, ¿tiene inflexiones? Si es así, ¿dónde están?

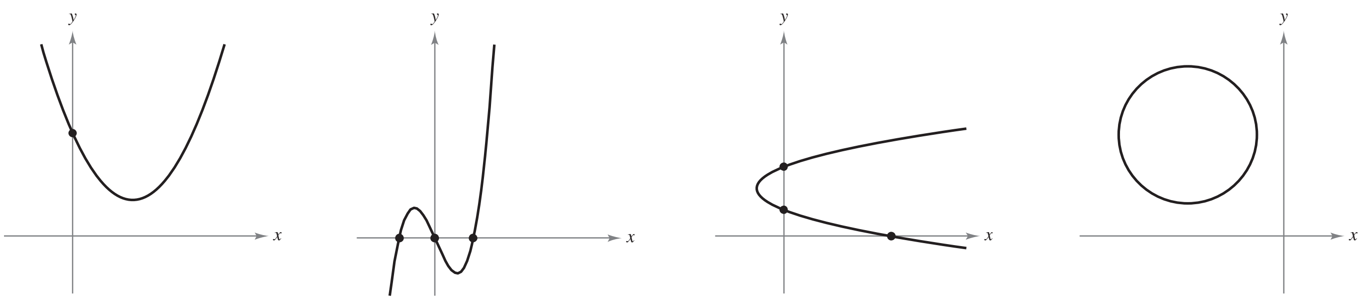
A medida que se avance por los capítulos 1, 2 y 3 de este texto, se estudiarán muchas herramientas analíticas nuevas que serán de ayuda para analizar gráficas de ecuaciones como éstas.

## Intersecciones de una gráfica con los ejes

Dos tipos de puntos solución útiles al representar gráficamente una ecuación son aquellos en los que la coordenada $x$ o $y$ es cero. Tales puntos se denominan **intersecciones con los ejes** porque son los puntos en que la gráfica corta (hace intersección con) el eje $x$ o el eje $y$. Un punto del tipo $(a, 0)$ es una **intersección en $x$** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de ésta. Para determinar las intersecciones en $x$ de una gráfica, igualar $y$ a cero y despejar $x$ de la ecuación resultante. De manera análoga, un punto del tipo $(0, b)$ es una **intersección en $y$** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la misma. Para encontrar las intersecciones en $y$ de una gráfica, igualar $x$ a cero y despejar $y$ de la ecuación resultante.

**NOTA** En algunos textos se denomina $x$ intersección a la coordenada $x$ del punto $(a, 0)$ en lugar del propio punto. Salvo que sea necesario distinguirlos, se usará el término *intersección* para denotar tanto al punto de intersección con el eje $x$ como a su abscisa. ■

Es posible que una gráfica carezca de intersecciones con los ejes, o que presente varias de ellas. Por ejemplo, considerar las cuatro gráficas de la figura P.5.




No hay intersecciones con el eje $x$
Una intersección con el eje $y$

Tres intersecciones con el eje $x$
Una intersección con el eje $y$

Una intersección con el eje $x$
Dos intersecciones con el eje $y$

No hay intersecciones

**Figura P.5**

### *EJEMPLO 2* Determinación de las intersecciones con los ejes $x$ y $y$

Encontrar las intersecciones con los ejes en la gráfica de $y = x^3 - 4x$.

**Solución** Para determinar las intersecciones en $x$, hacer $y$ igual a cero y despejar $x$.

$$x^3 - 4x = 0 \qquad y \text{ se iguala a cero.}$$

$$x(x-2)(x+2) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

$$x = 0, 2 \text{ o } -2 \qquad \text{Despejar } x.$$

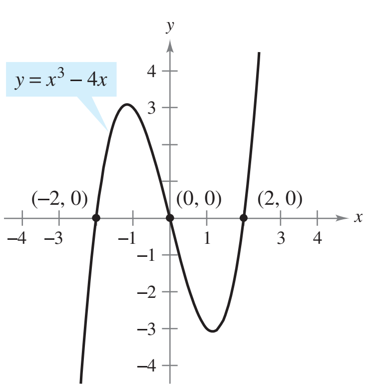
Puesto que esta ecuación admite tres soluciones, se puede concluir que la gráfica tiene tres intersecciones en $x$:

$(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$ Intersecciones en $x$.

Para encontrar las intersecciones en $y$, igualar $x$ a cero. Resulta entonces $y = 0$. Por tanto, la intersección en $y$ es

$(0, 0)$ Intersección en $y$.

(Ver la figura P.6.)




Intersecciones de una gráfica
**Figura P.6**

**TECNOLOGÍA** En el ejemplo 2 se utiliza un método analítico para determinar las intersecciones con los ejes. Cuando no es posible tal enfoque analítico, se puede recurrir a métodos gráficos, buscando los puntos donde la gráfica toca los ejes. Utilizar una herramienta de graficación para aproximar las intersecciones.

## Simetrías de una gráfica

Es útil conocer la simetría de una gráfica *antes* de intentar trazarla, puesto que sólo se necesitarán la mitad de los puntos para hacerlo. Los tres tipos siguientes de simetrías pueden servir de ayuda para dibujar la gráfica de una ecuación (ver la figura P.7).

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *y*** si, para cada punto $(x, y)$ de la gráfica, el punto $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción de la gráfica situada a la izquierda del eje $y$ es la imagen especular de la situada a la derecha de dicho eje.
2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje *x*** si, para cada punto $(x, y)$ de la gráfica, el punto $(x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto quiere decir que la porción de la gráfica situada sobre el eje $x$ es la imagen especular de la situada bajo el mismo eje.
3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si, para cada punto $(x, y)$ de la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de 180° respecto al origen.

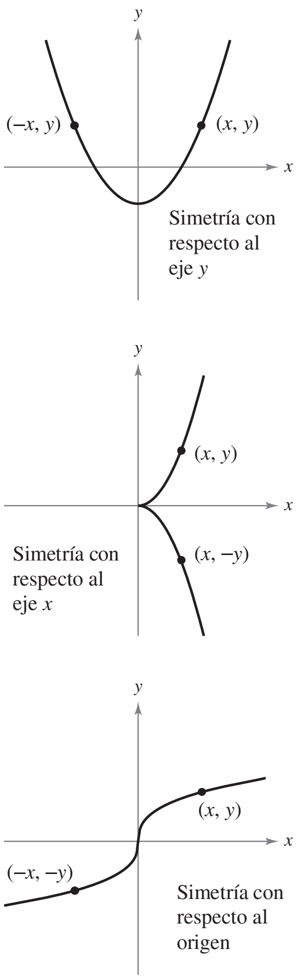



**Figura P.7**

**CRITERIOS DE SIMETRÍA**

1. La gráfica de una ecuación en $x$ y $y$ es simétrica respecto al eje $y$ si al sustituir $x$ por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación en $x$ y $y$ es simétrica respecto al eje $x$ si al sustituir $y$ por $-y$ en la ecuación resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación en $x$ y $y$ es simétrica respecto al origen si al sustituir $x$ por $-x$ y $y$ por $-y$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al eje $y$ si cada uno de los términos tiene exponente par (o es una constante). Por ejemplo, la gráfica de $y = 2x^4 - x^2 + 2$ es simétrica respecto al eje $y$. La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al origen si cada uno de los términos tiene exponente impar, como se ilustra en el ejemplo 3.

### *EJEMPLO 3* Comprobación de la simetría

Verificar si la gráfica de $y = 2x^3 - x$ es simétrica respecto al eje $y$ y respecto al origen.

**Solución**

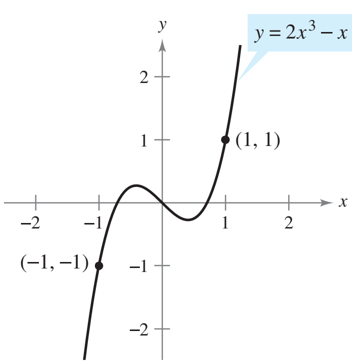
Simetría respecto al eje $y$:

| | |
|---|---|
| $y = 2x^3 - x$ | Escribir ecuación original. |
| $y = 2(-x)^3 - (-x)$ | Sustituir $x$ por $-x$. |
| $y = -2x^3 + x$ | Simplificar. No es una ecuación equivalente. |

Simetría respecto al origen:

| | |
|---|---|
| $y = 2x^3 - x$ | Escribir ecuación original. |
| $-y = 2(-x)^3 - (-x)$ | Sustituir $x$ por $-x$ y $y$ por $-y$. |
| $-y = -2x^3 + x$ | Simplificar. |
| $y = 2x^3 - x$ | Ecuación equivalente. |

Puesto que la sustitución $x$ por $-x$ y $y$ por $-y$ produce una ecuación equivalente, se concluye que la gráfica de $y = 2x^3 - x$ es simétrica con respecto al origen, como se muestra en la figura P.8.




Simetría con respecto al origen
**Figura P.8**

### EJEMPLO 4 Uso de las intersecciones y de las simetrías para representar una gráfica

Dibujar la gráfica de $x - y^2 = 1$.

**Solución** La gráfica es simétrica respecto al eje $x$ porque al sustituir $y$ por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente.

$$x - y^2 = 1 \qquad \text{Escribir ecuación original.}$$
$$x - (-y)^2 = 1 \qquad \text{Sustituir } y \text{ por } -y.$$
$$x - y^2 = 1 \qquad \text{Ecuación equivalente.}$$

Esto significa que la porción de la gráfica situada bajo el eje $x$ es una imagen especular de la porción situada sobre el eje. Para dibujar la gráfica, graficar primero la intersección con el eje $x$ y la porción sobre el eje $x$. Después, reflejar el dibujo en el eje $x$ y obtener la gráfica completa, como se muestra en la figura P.9.

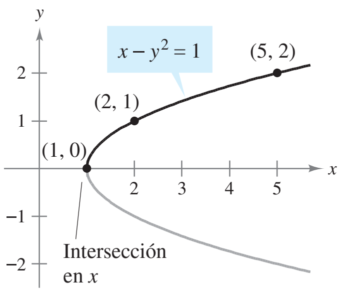



**Figura P.9**

**TECNOLOGÍA** Las herramientas de graficación están diseñadas para dibujar con mayor facilidad ecuaciones en las que $y$ está en función de $x$ (ver la definición de **función** en la sección P.3). Para representar otro tipo de ecuaciones, es necesario dividir la gráfica en dos o más partes, *o bien*, utilizar un modo gráfico diferente. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación del ejemplo 4, puede dividirse en dos partes:

$$y_1 = \sqrt{x-1} \qquad \text{Porción superior de la gráfica.}$$
$$y_2 = -\sqrt{x-1} \qquad \text{Porción inferior de la gráfica.}$$

## Puntos de intersección

Se llama **punto de intersección** de las gráficas de dos ecuaciones a todo punto que satisfaga ambas ecuaciones. Los puntos de intersección de dos gráficas se determinan al resolver sus ecuaciones de manera simultánea.

### EJEMPLO 5 Determinación de los puntos de intersección

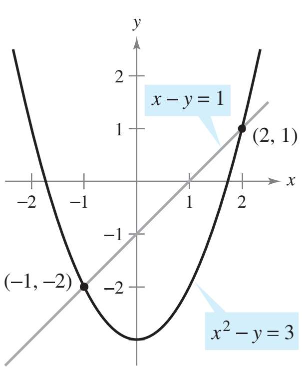
Calcular los puntos de intersección de las gráficas de $x^2 - y = 3$ y $x - y = 1$.

**Solución** Comenzar por representar las gráficas de ambas ecuaciones en el *mismo* sistema de coordenadas rectangulares, como se muestra en la figura P.10. Hecho esto, resulta evidente que las gráficas tienen dos puntos de intersección. Para determinarlos, se puede proceder como sigue.

$$y = x^2 - 3 \qquad \text{Despejar } y \text{ de la primera ecuación.}$$
$$y = x - 1 \qquad \text{Despejar } y \text{ de la segunda ecuación.}$$
$$x^2 - 3 = x - 1 \qquad \text{Igualar los valores obtenidos de } y.$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad \text{Escribir la ecuación en la forma general.}$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0 \qquad \text{Factorizar.}$$
$$x = 2 \text{ o } -1 \qquad \text{Despejar } x.$$

Los valores correspondientes de $y$ se obtienen sustituyendo $x = 2$ y $x = -1$ en cualquiera de las ecuaciones originales. Resultan así los dos puntos de intersección:

$$(2, 1) \text{ y } (-1, -2) \qquad \text{Puntos de intersección.}$$




Dos puntos de intersección
**Figura P.10**

**AYUDA DE ESTUDIO** Verificar los puntos de intersección del ejemplo 5 sustituyéndolos en la ecuación original o usando la función de *intersección* de su herramienta de graficación o computadora.