Haute Ecole de Namur - Liège - Luxembourg
Département économique
Implantation IESN

Bachelier en Informatique de Gestion

Bloc 3

Recherche opérationnelle

Syllabus : Première partie

Isabelle Charlier

Corinne Derwa

Année académique 2016-2017

ORGANISATION DU COURS

UE : RECHERCHE OPERATIONNELLE

- 30h ; 3 ECTS
- Prérequis : Principes de programmation
- Un langage de programmation adapté à la simulation

EVALUATION ET REPARTITION DES POINTS

- 20% pour le travail journalier
  - Un dossier :
    - Par groupe de 2 personnes ;
    - Application à informatiser ;
- Une interro en milieu de quadrimestre
  - Théorie chapitres 1 et 2 ;
  - Facultative ;
  - Si elle est réussie (min 10/20), dispense pour la théorie lors de l'examen de janvier et report de la note de l'interrogation à l'examen de théorie.
    On peut refaire la théorie à l'examen ; dès lors, la note la plus élevée est prise en considération.
  - Si la note à l'interrogation est insuffisante (note<10), obligation de repasser la théorie à l'examen ; la note sera égale à la note la plus élevée.
- 80% pour l'examen :
  - Evaluation sur le contenu des dossiers (10 points) ;
  - Evaluation sur le contenu du cours, répartie en
    - 20 points sur la théorie,
    - 50 points d'exercices (avec formulaire).

MATÉRIEL

- Calculatrice
- Tables statistiques (Poisson, chi-carré,…)
- Papier semi-logarithmique
- Formulaire

PLAN DU COURS

- *Introduction*
- *Chapitre 1 : Génération de nombres pseudos-aléatoires*
- *Chapitre 2 : Files d'attente*
- *Chapitre 3 : Analyse postoptimale en programmation linéaire // syllabus partie 2*

INTRODUCTION

1. Définition

Appelée aussi « Aide à la décision », la recherche opérationnelle peut être définie comme un ensemble de méthodes et de techniques rationnelles utilisées pour analyser et synthétiser des phénomènes d'organisation en vue d'élaborer de meilleures décisions.

2. Histoire

- 17e S : Blaise Pascal et les jeux de hasard
- Début du 20e S : théorie des stocks
- 1940 : Blackett, militaire anglais, dirige la première équipe de recherche opérationnelle avec l'implantation optimale de radars de surveillance et la gestion des convois d'approvisionnement.
  ⇨ Origine militaire du mot « Opérationnelle ».

3. Domaines d'application

- Problèmes d'ordre stratégique (Investir ou pas, choix d'une implantation, dimension d'un parc informatique) ;
- Planification des tâches d'un projet ;
- Gestion du renouvellement d'équipements ;
- Problèmes des files d'attente dans un centre de services ;
- Gestion scientifique de stocks : approvisionnement, vente,…
- Plans de production (éviter gaspillage des matières premières, disposition des machines …) ;
- Affectation optimale de candidats à des postes ;
- Recherche du chemin optimal pour les transports ;
- Problèmes de rentabilité dans les entreprises : maximiser bénéfices/minimiser coûts sous certaines contraintes ;
- Problèmes d'investissement en finance ;
- Etude de la stabilité d'un réseau électrique ;
- Choix d'une architecture informatique:
  - centralisée / distribuée ;
  - traitements en temps réel/différé ;
  - réseau maillé ou en étoile ;
  - capacité de stockage ;
  - puissance du débit et de calcul ;
  - ordonnancement des systèmes d'exploitation ;
  - localisation et nombre de serveurs…

4. Relations avec d'autres disciplines

- Economie (économie d'entreprise, analyse économique)
- Mathématiques (statistiques, probabilités, théorie des graphes, théorie des jeux)
- Informatique

CHAPITRE I: GÉNÉRATION DE NOMBRES PSEUDO ALÉATOIRES

1. Exemple introductif

Sachant qu'une grande surface accueille 1 à 500 personnes/jour, combien de caisses faut-il ouvrir ?
Si trop : coût de personnel trop important et inutile.
Si trop peu : les gens attendent et ne viennent plus-> perte de clients.

- ➔ Élaboration d'un programme qui simule un mois d'ouverture.
- ➔ Besoin de générer des nombres aléatoires pour l'arrivée des clients.

2. Nombres aléatoires et pseudo-aléatoires

Un nombre aléatoire est un nombre issu d'un événement qui résulte du hasard.
Une suite de nombres aléatoires est caractérisée par deux sortes de critères :

- des critères de fréquence limite de production de chaque valeur ;
- des critères relatifs à la succession des valeurs.

Si, par une voie déterministe, on produit une suite de valeurs respectant ces critères, on aura fabriqué une suite de nombres ***pseudo-aléatoires***.

Moyens d'obtention :

- Jets de dés, roulette, tirages au sort, mélange de cartes….
- Consultation de tables « papier » ->obsolète
- Stockage électronique des tables : lourd
- Utiliser des opérations mathématiques pour générer des suites de nombres
  exemple : méthode « *middle square* » de Von Neuman qui consiste à générer des nombres à 10 chiffres, les élever au carré puis prendre les valeurs du milieu.
- Utiliser des phénomènes physiques :
  - Radioactivité ;
  - Bruits thermiques ;
  - Bruits électromagnétiques ;
  - Mécanique quantique : choix d'un photon de traverser ou non une lame réfléchissante ;
  - …

3. Générateur de nombres pseudo-aléatoires

a. DÉFINITION

Une séquence pseudo-aléatoire (Pseudo Random Sequence) est une suite de nombres entiers prenant ses valeurs dans l'intervalle [0, m [. Chaque terme de la suite est le résultat d'un calcul sur le ou les précédents termes (récurrence). Le premier terme est appelé le germe ou la valeur initiale (seed).

Les nombres entiers sont notés $\mathbf{x_n}$ et appartiennent à [0,m[où m est entier positif.
En divisant ces entiers par m, on obtient une suite de réels $\mathbf{u_n}$ appartenant à l'intervalle [0,1[.
Un générateur de nombres pseudo-aléatoires est donc une méthode permettant de générer une telle suite.

Quelles sont les qualités d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires ?

- La vitesse ;
- La simplicité : facile à programmer et facile à tester ;
- Pas de faille grave : pas de « bug » quand on arrive sur des nombres particuliers ;
- Les nombres produits ne doivent pas faire apparaître de suite logique.

Un générateur sera dit « acceptable » s'il a passé avec succès toute une série de tests statistiques que nous étudierons plus loin dans ce chapitre.

b. Formule congruentielle linéaire mixte

Où

-
-
-
-

Exemples :

c. CHOIX DES PARAMÈTRES

d. THÉORÈME DE HULL-DOBELL (1962)

La méthode congruentielle mixte définie par a, m, c et x0 a une période de longueur égale à m

SSI

-c et m sont premiers entre eux ;
-Pour tout p, facteur premier de m, on a (a-1) multiple de p ;
-Si m est multiple de 4, alors (a-1) est multiple de 4

Exemples :

e. GÉNÉRATION SUR UN INTERVALLE [A,B[

f. INFORMATISATION DE LA FORMULE

$$x_{n+1} = (a.x_n + c)\%m \qquad n \in N$$

Il est possible de ne pas programmer la partie « %m » à condition de choisir m de manière adéquate.

Si on travaille en entiers non signés, m sera le plus grand entier machine + 1,
si on travaille en entiers signés, m sera le plus grand entier machine + 1 et pour tout nombre généré dont le bit du signe vaut 1, son bit passera à 0.

Exemple :

4. Application: calcul d'intégrale définie (méthode de Monte-Carlo)

Soit l'intégrale définie suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_2^7 \frac{2^x - \ln(5x+2) + arctgx}{\sqrt{x^2+9}}dx$$

Quelles sont les différentes méthodes de calcul de telles intégrales ?

- l'analyse : le calcul de primitives
- le calcul numérique : méthode de Simpson
- une méthode s'appuyant sur les nombres pseudos-aléatoires.

5. Tests statistiques de validité

a. INTRODUCTION

Une suite pseudo-aléatoire est caractérisée par la distribution de ses valeurs et par la manière dont elles se succèdent.

Plusieurs tests statistiques y sont appliqués successivement pour savoir si la suite est acceptable. Ces tests sont de plus en plus sévères. Chaque test ne sera appliqué que si le précédent est accepté.

Le raisonnement pour chaque test ne débute pas nécessairement sur la suite d'entiers générés.
Pour rappel,

$x_{n+1} =$

Nous pouvons considérer les réels correspondants, notés u_n. Ils sont obtenus par la formule :

$u_n =$

Chaque réel a la forme 0,xxxxxxxxxxx. Nous pouvons considérer la partie décimale comme une suite de chiffres (voire une suite de bits !).
Pour simplifier le raisonnement, nous ne prendrons jamais qu'une seule décimale notée y_n. La formule est :

$y_n =$

Exemple :

b. RAPPELS

La variable aléatoire khi-carré (χ2v) permet de vérifier la qualité de l'ajustement entre une distribution théorique et une distribution expérimentale. Le paramètre ν représente le nombre de degrés de liberté.

Formule standard :

Formule pratique de calcul :

c. ETAPES

Chaque test d'adéquation est fait en respectant les différentes étapes décrites ci-dessous :

Etape 1 : poser une hypothèse H_0 (suite générée acceptable ou non);
Etape 2 : fixer le niveau d'incertitude α (en général α= 5%) ;
Etape 3 : tableau recensé des fréquences observées et des fréquences théoriques + calcul de la statistique observable χ^2;
Etape 4 : vérifier les contraintes à respecter pour chaque test et, le cas échéant, retourner à l'étape 3 en effectuant des regroupements ;
Etape 5 : établir la zone de non rejet en fonction du nombre de degrés de liberté ;
Etape 6: prendre une décision, rejet ou non rejet de l'hypothèse.

d. TEST DES FRÉQUENCES

Ce test porte sur les apparitions de chaque chiffre y_n entre 0 et 10 (valeurs : 0, 1, …, 9).

Exemple :

Supposons que l'on ait généré 120000 y_n. Ils constituent les fréquences observables (r_i) du test statistique.

Etape 1 :

H_0 : la suite de nombres pseudo-aléatoire est acceptable pour ce test
H_1 : ….

Etape 2 :

α=5%

Etape 3 :

X_i [1]	r_i	p_i	$n.p_i$	$(r_i\text{-}n.p_i)^2/n.p_i$
0	1 080	1/10	12 000	
1	10 700	1/10	12 000	
2	20450	…	…	
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9		1/10	12 000	
Total				X^2_{obs}= ……..

[1] Attention à l'écriture : il s'agit de la variable observée dans le test !

Etape 4 :

$n.p_i >= 5$ suppose que $n>=50$. Si la première condition n'est pas respectée, il faut regrouper des classes et recalculer X^2_{obs}.

Etape 5 :

Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de modalités (nombre de valeurs) de la variable diminué du nombre de contraintes.

$\nu = 10 - 1$ (une seule contrainte $\Sigma r_i = n$) = 9

Consultons les tables.

Etape 6 :

Décision :…..

Remarque :

e. TEST DES SERIES

Ce test porte sur des Q-uples de chiffres entre 0 et 9.

But : Tester l'indépendance de Q chiffres successifs.

Contrainte : $n \geq 5.d^2$ où d vaut 10.

Exemple : Q=2, on effectue la même démarche que pour le test des fréquences portant sur tous les couples de chiffres possibles

f. TEST DES SAUTS

Ce test s'applique de nouveau sur les y_n; il s'applique 10 fois (10 valeurs possibles pour le chiffre).

But : Tester les sauts entre deux mêmes valeurs.

Exemple : chiffre=9, la variable testée (saut) est le nombre de chiffres entre deux apparitions successives de 9

Contrainte : $n.p_i \geq 5$

g. TEST DU POKER

But : analyser les apparitions de 5 chiffres y_n successifs et observer comme au poker les valeurs apparues.

h. TEST DU CARRÉ-UNITÉ

But : considérer la suite des réels générés entre 0 et 1, former des paquets de 4 réels, constituer ainsi deux points dans le plan et mesurer l'écart entre les deux points.

Un écart ou une distance est une variable aléatoire de type continu ; par conséquent, il nous faut travailler avec la fonction de répartition F(x). On peut montrer que

$$F(x) = \Pr(d^2 \leq x) = \left(\pi x - \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{x^2}{2}\right)1_{[0,1]}$$

$$+(\frac{1}{3} + (\pi - 2)x + 4(x-1)^{1/2} + \frac{8}{3}(x-1)^{3/2} - \frac{x^2}{2} - 4x.arcos\frac{1}{\sqrt{x}})1_{]1,2[}$$

i. TEST DES COURSES

But : analyser dans la suite générée d'entiers des sous-suites d'entiers strictement croissants.

Exemple :

6. Simulation: Forcer le hasard

Lorsqu'on est amené à simuler par un programme informatique, des problèmes liés à des situations économiques réelles, on doit générer des suites de nombres (pseudos)-aléatoires qui répondent au fonctionnement du problème. On doit donc « forcer » cette suite à répondre aux contraintes imposées par les statistiques observées dans la situation réelle.

Exemple :

7. Exercices

Exercice 1

Sachant que l'on génère U_n entre 0 et 1, écrire le diagramme d'actions correspondant à une génération qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.83$.

Exercice 2 (analyse du risque au lancement d'un nouveau produit)

XX lance un nouveau produit : une imprimante portable dont le prix de vente unitaire est fixé à 249€. La première année, les frais administratifs s'élèvent à 400.000€, la publicité à 600.000€. Les coûts directs, les coûts des matières premières et la demande ne sont pas connus avec certitude.

Le coût direct est décrit par la distribution de probabilité suivante :

C_d	43	44	45	46	47
Prob	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Le coût des matières premières est décrit par une distribution de probabilité uniforme entre 80 et 100 euros.

La demande notée X suit une loi de probabilité normale de moyenne 15000 et d'écart-type 4500.

1. Ecrivez l'équation du profit.

2._ Comment générer C_d, C_m et x ?

Exercice 3 (simulation d'une gestion de stock)

Le produit concerné est une tablette vendue à 125 euros, son coût unitaire étant de 75 euros. La demande aléatoire mensuelle est décrite par une distribution de probabilité normale de moyenne 100 unités et d'écart-type 25 unités. Chaque mois, le vendeur reçoit des livraisons du fournisseur pour compléter son stock juqu'à un niveau Q (niveau de couverture) au début de chaque mois.
Si la demande mensuelle est inférieure à Q, un coût de stockage unitaire de 15 euros par tablette non vendue. Par contre, si la demande mensuelle est supérieure à Q, un coût de pénurie de 30 euros est à supporter par tablette manquante.

Le manager souhaiterait un modèle de simulation pour déterminer le profit mensuel moyen résultant du choix de Q.

Etablir la formule du profit.

8. Un peu d'espionnage en cryptographie

Exercice 1

Vous êtes un espion de la CIA. Pour décrypter un message, il vous est nécessaire d'obtenir le germe d'une suite de nombres aléatoires. Les informations dont vous disposez sont les suivantes :

Formule de la suite de nombre : $X_{n+1}=(21x_n+57)\%100$

Nombre espionné : $X_1=20$

Comment allez-vous procéder pour retrouver x_0 ?

Exercice 2

Idem précédent avec les données suivantes :

$X_1=20$

$X_{n+1}=(7X_n+3)\%100$

9. Exemple d'algorithme de simulation

Un gestionnaire de vente d'ordinateurs souhaite que vous l'aidiez à déterminer le stock d'alerte permettant de minimiser le coût global de son secteur si le coût est proportionnel au nombre d'ordinateurs commandés non encore fournis et au nombre d'ordinateurs restant en stock.
La demande journalière est aléatoire ; elle est générée par le module *générationDemJour*.
Le délai de réapprovisionnement est aléatoire ; il est généré par le module *générationDélaiRéap*.
La quantité de réapprovisionnement *qteReap* est fixe.
Votre étude se fera entre deux valeurs de stock d'alerte : une minim*ale stockAlerteMin* et une maximale *stockAlerteMax.*

CHAPITRE II: FILES D'ATTENTE

1. Introduction

Les problèmes liés à l'attente dans un centre de service sont omniprésents dans notre société. Les exemples ne manquent pas :

- attente à un guichet (caisse dans un supermarché, administration, banque…) ;
- trafic urbain ou aérien ;
- réseaux téléphoniques ;
- circulation de pièces dans un atelier ;
- machines en panne dans un atelier, qui attendent la visite d'un réparateur ;
- programmes dans un système informatique,...

On a l'habitude d'appeler ***clients*** les individus qui constituent la file d'attente et ***station*** le guichet où un ***serveur*** procure un service déterminé.

Il s'agit de phénomènes stochastiques. En effet, les clients arrivent en général au hasard et la durée d'occupation de la station par chaque client n'est, en général, pas constante.

Il est devenu inconcevable de construire un système quelconque (que ce soit un système informatique, un réseau de communication, un système de production ou un système de la vie quotidienne) sans avoir auparavant fait une analyse des performances. La pression des enjeux économiques est telle actuellement que l'on ne peut aboutir à un système sous-dimensionné et que l'on doit éviter au maximum le surdimensionnement. Construire un système adapté, respectant le plus possible les objectifs du cahier des charges est une démarche qui passe obligatoirement par une étape de modélisation et d'analyse des performances.

2. Définitions

On appelle ***file d'attente***, l'ensemble des clients qui attendent d'être servis à l'exclusion de ceux en train d'être servis et ***système d'attente***, l'ensemble des clients qui sont dans la file plus ceux qui se font servir.

Un ***système d'attente*** sera caractérisé par un centre de services (une ou plusieurs stations) et un centre d'attente (une ou plusieurs files).

L'ensemble des clients potentiels constitue la ***source*** du système.

On distingue deux principaux types de systèmes d'attente :

- ouvert : effectif illimité (ex :…)
- fermé : effectif limité (ex :…)

Les stations peuvent être en nombre limité ou illimité. Dans notre cas, elles rendront des services indépendants les uns des autres.

Le centre d'attente peut avoir une capacité nulle, finie ou infinie.

Les files peuvent être gérées selon différentes techniques :

- FIFO :
- LIFO :
- Prioritaire
    - Priorité absolue
        - Régime répété
        - Régime continu
    - Priorité relative

La gestion des files d'attente implique la prise en compte de deux phénomènes d'impatience :

- L'impatience a priori : …
- L'impatience a posteriori :…

La question qui nous occupe est donc : « **Combien de stations faut-il ouvrir pour minimiser les coûts ?** ».

Cette question entraîne l'étude de deux variables aléatoires :

- l'arrivée des clients ;
- la durée des services.

3. Arrivée des clients et durée des services

- Arrivée des clients : cette étude peut se faire de deux manières différentes selon la variable que l'on considère:
    - les intervalles de temps entre deux arrivées successives (variable aléatoire de type continu) ;
    - le nombre d'arrivées de clients par unité de temps (variable aléatoire de type discret)
- Durée des services : c'est une variable aléatoire de type continu.

L'expérience montre que, dans beaucoup de phénomènes d'attente, les variables aléatoires des arrivées et des durées de service sont respectivement poissonniennes et exponentielles négatives. Ce ne sont évidemment pas les seules lois que peuvent suivre ces variables mais ce sont les plus fréquentes et aussi les plus simples à employer pour obtenir un exposé facile des principes et de la théorie des phénomènes d'attente.

Illustrons par un exemple :

Système en équilibre:

4. Position du problème

Le but est de minimiser les coûts.

Exemple : si le coût des stations est croissant linéairement et si le coût de l'attente suit une loi exponentielle négative, on pourrait avoir une courbe du coût total comme illustré ci-dessous :

Il s'agit d'établir la formule du coût total (appelée aussi Fonction Economique, FE(S)) en fonction du nombre de stations et de calculer ses valeurs pour tout nombre de stations compris en le minimum et le maximum.

5. Algorithme de base

En général, le calcul du coût total nécessitera la recherche de diverses quantités décrites dans les paragraphes suivants.

Dans le cas où le coût total est proportionnel au coût du service et au nombre moyen de personnes en attente, écrivez le DA qui détermine le nombre de services à offrir.
On supposera la file unique, aucun phénomène d'impatience n'étant à considérer.

6. Symboles des grandeurs utiles

S nombre de stations

v nombre de stations inoccupées

N_S nombre de personnes dans le système

N_F nombre de personnes dans la file

W_S temps passé dans le système

W_F temps passé dans la file

DS durée de service

Remarquons que $W_S = W_F + DS$, $N_S = N_F + S - v$.

Lorsque ces variables sont surlignées, il s'agit des valeurs moyennes.

EXEMPLE : $\overline{S}$ est le nombre moyen de stations.

Les grandeurs utiles à la résolution des problèmes seront le nombre moyen de personnes dans le système, le nombre moyen de personnes dans la file, le temps moyen passé dans le système et le temps moyen passé dans la file, soit respectivement $\overline{N_S}, \overline{N_F}, \overline{W_S}\ et\ \overline{W_F}$.

7. File à une station (S=1)

Prenons les hypothèses suivantes :

- Le système est ouvert (effectif illimité) ;
- Le système de gestion des files est FIFO : premier client arrivé- premier servi ;
- Pas de phénomène d'impatience à gérer ;
- Les arrivées des clients forment un processus de Poisson de taux λ ;
- Les temps de service suivent une loi exponentielle de taux μ.

Considérons un intervalle de temps $[t, t+\Delta t]$ avec Δt très petit et calculons la loi de probabilité des arrivées dans la file et des sorties de la file.

A. Loi des arrivées

B. LOI DES SORTIES

C. EQUATIONS D'ÉTAT

Pour pouvoir calculer les grandeurs utiles mentionnées supra, nous devons établir les équations d'état.
A cette fin, nous devons calculer la probabilité d'avoir n personnes (n=0, 1, 2…) dans le système à l'instant t.

D. Calcul des grandeurs utiles

8. File à S stations (S>1)

Nous accepterons sans démonstration les formules suivantes :

$$\rho = \frac{\Psi}{S}$$

$$\nu = S - \Psi$$

où ν est le nombre de stations inoccupées

Pour $0 \leq n < S : \; P_n = \frac{\Psi^n}{n!} \times P_0$

Pour $n > S : \; P_n = \frac{\Psi^n}{n!} \times P_0 \times \frac{1}{S^{n-S}}$

Avec $P_0 = \frac{1}{1+\frac{\Psi}{1!}+\frac{\Psi^2}{2!}+\frac{\Psi^3}{3!}+\cdots+\frac{\Psi^{S-1}}{(S-1)!}+\frac{\Psi^S}{S!}\times\frac{1}{1-\rho}}$

$\bar{N}_f = \frac{S^S}{S!} \times P_0 \times \frac{\rho^{S+1}}{(1-\rho)^2}$

$\bar{N}_S = \bar{N}_f + \Psi$

$\bar{W}_f = \frac{\bar{N}_f}{\lambda}$

$\bar{W}_S = \frac{\bar{N}_S}{\lambda}$

$$\Pr(W_f > T) = e^{-(\mu \times S - \lambda) \times T} \times P_0 \times \frac{\rho^S}{1-\rho} \times \frac{S^S}{S!}$$

9. Exercices

1. Dans une usine où existe un bureau de sécurité sociale, le chef du personnel ayant remarqué l'affluence des personnes dans ce bureau, demande une étude relative au service.
   Pendant 100 intervalles de 5 minutes, on observe les arrivées :

Ai	0	1	2	3	4	5	6
	29	34	24	9	3	1	0

   Ainsi que les durées de service:

DS	<1'	1'-2'	2'-3'	…	…	…	…	…	…	…	…	11'-12'
	23	20	14	12	9	5	4	5	3	2	2	1

   a. Vérifiez que les durées de service suivent une loi exponentielle négative.
   b. Un seul employé dans ce bureau suffit-il ?

2. Un disque est sollicité à raison de 4200 demandes par seconde. Le temps moyen d'accès à l'information est 0.2 millisecondes.
   a. Un disque suffit-il ? Justifiez.
   b. Si oui, calculez les 4 grandeurs.

3. 12 terminaux introduisent chacun 300 interrogations à l'heure à un serveur ; les demandes sont traitées une à une en FIFO. Le temps moyen de traitement de chaque interrogation est de 660 msec ; le temps de transmission d'un message est de 6 secondes. Calculez le temps de réponse moyen.

4. Sachant que le service est unique, disposant d'un système où le coût est proportionnel à la vitesse du système et au nombre moyen de clients en file, quel sera le raisonnement pour déterminer la vitesse optimale ?

5. Sachant que le service est unique, disposant d'un système où le coût est égal à la somme du double de la vitesse du système et du triple du temps moyen passé dans le système, que vaut la vitesse optimale si le nombre moyen d'arrivées par seconde vaut 3?

6. Les arrivées des avions demandant à atterrir dans un petit aéroport se font à raison de 27 arrivées par heure. Le temps moyen de service est de 2 minutes par avion. On souhaite que la probabilité d'attendre ne soit pas plus grande que 0,1. Combien de pistes faut-il envisager ?

7. Dans un atelier, des machines tombent en panne selon une loi de Poisson de taux égal à 3 par heure. Le coût de l'arrêt est de 2,5 euros par heure. On souhaite embaucher un ou deux mécaniciens, expérimentés ou non.
   Sachant qu'un moins expérimenté répare 4 machines à l'heure et coûte 12,5 euros par heure, qu'un plus

expérimenté répare 5 machines à l'heure et coûte 16,25 euros par heure, que faire ?
Embaucher un expérimenté ou un non expérimenté ?
Engager deux expérimentés ou deux moins expérimentés ?

8. Un médecin a observé que la durée moyenne d'une consultation est de 15min. Il se dit qu'en convoquant ses malades à des heures fixées, par intervalle de 20min, il verra décroître l'excessive occupation de sa salle d'attente.
   a. Calculez le temps moyen d'attente et les probabilités supérieures à 5% pour qu'il y ait 1, 2, …, n personnes chez le médecin.
   b. Quelle est la probabilité pour qu'un malade attende plus d'une heure ? plus de deux heures ?
   c. Qu'arriverait-il si le médecin décidait de ne convoquer ses malades que toutes les 25min ? Quel serait le temps moyen d'attente ? Quel serait le temps au-delà duquel moins de 10% des clients attendent ?
   d. Le médecin s'adjoint un confrère ; ils se partagent la clientèle qui est reçue soit par l'un soit par l'autre. Pendant les premiers jours, les clients ayant déjà pris rendez-vous, ils laissent l'horaire tel quel (20min par patient). Quel est le temps moyen d'attente ? Quelles sont les probabilités d'avoir 1, 2, …, n personnes ? Montrez que la probabilité d'attendre une heure est devenue négligeable.
   e. Pour que chacun consulte 3 fois par heure, il faudrait convoquer les malades toutes les 10min. Quel serait le temps moyen d'attente ? Quelle serait la probabilité d'attendre plus d'une heure ?

9. Soit le tableau des arrivées suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	7	13	18	18	15	9	8	4	2	1	1

Où le nombre d'arrivées est par tranche de 15min.

La durée moyenne de services est de 8,75min.

   a. On envisage un service proportionnel au nombre de clients. Que vaut S_{min} de manière à couvrir sans attente le service de la clientèle (On admet qu'il n'y a pas d'attente appréciable si plus de 99% des clients sont servis immédiatement) ? Auparavant, vérifiez les hypothèses.
   b. On trouve la solution trop coûteuse. On envisage de réduire le nombre de stations. Quel sera le nombre optimal de stations si le coût de l'attente d'un client est de 0,5 euros par minute tandis que le salaire du guichetier est de 10 euros de l'heure ?

CHAPITRE 3 : ANALYSE POSTOPTIMALE EN PROGRAMMATION LINEAIRE

TABLE DES MATIERES (1RE PARTIE)