Zamiennik części kolokwium - zadanie 1

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Karolina Jeziorska, Dawid Żywczak

19 kwietnia 2020

Spis treści

1 Redukcja problemu

Gęstośc standardowego rozkładu normalnego wraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}),\ x \in \mathbb{R}$$

A zatem dystrybuanta zadana jest wzorem

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$$

Jak dowiadujemy się z treści zadania, całka ta nie ma niestety przedstawienia za pomocą funkcji elementarnych. Aby policzyć jej wartość zredukujmy problem do policznnia innej, znacznie prostszej całki:

$$G(t) = \int_{0}^{t} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$$

Aby skorzystać z funckji G udowodnijmy najpierw, że

$$\phi(t) = 1 - \phi(-t)$$

Dowód. Zacznijmy od prawej strony równości

$$1 - \phi(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx - \int_{-\infty}^{-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \int_{-t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$$

Teraz podstawmy $v = -x$, $dv = -dx$

$$-\int_{t}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(-v)^2}{2}) dv =$$
$$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{v^2}{2}) dv = \phi(t)$$

□

Skorzystajmy teraz z funkcji $G(x)$ w celu obliczenia wartości naszej dystrybuanty

$$\phi(t) = 1 - \phi(-t)$$
$$\phi(t) + \phi(-t) = 1$$
$$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) + \int_{-\infty}^{-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) = 1$$
$$\int_{-\infty}^{-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) + \int_{-t}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) + \int_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) + \int_{-\infty}^{-t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) = 1$$

Korzystając z parzystości funkcji gęstości mamy

$$2 \cdot \int_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) + 2 \cdot \phi(-t) = 1$$
$$2 \cdot \int_{0}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) + 2 - 2 \cdot \phi(t) = 1$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot G(x) + \frac{1}{2} = \phi(t)$$

Zatem aby otrzymać wartość dystrybuanty dla danego t, wystarczy obliczyć wartość powyższego wyrażenia korzystając np. z metody Romberga.