Zadanie 4 lista 5

Dawid Żywczak, 18.06.2020

Naszym zadaniem jest udowodnienie za pomocą gry z adwersarzem, który ogranicza przestrzeń danych tak, by zawierała 2n zestawów, że aby scalić dwa ciągi n elementowe w modelu drzew decyzyjnych, potrzebujemy 2n-1 porównań.

Zastanówmy się najpierw jak ograniczyć przestrzeń danych. Mamy dwa ciągi n elementowe A = $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i B = $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Chcemy dostać posortowany ciąg X złożony ze wszystkich elementów A i B (czyli długości 2n). Adwersarz jest wredny i chce nam zrobić na złość, zatem tworzy przestrzeń danych tak, aby każde zapytanie eliminowało jak najmniejszą liczbę elementów, a przestrzeń była jak największa, czyli robi wszystko, żebyśmy musieli wykonać jak najwięcej zapytań aby dostać odpowiedź. Zatem niech nasza ograniczona przestrzeń wygląda następująco - stwórzmy sobie $2n-1$ ciągów następującej postaci:

- $X_0 = a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ (oczywiście posortowany rosnąco)
- $X_1 = b_1, a_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$
- $X_2 = a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, a_n, b_n$
- ...
- $X_{2n-1} = a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, b_n, a_n$

Każdy z X_i ($i > 0$) powstaje z X_0 przez zamianę elementów x_k i x_{k+1}. Ciągów tych jest 2n.

Zastanówmy się teraz jakie pytania będziemy zadawać adwersarzowi. Nie ma sensu pytać o to czy a_i jest większe od a_j bo wiemy, że ciągi A i B są posortowane (wtedy jest sens ich scalania), więc "tracilibyśmy" tylko pytania. Lepiej pytać jak a_i ma się do b_j. Rozważmy możliwe przypadki:

- $i > j+1$ Wtedy dostajemy odpowiedź, że a_i jest większe od b_j. Niestety nie eliminujemy w ten sposób żadnego z zestawów, bo kolejne zestawy to zamiana b_i z a_i oraz b_i z a_{i+1}, a a_i i b_j różnią się o co najmniej 2.
- $j > i$ Wtedy dostajemy odpowiedź, że a_i jest mniejsze od b_j. Niestety ponownie nie eliminujemy żadnego z zestawów, ponieważ w kolejnych X_k nie zamieniamy elementów a_i i b_j jeśli $i < j$, a w X_0 jeśli $i < j$ to $a_i < b_j$.
- $i = j$ Wtedy dostajemy odpowiedź, że a_i jest mniejsze od b_j. Tutaj już eliminujemy przypadek, w którym a_i jest większe niż b_i - czyli ciąg X_{2i-1}.
- $i = j+1$ Wtedy dostajemy odpowiedź, że a_i jest większe od b_j. Tutaj również eliminujemy jeden z zestawów, a konkretnie przypadek, kiedy a_i jest mniejsze od b_{i-1}, czyli ciąg X_{2i-2}.

Jak widać jesteśmy w stanie usunąć co najwyżej jeden zestaw na pytanie. Zatem aby dostać od adwersarza odpowiedź potrzebujemy przynajmniej $2n-1$ zapytań. Gdyby gracz był w stanie znaleźć odpowiedź szybciej, znalazłby ją również szybciej w tej przestrzeni danych, eliminując więcej niż jeden zestaw na pytanie, co jak pokazaliśmy wyżej nie jest możliwe. Wniosek z tego jest taki, że potrzeba 2n-1 porównań, aby w modelu drzew decyzyjnych scalić dwa ciągi.