

Dawid Żywczak, zadanie 6, lista 2

10.04.2020

Ułóż algorytm, który dla danego spójnego grafu G oraz krawędzi e sprawdza w czasie $O(n + m)$, czy krawędź e należy do jakiegoś minimalnego drzewa spinającego grafu G . Możesz założyć, że wszystkie wagi krawędzi są równe.

Jak to rozwiązać?

Przywołajmy najpierw pewną własność, często nazywaną cycle property:

Krawędź e nie jest maksymalna na żadnym cyklu w grafie G wtedy i tylko wtedy, gdy e należy do przynajmniej jednego z minimalnych drzew rozpinających grafu G

Dowód. Pokażemy implikacje w dwie strony.

1. Załóżmy, że e nie jest maksymalna na żadnym cyklu z G , oraz że nie należy do żadnego MST grafu G . Rozważmy przypadki:

1. e nie należy do żadnego cyklu, czyli można pokazać, że należy do MST, sprzeczność.
2. e należy do jakiegoś cyklu. Weźmy dowolne MST grafu G i dołóżmy krawędź e . Powstanie nam wtedy cykl, bo e nie było na początku w drzewie. Skoro e nie jest maksymalna na tym cyklu, to istnieje jakaś krawędź v , o maksymalnej wadze. Usuwając krawędź v dostajemy drzewo rozpinające o mniejszej wadze niż MST. Czyli e należy do MST, sprzeczność.

2. Skorzystamy z kontrapozycji i pokażemy, że jeśli krawędź e jest maksymalna na pewnym cyklu w G , to e nie należy do żadnego MST. Załóżmy niewprost, że e jednak należy do MST. Wtedy możemy zdjąć e z cyklu i dodać inną krawędź z cyklu o mniejszej wadze, która nie jest w MST, a wtedy otrzymamy drzewo o mniejszej wadze, zatem e należy do MST.

Teraz pozostaje podać algorytm wykorzystujący tę własność.

Niech $e = \{u, v\}$:

1. $w =$ waga krawędzi e
2. uruchom DFS(u) z dodatkowym warunkiem, że bierzemy tylko krawędzi mające wagę mniejszą niż waga e (możemy uruchomić również z v)
3. jeżeli w trakcie DFS dotarliśmy do wierzchołka v , zwróć false
4. wpp. zwróć true

Dlaczego to działa?

Jeżeli w trakcie DFS odwiedziliśmy wierzchołek v , to znaczy że istnieje cykl zawierający krawędź e , gdzie e jest krawędzią maksymalną zatem z cycle property nie może należeć do MST. Wpp. nie połączyliśmy wierzchołków u i v , zatem nie istnieje cykl, w którym e jest krawędzią maksymalną, zatem z cycle property należy do MST.