Dawid Żywczak, zadanie 9, lista 3

08.05.2020

Jakie jest prawdopodobieństwo wygenerowania permutacji identycznościowej przez sieć Benesa-Waksmana, w której przełączniki ustawiane są losowo i niezależnie od siebie z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$?

Weźmy sieć S_n oraz pierwszy przełącznik z lewej strony i załóżmy, że znajduje się on w stanie α_1 i bez starty ogólności załóżmy, że kieruje on wyjście do dolnej sieci $S_{\frac{n}{2}}$. Żeby otrzymać identyczność, pierwszy przełącznik po prawej stronie również musi mieć stan α_1 oraz musi łączyć pierwszą linię wyjściową z dolną siecią $S_{\frac{n}{2}}$. Podobnie dla każdej innej pary przełączników z lewej i prawej strony. Warto też zauważyć, że obie podsieci również muszą być identycznościami. Daje nam to zależność $P(S_n = id) = (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} \cdot P(S_{\frac{n}{2}} = id)^2$, którą wystarczy rozwiązać. Teraz niech $a_n = logP(S_n = id)$. Wtedy

$$a_n = \frac{1}{2}nlog(\frac{1}{2}) + 2logP(S_{\frac{n}{2}} = id) = -\frac{n}{2} + 2logP(S_{\frac{n}{2}} = id)$$
$$a_n = -\frac{n}{2} + 2loga_{\frac{n}{2}},\ a_2 = -1$$

Po rozpisaniu zauważamy, że $a_n = -\frac{n}{2}logn$, czyli $P(S_n) = 2^{-\frac{n}{2}logn} = (\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$.