**Capítulo 2**

**Conceptos básicos de estadística en ingeniería eólica**

**2.1 Introducción**

Cuando se habla de un análisis dinámico de viento siempre se tiene la incertidumbre de cómo será el comportamiento del viento en algún tiempo determinado, esto causa que el problema tenga que resolverse con probabilidad. La rama de la probabilidad que será de gran utilidad son los procesos estocásticos, los cuales permitirán conocer con cierto grado de certidumbre el comportamiento del viento.

Antes de involucrarse en la respuesta dinámica del viento es necesario definir ciertos conceptos los cuales son básicos para la comprensión de los procesos estocásticos.

**2.2 Función de distribución, media y varianza**

Cuando se mide la velocidad del viento en un tiempo determinado y se grafican sus resultados como se muestra en la Figura 2.1, Se puede observar que sus valores son distintos en cualquier punto de la gráfica, sin embargo, presenta un comportamiento que se puede predecir dentro de ciertos límites.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 2.1 Propiedades estadísticas de un flujo turbulento |

Una característica que se muestra en el comportamiento de la función de la Figura 2.1 es la media, que representa un valor que es independiente del tiempo, es decir, que no varía y se puede definir con la ecuación (2.1).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1) |

donde  es la media,  es la esperanza de que se obtenga el valor  deseado,  es un valor esperado y  es una función de distribución, la cual se define más adelante. Sin embargo, cuando se hace una medición por lo general se tienen valores discretizados por lo que otra forma de definir la media es con la ecuación (2.2).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2) |

donde  es la cantidad de datos medidos; entre más datos se tenga más preciso será el resultado.

En la ecuación (2.1) se introdujo el concepto de función de densidad. Esta función de densidad indica cual es la probabilidad de tener un cierto valor. Si se observa la parte derecha de la Figura 2.1 se muestra que los valores cercanos a la media se repiten más que los alejados, es decir, que se tiene mayor probabilidad de que un resultado este cerca de la media que cualquier otro valor. En la Figura 2.1 se muestra una distribución de Gauss, la cual matemáticamente se representa con la ecuación (2.3).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3) |

donde  es la desviación estándar.

La desviación estándar es una medida que indica que tan dispersos están los datos, también puede ser considerada con una medida de incertidumbre. Se puede ver que la desviación estándar influye en la función de densidad, de tal modo que si la desviación estándar disminuye, la función se vuelve más estrecha. La desviación estándar se obtiene con la ecuación (2.4).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4) |

La ecuación (2.4) se le conoce como varianza que también se puede escribir como la ecuación (2.5).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5) |

**2.2.1 Ejemplo 2.1**

Se la variable representada por la función continua,



la varianza se puede obtener con:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Haciendo un cambio de variable de tal modo que , donde  son números enteros y  entonces la varianza es,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Tal que sea la variable representada por,



y  varía de  a .

La gráfica de la ecuación se muestra en la Figura 2.2

|  |
| --- |
|  |
| Figura 2.2 Función |

La varianza es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Si se aplica para elementos discretos



cuya media . Los valores necesarios para el cálculo se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Valores para el cálculo de la desviación estándar.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 0.0000 | 3.0000 | 9.0000 |
| 2 | 0.3142 | 2.4271 | 5.8905 |
| 3 | 0.6283 | 0.9271 | 0.8594 |
| 4 | 0.9425 | -0.9271 | 0.8594 |
| 5 | 1.2566 | -2.4271 | 5.8905 |
| 6 | 1.5708 | -3.0000 | 9.0000 |
| 7 | 1.8850 | -2.4271 | 5.8905 |
| 8 | 2.1991 | -0.9271 | 0.8594 |
| 9 | 2.5133 | 0.9271 | 0.8594 |
| 10 | 2.8274 | 2.4271 | 5.8905 |
|  |  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando la integral para elementos discretos (Tabla 2.2),



Se utilizará tiene entonces la integral de Simpson que está definida como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

donde,  sub intervalos. Se requiere que el número de sub intervalos sea par. El ancho del sub intervalo es: . En la tabla 2.2 en la quinta columna viene el valor  que indica la multiplicación ya sea por 4 o por 2 dependiendo el caso.

Tabla 2.2 Valores para aplicar la integración numérica de Simpson

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0.0000 | 3.0000 | 9.000 | 1 | 9.0000 |
| 2 | 0.28274 | 2.5330 | 6.4161 | 4 | 25.6669 |
| 3 | 0.56548 | 1.2774 | 1.6318 | 2 | 3.2656 |
| 4 | 0.84822 | -0.3759 | 0.1413 | 4 | 0.5632 |
| 5 | 1.13096 | -1.9122 | 3.6565 | 2 | 7.3074 |
| 6 | 1.4137 | -2.8531 | 8.1402 | 4 | 32.5231 |
| 7 | 1.69644 | -2.9058 | 8.4437 | 2 | 16.8913 |
| 8 | 1.97918 | -2.0537 | 4.2177 | 4 | 16.8916 |
| 9 | 2.26192 | -0.5623 | 0.3162 | 2 | 0.6366 |
| 10 | 2.54466 | 1.1042 | 1.2193 | 4 | 4.8594 |
| 11 | 2.8274 | 2.4269 | 5.8898 | 1 | 5.8832 |
|  |  |  |  |  |  |

|  |
| --- |
|  |

Cuando se emplea el método de Simpson, existe un error, el cual disminuirá cuando el número de datos se incremente.

Con base a estos valores (la media, la función de distribución, la desviación estándar y la varianza) se puede obtener el comportamiento del viento. A continuación se presenta conceptos que permiten conocer cómo influye el comportamiento del viento a un punto determinado en tiempos distintos o puntos distintos.

**2.3 Estadística en el dominio del tiempo**

El valor de un proceso aleatorio se puede obtener con su media y una variable dependiente al tiempo, como se muestra en la ecuación (2.6).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.6) |

Es útil conocer el comportamiento del viento en un tiempo determinado, sin embargo hay que considerar que en una estructura tipo puente, el flujo no tiene el mismo valor a todo lo largo. El comportamiento de un punto puede depender de otro al mismo tiempo o en tiempos distintos. En la Figura 2.3 se muestra diferentes respuestas en un mismo tiempo a lo largo de varios puntos.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 2.3 Eventos simultáneos de un mismo proceso en diferentes puntos |

La relación entre el comportamiento de un punto a otro se le conoce como correlación, el cual puede tomar valores de 0 a 1.0, donde 0 indica que no influye nada y 1.0 que tiene completa influencia.

La correlación está directamente relacionada con los valores de dos eventos como se muestra en la ecuación (2.7)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.7) |

Por otro lado, cuando se mide la relación de error entre dos datos se le conoce como covarianza, ésta estima cuanto varían los dos valores de la media, por lo que su ecuación se considera una media de cero como se muestra en la ecuación (2.8). Si en un análisis la media es cero, la correlación y la covarianza, producen los mismos resultados.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.8) |

En las ecuaciones (2.9) y (2.10) se muestran las correlaciones y covarianza, respectivamente, para valores discretos,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.9) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.10) |

Con base a la definición anterior se puede obtener la correlación y covarianza de un mismo punto en tiempos distintos, como se muestran en las ecuaciones (2.11) y (2.12). A la auto-correlación es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.11) |

y a la auto-covarianza es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.12) |

Si son en distintos puntos y distinto tiempo se le conoce como correlación cruzada y covarianza cruzada, que se muestran en la ecuación (2.13) y (2.14), respectivamente.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | (2.13) |
|  | |  | (2.14) | |

En esta sección se muestra la correlación y covarianza para dos puntos, sin embargo se puede aplicar a una cantidad  de puntos.

**2.3.1 Ejemplo 2.2**

Dado una viable , la covarianza se puede definir como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Si se acota con los mismos valores que el ejemplo anterior  ,  y  y un tiempo de desfase ,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando la ecuación para valores discretos (Tabla 2.3) considerando un  y 

|  |
| --- |
|  |

Tabla 2.3 Obtención de la covarianza

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0.0000 | 3.0000 | 0.6283 | 0.9271 | 2.7812 |
| 2 | 0.3142 | 2.4271 | 0.9425 | -0.9271 | -2.2500 |
| 3 | 0.6283 | 0.9271 | 1.2566 | -2.4271 | -2.2500 |
| 4 | 0.9425 | -0.9271 | 1.5708 | -3.0000 | 2.7812 |
| 5 | 1.2566 | -2.4271 | 1.8850 | -2.4271 | 5.8906 |
| 6 | 1.5708 | -3.0000 | 2.1991 | -0.9271 | 2.7812 |
| 7 | 1.8850 | -2.4271 | 2.5133 | 0.9271 | -2.2500 |
| 8 | 2.1991 | -0.9271 | 2.8274 | 2.4271 | -2.2500 |
| 9 | 2.5133 | 0.9271 | --- | --- | --- |
| 10 | 2.8274 | 2.4271 | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando el método de Simpson (Tabla 2.4)

|  |
| --- |
|  |

Tabla 2.4 Aplicación del método de Simpson para la obtención de la covarianza

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0.0000 | 3.0000 | 0.6280 | 0.9289 | 1 | 2.7866 |
| 2 | 0.2827 | 2.5331 | 0.9107 | -0.7440 | 4 | -7.5382 |
| 3 | 0.5654 | 1.2778 | 1.1934 | -2.1852 | 2 | -5.5846 |
| 4 | 0.8481 | -0.3752 | 1.4761 | -2.9464 | 4 | 4.4222 |
| 5 | 1.1308 | -1.9115 | 1.7588 | -2.7904 | 2 | 10.6676 |
| 6 | 1.4135 | -2.8528 | 2.0415 | -1.7660 | 4 | 20.1514 |
| 7 | 1.6962 | -2.9061 | 2.3242 | -0.1918 | 2 | 1.1150 |
| 8 | 2.9789 | -2.0550 | 2.6069 | 1.4420 | 4 | -11.8530 |
| 9 | 2.2616 | -0.5642 | 2.8896 | 2.6270 | 2 | -2.9642 |
| 10 | 2.5443 | 1.1022 | 3.1723 | 2.9943 | 4 | 13.2014 |
| 11 | 2.8270 | 2.4255 | 3.4550 | 2.4297 | 1 | 5.8933 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Cuando se acota el problema, hay un error muy grande ya que se usan pocos datos

**2.4 Valores máximos**

Los valores que más interesan en el diseño estructural son los máximos, ya que con base en ellos se hace el diseño. En procesos estocásticos el valor máximo se obtiene a partir de la ecuación (2.15) donde se tiene un valor medio independiente del tiempo, un factor pico y la desviación estándar

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.15) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.16) |

donde  es el factor pico,  la media,  es la constante de Euler que equivale a 0.5772,  la desviación estándar y es el número de cruces por cero.

Dependiendo del espectro de respuesta el factor pico puede tener diferentes valores, en este trabajo se obtiene el factor pico por medio de una simulación en el dominio del tiempo lo cual permite obtener con la ecuación (2.17) (Oien, 2013).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.17) |

donde  es el valor máximo de la simulación. Este valor puede ser desplazamiento, velocidad, fuerza etc.

**2.4.1 Ejemplo 2.3**

Obtener el factor pico de la simulación de viento mostrada en la Figura 2.4

|  |
| --- |
|  |
| Figura 2.4 Simulación de velocidad de viento para el ejemplo 2.3 |

Para obtener el número de cruces por cero se identifica cuantas veces a lo largo del registro pasa por cero como se muestra en la Figura 2.5, donde se marca con un círculo rojo el punto donde el valor de la velocidad es cero.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 2.5 Puntos donde el registro cruza el cero |

Al contar los puntos da un total de 45 veces que cruza por cero el registro, por lo que el factor pico es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**2.5 Densidad de auto espectro**

La densidad de auto-espectro contiene las propiedades del proceso en el dominio de la frecuencia, es decir los valores de como varían los puntos a lo largo de la estructura tipo puente. Dicho en otras palabras, es la auto-varianza en el dominio de la frecuencia. Para ello será necesario aplicar la transformada de Fourier.

La densidad de espectro en función del tiempo se tienen valores deterministas, en cambio, en el dominio de la frecuencia los valores son aleatorios. Para hacer eso (y basado en la definición de la transformada de Fourier) se hace la suma de varios armónicos como se muestra en la ecuación (2.18).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.18) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.19) |

Cada armónico se puede obtener con

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.20) |

donde las amplitudes son



y el ángulo de fase



donde  y  se definen en la ecuación (2.21).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.21) |

Por medio de este cambio la función de auto-espectro de un solo lado (para valores positivos de ) se define similar a la varianza divido entre , como se muestra en la ecuación (2.22).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.22) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.23) |

Si se define que la componente armónica  es y  como  entonces se tiene que la función de densidad de un solo lado es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.24) |

Considerando para los valores negativos, entonces se tiene que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.25) |

Si se considera que  es la amplitud de la transformada entonces se puede poner que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.26) |

**2.6 Densidad espectral cruzada**

La función de densidad espectral cruzada contiene las propiedades de coherencia en el dominio de la frecuencia, es el mismo concepto que la covarianza pero en el dominio de la frecuencia.

Similar a la ecuación (2.25) el espectro se puede definir como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.27) |

Dado que se está empleando la transformada de Fourier donde la respuesta se define como la suma de armónicos  y  entonces se puede definir la respuesta como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.28) |

Por lo que la covarianza se puede definir como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.29) |

El co-espectro  por lo general es un valor complejo donde la parte real se conoce como densidad co-espectral  y la parte imaginaria quad-espectral . Esto se puede representar como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.30) |

La función de coherencia se define como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.31) |

Si se considera que todo ocurre en un mismo proceso de tal forma que  entonces el espectro cruzado (ahora auto-espectro) queda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.32) |

Para cuestiones prácticas, las partes imaginarias pueden ser despreciadas por lo que , si se introduce el concepto de co-espectro normalizado como se muestra en la ecuación (2.33) y se considera que la respuesta es debido al mismo proceso tal que  entonces la parte real del espectro se puede obtener como se ve en la ecuación (2.34).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | (2.33) | |
|  |  | | (2.34) | |

A partir de la ecuación (2.34) se puede obtener la función de densidad para los diferentes puntos que se muestran en la Figura 2.2 considerando como contribuyen cada uno al comportamiento total de la estructura.

**2.7 Conclusiones**

En este capítulo se mostraron las ecuaciones que permiten obtener los valores estadísticos de cualquier función. El viento presenta un comportamiento estadístico Gaussiano Las ecuaciones aquí presentadas están presentadas para funciones continuas sin embargo en la ingeniería la mayoría de las veces se cuenta con sistemas discretos, es por ello que se presentó como obtener valores similares por medio de la integral se Simpson permitiendo tener valores precisos dependiendo del número de datos.