**Capítulo 4**

**Respuesta dinámica de un proceso estocástico**

**4.1 Introducción**

Cuando se habla de un proceso estocástico es necesario resolver la ecuación de movimiento haciendo uso de la estadística y la probabilidad. Es común obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia, por lo que para resolverlo se hace uso de la transformada de Fourier.

**4.2 Ecuación de equilibrio dinámico**

La ecuación (4.1) se muestra la ecuación de movimiento de un oscilador de un grado de libertad,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.1) |

donde  es la masa,  el amortiguamiento,  la de rigidez,  la fuerza del viento y  el desplazamiento.

La fuerza debido al viento es aleatoria por lo que la respuesta también lo es, como se muestra en la ecuación (4.2).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2) |

donde  y  son los valores medios de la respuesta y la carga, respectivamente; y  y  son sus componentes aleatorias.

La fuerza  se puede separar en dos variables como se muestra en la ecuación (4.3).  es la fuerza debido al viento directamente y  debido a la interacción con la estructura.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.3) |

Cuando se representa de forma matricial la ecuación de equilibrio dinámico, los valores de la ecuación (4.1) deben tener las componentes en las direcciones deseadas, generalmente, se consideran la dirección ,  y  que corresponden a las direcciones mostradas en la Figura 4.1.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 4.1 Direcciones de análisis |

Considerando las diferentes direcciones, la ecuación de movimiento se puede escribir como la ecuación (4.3),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.3) |

donde las letras mayúsculas corresponden a las matrices.

La ecuación (4.3) se puede poner en función de sus componentes generalizadas, para ello se considera que la respuesta depende de una matriz de forma modal  y un vector de amplitud modal  también conocido como vector de coordenadas generalizadas. Esta relación se muestra en la ecuación (4.4).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.4) |

Si se sustituye (4.4) en (4.3) se tiene la ecuación de movimiento en coordenadas generalizadas como se muestra en la ecuación (4.5),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.5) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.6) |

donde  es la masa generalizada,  es el amortiguamiento generalizado,  es la rigidez generalizada,  es la fuerza generalizada,  es la frecuencia angular y  es el coeficiente de amortiguamiento, cada una correspondiente al modo  característico. Mientras que  es la longitud de toda la estructura y  es la longitud donde actúa el viento.

**4.3 Respuesta de un solo componente de un solo modo**

Para realizar estos cálculos se considera que no hay un acoplamiento entre modos verticales, horizontales y torsionales además de que no existe covarianza entre modos. Para obtener la varianza en cada dirección, se suman las contribuciones de cada modo como se muestra en la ecuación (4.7).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.7) |

La varianza se puede obtener a partir de la función de densidad espectral como se muestra en las ecuación (4.8). La función de densidad espectral de desplazamiento se define en la ecuación (4.9), si se desea ver como se obtiene a partir de la ecuación de movimiento véase el apéndice A.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | (4.8) |
|  | |  | (4.9) | |

En la Figura 4.1 se muestra la representación gráfica del espectro de respuesta de carga , la función de admitancia mecánica  y el espectro de respuesta de desplazamiento .

|  |
| --- |
|  |
| Figura 4.2 funciones de espectro y transferencia en el dominio de la frecuencia |

En la Figura 4.2 se puede observar que el área bajo la curva del espectro es la desviación estándar, en la parte derecha, se observa que la desviación estándar total es la suma de la desviación estándar de base (de fondo) y la de resonancia.

**4.3 Respuesta general de múltiples modos**

En la sección anterior se vio como obtener la respuesta de forma independiente para cada modo y cada fuerza. En esta sección se presenta la ecuación para considerar todos los modos. Aunque en este trabajo no se aplica esta metodología es bueno que se conozcan las ecuaciones.

El procedimiento es igual que para un solo modo, dejando en términos matriciales la ecuación (4.9) se expresa como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.10) |

Los valores de  y  se obtienen de una análisis de valores característicos por lo que falta mostrar cómo se obtiene la función de densidad de carga . En la ecuación (4.10) no viene el término de la rigidez como se muestra en la ecuación (4.9) ya que se incluye en el espectro de la carga modal.

**4.4 Ecuación de aleteo**

Las ecuaciones (4.8) y (4.9) pueden ser usadas para obtener la respuesta de cualquier estructura ante efectos de ráfagas como de desprendimiento de vórtices, sin embargo en estas ecuaciones no existe acoplamiento entre modos lo cual sucede cuando se evalúa el efecto ante aleteo.

Theodorsen (1935) propuso las ecuaciones de aleteo para una placa, ignorando la separación de flujo, esto limita su propuesta para puentes por lo que Scanlan (1978) modificó la teoría de Theodorsen. La teoría de Scanlan utiliza derivadas aerodinámicas, las cuales se definen más adelante, primero la ecuación (4.3) se puede reescribir como:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (4.11a) | |
|  |  | | | (4.11b) | |

donde  es la masa modal,  es el momento de inercia másico,  es el desplazamiento vertical,  es la rotación,  es el amortiguamiento crítico,  es la frecuencia circular donde ,  es el levante aerodinámico,  es el momento,  es la fuerza de levante debido a las ráfagas y  el momento debido a las ráfagas.

Scanlan define las fuerzas autoexitables como:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (4.12a) | |
|  |  | | | (4.12b) |

donde  es la densidad del viento,  es el ancho del puente,  es la frecuencia reducida que se obtiene con ,  es la velocidad media,  y  y  son las derivadas aerodinámicas.

Las fuerzas debido a las ráfagas las define como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.13a) |
|  |  | (4.13b) |

donde  y  es la velocidad horizontal y vertical debido a la ráfaga respectivamente.  es el coeficiente de arrastre,  el de levante,  el de momento,  es la derivada del coeficiente de levante y  la derivada del coeficiente de momento.

Liu (2011) presenta las fuerzas de ráfaga como se muestra en las ecuaciones 4.14 las cuales se evalúan a partir de o derivadas aerodinámicas.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.14a) |
|  |  | (4.14b) |

La diferencia entre las ecuaciones (4.12) y (4.14) es en que la primera solo empela seis derivadas aerodinámicas y la segunda ocupa ocho derivadas aerodinámicas. Estas derivadas aerodinámicas describen el comportamiento a flexión, torsión y la combinación de ambas por lo que la ecuación (4.14) considera todas las combinaciones posibles entre flexión y torsión.

**4.5 Conclusiones**

En este capítulo se pudo ver que se puede obtener la respuesta ante efectos ráfagas y vórtices en el dominio de la frecuencia, esto nos permite trabajar con las funciones de densidad las cuales se encuentran en este dominio.

También se mostraron las ecuaciones de Scanlan para el efecto de aleteo las cuales involucran un acoplamiento torsional y a flexión vertical, esto permitirá resolver las ecuaciones en el dominio del tiempo.

**4.6 Referencias**

Scanlan, R. (1978). The action of flexible bridges under wind, I: flutter theory. Journal of Sound and Vibration , 187-199.

Theodorsen, T. (1935). General theory of aerodynamic instability and mechanism of flutter. Washington DC: NACA Report No. 496.