**Capítulo 5**

**Cargas de viento y movimiento autoexitable**

**5.1 Introducción**

Cuando un puente está sujeto a un flujo de viento, el ángulo de incidencia cambiara dependiendo del instante en el que actué, esto causara que la fuerza en la estructura varíe como se muestra en la Figura 5.1.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 5.1 Movimiento auto-excitable debido al viento |

En el análisis de viento, se consideran tres direcciones que corresponden a las direcciones fluctuantes, estas dependen de la dirección del viento y se descomponen en ,  y  que son en la dirección paralela, perpendicular horizontal y perpendicular vertical al viento  respectivamente. En la Figura 5.2 se muestran las direcciones del flujo.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 5.2 dirección del viento fluctuante |

Las fuerzas por metro lineal se pueden descomponer en tres componentes: una fuerza que genera un desplazamiento en dirección del viento , otra que genera un desplazamiento perpendicular al viento  y otra que genera un giro del tablero . A continuación se presenta como obtener las fuerzas del viento incluyendo su cambio de posición.

**5.2 Teoría de ráfagas**

La teoría que se presenta a continuación fue desarrollada por Davenport (Strommen, 2010). En este caso es aplicada a estructuras tipo línea con una velocidad media de flujo a cierta altura a lo largo del puente.

En la Figura 5.3 se muestran las fuerzas y desplazamientos causados por el viento y como va cambiando el ángulo del tablero, causando que la fuerza varíe dependiendo del ángulo de ataque, esto se representa con la Figura 5.3 que se expresa con la ecuación (5.1).

|  |
| --- |
|  |
| Figura 5.3 Desplazamientos y flujos |

En la Figura 5.3 el tablero se encuentra en el punto  antes de estar sometido al efecto del viento. Una vez que el viento actúa, el tablero, tiene los desplazamientos ,  y  moviendo el tablero al punto . Una vez que se encuentra el punto  , el tablero, se encuentra sometido a una velocidad relativa  la cual se descomponen en su componente horizontal expresada como  y su componente vertical  , formando un ángulo . La velocidad relativa en el punto  generara los desplazamientos ,  y  cambiando la posición del tablero al punto . La nueva posición depende de la posición inmediatamente anterior por lo que los desplazamientos nuevos, se suman a los anteriores, sin embargo el ángulo de ataque del viento cambia, por lo que la rotación del tablero con referencia a la dirección de la velocidad relativa  es  a la cual se le denomina . En cada nueva posición la presión de viento cambia la cual se puede expresar la obtención de esta presión en función del ángulo de ataque como se muestra en la ecuación (5.1),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.1) |

donde  es la presión dinámica,  es la densidad del viento,  es la velocidad relativa del viento en un instante determinado,  es el peralte del puente,  es el ancho del puente,  es el ángulo de incidencia del viento y ,  y  son los coeficientes de arrastre, levante y momento respectivamente.

Para incluir la rotación del tablero debido a las ráfagas se emplea la matriz de rotación multiplicada por las presiones de las ecuación (5.1).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.2) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.3) |

Normalmente se considera que  es pequeño lo cual permite hacer las siguientes consideraciones: ,  y  y la velocidad relativa se puede obtener con la ecuación (5.1)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.4) |

El ángulo de incidencia  se divide en un valor medio  y una parte fluctuante . Con esto se puede obtener los coeficientes aerodinámicos como se muestra en la ecuación (5.5).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.5) |

donde  son las pendientes de la variación del ángulo  .

En la Figura 5.4 se muestra la variación de los coeficientes aerodinámicos.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1. Coeficiente de arrastre | 1. Coeficiente de levante |
|  | |
| 1. Coeficiente de momento | |
| Figura 5.4 Gráficas de los coeficientes aerodinámicos | |

Sustituyendo la ecuación (5.5) en (5.1) se tiene:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.6) |

Si se asume que el producto de las variables de orden mayor (las derivadas multiplicadas por derivadas) es suficientemente pequeño para no ser considerado, se tiene la ecuación (5.7).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.7) |

Considerando la dirección del viento  y los desplazamientos relativos  se tiene que la presión media del viento es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.8) |

La parte fluctuante (la parte dinámica) es

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | (5.9) |
|  | |  | | | (5.1) | |
|  | | |  | (5.11) | | |

Dejando en términos matriciales se puede escribir que la parte fluctuante como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.12) |

En la ecuación (5.12) se puede observar que la fuerza debido al viento depende de una constante  y otra  que depende de la estructura. La segunda parte es la que se conoce como fuerzas autoexitables ya que la propia estructura contribuye al desplazamiento debido a las ráfagas.

Para obtener la solución de la ecuación (5.12) en el dominio de la frecuencia, se aplica la transformada de Fourier como se muestra en la ecuación (5.13).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.13) |

donde  son los valores asociados a las cargas del viento en las dos direcciones y el giro,  son los valores asociados a los desplazamientos relativos y  son los valores asociados a las direcciones de la turbulencia.

El término , en la ecuación (5.12) se obtiene con la ecuación (5.14).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.14) |

La ecuación (5.12) se conoce como las funciones de admitancia las cuales depende de la sección del tablero. Estos valores pueden obtener a partir de experimentos de túnel de viento.

Strommen (2010) propone una ecuación para obtener la admitancia aerodinámica la cual se muestra en la ecuación (5.15), sin embargo en la literatura se pueden encontrar diferentes formas de obtener la función de admitancia aerodinámica.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.15) |

donde  son constantes que dependen de la sección. Los valores de  varían de  a  dependiendo de la frecuencia circular.

Este método que se mostró es conocido como el Quasy Steady (QS) el cual se basa en proponer valores de las derivadas aerodinámicas en función a sus coeficientes aerodinámicos, esto se muestra en las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11) permitiendo obtener la respuesta de la estructura ya que en la literatura existen muchas propuestas para los coeficientes aerodinámicos. La popularidad de este método es debido a la simplicidad de aplicación. Tielman (2003) argumenta que éste método puede ser aplicado solamente para predecir la fuerza en regiones de estancamiento, fallando al predecir la fuerza para regiones separadas. Otra desventaja que tiene es que sobre estima la fuerza.

**5.3 Ecuación en el dominio del tiempo**

En ocasiones es necesario transformar la función del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, por ejemplo en las ecuaciones de aleteo se requieren las velocidades fluctuantes en el dominio del tiempo, sin embargo la función de densidad de Kaimal, la cual permite conocer la turbulencia, está en el dominio de la frecuencia. También cuando se aplican las ecuaciones mostradas en el capítulo 4 para obtener la respuesta ante ráfagas y desprendimiento de vórtices se encuentran en el dominio de la frecuencia y para obtener los valores máximos es necesario transformar la función al dominio del tiempo.

**5.3.1 Respuesta no coherente en el dominio del tiempo**

Para obtener la respuesta en el dominio del tiempo es necesario transformar el espectro de respuesta (Strommen, 2010) con la ecuación (5.16)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.16) |

donde  es la respuesta en el tiempo,  es la frecuencia angular,  es el tiempo y  es una variable aleatoria en  y .

La constante  se obtiene a partir del espectro de respuesta la cual se muestra a continuación:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.17) |

donde  es el espectro de respuesta en el dominio de la frecuencia, y  es la diferencia de frecuencias.

Despejando  de la ecuación (5.17) y sustituyendo en (5.16), la respuesta en el tiempo es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.18) |

Entre más valores de la frecuencia se usen, el resultado será más preciso.

**5.3.2 Ejemplo 5.1**

Supóngase que se tiene los valores del espectro de respuesta que se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Espectro de respuesta del ejemplo

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0.2 | 0.5927 |
| 0.4 | 49.5155 |
| 0.6 | 0.0346 |
| 0.8 | 0.0032 |
| 1.0 | 0.0006 |

Dado que son 5 valores, se tendrán 5 ecuaciones que se sumaran. Para obtener la primera ecuación se tiene que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Siguiendo el mismo procedimiento, en la Tabla 5.2 se muestran los datos para las demás valores del espectro de respuesta.

Tabla 5.2 Valores de frecuencia, función de densidad de desplazamiento, valor de , variable aleatoria y función en el dominio del tiempo

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0.2 | 0.5927 | 0.4869 | 5.52 |  |
| 0.4 | 49.5155 | 4.4504 | 2.43 |  |
| 0.6 | 0.0346 | 0.1177 | 4.55 |  |
| 0.8 | 0.0032 | 0.0358 | 3.29 |  |
| 1.0 | 0.0006 | 0.0158 | 2.86 |  |

En la Figura 5.5 se muestra la gráfica de las 5 funciones, definidas en la última columna de la Tabla 5.2.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 5.5 Función de la respuesta en el dominio del tiempo para cada intervalo |

La suma de todas las funciones  dará la respuesta total. En este ejemplo, se aplicó a 5 frecuencias; sin embargo, es recomendable hacerlo para más valores. En la Figura 5.6 se muestra la gráfica al sumar todas las funciones para 2000 frecuencias para tener mayor precisión.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 5.6 Respuesta en el tiempo del espectro Ejemplo |

**5.3.3 Respuesta coherente en el dominio del tiempo**

Cao et al., (2000) muestra que se puede obtener la simulación de un proceso ergódico estocástico multivariado con la ecuación (5.19),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.19) |

donde  es la simulación en el dominio del tiempo,  es la separación entre frecuencias,  es la descomposición de Cholesky de la matriz de espectro cruzado de ,  es el tiempo,  es la frecuencia angular,  es una variable aleatoria en  y ,  es el número de simulación y  es el número de frecuencias. Entre más frecuencias se usen, mayor será la precisión.

La ecuación (5.20) muestra cómo se obtiene la descomposición de Cholesky de la matriz de espectro cruzado.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.20) |

donde  es la función de espectro y  es la descomposición de Cholesky de la matriz de coherencia.

La descomposición de Cholesky se puede obtener con la ecuación (5.21) al considerar que los nodos a evaluar están separados espacialmente de forma equidistante. Es decir que  es igual para todos los puntos.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.21) |

Esta matriz puede obtener con el algoritmo de la ecuación (5.22)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.22) |

donde  es la coherencia,  es el elemento de la matriz  de la ecuación (5.21).  y  son la fila y la columna de la matriz respectivamente y  es el número de puntos a evaluar.

Por ejemplo, para obtener la descomposición de Cholesky de una matriz de coherencia con 5 nodos usando la expresión de Davenport de la ecuación (3.18) con , separación , velocidad media  y frecuencia angular se sigue el siguiente procedimiento:

Primero se obtiene la coherencia; dado que está separado equidistantemente la coherencia entre puntos será la misma.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando el algoritmo de la ecuación (5.22) para 5 elementos se tiene que ,  hace referencia a las filas y  a las columnas de la matriz.

Para la primera fila de la matriz de la descomposición de Cholesky se tiene que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , , |  |

Para los demás valores de la fila

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | , , |  | |
|  |  | | |  | |

Para la segunda fila se tiene:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | , , | | |  |
|  | , , | | |  |
|  | , , | | |  |
|  | |  |  | |

Para la tercera fila se tiene:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | , , | | |  |
|  | , , | | |  |
|  | , , | | |  |
|  | |  |  | |

Para la cuarta fila se tiene:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | , , | | |  |
|  | , , | | |  |
|  | , , | | |  |
|  | |  |  | |

Para la quinta fila se tiene:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | , , | | |  |
|  | , , | | |  |
|  | , , | | |  |
|  | |  |  | |

Con base a lo anterior se puede reescribir la ecuación (5.19) como,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.23) |

Por ejemplo, si se desea obtener la simulación de velocidad para 3 nodos en el dominio del tiempo con la función de densidad de Kaimal considerando la coherencia entre nodos se sigue el procedimiento siguiente:

Se define la función de Kaimal con la ecuación (5.12) para una altura ya definida. En este caso se usa la expresión siguiente:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se define la función de coherencia, ya sea con la ecuación (3.20) ó (3.18). En este caso se muestra la expresión simplificada en función de la frecuencia.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se obtiene una matriz de números aleatorios de dimensiones  donde  es el número de nodos y  el número de frecuencias. El intervalo de números aleatorios debe ser entre  y .

En este ejemplo se hará la simulación tomando $j=3$ y $N=2$ quedando una matriz aleatoria de.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se define el radical de la ecuación (5.23) con la letra  como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se define el intervalo de frecuencia a usar

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Con estos datos ya se puede aplicar la ecuación (5.23); para ello se comenzara con una frecuencia  por lo que la función de densidad espectral, la coherencia y el radical son:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se obtiene la descomposición de Cholesky con la ecuación (5.22)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se aplica la ecuación (5.23) para ,  y  donde  hace referencia al nodo,  a la frecuencia y  a que lo aplicamos al primer nodo.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Al aplicarlo al segundo nodo se tiene  por lo que al emplear la ecuación (5.23) queda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicándolo al tercer nodo entonces  y empelando la ecuación (5.23) entonces se tiene:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Este procedimiento se hizo para  y al principio se indicó que por lo que se repite al procedimiento anterior con  diferente y el resultado que se obtiene se suma al anterior. A continuación se muestra el procedimiento.

Dado que  entonces ,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se obtiene la descomposición de Cholesky

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para el primer nodo sumando el resultado anterior se tiene:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para el segundo nodo sumado al resultado anterior

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para el tercer nodo sumado al resultado anterior

|  |
| --- |
|  |

En la Figura 5.7 Se muestra la simulación de los tres puntos

|  |
| --- |
|  |
| 1. Simulación para el primer nodo |
|  |
| 1. Simulación para el segundo nodo |
|  |
| 1. Simulación para el tercer nodo |
| Figura 5.7 Simulación de viento coherente para cada uno de los nodos analizados |

En el apéndice C se muestra el código del programa y su manual para la obtención de la simulación para las dirección  y . El programa solo obtiene las componentes fluctuantes, considerando una media de cero, es decir que si se desea obtener la velocidad total se requiere sumar la velocidad media del viento .

**5.3.4 Método Auto Regresivo (AR)**

Dado que se considera la velocidad del viento como una variable espacial aleatoria en el tiempo, se puede idealizar como un proceso estocástico multivariado, además de considerarse estacionario. Esto permite utilizar el método auto regresivo (AR) (Hong, 2009) con la ecuación (5.24) para una cantidad  de puntos espacialmente distribuidos,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.24) |

donde  es la matriz de velocidades en el tiempo ,  es el orden del modelo AR,  es una matriz de coeficientes del modelo AR,  es la variable aleatoria normalmente distribuido con media cero y varianza de uno.

Para el cálculo de  se post multiplica la ecuación (5.24) en ambos lados por  quedando la ecuación (5.25),

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.25) |

Esta expresión se conoce como covarianza (como se explica en el capítulo 2) por lo que la ecuación (5.25) se puede expresar con la ecuación (5.26),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.26) |

donde  es la matriz de covarianza y . La ecuación (5.26) se puede reescribir como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.27) |

donde

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | |  | (5.28) | | |
|  | | |  | (5.29) | | |
|  |  | | | | | (5.30) | |
|  | |  | | | (5.31) | | |
|  | | |  | (5.32) | | |

Para obtener la relación entre la función de densidad de potencia espectral y la correlación se hace uso del teorema de Wiener-Khinchin,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.33) |

donde  es el espectro cruzado y  es la frecuencia angular

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.34) |

donde  es la coherencia entre los puntos .

Para la obtención de la variable aleatoria  se aplica la ecuación (5.35)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.35) |

donde  es la descomposición de Cholesky de la matriz  y  son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con varianza de uno.

La obtención de  se obtiene con la ecuación (5.36).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.36) |

Para calcular la velocidad fluctuante se aplica la ecuación (5.37)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.37) |

donde ,  es el tiempo total de la simulación,  es la cantidad de puntos a revisar la cual se obtiene de .

**5.3.5 Ejemplo 5.2**

Se desea obtener la simulación en el dominio del tiempo con el método AR para  con una función de densidad de potencia espectral de Kaimal

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Con la función de coherencia

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Considerando que se desea la simulación para tres puntos distanciados equidistantemente . La correlación se obtiene con la ecuación (5.23) donde:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Considerando que . La integral se considerará con un límite superior de 50.

En la Tabla 5.3 se muestran los valores para la correlación para diferentes valores de considerando una  y un . Estos valores se obtuvieron con la función nativa “Integral” en el programa Matlab.

Tabla 5.3 Correlación para diferentes valores de 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 | 172.54 |
| 28 | 63.41 |
| 56 | 43.83 |

Armando la matriz de correlación con la ecuación (5.31) queda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para las demás matrices se obtienen las integrales con la ecuación (5.23) las cuales se muestran en la Tabla 5.4 para un ,

Tabla 5.4 Correlación para diferentes valores de  y 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 172.54 | 2 | 0 | 164.2 |
| 28 | 63.41 | 28 | 63.41 |
| 56 | 43.83 | 56 | 43.83 |
| 3 | 0 | 158.3 | 4 | 0 | 153.5 |
| 28 | 63.40 | 28 | 63.38 |
| 56 | 43.83 | 56 | 43.83 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Se obtiene una matriz de correlaciones con un el cual servirá para aplicar la ecuación (5.28).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se aplica la ecuación (5.30) con las matrices .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se aplica la ecuación (5.28) con las matrices .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

El factor Auto regresivo se obtiene con la ecuación (5.29) al obtener la inversa de multiplicando con ,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

donde al hacer estas operaciones se obtiene cuatro matrices de dimensiones donde es al número de nodos. Cada matriz corresponde a los diferentes valores de . En este ejemplo se eligió una =4, es por ello que se obtienen 4 .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | |  |  | | |
|  |  | | | | |  |
|  | | |  |  | | |
|  | |  | | |  | |

Para la obtención de la matriz de variables aleatorias se aplica la ecuación (5.36) por lo que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

quedando,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

después se aplica la descomposición de Cholesky a  para aplicar la ecuación (5.35). Este valor se obtuvo con la función nativa “chol” en Matlab.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se genera una serie de números aleatorios con variación normal y desviación estándar de uno. Se deben generar  matrices de números aleatorios de dimensiones donde  es el número de nodos y  es la cantidad de  en la simulación, en este ejemplo la simulación es de 600 segundos y el  por lo que . A continuación se muestran las primeros cuatro matrices de números aleatorios.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

La velocidad cuando  se obtiene con la ecuación (5.37). Se tiene que  y  por lo que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para los siguientes cuatro intervalos de tiempo se tiene que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Para obtener las velocidades en el punto 5 se obtiene:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para las demás velocidades se tiene:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

En la Figura 5.8 se muestra la velocidad fluctuante para la simulación en 600 s.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 5.8 Velocidad fluctuante con el método AR para el ejemplo |

En el apéndice C, se muestra el código completo y su manual para la obtención de la simulación el método AR para las direcciones  y .

Este método puede tener problemas de estabilidad al momento de obtener la matriz de Cholesky ya que al aplicar la ecuación (3.6) se puede tener valores negativos haciendo imposible obtener la descomposición. Esto sucede cuando la función de densidad llega a tener valores pequeños como es el caso de la función de Kaimal para la dirección  para valores de la altura considerables. Para poder obtener resultados estables se recomienda usar la función de Davenport.

**5.4 Función de admitancia aerodinámica**

El método QS se caracteriza por su simplicidad fallando en la precisión. Una forma de mejorar la precisión es por medio de la función de admitancia aerodinámica.

La función de admitancia aerodinámica se define como una función de trasferencia de un operador aerodinámico lineal a una variación de flujo debido al cuerpo mismo, es decir que mientras en el método QS no importa la forma del cuerpo más que para las fuerzas aerodinámicas, la función de admitancia aerodinámica corrige el comportamiento debido a la forma del cuerpo. Es por ello que la función depende de qué tipo de elemento se evalúe ya que será diferente para el ala de un avión, el tablero de un puente o un vehículo en movimiento.

Davenport consideró que el tablero de un puente tiene un comportamiento similar a la de un ala de avión por lo que propuso tomar las funciones desarrolladas por Sears para aplicarlas a viento, sin embargo Jancauskas & Melbourne (1980) muestra que se puede tener una aproximación con la función de Liepmann la cual se muestra en la ecuación (5.38),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.38) |

donde  es la admitancia aerodinámica,  es la frecuencia angular,  es el ancho del puente y  es la velocidad media del viento.

Estas fuerzas se obtienen en el dominio de la frecuencia, sin embargo no se puede aplicar el mismo método que se mostró para obtener la respuesta en el dominio del tiempo ya que la evolución física de la ráfaga puede ser violada.

Para obtener la simulación del viento aplicando la función de admitancia aerodinámica lo que se hace es obtener la simulación de viento (con o sin coherencia) en el dominio del tiempo, transformarla al dominio de la frecuencia aplicando la transformada de Fourier, aplicar la admitancia aerodinámica, y para regresarla al dominio del tiempo aplicar la transformada inversa de Fourier. Sin embargo en este trabajo, se aplicó la metodología de Strommen quien no emplea dicha admitancia aerodinámica.

**5.5 Derivadas aerodinámicas**

En la sección anterior se mostró cómo está compuesta la parte fluctuante. Un parte debido a la velocidad media del viento, otra que varía dependiendo de la estructura y la fuerza del viento y la tercera que depende de las componentes aerodinámicas, es decir las que modifican la rigidez  y amortiguamiento , la masa del viento se desprecia ya que es muy pequeña comparada a la estructura.

La rigidez y el amortiguamiento aerodinámico se desarrolló primero en el área de la aeronáutica para el diseño de aviones, el primero en desarrollarla fue Theodorsen posteriormente Scanlan la adaptó para puentes. Las matrices de amortiguamiento y de rigidez se presentan en la ecuación (5.39) en el dominio de la frecuencia.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.39) |

Estas son conocidas como las derivadas aerodinámicas, las cuales dependen de las frecuencias características del viento asociada a la velocidad cuando entra en resonancia con la estructura. Para ello se involucra la velocidad reducida la cual se muestra en la ecuación (5.40) la cual involucra la frecuencia característica.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.40) |

Al normalizar el amortiguamiento y la rigidez aerodinámica se tiene entonces,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.41) |

donde

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (5.42) | |
|  |  | | | (5.43) |

Theodorsen (1935) dedujo las funciones de las derivadas aerodinámicas de flexión y torsión ( y ) para una placa, en ocasiones cuando no se cuenta con las derivadas aerodinámicas se pueden usar las Theodorsen, sobre todo si se hace análisis de aleteo ya que el método QS no toma en cuenta la mitad de las derivadas aerodinámicas que requiere la ecuación Scanlan.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | (5.44a) |
|  | |  | (5.44b) | |
|  | |  | (5.44c) | |

donde  y  son las funciones de Bessel, y  es la frecuencia reducida.

En la Figura 5.9 y 5.10 se muestran las derivadas aerodinámicas aplicando la ecuación (5.44).

|  |
| --- |
|  |
| Figura 5.9 Derivadas aerodinámicas de flexión de una placa con el método de Theodorsen |
|  |
| Figura 5.10 Derivadas aerodinámicas de torsión de una placa con el método de Theodorsen |

**5.6 Desprendimiento de vórtices**

El efecto de desprendimiento de vórtices ocurre cuando el flujo se separa del cuerpo, causando un vórtice al momento de la separación. Esto sucede en cuerpos robustos ya que hay un cambio de dirección brusca del viento causando la separación. El efecto de desprendimiento de vórtices tiene mayor relevancia en la componente vertical del puente y en torsión por lo que solo es necesario revisar bajo esos dos casos como se muestra en la Figura 5.11.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 5.11 Fuerzas debido al desprendimiento de vórtices |

Una propiedad importante en el desprendimiento de vórtices es la frecuencia, la cual está definida en la ecuación (5.45),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.45) |

donde  es la frecuencia del vórtice,  es el número de Strouhal,  es la velocidad media del viento y  es el peralte del puente. Teóricamente hablando, el mayor efecto que puede causar es cuando se llega una resonancia, es decir cuando la frecuencia de los vórtices es igual a la frecuencia fundamental de la estructura. Bajo este concepto se puede obtener una velocidad de resonancia la cual se muestra en la ecuación (5.46).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.46) |

Cuando la frecuencia del vórtice y de la frecuencia es similar, se le conoce como *lock-in*. Este efecto es muy agresivo, sin embargo cuando se presentan movimientos autoextraíbles, los vórtices, dejan de tener efecto, es por ello que se considera que el desprendimiento de vórtices es auto-limitante.

La descripción matemática se hace a partir de proceso estocásticos a partir de la teoría de Vickery & Basu (1983) la cual se muestra en la ecuación (5.33),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.47) |

donde  es el espectro de carga de viento,  es el coeficiente adimensional de la raíz media cuadrada de levante o torsión,  es un parámetro adimensional del ancho de banda del espectro de carga, el cual puede tener valores entre 0.1 y 0.3.  y  son la frecuencia angular del flujo y de la estructura respectivamente; y .

La coherencia se define como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.48) |

donde  es la coherencia,  es la longitud de escala adimensional de la coherencia,  es la separación entre nodos del puente, el cual puede tener valores entre 2 y 5.

Las direcciones más importantes a evaluar en el desprendimiento de vórtices son: vertical y torsión. Por lo que las derivadas aerodinámicas para desprendimiento de vórtices se pueden definir como;

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.49) |
|  |  | (5.50) |

donde  es la desviación estándar,  es un valor asociado con la naturaleza auto-limitante del desprendimiento de vórtices y  es un coeficiente de velocidad que depende del amortiguamiento.

El amortiguamiento de la estructura es afectado por el flujo por lo que el amortiguamiento total es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.51) |

donde  es el amortiguamiento de la estructura y  es el amortiguamiento aerodinámico definido como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5.38) |

Vickery & Basu proponen que para poder predecir el comportamiento del viento, se tiene que hacer una modificación a las propiedades de la estructura, es por ello que se considera el amortiguamiento aerodinámico en el análisis.

**5.5 Conclusiones**

Este capítulo muestra las ecuaciones del comportamiento tanto de las ráfagas como vórtices y al principio se indica cómo obtener la respuesta dinámica de la estructura con las funciones de densidad. Se puede observar que para las ráfagas la teoría se puede aplicar con el método Quasy-Steady y así obtener la función de densidad, sin embargo para los vórtices es necesario obtener tanto las fuerzas debido al viento como el cambio en las propiedades dinámicas de la estructura. En ambos casos se presentan método teóricos que tienen sus desventajas con los experimentales, como es el caso de las derivadas aerodinámicas donde las variables , ,  y  son cero, y al realizar el ensayo experimental si existen valores diferentes de cero.

**5.6 Referencias**

Cao, Y., Xiang, H., & Zhou, Y. (2000). Simulation of Stochastic Wind Velocity on Long-Span Bridges. Jounral of Engineering Mechanics.

Hong, S. (Octubre de 2009). Time Domain Buffeting Analysis of Large-Span Cable-Stayed Bridges. Unviersidade do Porto Facultade de Engenharia.

Melbourne, & Jancauskas. (1980). The measurement of aerodynamic admittance using discrete frecuency gust generation. 7th Australian Hydraulics and Fluid Conference, (págs. 18-22). Australia.

Tieleman, H. (2003). Wind tunnel simulation of wind loading on low-rise structures: a review. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1627-1649.

Vikery, & Basu. (1983). Across-wind vibrations of structure of circular cross-section. Part II. Development of a mathematical model for full-scale application. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 75-97.

Vikery, & Basu (1983). Across-wind vibrations of structure of circular cross-section. Part I. Development of a mathematical model for full-scale application. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 49-73.