**Capítulo 6**

**Cálculos de la respuesta dinámica inducida por el viento**

**6.1 Introducción**

En el capítulo anterior se mostraron las ecuaciones para obtener los espectros de carga y las simulaciones de velocidad. En este capítulo se emplearan los espectros de carga para obtener el espectro de respuesta para ráfagas y vórtices en 2D.

**6.2 Respuesta ante ráfagas**

**6.2.1 Un solo modo con una sola componente**

El espectro de carga  se define en la ecuación (6.1) la cual, la parte derecha depende de la amplitud de Fourier  con su conjugado  y al tiempo .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.1) |

Si se considera la forma modal en dirección  (paralela al viento) entonces la carga modal inducida por el flujo se define como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.2) |

La ecuación (6.2) se obtuvo con la ecuación (5.14)

Tomando la transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación (6.2) entonces:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.3) |

Sustituyendo (6.2) en (6.1)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.4) |

El cual se puede simplificar como se muestra en la ecuación (6.5)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.5) |

Donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.6) |

El cual se conoce como la función de aceptación conjunta. La ecuación (6.6) ya incluye el efecto de la turbulencia.

Si se define el espectro cruzado como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.7) |

y el espectro de Kaimal, definido en la ecuación (3.11) del capítulo 3, se sustituye en la ecuación (6.7), entonces el espectro cruzado queda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.8) |

Donde la coherencia  se definió en la ecuación (3.18).

Sustituyendo (6.8) en (6.6),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.9) |

La función de aceptancia conjunta normalizada se define como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.10) |

Sustituyendo la ecuación en la ecuación (6.5) en (4.9) se obtiene el espectro de respuesta de desplazamientos,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.11) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.12) |

Sustituyendo (6.12) en (6.11),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.13) |

Empleado la ecuación (6.10) en (6.13) y ordenando los datos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.14) |

Para obtener la función de transferencia mecánica se aplica la ecuación (6.15),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.15) |

donde las rigideces aerodinámicas son:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.16) |

y el amortiguamiento aerodinámico es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.17) |

La desviación estándar se define como la integral del espectro de respuesta definida en la ecuación (6.18).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.18) |

Para obtener el espectro de respuesta para estructuras tipo puente ante efecto de ráfagas, en ocasiones, se pueden hacer algunas simplificaciones si se considera que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.19) |

Sustituyendo (6.19) en (6.9) se obtiene la función de admitancia conjunta,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.20) |

por lo que el espectro de respuesta queda definido de manera simplificada,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.21) |

La desviación estándar se obtiene aplicando la integral a la ecuación (6.21).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.22) |

**6.1.2 Función de aceptancia conjunta normalizada**

La función de aceptancia conjunta, mostrada en la ecuación (6.9), requiere de la obtención de una doble integral la cual puede consumir muchos recursos computacionales si se desea obtener dicha integral para valores discretos por lo que a continuación se muestra una manera más sencilla de obtener esta doble integral.

La ecuación (6.9) aplicado a la dirección  se puede reescribir si se considera que todos los valores son constantes excepto  y quedando como se muestra en la ecuación (6.23).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.23) |

Haciendo un cambio de variable la ecuación (6.23) queda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.24) |

Del mismo modo se puede hacer el cambio de variable para la función de aceptancia normalizada mostrada en la ecuación (6.10) como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.25) |

donde,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.26) |
|  |  | (6.27) |

Donde,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.27a) |
|  |  | (6.27b) |
|  |  | (6.27c) |
|  |  | (6.27d) |
|  |  | (6.27e) |

En ocasiones obtener la integral puede ser imposible o realizarla con un método numérico puede consumir mucho tiempo, por lo que la función se puede expresar con la ecuación (6.28)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.28) |

**6.1.3 Ejemplo 6.1**

Por ejemplo si se desea obtener la integral  para una función  para una  entonces se tiene que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Sustituyendo entonces

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Si se desea hacer con datos discretizados se aplica la ecuación (6.28) para ello se define una y se obtiene los valores para intervalo  mostrados en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1 Función 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | 0.10 | 0.3090 |
| 2 | 0.20 | 0.5878 |
| 3 | 0.30 | 0.8090 |
| 4 | 0.40 | 0.9511 |
| 5 | 0.50 | 1.0000 |
| 6 | 0.60 | 0.9511 |
| 7 | 0.70 | 0.8090 |
| 8 | 0.80 | 0.5878 |
| 9 | 0.90 | 0.3090 |
| 10 | 1.00 | 0.0000 |

Posteriormente se requiere obtener la multiplicación . Para ello primero se obtiene . Esto se hace multiplicando cada elemento de  por cada elemento de . Para ello se puede emplear una tabla como la que se muestra en la Tabla 6.2, donde en la primer fila se colocan los valores de , haciendo lo mismo para la primer columna. Después se multiplica la segunda fila por toda la primer columna, y así sucesivamente para los demás valores.

Tabla 6.2 Mutlplicación

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.3090 | 0.5878 | 0.8090 | 0.9511 | 1.0000 | 0.9511 | 0.8090 | 0.5878 | 0.3090 | 0.0000 |
| 0.3090 | 0.0955 | 0.1816 | 0.2500 | 0.2939 | 0.3090 | 0.2939 | 0.2500 | 0.1816 | 0.0955 | 0.0000 |
| 0.5878 | 0.1816 | 0.3455 | 0.4755 | 0.5590 | 0.5878 | 0.5590 | 0.4755 | 0.3455 | 0.1816 | 0.0000 |
| 0.8090 | 0.2500 | 0.4755 | 0.6545 | 0.7694 | 0.8090 | 0.7694 | 0.6545 | 0.4755 | 0.2500 | 0.0000 |
| 0.9511 | 0.2939 | 0.5590 | 0.7694 | 0.9045 | 0.9511 | 0.9045 | 0.7694 | 0.5590 | 0.2939 | 0.0000 |
| 1.0000 | 0.3090 | 0.5878 | 0.8090 | 0.9511 | 1.0000 | 0.9511 | 0.8090 | 0.5878 | 0.3090 | 0.0000 |
| 0.9511 | 0.2939 | 0.5590 | 0.7694 | 0.9045 | 0.9511 | 0.9045 | 0.7694 | 0.5590 | 0.2939 | 0.0000 |
| 0.8090 | 0.2500 | 0.4755 | 0.6545 | 0.7694 | 0.8090 | 0.7694 | 0.6545 | 0.4755 | 0.2500 | 0.0000 |
| 0.5878 | 0.1816 | 0.3455 | 0.4755 | 0.5590 | 0.5878 | 0.5590 | 0.4755 | 0.3455 | 0.1816 | 0.0000 |
| 0.3090 | 0.0955 | 0.1816 | 0.2500 | 0.2939 | 0.3090 | 0.2939 | 0.2500 | 0.1816 | 0.0955 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 |

Para obtener primero se obtiene  aplicando el método mostrado en la Tabla 6.2 con la diferencia que en vez de multiplicar los valores, se restan y se obtiene su valor absoluto. El resultado de estas operaciones se muestran en la Tabla 6.3 donde la primera fila corresponde a los valores de  los cuales se repiten para la primer columna de la Tabla 6.3.

Tabla 6.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 | 0.7000 | 0.8000 | 0.9000 | 1.0000 |
| 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 | 0.7000 | 0.8000 | 0.9000 |
| 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 | 0.7000 | 0.8000 |
| 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 | 0.7000 |
| 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 |
| 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 |
| 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 |
| 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 |
| 0.8000 | 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 |
| 0.9000 | 0.8000 | 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 |
| 1.0000 | 0.9000 | 0.8000 | 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 |

Finalmente se multiplica cada valor de la Tabla 6.2 con , considerando que  es cada valor de la Tabla 6.3. Estos valores se muestran en la Tabla 6.4

Tabla 6.4 Multiplicación 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.0955 | 0.1487 | 0.1676 | 0.1613 | 0.1389 | 0.1081 | 0.0753 | 0.0448 | 0.0193 | 0.0000 |
| 0.1487 | 0.3455 | 0.3893 | 0.3747 | 0.3226 | 0.2512 | 0.1749 | 0.1041 | 0.0448 | 0.0000 |
| 0.1676 | 0.3893 | 0.6545 | 0.6299 | 0.5423 | 0.4223 | 0.2941 | 0.1749 | 0.0753 | 0.0000 |
| 0.1613 | 0.3747 | 0.6299 | 0.9045 | 0.7787 | 0.6063 | 0.4223 | 0.2512 | 0.1081 | 0.0000 |
| 0.1389 | 0.3226 | 0.5423 | 0.7787 | 1.0000 | 0.7787 | 0.5423 | 0.3226 | 0.1389 | 0.0000 |
| 0.1081 | 0.2512 | 0.4223 | 0.6063 | 0.7787 | 0.9045 | 0.6299 | 0.3747 | 0.1613 | 0.0000 |
| 0.0753 | 0.1749 | 0.2941 | 0.4223 | 0.5423 | 0.6299 | 0.6545 | 0.3893 | 0.1676 | 0.0000 |
| 0.0448 | 0.1041 | 0.1749 | 0.2512 | 0.3226 | 0.3747 | 0.3893 | 0.3455 | 0.1487 | 0.0000 |
| 0.0193 | 0.0448 | 0.0753 | 0.1081 | 0.1389 | 0.1613 | 0.1676 | 0.1487 | 0.0955 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | |

La suma de todos los datos es ,considerando  entonces la integral  queda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener la integral normalizada se requiere  por lo que se emplea el método se Simpson. Los valores de la integral se muestran en la Tabla 6.5

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Tabla 6.5 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 1 | 0.0000 |
| 2 | 0.1000 | 0.0955 | 4 | 0.3820 |
| 3 | 0.2000 | 0.3455 | 2 | 0.6910 |
| 4 | 0.3000 | 0.6545 | 4 | 2.6180 |
| 5 | 0.4000 | 0.9045 | 2 | 1.8090 |
| 6 | 0.5000 | 1.000 | 4 | 4.0000 |
| 7 | 0.6000 | 0.9045 | 2 | 1.8090 |
| 8 | 0.7000 | 0.6545 | 4 | 2.6180 |
| 9 | 0.8000 | 0.3455 | 2 | 0.6910 |
| 10 | 0.9000 | 0.0955 | 4 | 0.3820 |
| 11 | 1.0000 | 0 | 1 | 0 |
|  |  |  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Por lo que integral normalizada queda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

El Error se obtiene con:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

donde  es el valor exacto y  es el valor aproximado.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para esta función el error es , dependiendo de la función el error varía, sin embargo este error disminuye entre más datos se usan.

**6.1.3 Ejemplo 6.2**

Obtener la respuesta ante efecto de ráfagas de un puente con las características mostradas en la Tabla 6.6.

Tabla 6.6 Propiedades del puente ejemplo

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nombre de la propiedad | Símbolo | Valor |
| Coeficiente de arrastre |  | 0.7 |
| Ancho del puente (m) |  | 20 |
| Peralte del puente (m) |  | 4 |
| Masa (kg/m) |  | 10 000 |
| Frecuencia angular (rad/s) |  | 0.4 |
| Amortiguamiento |  | 0.005 |
| Densidad del viento (kg/m³) |  | 1.25 |
| Función de potencia espectral |  |  |
| Velocidad media (m/s) |  | 45 |
| Longitud (m) |  | 500 |
| Constante que define la coherencia |  |  |

Considerando entonces  el amortiguamiento aerodinámico es (ecuación 6.17),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

por lo que la función de transferencia mecánica es (ecuación 6.15):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Dado que es una función compleja, el valor se absoluto es

|  |
| --- |
|  |

Si se desea obtener la respuesta a mitad del claro, para una velocidad de y una frecuencia de entonces la función de densidad de potencia queda:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  | |
|  |  | | |  |

Para obtener la función de aceptancía conjunta, se obtiene el valor de la frecuencia normalizada  (ecuación 6.27a).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener la función de admitancia conjunta normalizada, se obtiene la integral normalizada obtenida al inicio del ejemplo 6.1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La función de densidad de desplazamiento para la mitad del claro donde 

Aplicando la ecuación (6.21) para una estructura tipo puente considerando únicamente el coeficiente de arrastre, el espectro de respuesta queda:

|  |
| --- |
|  |

Un valor importante que se requiere es la desviación estándar, la cual nos indica como varían los valores con respecto a la media. A continuación se muestra su obtención para este mismo ejemplo.

La desviación estándar es (ecuación 6.22),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La desviación se puede obtener con el área bajo la curva de la función de densidad, por lo que aplicando el método de trapecio se puede obtener la desviación estándar. La integral tiene un límite superior infinito, sin embargo se puede acotar ya que para valores muy grandes, el resultado es despreciable. Para ello se obtuvieron los valores de la función de admitancia conjunta, la de densidad de potencia espectral y la de transferencia para diferentes valores de  como se muestra en la Tabla 6.7.

Para obtener los valores de la Tabla 6.7 se empleó el método del trapecio para obtener la integral. Para aplica la ecuación (6.22) se obtuvo el valor de , ,y un valor:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La última columna se obtuvo con:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para el primer valor se obtiene

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Tabla 6.7 Valores de la función de transferencia, admitancia conjunta y potencia espectral a diferentes valores , su multiplicación y su área basado en el método del trapecio

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | Mult | Área |
| 1 | 0.001 | 1.0000 | 0.5183 | 3.8505 | 1.9958 | 0.0020 |
| 2 | 0.002 | 1.0000 | 0.5206 | 3.8136 | 1.9856 | 0.0020 |
| 3 | 0.003 | 1.0001 | 0.5229 | 3.7772 | 1.9755 | 0.0020 |
| 4 | 0.004 | 1.0002 | 0.5253 | 3.7414 | 1.9657 | 0.0020 |
| 5 | 0.005 | 1.0003 | 0.5276 | 3.7061 | 1.9560 | 0.0020 |
| 6 | 0.006 | 1.0004 | 0.5300 | 3.6714 | 1.9466 | 0.0019 |
| 7 | 0.007 | 1.0006 | 0.5323 | 3.6372 | 1.9373 | 0.0019 |
| 8 | 0.008 | 1.0008 | 0.5347 | 3.6035 | 1.9282 | 0.0019 |
| 9 | 0.009 | 1.0010 | 0.5370 | 3.5702 | 1.9193 | 0.0019 |
| 10 | 0.010 | 1.0012 | 0.5394 | 3.5375 | 1.9105 | 0.0187 |
| 11 | 0.020 | 1.0050 | 0.5633 | 3.2350 | 1.8313 | 0.0180 |
| 12 | 0.030 | 1.0113 | 0.5869 | 2.9718 | 1.7640 | 0.0173 |
| 13 | 0.040 | 1.0203 | 0.6098 | 2.7413 | 1.7055 | 0.0168 |
| 14 | 0.050 | 1.0320 | 0.6313 | 2.5381 | 1.6536 | 0.0163 |
| 15 | 0.060 | 1.0465 | 0.6511 | 2.3580 | 1.6067 | 0.0159 |
| 16 | 0.070 | 1.0641 | 0.6688 | 2.1975 | 1.5640 | 0.0154 |
| 17 | 0.080 | 1.0850 | 0.6843 | 2.0538 | 1.5247 | 0.0151 |
| 18 | 0.090 | 1.1093 | 0.6973 | 1.9246 | 1.4887 | 0.0147 |
| 19 | 0.100 | 1.1376 | 0.7078 | 1.8079 | 1.4558 | 0.1399 |
| 20 | 0.200 | 1.7759 | 0.7053 | 1.0719 | 1.3426 | 0.1821 |
| 21 | 0.300 | 5.1873 | 0.6152 | 0.7205 | 2.2990 | 5.7226 |
| 22 | 0.400 | 410.1907 | 0.5229 | 0.5229 | 112.1533 | 5.6356 |
| 23 | 0.500 | 3.1229 | 0.4472 | 0.3996 | 0.5581 | 0.0318 |
| 24 | 0.600 | 0.6378 | 0.3876 | 0.3171 | 0.0784 | 0.0050 |
| 25 | 0.700 | 0.2347 | 0.3406 | 0.2588 | 0.0207 | 0.0014 |
| 26 | 0.800 | 0.1110 | 0.3031 | 0.2159 | 0.0073 | 0.0005 |
| 27 | 0.900 | 0.0605 | 0.2726 | 0.1834 | 0.0030 | 0.0002 |
| 28 | 1.000 | 0.0363 | 0.2475 | 0.1581 | 0.0014 | 0.0007 |
| 29 | 2.000 | 0.0017 | 0.1273 | 0.0565 | 0.0000 | 0.0000 |
| 30 | 3.000 | 0.0003 | 0.0853 | 0.0301 | 0.0000 |  |
|  |  |  |  |  | Suma | 11.8856 |

Por lo que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La desviación estándar queda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**6.2.2 Respuesta a múltiples modos de vibrar ante ráfaga**

Considérese que en vez de un solo modo ahora se está trabajando con una matriz de formas modales. El espectro de respuesta de desplazamiento para matrices se define en la ecuación (6.29).

La relación de frecuencias queda en forma matricial considerando la rigidez y el amortiguamiento aerodinámico como se muestra en la ecuación (6.30).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.29) |

Donde  es la matriz de rigidez aerodinámica,  es la frecuencia del viento,  es la matriz de frecuencias características del sistema,  es la matriz de amortiguamiento de cada modo y  es la matriz de amortiguamiento aerodinámico.

Las matrices aerodinámicas están en función a las derivadas aerodinámicas presentadas en el capítulo 5. Estas matrices se obtienen como se muestran en las ecuaciones (6.30) y (6.31)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.30) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.31) |

Si se considera que la matriz de espectros de carga modal se define como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.32) |

donde

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (6.33) | |
|  |  | | | (6.34) |

A partir de estas ecuaciones se puede obtener la respuesta para modos acoplados.

**6.3 Desprendimiento de vórtices**

**6.3.1 Un solo modo con una sola componente**

La obtención de la respuesta ante desprendimiento de vórtices es similar a la respuesta ante efectos de ráfaga cambiando las derivadas aerodinámicas mostradas en la ecuación (6.38).

El espectro de respuesta se muestra en la ecuación (6.35)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.35) |

La obtención de y  se muestra en la ecuación (6.36) y (6.37) respectivamente

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.36) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.37) |

donde el amortiguamiento aerodinámico  se obtiene con la ecuación (6.39) empelando la ecuación (6.38).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | (6.38) |
|  | |  | (6.39) | |

Sustituyendo la ecuación (6.38) en (6.39),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.40) |

El espectro de carga se obtiene mediante la ecuación (6.41) la cual fue desarrollada por Vickery & Basu (1983).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.41) |

Sustituyendo (6.41) en (6.37),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.42) |

A partir de la ecuación (6.42) se puede obtener el espectro de carga correlacionado. Para obtener la varianza se integra el espectro de respuesta como se ve en la ecuación (6.43).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.43) |

Strommen (2010) reescribe la varianza como se muestra en la ecuación (6.44) y (6.45).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.44) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.45) |

Donde es el coeficiente adimensional de la raíz cuadrada media de la fuerza de levante o momento y,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.46) |

donde la velocidad resonante es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.47) |

La ecuación (6.45) queda en función del amortiguamiento aerodinámico, sin embargo para obtener el amortiguamiento se requiere de la varianza, por lo que la solución a este problema se puede hacer al hacer un cambio de variable como se muestra a continuación. Esta solución es propuesta por Strommen ( 2010).

Primero se deja en términos de una ecuación de cuarto grado para la respuesta en dirección .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.48) |

donde la solución es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.49) |

y

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (6.50) | |
|  |  | | | (6.51) | |

Por lo que la desviación estándar es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.52) |

Para la dirección  el procedimiento es el siguiente.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.53) |

La solución a la ecuación es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.54) |

donde

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (6.55) | |
|  |  | | | (6.56) | |

Por lo que la desviación estándar es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.57) |

Para el desprendimiento de vórtices se requieren de ciertos valores que se obtiene a partir de túnel de viento, dado que no se cuenta con esos datos se supondrán valores provenientes de la literatura.

**6.3.2 Ejemplo**

Para el siguiente ejemplo se desea conocer la respuesta ante efectos de desprendimiento de vórtices de un puente a la mitad del claro con los datos de la Tabla 6.8.

Tabla 6.8 Datos del ejemplo para obtener la respuesta ante desprendimiento de vórtices

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dato | Símbolo | Valor |
| Masa () |  | 0.4 |
| Longitud () |  | 500 |
| Frecuencia angular en la dirección vertical () |  | 0.8 |
| Función de la forma modal |  |  |
| Ancho del puente () |  | 20 |
| Peralte del puente () |  | 4 |
| Densidad del viento () |  | 1.25 |
| Longitud de escala adimensional de la coherencia en dirección vertical |  | 1.2 |
| Coeficiente adimensional de la raíz cuadrada media de la fuerza de levante |  | 0.9 |
| Parámetro de ancho de banda en la dirección vertical |  | 0.15 |
| Número de Strouhal |  | 0.1 |
| Coeficiente de velocidad dependiente al amortiguamiento |  | 0.2 |

Para obtener la respuesta primero se requiere obtener la desviación estándar por lo que se aplica la ecuación (6.57), para ello se obtienen los valores siguientes

Obtención de  (ecuación 6.55).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Obtención de (ecuación 6.56).

Primero se obtiene , sin embargo el punto crítico se da cuando existe resonancia, es decir la frecuencia del viento y la del puente es el mismo por lo que 

Por otro lado se calcula la integral 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  | |
|  |  | | |  |

Obtención de la desviación estándar reducida (ecuación 6.54).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La desviación estándar es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Una vez obtenido la desviación estándar se puede obtener el espectro de respuesta para ello se obtiene la velocidad resonante (ecuación 6.47),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

el amortiguamiento aerodinámico (6.40),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La función de trasferencia, la cual se obtiene de la misma manera que en el análisis de ráfagas.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se obtiene el valor  para poder aplicar la ecuación (6.42)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  | |
|  |  | | |  |

La respuesta ante desprendimiento de vórtices es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**6.3.3 Respuesta a múltiples grados de libertad**

Dado que la contribución de varios modos es importante ante el efecto de desprendimiento de vórtices, el espectro de respuesta se puede obtener con la ecuación (6.60), la cual está representada en forma matricial.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.60) |

donde

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (6.61) | |
|  |  | | | (6.62) | |

Considerando la ecuación anterior entonces  queda como se muestra en la ecuación (6.63)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | (6.63) | |
|  | |  | | (6.64) | |

Donde el amortiguamiento aerodinámico es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.65) |

Para obtener la desviación estándar se puede emplear la ecuación (6.66)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.66) |

La cual la solución es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.67) |

**6.4 Calibración del método**

Para validar el procedimiento se verifico el procedimiento con el puente Pierre Pfimlin y el puente Sogneford.

**6.4.1 Puente Pierre Pfimlin**

Los datos del puente se muestran en la Tabla 6.9 (Helliesen,2013).

Tabla 6.9 Propiedades del puente Pierre Pfimlin

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dato | Símbolo | Valor |
| Masa () |  | 11526.99 |
| Frecuencia circular horizontal () |  | 1.401 |
| Frecuencia circular vertical () |  | 6.10 |
| Longitud total () |  | 159.80 |
| Amortiguamiento crítico |  | 0.008 |
| Ancho del tablero () |  | 11.1 |
| Peralte del tablero () |  | 3.4 |
| Altura sobre el terreno () |  | 30.08 |
| Coeficiente de arrastre |  | 2.00 |
| Coeficiente de levante |  | 0.5 |
| Coeficiente de momento |  | NA |
| Derivada del coeficiente de arrastre |  | 0 |
| Derivada del coeficiente de levante |  | 0 |
| Derivada del coeficiente de momento |  | 0 |
| Velocidad () |  | 38.4 |
| Intensidad turbulenta horizontal |  | 0.14 |
| Intesidad turbulenta vertical |  | 0.07 |

Con estos valores se aplicó el programa hecho en Matlab descrito en el apéndice C. obteniendo la respuesta en el dominio del tiempo la cual se muestra en la Figura 6.3. En la Tabla 6.11 se muestra la comparación entres los resultados obtenidos en este trabajo y los de Helliesen (2013).

|  |
| --- |
|  |
| 1. Desplazamientos horizontales |
|  |
| 1. Desplazamientos verticales |
| Figura 6.3 Desplazamientos ante ráfagas del puente Pierre Pfimlin |

Tabla 6.10 Comparación de desplazamientos máximos obtenidos del puente Pierre Pfimlin ante ráfagas

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Autor | Desplazamiento horizontal (m) | Desplazamiento vertical (m) |
| Helliesen,2013 | 0.44 | 0.23 |
| Este trabajo | 0.47 | 0.26 |

Para verificar los valores obtenidos en relación al desprendimiento de vórtices se utilizó el programa del apéndice C. aplicando los datos se muestran en la Tabla 6.11

Tabla 6.11 Propiedades para la obtención la respuesta ante desprendimiento vórtices del puente Pierre Pfimlin

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dato | Símbolo | Valor |
| Masa () |  | 0.4 |
| Longitud de escala adimensional de la coherencia en dirección vertical |  | 2.0 |
| Coeficiente adimensional de la raíz cuadrada media de la fuerza de levante |  | 1.0 |
| Parámetro de ancho de banda en la dirección vertical |  | 0.15 |
| Número de Strouhal |  | 0.11 |
| Coeficiente de velocidad dependiente al amortiguamiento |  | 0.2 |

En la Figura 6.4 se muestran los desplazamientos en el dominio del tiempo y en la Tabla 6.10 se muestra la comparación de resultados.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 6.4 Desplazamientos del puente Pierre Pfimlin ante desprendimientos de vórtices |

Tabla 6.10 Comparación de desplazamientos máximos obtenidos del puente Pierre Pfimlin ante vórtices

|  |  |
| --- | --- |
| Autor | Desplazamiento vertical (m) |
| Helliesen,2013 | 0.34 |
| Este trabajo | 0.36 |

**6.4.1 Puente Sogneford**

Para la evaluación del puente Sogneford se tienen los datos que se muestran en la Tabla 6.11(Walbækken,2013).

Tabla 6.11 Propiedades del puente Sogneford

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dato | Símbolo | Valor |
| Masa () |  | 33893 |
| Frecuencia circular vertical () |  | 0.3863 |
| Longitud total () |  | 159.80 |
| Amortiguamiento crítico |  | 0.005 |
| Ancho del tablero () |  | 15 |
| Peralte del tablero () |  | 2 |

Tabla 6.11 Propiedades del puente Sogneford (continuación)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Altura sobre el terreno ()  Dato propuesto ya que no se encontró |  | 90 |
| Coeficiente de arrastre |  | 1.5 |
| Coeficiente de levante |  | -0.15 |
| Coeficiente de momento |  | 0.13 |
| Derivada del coeficiente de arrastre |  | 0 |
| Derivada del coeficiente de levante |  | 5.46 |
| Derivada del coeficiente de momento |  | 0.04 |
| Velocidad () |  | 40 |
| Intensidad turbulenta horizontal |  | 0.14 |

Con base a los datos de la Tabla se obtuvieron los resultados que se muestran en la Figura 6.5.

|  |
| --- |
|  |
| Desplazamientos verticales obtenidos con Matlab |
|  |
| 1. Desplazamientos verticales obtenidos por Walbækken (2013) |
| Figura 6.5 Desplazamientos del puente Sogneford debido a ráfagas |

Se puede ver que los resultados obtenidos llegan a desplazamientos de hasta 2.2 m contra 2.5 m que presenta el Walbækken (2013).

No se hizo revisión por desprendimiento de vórtices ya que el autor no hizo la revisión para este efecto.

**6.5 Conclusiones**

En este capítulo se muestra la obtención de las respuestas de las ráfagas como desprendimiento de vórtices, tanto en el dominio de la frecuencia como el dominio del tiempo. Se puede observar que con estás ecuaciones se puede obtener de forma directa el desplazamiento, esto permite obtener de forma directa el factor pico.

También se probó el programa con un puente ya evaluado donde los resultados son similares, por lo que el procedimiento se puede tomar como válido, sin embargo, en el desprendimiento de vórtices existen valores que se obtuvieron de forma experimental por lo que la revisión de este efecto depende mucho de pruebas ante túnel de viento.

**6.6 Referencias**

Helliesen, M. Ø. (06 de Junio de 2013). Wind Induced Dynamic Response of Concrete Box Girders During a. Noruega: NTNU- Norwegian University of Science and Technology.

Walbækken, S. (9 de Junio de 2013). Aerodynamic stability of slender. Noruega: NTNU- Norwegian University of Science and Technology.