**Capítulo 6**

**Cálculos de la respuesta dinámica inducida por el viento**

**6.1 Introducción**

El capítulo anterior se obtuvieron las ecuaciones para simular la fuerza debido a las ráfagas y vórtices, lo cual puede ser usado para obtener de por medio de algún software la respuesta o para evaluar inestabilidad aeroelástica debido al aleteo la cual se verá más adelante. En este capítulo se presenta la obtención del espectro de respuesta para ráfagas y vórtices en 2D.

**6.2 Respuesta ante ráfagas**

En el capítulo anterior se mostró que la parte fluctuante tiene una contribución debido al flujo mismo y otras debido al movimiento auto-excitable dando lugar al ecuación (5.7). En esta ecuación se tiene el amortiguamiento aerodinámico  y la rigidez aerodinámica  que modifican las propiedades dinámicas de la estructura. En esta ecuación no se incluye la masa aerodinámica ya que no afecta el análisis.

**6.2.1 Un solo modo con una sola componente**

El espectro de carga  se define en la ecuación (6.1) la cual está en función a la amplitud de Fourier  con su conjugado  y al tiempo .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.1) |

Si se considera la forma modal en dirección  (paralela al viento) entonces la carga modal inducida por el flujo se define como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.2) |

Tomando la transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación (6.2) entonces:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.3) |

Sustituyendo (6.1) en (6.2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.3) |

El cual se puede simplificar como se muestra en la ecuación (6.4)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.4) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.5) |

El cual se conoce como la función de aceptación conjunta. Esta ecuación ya incluye el efecto de la turbulencia.

Si se considera que es una componente en un modo simple, es decir que no hay acoplamiento entre modos, se puede considerar que los coeficientes aerodinámicos para la mayoría de los puentes son:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.6) |

Con base a la ecuación (6.5) y los coeficientes aerodinámicas entonces se tiene que las funciones de aceptación de unión a lo largo de la estructura quedan definidas en (6.7)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.7) |

La función de aceptación conjunta está en función a su vez del espectro cruzado  con  según sea el caso. El espectro cruzado se definió en el capítulo 2 como se muestra en la ecuación (6.25).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.8) |

Es de utilidad manejar la función de aceptación conjunta normalizada como se muestra en la ecuación (6.7) para obtener el espectro de respuesta de un punto definido.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.7) |

Por lo que el espectro queda definido como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.8) |

Si se integra la ecuación (6.8) se tiene la desviación estándar, la cual se muestra en la ecuación (6.9)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.9) |

donde  se definió en el capítulo 3, la cual es conocida como la función normalizada de potencia espectral.

La función de respuesta de frecuencia es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.10) |

Donde las rigideces aerodinámicas son

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.11) |

Y el amortiguamiento aerodinámico es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.12) |

La ecuación (6.5) está definida con una integral que se puede reescribir como (6.13)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.13) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.14a) |
|  |  | (6.14b) |
|  |  | (6.14c) |
|  |  | (6.14d) |

En ocasiones obtener la integral puede ser imposible o realizarla con un método numérico puede consumir mucho tiempo, por lo que la función se puede expresar con la ecuación (6.15)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.15) |

Por ejemplo si se desea obtener la función de aceptancia conjunta para una función  para una entonces se tiene que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La función de aceptancia normalizada se obtiene

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Sustituyendo entonces

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Si se desea hacer con datos discretizados entonces se tiene

Tabla 6.1 Función seno

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0.10 | 0.31 |
| 0.20 | 0.59 |
| 0.30 | 0.81 |
| 0.40 | 0.95 |
| 0.50 | 1.00 |
| 0.60 | 0.95 |
| 0.70 | 0.81 |
| 0.80 | 0.59 |
| 0.90 | 0.31 |
| 1.00 | 0.00 |

Obteniendo la multiplicación de  obtenidas de la Tabla 6.1

Tabla 6.2 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.3090 | 0.5878 | 0.8090 | 0.9511 | 1.0000 | 0.9511 | 0.8090 | 0.5878 | 0.3090 | 0.0000 |
| 0.3090 | 0.0955 | 0.1816 | 0.2500 | 0.2939 | 0.3090 | 0.2939 | 0.2500 | 0.1816 | 0.0955 | 0.0000 |
| 0.5878 | 0.1816 | 0.3455 | 0.4755 | 0.5590 | 0.5878 | 0.5590 | 0.4755 | 0.3455 | 0.1816 | 0.0000 |
| 0.8090 | 0.2500 | 0.4755 | 0.6545 | 0.7694 | 0.8090 | 0.7694 | 0.6545 | 0.4755 | 0.2500 | 0.0000 |
| 0.9511 | 0.2939 | 0.5590 | 0.7694 | 0.9045 | 0.9511 | 0.9045 | 0.7694 | 0.5590 | 0.2939 | 0.0000 |
| 1.0000 | 0.3090 | 0.5878 | 0.8090 | 0.9511 | 1.0000 | 0.9511 | 0.8090 | 0.5878 | 0.3090 | 0.0000 |
| 0.9511 | 0.2939 | 0.5590 | 0.7694 | 0.9045 | 0.9511 | 0.9045 | 0.7694 | 0.5590 | 0.2939 | 0.0000 |
| 0.8090 | 0.2500 | 0.4755 | 0.6545 | 0.7694 | 0.8090 | 0.7694 | 0.6545 | 0.4755 | 0.2500 | 0.0000 |
| 0.5878 | 0.1816 | 0.3455 | 0.4755 | 0.5590 | 0.5878 | 0.5590 | 0.4755 | 0.3455 | 0.1816 | 0.0000 |
| 0.3090 | 0.0955 | 0.1816 | 0.2500 | 0.2939 | 0.3090 | 0.2939 | 0.2500 | 0.1816 | 0.0955 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 |

Obteniendo , similar al paso anterior.

Tabla 6.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 | 0.7000 | 0.8000 | 0.9000 | 1.0000 |
| 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 | 0.7000 | 0.8000 | 0.9000 |
| 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 | 0.7000 | 0.8000 |
| 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 | 0.7000 |
| 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 | 0.6000 |
| 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 | 0.5000 |
| 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 | 0.4000 |
| 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 | 0.3000 |
| 0.8000 | 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 | 0.2000 |
| 0.9000 | 0.8000 | 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 | 0.1000 |
| 1.0000 | 0.9000 | 0.8000 | 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0.0000 |

Multiplicación de 

Tabla 6.4 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.0955 | 0.1487 | 0.1676 | 0.1613 | 0.1389 | 0.1081 | 0.0753 | 0.0448 | 0.0193 | 0.0000 |
| 0.1487 | 0.3455 | 0.3893 | 0.3747 | 0.3226 | 0.2512 | 0.1749 | 0.1041 | 0.0448 | 0.0000 |
| 0.1676 | 0.3893 | 0.6545 | 0.6299 | 0.5423 | 0.4223 | 0.2941 | 0.1749 | 0.0753 | 0.0000 |
| 0.1613 | 0.3747 | 0.6299 | 0.9045 | 0.7787 | 0.6063 | 0.4223 | 0.2512 | 0.1081 | 0.0000 |
| 0.1389 | 0.3226 | 0.5423 | 0.7787 | 1.0000 | 0.7787 | 0.5423 | 0.3226 | 0.1389 | 0.0000 |
| 0.1081 | 0.2512 | 0.4223 | 0.6063 | 0.7787 | 0.9045 | 0.6299 | 0.3747 | 0.1613 | 0.0000 |
| 0.0753 | 0.1749 | 0.2941 | 0.4223 | 0.5423 | 0.6299 | 0.6545 | 0.3893 | 0.1676 | 0.0000 |
| 0.0448 | 0.1041 | 0.1749 | 0.2512 | 0.3226 | 0.3747 | 0.3893 | 0.3455 | 0.1487 | 0.0000 |
| 0.0193 | 0.0448 | 0.0753 | 0.1081 | 0.1389 | 0.1613 | 0.1676 | 0.1487 | 0.0955 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

La suma de todos los datos es considerando  entonces

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Por medio de la integral de Simpson para obtener 

Tabla 6.5 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| n | x | fx | Integral |
| 1 | 0.10 | 0.0955 | 0.0955 |
| 2 | 0.20 | 0.3455 | 1.3820 |
| 3 | 0.30 | 0.6545 | 1.3090 |
| 4 | 0.40 | 0.9045 | 3.6180 |
| 5 | 0.50 | 1.0000 | 2.0000 |
| 6 | 0.60 | 0.9045 | 3.6180 |
| 7 | 0.70 | 0.6545 | 1.3090 |
| 8 | 0.80 | 0.3455 | 1.3820 |
| 9 | 0.90 | 0.0955 | 0.1910 |
| 10 | 1.00 | 0.0000 | 0.0000 |
| 11 |  |  |  |
|  |  | Suma | 14.9045 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Por lo que la función de aceptancia conjunta normalizada es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para esta función el error es , dependiendo de la función el error varía, sin embargo este error disminuye entre más datos se usan.

Con la función de aceptancia se puede obtener la función de densidad de desplazamiento del sistema como se ve en el ejemplo siguiente.

Obtener la respuesta de un puente con las características mostradas en la Tabla 6.6.

Tabla 6.6 Propiedades de un puente ejemplo

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| Nombre de la propiedad | Propiedad |
| Coeficiente de arrastre |  |
| Ancho del puente |  |
| Peralte del puente |  |
| Masa |  |
| Frecuencia angular |  |
| Amortiguamiento |  |
| Densidad del viento |  |
| Función de potencia espectral |  |
| Velocidad media |  |
| Longitud |  |
| Constante que define la coherencia |  |

Si se considera que entonces  por lo que el amortiguamiento aerodinámico es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Por lo que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Dado que es una función compleja, el valor se absoluto es

|  |
| --- |
|  |

Si se desea obtener la respuesta a mitad del claro, para una velocidad de y una frecuencia de entonces la función de densidad de potencia queda

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  | |
|  |  | | |  |

Para obtener la función de aceptancía conjunta, se obtiene el valor de la frecuencia normalizada 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando la función de aceptancia conjunta

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La función de densidad de desplazamiento para la mitad del claro donde 

|  |
| --- |
|  |

Un valor importante que se requiere es la desviación estándar, la cual nos indica como varían los valores con respecto a la media. A continuación se muestra su obtención para este mismo ejemplo.

La desviación estándar es,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La desviación se puede obtener con el área bajo la curva de la función de densidad, por lo que aplicando el método del trapecio se puede obtener la desviación estándar. La integral tiene un límite superior infinito, sin embargo se puede acotar ya que para valores muy grandes, el resultado es despreciable. Para ello se obtuvieron los valores de la función de admitancia conjunta, la de densidad de potencia espectral y la de transferencia para diferentes valores de  como se muestra en la Tabla 6.7.

Tabla 6.7 Valores de la función de transferencia, admitancia conjunta y potencia espectral a diferentes valores , su multiplicación y su área basado en el método del trapecio

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Mult | Área |
| 0.001 | 1.0000 | 0.5183 | 3.8505 | 1.9958 | 0.0020 |
| 0.002 | 1.0000 | 0.5206 | 3.8136 | 1.9856 | 0.0020 |
| 0.003 | 1.0001 | 0.5229 | 3.7772 | 1.9755 | 0.0020 |
| 0.004 | 1.0002 | 0.5253 | 3.7414 | 1.9657 | 0.0020 |
| 0.005 | 1.0003 | 0.5276 | 3.7061 | 1.9560 | 0.0020 |
| 0.006 | 1.0004 | 0.5300 | 3.6714 | 1.9466 | 0.0019 |
| 0.007 | 1.0006 | 0.5323 | 3.6372 | 1.9373 | 0.0019 |
| 0.008 | 1.0008 | 0.5347 | 3.6035 | 1.9282 | 0.0019 |
| 0.009 | 1.0010 | 0.5370 | 3.5702 | 1.9193 | 0.0019 |
| 0.010 | 1.0012 | 0.5394 | 3.5375 | 1.9105 | 0.0187 |
| 0.020 | 1.0050 | 0.5633 | 3.2350 | 1.8313 | 0.0180 |
| 0.030 | 1.0113 | 0.5869 | 2.9718 | 1.7640 | 0.0173 |
| 0.040 | 1.0203 | 0.6098 | 2.7413 | 1.7055 | 0.0168 |
| 0.050 | 1.0320 | 0.6313 | 2.5381 | 1.6536 | 0.0163 |
| 0.060 | 1.0465 | 0.6511 | 2.3580 | 1.6067 | 0.0159 |
| 0.070 | 1.0641 | 0.6688 | 2.1975 | 1.5640 | 0.0154 |
| 0.080 | 1.0850 | 0.6843 | 2.0538 | 1.5247 | 0.0151 |
| 0.090 | 1.1093 | 0.6973 | 1.9246 | 1.4887 | 0.0147 |
| 0.100 | 1.1376 | 0.7078 | 1.8079 | 1.4558 | 0.1399 |
| 0.200 | 1.7759 | 0.7053 | 1.0719 | 1.3426 | 0.1821 |
| 0.300 | 5.1873 | 0.6152 | 0.7205 | 2.2990 | 5.7226 |
| 0.400 | 410.1907 | 0.5229 | 0.5229 | 112.1533 | 5.6356 |
| 0.500 | 3.1229 | 0.4472 | 0.3996 | 0.5581 | 0.0318 |
| 0.600 | 0.6378 | 0.3876 | 0.3171 | 0.0784 | 0.0050 |
| 0.700 | 0.2347 | 0.3406 | 0.2588 | 0.0207 | 0.0014 |
| 0.800 | 0.1110 | 0.3031 | 0.2159 | 0.0073 | 0.0005 |
| 0.900 | 0.0605 | 0.2726 | 0.1834 | 0.0030 | 0.0002 |
| 1.000 | 0.0363 | 0.2475 | 0.1581 | 0.0014 | 0.0007 |
| 2.000 | 0.0017 | 0.1273 | 0.0565 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3.000 | 0.0003 | 0.0853 | 0.0301 | 0.0000 |  |
|  |  |  |  | Suma | 11.8856 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**6.2.2 Respuesta a múltiples modos de vibrar ante ráfaga**

Considérese que en vez de un solo modo ahora se está trabajando con una matriz de formas modales. El espectro de respuesta de desplazamiento para matrices se define en la ecuación (6.15).

La relación de frecuencias queda en forma matricial considerando la rigidez y el amortiguamiento aerodinámico como se muestra en la ecuación (6.16).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.16) |

Donde  es la matriz de rigidez aerodinámica,  es la frecuencia del viento,  es la matriz de frecuencias características del sistema,  es la matriz de amortiguamiento de cada modo y  es la matriz de amortiguamiento aerodinámico.

Las matrices aerodinámicas están en función a las derivadas aerodinámicas presentadas en el capítulo 5. Estas matrices se obtienen como se muestran en las ecuaciones (6.17) y (6.18)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.17) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.18) |

Si se considera que la matriz de espectros de carga modal se define como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.19) |

donde

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (6.20) | |
|  |  | | | (6.21) |

A partir de estas ecuaciones se puede obtener la respuesta para modos acoplados.

**6.3 Desprendimiento de vórtices**

**6.3.1 Un solo modo con una sola componente**

La obtención de la respuesta ante desprendimiento de vórtices es similar a la respuesta ante efectos de ráfaga cambiando las derivadas aerodinámicas.

El espectro de respuesta se muestra en la ecuación (6.2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.22) |

La obtención de y  se muestra en la ecuación (6.42) y (6.43) respectivamente

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.23) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.24) |

Donde el amortiguamiento aerodinámico se obtiene a partir de las derivadas aerodinámicas para desprendimiento de vórtices. Estas derivadas se muestra en la ecuación (6.44)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.25) |

Por lo que el amortiguamiento aerodinámico queda

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.26) |

Sustituyendo la ecuación (6.25) en (6.26)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.27) |

El auto espectro se puede obtener mediante la ecuación (6.28) la cual fue desarrollada por Vickery & Basu, 1983.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.28) |

Si se considera su forma adimensional se puede rescribir como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.29) |

Donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.30) |

Por lo que la ecuación (6.47) queda como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.31) |

Se puede observar que el amortiguamiento aerodinámico está en función de la desviación estándar, por lo que en la siguiente sección se mostrará su obtención.

En capítulos anteriores se definió la desviación estándar como la integral del espectro de respuesta por lo que se puede expresar de la siguiente manera

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.32) |

Una característica importante del desprendimiento de vórtices es de banda estrecha por lo que la desviación estándar se puede definir como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.33) |

Haciendo unas sustituciones se tiene que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.34) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.35) |

donde la velocidad resonante es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.36) |

La ecuación (6.33) queda en función del amortiguamiento aerodinámico, sin embargo para obtener el amortiguamiento se requiere de la desviación estándar, por lo que la solución a este problema se puede hacer al hacer un cambio de variable como se muestra a continuación. Esta solución es propuesta por Strommen, 2010.

Primero se deja en términos de una ecuación de cuarto grado para la respuesta en dirección .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.37) |

Donde la solución es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.38) |

Donde

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (6.39) | |
|  |  | | | (6.40) | |

Por lo que la desviación estándar es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.41) |

Para la dirección  el procedimiento es el siguiente.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.42) |

Donde la solución es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.43) |

Donde

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (6.44) | |
|  |  | | | (6.45) | |

Por lo que la desviación estándar es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.46) |

Para el desprendimiento de vórtices se requieren de ciertos valores que se obtiene a partir de túnel de viento, dado que no se cuenta con esos datos se supondrán valores provenientes de la literatura.

**6.3.2 Ejemplo**

Para el siguiente ejemplo se desea conocer la respuesta de un puente a la mitad del claro cuya frecuencia circular es , la forma modal es , la densidad del viento es , el ancho del puente , el peralte , la masa por unidad de longitud , el número de Strouhal ,  , , ,  , 

Desviación estándar

Obtención de 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Obtención de 

Primero se obtiene , sin embargo el punto crítico se da cuando existe resonancia, es decir la frecuencia del viento y la del puente es el mismo por lo que 

Por otro lado se calcula la integral 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  | |
|  |  | | |  |

Obtención de la desviación estándar reducida 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La desviación estándar es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Obtención de la respuesta en el dominio de la frecuencia

Primero obtenemos la velocidad resonante

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

El amortiguamiento aerodinámico

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Función de trasferencia

La función de transferencia se obtiene de la misma manera que en el análisis de ráfagas

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener el espectro de carga primero se obtiene 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se aplica la ecuación (6.39) para obtener el espectro de carga

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

La respuesta ante desprendimiento de vórtices es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**6.3.3 Respuesta a múltiples grados de libertad**

Dado que la contribución de varios modos es importante ante el efecto de desprendimiento de vórtices, el espectro de respuesta se puede obtener con la ecuación (6.55), la cual está representada en forma matricial.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.47) |

donde

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (6.48) | |
|  |  | | | (6.49) | |

Considerando la ecuación anterior entonces  queda como se muestra en la ecuación (6.48)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | (6.50) | |
|  | |  | | (6.51) | |

Donde el amortiguamiento aerodinámico es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.52) |

Para obtener la desviación estándar se puede emplear la ecuación (6.61)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.53) |

La cual la solución es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6.54) |

**6.4 Calibración del método**

Para verificar el procedimiento se verifico con el puente Pierre Pfimlin ubicado en Noruega. Los datos del puente se pueden ver en la Tabla 6.8 (Helliesen,2013).

Tabla 6.8 Propiedades del puente Pierre Pfimlin

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dato | Símbolo | Valor |
| Masa () |  | 11526.99 |
| Frecuencia circular horizontal () |  | 1.401 |
| Frecuencia circular vertical () |  | 6.10 |
| Longitud total () |  | 159.80 |
| Amortiguamiento crítico |  | 0.008 |
| Ancho del tablero () |  | 11.1 |
| Peralte del tablero () |  | 3.4 |
| Altura sobre el terreno () |  | 30.08 |
| Coeficiente de arrastre |  | 2.00 |
| Coeficiente de levante |  | 0.5 |
| Coeficiente de momento |  | NA |
| Derivada del coeficiente de arrastre |  | 0 |
| Derivada del coeficiente de levante |  | 0 |
| Derivada del coeficiente de momento |  | 0 |
| Velocidad () |  | 38.4 |
| Intensidad turbulenta horizontal |  | 0.14 |
| Intesidad turbulenta vertical |  | 0.07 |

Con estos valores se obtuvo la respuesta en el dominio del tiempo la cual se muestra en la Figura 6.3

|  |
| --- |
|  |
| 1. Desplazamientos horizontales |
|  |
| 1. Desplazamientos verticales |
| Figura 6.3 Desplazamientos del puente Pierre Pfimlin |

Cuyos desplazamientos máximos son 0.47m en la dirección horizontal y 0.26m en vertical contra 0.44m y 0.23m

Para desprendimiento de vórtices los datos se muestran en la Tabla 6.9

Tabla 6.9 Propiedades para la obtención de efectos ante vórtices del puente Pierre Pfimlin

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dato | Símbolo | Valor |
| Masa () |  | 0.4 |
| Longitud de escala adimensional de la coherencia en dirección vertical |  | 2.0 |
| Coeficiente adimensional de la raíz cuadrada media de la fuerza de levante |  | 1.0 |
| Parámetro de ancho de banda en la dirección vertical |  | 0.15 |
| Número de Strouhal |  | 0.11 |
| Coeficiente de velocidad dependiente al amortiguamiento |  | 0.2 |

En la Figura 6.4 se muestran los desplazamientos en el dominio del tiempo.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 6.4 Desplazamientos del puente Pierre Pfimlin ante desprendimientos de vórtices |

El desplazamiento máximo es 0.36m contra 0.34m que Helliesen, 2013 obtuvo.

Para la evaluación del puente Sogneford (Walbækken,2013) se tienen los datos que se muestran en la Tabla 6.5

Tabla 6.10 Propiedades del puente Sogneford

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Dato | Símbolo | Valor |
| Masa () |  | 33893 |
| Frecuencia circular vertical () |  | 0.3863 |
| Longitud total () |  | 159.80 |
| Amortiguamiento crítico |  | 0.005 |
| Ancho del tablero () |  | 15 |
| Peralte del tablero () |  | 2 |
| Altura sobre el terreno ()  Dato propuesto ya que no se encontró |  | 90 |
| Coeficiente de arrastre |  | 1.5 |
| Coeficiente de levante |  | -0.15 |
| Coeficiente de momento |  | 0.13 |
| Derivada del coeficiente de arrastre |  | 0 |
| Derivada del coeficiente de levante |  | 5.46 |
| Derivada del coeficiente de momento |  | 0.04 |
| Velocidad () |  | 40 |
| Intensidad turbulenta horizontal |  | 0.14 |

Con base a los datos de la Tabla se obtuvieron los resultados que se muestran en la Figura 6.5

|  |
| --- |
|  |
| Figura 6.5 Desplazamientos del puente Sogneford debido a ráfagas |

Se puede ver que los resultados obtenidos llegan a desplazamientos de hasta 2 m contra 2.5m que presenta el Walbækken,2013. Sin embargo en esta simulación se tomo en cuenta el amortiguamiento aerodinámico lo cual no incluyen en el análisis del puente, por otro lado la desviación estándar es de 0.6323 lo cual la variación entre estos dos resultados queda dentro de su variación.

No se hizo revisión por desprendimiento de vórtices ya que el autor no hizo la revisión para este efecto.

**6.5 Conclusiones**

En este capítulo se muestra la obtención de las respuestas de las ráfagas como desprendimiento de vórtices, tanto en el dominio de la frecuencia como el dominio del tiempo. Se puede observar que con estás ecuaciones se puede obtener de forma directa el desplazamiento, esto permite obtener de forma directa el factor pico.

También se probó el programa con un puente ya evaluado donde los resultados son similares, por lo que el procedimiento se puede tomar como válido, sin embargo, en el desprendimiento de vórtices existen valores que se obtuvieron de forma experimental por lo que la revisión de este efecto depende mucho de pruebas ante túnel de viento.

**6.6 Referencias**

Helliesen, M. Ø. (06 de Junio de 2013). Wind Induced Dynamic Response of Concrete Box Girders During a. Noruega: NTNU- Norwegian University of Science and Technology.

Walbækken, S. (9 de Junio de 2013). Aerodynamic stability of slender. Noruega: NTNU- Norwegian University of Science and Technology.