**Capítulo 7**

**Inestabilidad aeroelástica**

**7.1 Introducción**

Cuando la velocidad aumenta los efectos debido a ráfaga comienzan a hacer muy importantes debido a que los desplazamientos comienzan a aumentar. Además pueden presentarse acoplamiento entre torsión y flexión llevando a una condición de inestabilidad. En este capítulo se muestran los efectos de inestabilidad, las velocidades críticas y las condiciones para que considerar dicha inestabilidad.

**7.2 Matriz de impedancia**

Para poder determinar la inestabilidad se hace uso de la matriz de impedancia definida en la ecuación (8.1) (Strommen, 2012),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.1) |

La ecuación (7.1) está en función a la frecuencia, la rigidez y amortiguamiento. Cuando las velocidades son grandes las propiedades dinámicas cambian debido al flujo. Esto se ve reflejado en la rigidez aerodinámica y el amortiguamiento aerodinámico. La masa no tiene gran contribución ya que es muy pequeña comparado al puente.

Como se está trabajando con un sistema de  formas modales, todo lo que se escribe en la ecuación (7.1) se trata de matrices las cuales se definen en la ecuación (8.2) y (8.3).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | (7.2) |
|  | |  | (7.2) | |

La ecuación (8.1) es un problema de valores característicos con  raíces. Por lo que las condiciones que importan son,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8.4) |

La ecuación (8.3) está en función de la frecuencia  y la velocidad  del sistema. Esto se puede simplficiar al considerar estabilidad estática con mientras que para una estabilidad dinámica la respuesta dependerá tanto de la frecuencia como la velocidad asociados a valores de resonancia con la estructura. Para la estabilidad dinámica los resultados que importan son los que están asociados a la velocidad más pequeña conocida como velocidad crítica y la frecuencia  asociada a esta velocidad.

Los límites de estabilidad se pueden clasificar en cuatro dependiendo del modo que mas afecte. El primero es debido a una torsión para un problema estático que se conoce como divergencia estática, el segundo es debido a un movimiento dinámico vertical conocido como galopeo, el tercero es una torsión dinámica y el cuarto debido a una combinación de los dos anteriores conocido como aleteo.

Estos efectos, en donde se presenta la inestabilidad, están asociados a modos verticales  y torsionales  por lo que la matriz de impedancia puede escribirse como,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.5) |

**7.3 Divergencia estática**

La divergencia estática es debido a los efectos de torsión por lo que la forma modal que interesa es debido a la torsión  además se considera que por lo que la matriz de impedancia queda,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.6) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.7) |

Para obtener el determinante de tal manera que la matriz de impedancia sea cero, se puede ver que por lo que la velocidad crítica es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.8) |

**7.3.1 Ejemplo**

Obtener la velocidad crítica para divergencia estática de un puente con una ancho , una frecuencia circular , una derivada de coeficiente de momento de y una masa y se considera que la longitud expuesta es igual a lo longitud total.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**7.4 Galopeo**

Los modos que más afectan en este caso es el vertical  y el subíndice asociado a la ecuación (8.4) es  de igual forma con el amortiguamiento, quedando la matriz de impedancia como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.9) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.10) |

Obtendiendo el determinante e igualando a cero se puede dividir en la parte real e imaginaria donde la parte real se puede definir como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.11) |

y la parte imaginaria como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.12) |

Los valores de inestabilidad se presentan cuando el valor de , el cual se puede poner en función de la velocidad crítica como se muestra en la ecuación (7.13).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.13) |

Para que la inestabilidad por galopeo se presente se debe cumplir que 

**7.4.1 Ejemplo**

Obtener la velocidad crítica para divergencia de galopeo de un puente con una ancho , un peralte una frecuencia circular , una derivada de coeficiente de levante de , un coeficiente de arrastre de , un coeficiente de amortiguamiento crítico , una masa y se considera que la longitud expuesta es igual a la longitud total

Primero se verifica que se puede presentar el galopeo.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

por lo que se sí se presenta inestabilidad por galopeo.

La velocidad crítica es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**7.5 Límite de estabilidad dinámica en torsión**

Los modos que más afectan en este caso es el vertical  y el subíndice asociado a la ecuación (8.4) es  de igual forma con el amortiguamiento, quedando la matriz de impedancia como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.14) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.15) |

Obteniendo el determinante e igualando a cero se puede dividir en la parte real e imaginaria donde la parte real se puede definir como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.16) |

y la parte imaginaria como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.17) |

Los valores de inestabilidad se presentan cuando el valor de , el cual se puede poner en función de la velocidad crítica como se muestra en la ecuación (7.12)

Sin embargo, en este trabajo se presenta que por lo que no se presentará inestabilidad por torsión simple.

**7.6 Aleteo**

El aleteo se da cuando se combina los efectos por torsión  y por flexión vertical  para que esto ocurra las frecuencias resonantes debido a torsión y flexión son iguales:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.18) |

Para obtener el determinante de la matriz de impedancia es conveniente separarlo en cuatro matrices, dos reales y dos imaginarias asociadas a flexión y a torsión como se muestra en la ecuación (8.18) y (8.19).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.19) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.20) |

El límite de estabilidad se define con las siguientes condiciones, la parte real y la parte imaginaria,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.21) |

Expandiendo se tiene que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.22) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.23) |

Selberg tiene una fórmula que permie obtener la velocidad crítica

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.24) |

**7.6.2 Ejemplo**

Obtener la velocidad y frecuencias críticas para una estructura donde cuyas formas modales  y la longitud expuesta es igual a la longitud total. El ancho del puente es , , , ,, 

Se puede hacer unos cambio de variable (Kvamstad, 2011) de tal modo que

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | Incógnita |

La ecuación 7.22 queda:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| (7.25) | |

Se puede observar que la parte real es una ecuación de cuarto grado y la parte imaginaria una de tercer grado por lo que la inestabilidad se da cuando en ambos casos el determinante es igual a cero.

Para obtener la solución de las ecuación (7.25) se requieren las derivadas aerodinámicas. En este ejemplo se ocuparan las de Theodorsen (1935), que se muestran en la Figura 7.1.

|  |
| --- |
|  |
|  |
| Figura 7.1 Derivadas aerodinámicas para una placa |

El proceso para obtener la velocidad crítica es iterativo. Para ello se varía la velocidad crítica obteniendo diferentes frecuencia críticas. Cuando la frecuencia de la parte imaginaria sea la misma que la parte real, se considera que existe inestabilidad.

La primera iteración se propone  por lo que se obtienen las derivadas aerodinámicas aplicando las ecuaciones (5.44) del capítulo 5

Para aplicar la ecuación (5.44b) y (5.44c) se requieren las funciones de Bessel para el valor 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener las funciones de Bessel se usó Matlab con el siguiente código:

% Funciones de Bessel para w/2=0.45

J0 =besselj(0,w/2);

J1 = besselj(1,w/2);

Y0 = bessely(0,w/2);

Y1 = bessely(1,w/2);

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando las ecuaciones (5.44b) y (5.44c),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Aplicando la ecuación (5.44a)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  | |
|  | |  | |
|  | |  | |
|  | |  | |
|  | |  | |

Para obtener la parte real e imaginaria se aplica la ecuación (7.25), para ello se puede poner en forma polinómica de la siguiente manera

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Al sustituirlo los valores se tiene que,

|  |
| --- |
|  |
|  |

Por lo que las ecuaciones quedan:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener las raíces se empleó la función nativa de Matlab “roots” con el siguiente código:

% Obtención de raíces reales e imaginarias; Re=reales, Im=Imaginarias

Re = roots([R4 R3 R2 R1 R0]);

Im = roots([I3 I2 I1 I0]);

En la Tabla 7.1 se muestran las raíces de 

Tabla 7.1 Raíces reales e imaginarias de del ejemplo para 

|  |  |
| --- | --- |
| Raíces reales | Raíces imaginarias |
| -0.9156 | 0.8153 |
| -0.4954 | -0.8410 |
| 0.9173 | 0.06 |
| 0.4959 |  |

Se toman los valores máximos positivos reales para ambos casos por lo que cuando  entonces y .

Para demás valores se revisó a diferentes velocidades reducidas empelando este método. Los resultados se muestran en la Figura 7.2. El punto de intersección es la velocidad crítica reducida.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 7.2 Solución de las ecuaciones de aleteo con las derivadas aerodinámicas de Theodorsen. |

El punto de intersección es  y  por lo que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Si aplica la ecuación (7.24) se tiene que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Si se desea obtener el mismo resultado pero con el método Quasy-Steady es decir que , se obtiene una gráfica diferente como se muestra en la Figura 7.3.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 7.3 Solución de las ecuaciones de aleteo con las derivadas aerodinámicas Quasy-Steady |

El punto de intersección es  y  por lo que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Esto muestra como las cuatro derivadas aerodinámicas que se eliminaron influyen para obtener la velocidad crítica.

**7.7 Ecuación de movimiento de aleteo**

Se puede observar que por medio de la matriz de impedancia se puede obtener la inestabilidad aeroelástica de las estructuras tipo puente, otra manera de verlo es resolviendo las ecuaciones de movimiento de aleteo las cuales se definen en el capitulo 4 en las ecuaciones (4.11a) y (4.11b):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.11a) |
|  |  | (4.11b) |

Donde Scanlan utiliza 6 derivadas aerodinámicas como se muestra en las ecuaciones (4.12a) y (4.12b),

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (4.12a) | |
|  |  | | | (4.12b) |

Para resolver esta ecuación se puede hacer uso de un método numérico como el de Euler, Euler modificado o Runge Kutta que se muestran en las ecuaciones (7.26) , (7.27) y (7.28) respectivamente (Chapra et al, 2015).

Para ello se pone la ecuación diferencial como si fuera una función  y se tiene un intervalo de cambio .

**7.7.1 Método de Euler**

Para resolver una ecuación diferencial por el método de Euler se aplica la ecuación (7.27)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.26) |

**7.7.2 Método de Euler modificado**

Para resolver una ecuación diferencial por el método de Euler modificado se aplica la ecuación (7.28). Este método es una extensión de la ecuación (7.27).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.27a) |
|  |  | (7.27b) |
|  |  | (7.27c) |
|  |  | (7.27d) |
|  |  | (7.27e) |

**7.7.3 Método de Runge Kutta**

El método de Runge Kutta tiene una mayor precisión que el de Euler, sin embargo su precisión no es suficiente para los problemas en la práctica (Chung et al, 2005). La ecuación (7.28) muestra el método de Runke Kutta de cuarto orden, el cual es el más utlizado.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.28a) |
|  |  | (7.28b) |
|  |  | (7.28c) |
|  |  | (7.28d) |
|  |  | (7.28e) |

**7.7.4 Método de Hamming**

El método haming es predictor corrector, el cual consiste en predecir un valor y corregirlo. Las ecuaciones se muestra a continuación:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Predictor |  | (7.29a) |
| Modificador |  | (7.29b) |
| Corrector |  | (7.29c) |
|  |  | (7.29d) |

Para usar el método de Hammin se requiere de predecir los primeros intervalos por lo que para los primeros pasos se aplica el método de Runge Kutta.

**7.7.5 Ejemplo**

Para ver como se aplican los método descritos en la secciones 7.7.1 al 7.7.4 se empleara la siguiente ecuación diferencial,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

que describe la ecuación de movimiento en vibración libre para un sistema de un grado libertad sin amortiguamiento.

Además se presentan las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Dado que los métodos presentados anteriormente solo resuelven sistemas de primer orden, se tiene que transformar la ecuación de segundo orden a dos ecuaciones de primer orden por lo que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Por lo que  representa la velocidad y  el desplazamiento. Esto implica que se tendrán que resolver dos ecuaciones diferenciales de primer orden al mismo tiempo.

El primer paso es poner en términos de función por lo que la función  por lo que el desplazamiento es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Y la velocidad

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Simplifciando,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

El segundo paso es aplicar cualquier método es definir el tamaño de paso . Entre más pequeño sea  mayor precisión se obtendrá. Para esto se usará .

Aplicando el método de Euler se utiliza la ecuación (7.26), recordando las condiciones iniciales de  y . Cuando  entonces,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Cuando entonces,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

En la Tabla 7.1 se muestra los resultados para los diferentes valores

Tabla 7.1 Solución de la ecuación diferencial ejemplo con el método de Euler

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1 | 0.000 | 2.000 | 0.000 |
| 2 | 0.200 | 2.000 | -1.600 |
| 3 | 0.400 | 1.680 | -3.200 |
| 4 | 0.600 | 1.040 | -4.544 |
| 5 | 0.800 | 0.131 | -5.376 |
| 6 | 1.000 | -0.944 | -5.481 |

Usando el método de Runge-Kutta se define de igual manera las funciones

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

El siguiente paso consiste en obtener las , sin embargo al ser dos ecuaciones que requieren resolverse al mismo tiempo se necesitan obtener un valor de  para  y otro para . Para que no confundir los valores se aplicará la nomenclatura de  para hacer referencia a  y  para , donde  .

Aplicando la ecuación 7.28a,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener  se aplica la ecuación (7.28b), la cual se reescribe a continuación.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se puede ver que esta ecuación está en función a dos variables ( y ) y las funciones para este ejemplo dependen de tres (,  y ) por lo que para este problema se anexa la tercer variable de la siguiente manera:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener los  primero se requiere obtener nuevos valores de las tres variables por lo que se reescribirá de la siguiente manera:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

donde,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Aplicando la ecuación 7.28b,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener los valores de  se tiene que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando, el mismo procedimiento que se hizo para  se tiene,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Haciendo un cambio de variable,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Se aplica la ecuación (7.28c) para obtener los valores de 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener los valores de  se tiene que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando, el mismo procedimiento que se hizo para  se tiene,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Haciendo el cambio de variable,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Donde,

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | |
|  |  |  | |
|  |  | |  | |

Aplicando la ecuación (7.28d) para obtener los valores de 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para obtener el siguiente valor se aplica la ecuación (7.28e),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Por lo que aplicando a los valores de  y  se tiene

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

A continuación se mostrara como obtener la la solución de la ecuación con el método de Euler modificado. Para obtener  se aplica la ecuación (7.27a),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando a la ecuación deseada para las condiciones iniciales,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

El predictor  se obtiene con la ecuación (7.27b).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Al aplicarlo a la ecuación queda

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se obtiene el  el cual permitirá corregir la predicción definida con la ecuación (7.27d).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando al ejemplo

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Haciendo un cambio de variable

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Por lo que  queda

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

El nuevo valor se obtiene con la ecuación (7.27d).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicándolo a las variables,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

En la Tabla 7.2 se muestran los resultados para los distintos métodos y el exacto.

Tabla 7.2 Solución de la ecuación diferencial con diferentes métodos

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Exacto | | Euler | | Runge Kutta | | Euler modificado | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 2.00 | 0.00 | 2.00 | 0.00 | 2.00 | 0.00 | 2.00 | 0 |
| 2 | 0.2 | 1.84 | -1.56 | 2.00 | -1.60 | 1.84 | -1.56 | 1.84 | -1.6 |
| 3 | 0.4 | 1.39 | -2.87 | 1.68 | -3.20 | 1.39 | -2.87 | 1.37 | -2.94 |
| 4 | 0.6 | 0.72 | -3.73 | 1.04 | -4.54 | 0.73 | -3.73 | 0.67 | -3.81 |
| 5 | 0.8 | -0.06 | -4.00 | 0.13 | -5.38 | -0.06 | -4.00 | -0.14 | -4.04 |
| 6 | 1 | -0.83 | -3.64 | -0.94 | -5.48 | -0.83 | -3.64 | -0.93 | -3.61 |

Para aplicar el método de Hamming se hará uso de la Tabla 7.2 usando el método exacto para los primeros 3 valores  y . Para aplicar este método  debe ser mayor a 4.

El primer paso es obtener los primeros tres valores de la función, Esto se puede obtener con Euler, Euler modificado o Runge Kutta, pero generalmente se usa el de Runge Kuta.

La obtención de estos valores para cuando  es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Ordenando los datos queda:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

Dado que no se tiene un predictor  se pondrá que

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Y el corrector  de igual manera

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando la ecuación (7.29a) para el ejemplo

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

El modificando se obtiene con la ecuación (7.29b)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

El corrector se usa la ecuación (7.29c)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando la ecuación (7.29d) se obtiene el nuevo valor

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**7.7.6 Solución de la ecuación de aleteo**

Las ecuaciones de aleteo se muestran en el capítulo 4. Estas ecuaciones son de segundo grado y están acopladas por lo que para resolverlas con los métodos descritos se requiere transformarlas a cuatro ecuaciones de primer orden. Para esto se emplearan las ecuaciones (4.11), (4.13) y (4.14).

Las ecuaciones necesarias para resolver el sistema se muestra a continuación.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.31a) |
|  |  | (7.31b) |
|  |  | (7.31c) |
|  |  | (7.31d) |
|  |  | (7.31e) |
|  |  | (7.31f) |

Estas ecuaciones ya se definieron en el capítulo 4, aquí se reescriben para tener un seguimiento más sencillo.

Dividiendo entre  la ecuación (7.31a) y entre  la ecuación (7.31b) queda:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.32a) |
|  |  | (7.32b) |

Considerando que la presión dinámica de base es,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.33) |

Sustituyendo y reescribiendo (7.31c), (7.31d), (7.31e) y (7.31f)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.34a) |
|  |  | (7.34b) |
|  |  | (7.35c) |
|  |  | (7.36d) |

Considerando que:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Y sustituyendo en (7.32a) y (7.32b)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.37a) |
|  |  | (7.37b) |

Para poderlo resolver se tienen que despejar las ecuaciones y transformarlas a ecuaciones de primer orden por lo que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.38a) |
|  |  | (7.38b) |
|  |  | (7.38c) |
|  |  | (7.38d) |

Una vez definida estas ecuaciones se resuelven por algún método numérico donde el tamaño de paso es pequeño.

Para resolver estas ecuaciones no se aplicó el método de Euler ya que no llegó a converger, por lo que se usó el método de Hamming, sin embargo para tener resultados precisos se requiere aplicar intervalos de tiempo muy pequeños por lo que se optó a usar una función de Matlab llamada “ode45” la cual tiene una precisión buena para este tipo de problemas.

En la Figura 7.5 se muestra un ejemplo resolviendo la ecuación con Hamming para 100000 datos, comparado con el ode45.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 7.5 Solución de las ecuaciones por el método de Hamming |

|  |
| --- |
|  |
| Figura 7.5 Solución de las ecuaciones por el método ode45 de Matlab |

Se puede ver que llega a ver pequeñas diferencias, sin embargo los resultados pueden tomarse como aceptables.

Hay que tener en cuenta que no todos los problemas tienen inestabilidad por aleteo, esto se puede ver en la Figura 7.4, donde se muestra el comportamiento de aleteo sin considerar una velocidad fluctuante, sino las modificaciones dinámicas debido a la rigidez y amortiguamiento aerodinámico. En otras palabras es un problema de aleteo en vibración libre.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1. Estabilidad debido al aleteo | 1. Inestabilidad debido al aleteo |
| Figura 7.4 Desplazamientos debido al aleteo para condiciones estables e inestables | |

La parte izquierda muestra que converge por lo que los desplazamientos serán limitados, por otro lado, la parte derecha los desplazamiento se incrementan generando la inestabilidad.

**7.8 Conclusiones**

En este capítulo se revisaron las ecuaciones que determinan la velocidad crítica para obtener la inestabilidad en diferentes condiciones, siendo el aleteo la más compleja de obtener ya que requiere de iterar para obtener la solución. Se puede ver que dependiendo de las derivadas aerodinámicas puede darse la condición de aleteo o no es por ello que la obtención de ellas es muy importante. En la mayoría de la literatura, estas derivadas se obtienen a partir de ensayos experimentales.

**7.9 Referencias**

Chapra, S., & Canale, R. (2015). Numerical Methods SEVENTH EDITION. Nueva Tork: McGraw-Hill Education.

Kvamstad, T. H. (14 de Junio de 2014). Assessment of the flutter stability limit of the Hålogaland Bridge using a. Noruega: NTNU- Norwegian University of Science and Technology.

Scanlan, R. H. (1976). Modern Approaches to Solution of the Wind Problems of Long Span Bridges. ENGINEERING JOURNAL / AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, 26-34.

Yang, W. Y., Cao, W., Chung, T.-S., & Morris, J. (2005). Applied Numerical Methos Using Matlab. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.