**Capítulo 7**

**Inestabilidad aeroelástica**

**7.1 Introducción**

Cuando la velocidad aumenta los efectos debido a ráfaga comienzan a hacer muy importantes debido a que los desplazamientos comienzan a aumentar. Además pueden presentarse acoplamiento entre torsión y flexión llevando a una condición de inestabilidad. En este capítulo se muestran los efectos de inestabilidad, las velocidades críticas y las condiciones para que considerar dicha inestabilidad.

**7.2 Matriz de impedancia**

Para poder determinar la inestabilidad se hace uso de la matriz de impedancia definida en la ecuación (8.1) (Strommen, 2012),

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.1) |

La ecuación (7.1) está en función a la frecuencia, la rigidez y amortiguamiento. Cuando las velocidades son grandes las propiedades dinámicas cambian debido al flujo. Esto se ve reflejado en la rigidez aerodinámica y el amortiguamiento aerodinámico. La masa no tiene gran contribución ya que es muy pequeña comparado al puente.

Como se está trabajando con un sistema de  formas modales, todo lo que se escribe en la ecuación (7.1) se trata de matrices las cuales se definen en la ecuación (8.2) y (8.3).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | (7.2) |
|  | |  | (7.2) | |

La ecuación (8.1) es un problema de valores característicos con  raíces. Por lo que las condiciones que importan son,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8.4) |

La ecuación (8.3) está en función de la frecuencia  y la velocidad  del sistema. Esto se puede simplficiar al considerar estabilidad estática con mientras que para una estabilidad dinámica la respuesta dependerá tanto de la frecuencia como la velocidad asociados a valores de resonancia con la estructura. Para la estabilidad dinámica los resultados que importan son los que están asociados a la velocidad más pequeña conocida como velocidad crítica y la frecuencia  asociada a esta velocidad.

Los límites de estabilidad se pueden clasificar en cuatro dependiendo del modo que mas afecte. El primero es debido a una torsión para un problema estático que se conoce como divergencia estática, el segundo es debido a un movimiento dinámico vertical conocido como galopeo, el tercero es una torsión dinámica y el cuarto debido a una combinación de los dos anteriores conocido como aleteo.

Estos efectos, en donde se presenta la inestabilidad, están asociados a modos verticales  y torsionales  por lo que la matriz de impedancia puede escribirse como,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.5) |

**7.3 Divergencia estática**

La divergencia estática es debido a los efectos de torsión por lo que la forma modal que interesa es debido a la torsión  además se considera que por lo que la matriz de impedancia queda,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.6) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.7) |

Para obtener el determinante de tal manera que la matriz de impedancia sea cero, se puede ver que por lo que la velocidad crítica es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.8) |

**7.3.1 Ejemplo**

Obtener la velocidad crítica para divergencia estática de un puente con una ancho , una frecuencia circular , una derivada de coeficiente de momento de y una masa y se considera que la longitud expuesta es igual a lo longitud total.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**7.4 Galopeo**

Los modos que más afectan en este caso es el vertical  y el subíndice asociado a la ecuación (8.4) es  de igual forma con el amortiguamiento, quedando la matriz de impedancia como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.9) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.10) |

Obtendiendo el determinante e igualando a cero se puede dividir en la parte real e imaginaria donde la parte real se puede definir como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.11) |

y la parte imaginaria como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.12) |

Los valores de inestabilidad se presentan cuando el valor de , el cual se puede poner en función de la velocidad crítica como se muestra en la ecuación (7.13).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.13) |

Para que la inestabilidad por galopeo se presente se debe cumplir que 

**7.4.1 Ejemplo**

Obtener la velocidad crítica para divergencia de galopeo de un puente con una ancho , un peralte una frecuencia circular , una derivada de coeficiente de levante de , un coeficiente de arrastre de , un coeficiente de amortiguamiento crítico , una masa y se considera que la longitud expuesta es igual a la longitud total

Primero se verifica que se puede presentar el galopeo.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

por lo que se sí se presenta inestabilidad por galopeo.

La velocidad crítica es:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

**7.5 Límite de estabilidad dinámica en torsión**

Los modos que más afectan en este caso es el vertical  y el subíndice asociado a la ecuación (8.4) es  de igual forma con el amortiguamiento, quedando la matriz de impedancia como:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.14) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.15) |

Obteniendo el determinante e igualando a cero se puede dividir en la parte real e imaginaria donde la parte real se puede definir como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.16) |

y la parte imaginaria como

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.17) |

Los valores de inestabilidad se presentan cuando el valor de , el cual se puede poner en función de la velocidad crítica como se muestra en la ecuación (7.12)

Sin embargo, en este trabajo se presenta que por lo que no se presentará inestabilidad por torsión simple.

**7.6 Aleteo**

El aleteo se da cuando se combina los efectos por torsión  y por flexión vertical  para que esto ocurra las frecuencias resonantes debido a torsión y flexión son iguales:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.18) |

Para obtener el determinante de la matriz de impedancia es conveniente separarlo en cuatro matrices, dos reales y dos imaginarias asociadas a flexión y a torsión como se muestra en la ecuación (8.18) y (8.19).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.19) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.20) |

El límite de estabilidad se define con las siguientes condiciones, la parte real y la parte imaginaria,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.21) |

Expandiendo se tiene que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.22) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.23) |

donde

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.24) |

Selberg tiene una fórmula que permie obtener la velocidad crítica

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.25) |

**7.6.2 Ejemplo**

Obtener la velocidad y frecuencias críticas para una estructura donde cuyas formas modales  y la longitud expuesta es igual a la longitud total. El ancho del puente es , , , ,, 

Se puede hacer unos cambio de variable (Kvamstad, 2011) de tal modo que

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | Incógnita |

Las ecuaciones 8.24 y 8.25 quedan

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Se puede observar que la parte real es una ecuación de cuarto grado y la parte imaginaria una de tercer grado por lo que la inestabilidad se da cuando en ambos casos el determinante es igual a cero.

Para ello se usaron las derivadas aerodinámicas de Theodorsen que se muestran en la Figura 7.1

|  |
| --- |
|  |
|  |
| Figura 7.1 Derivadas aerodinámicas para una placa |

Para obtener el resultado se revisaron a diferentes velocidades, del cual se obtuvieron sus raíces para la parte real e imaginaria cual se muestra en la Figura 7.2. El punto de intersección es la velocidad crítica reducida.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 7.2 Solución de las ecuaciones de aleteo con las derivadas aerodinámicas de Therodorsen. |

El punto de intersección es  y  por lo que.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Si aplica la ecuación 7.25 se tiene que,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Si se desea obtener el mismo resultado pero con el método Quasy-Steady es decir que , no hay tal solución ya que no se intersecta como se muestra en la Figura 8.3

|  |
| --- |
|  |
| Figura 7.3 Solución de las ecuaciones de aleteo con las derivadas aerodinámicas Quasy-Steady |

**7.7 Ecuación de movimiento de aleteo**

Se puede observar que por medio de la matriz de impedancia se puede obtener la inestabilidad aeroelástica de las estructuras tipo puente, otra manera de verlo es resolviendo las ecuaciones de movimiento de aleteo las cuales se definen en el capitulo 4 en las ecuaciones (4.11a) y (4.11b):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.11a) |
|  |  | (4.11b) |

Donde Scanlan utiliza 6 derivadas aerodinámicas como se muestra en las ecuaciones (4.12a) y (4.12b),

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (4.12a) | |
|  |  | | | (4.12b) |

Para resolver esta ecuación se puede hacer uso de un método numérico como el de Euler, Euler modificado o Runge Kutta que se muestran en las ecuaciones (7.26) , (7.27) y (7.28) respectivamente (Chapra et al, 2015).

Para ello se pone la ecuación diferencial como si fuera una función  y se tiene un intervalo de cambio .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Euler | |  | (7.26) | |
| Euler modificado | |  | (7.27) | |
| Runge Kutta |  | | | (7.28) | |

El método Euler modificado funciona como una ecuación predictor corrector.

**7.7.1 Ejemplo**

Se tiene la ecuaciones diferencial  que describe la ecuación de movimiento en vibración libre sin amortiguamiento con condiciones iniciales  y . Dado que los método presentados anteriormente solo resuelven sistemas de primer orden, se tiene que transformar la ecuación de segundo orden a dos ecuaciones de primer orden por lo que:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Aplicando el método de Euler se tiene que definir un intervalo de paso, para esta ejemplo se usara .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Para el segundo paso,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

En la Tabla 7.1 se muestra los resultados para los diferentes valores

Tabla 7.1 Solución de la ecuación diferencial ejemplo con el método de Euler

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| t |  |  |
| 0.000 | 2.000 | 0.000 |
| 0.200 | 2.000 | -1.600 |
| 0.400 | 1.680 | -3.200 |
| 0.600 | 1.040 | -4.544 |
| 0.800 | 0.131 | -5.376 |
| 1.000 | -0.944 | -5.481 |

Usando el método de Runge-Kutta se tiene

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Para poder resolver este sistema, las  deben obtenerse simultáneamente tanto para  como .

Aplicando el método de Euler modificado se tiene que.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

En la Tabla 7.2 se comparan los resultados

Tabla 7.2 Solución de la ecuación diferencial con diferentes métodos

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Exacto | | Euler | | Runge kuta | | Euler modificado | |
| t | x | z | x | z | x | z | x | Z |
| 0 | 2.00 | 0.00 | 2.00 | 0.00 | 2.00 | 0.00 | 2.00 | 0 |
| 0.2 | 1.84 | -1.56 | 2.00 | -1.60 | 1.84 | -1.56 | 1.84 | -1.6 |
| 0.4 | 1.39 | -2.87 | 1.68 | -3.20 | 1.39 | -2.87 | 1.37 | -2.94 |
| 0.6 | 0.72 | -3.73 | 1.04 | -4.54 | 0.73 | -3.73 | 0.67 | -3.81 |
| 0.8 | -0.06 | -4.00 | 0.13 | -5.38 | -0.06 | -4.00 | -0.14 | -4.04 |
| 1 | -0.83 | -3.64 | -0.94 | -5.48 | -0.83 | -3.64 | -0.93 | -3.61 |

Otro método predictor corrector muy usado también es el método de Hammin (Chung et al, 2005) el cual se muestra en la ecuación (7.29)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Predictor |  | (7.29a) |
| Modificador |  | (7.29b) |
| Corrector |  | (7.29c) |
|  |  | (7.29d) |

Para usar el método de Hammin se requiere de predecir los primeros intervalos por lo que para los primeros pasos se aplica el método de Runge Kutta.

Sin embargo, estos métodos son para sistemas de ecuaciones de primer orden por lo que la ecuación (4.11) y (4.12) se transforman en un sistema de 4 ecuaciones de primer orden como se muestra en la ecuación (8.30)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.30a) |
|  |  | (7.30b) |
|  |  | (7.30c) |
|  |  | (7.30d) |

En la Figura 7.4 se muestra la solución para desplazamientos y rotaciones iniciales para condiciones de estabilidad e inestabilidad.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1. Estabilidad debido al aleteo | 1. Inestabilidad debido al aleteo |
| Figura 7.4 Desplazamientos debido al aleteo para condiciones estables e inestables | |

Estas ecuaciones representan el comportamiento ante cargas autoexitables, la ecuación (4.13) muestra la ecuación incluyendo la turbulencia, estas ecuaciones consideran 8 derivadas en vez de tres.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.31a) |
|  |  | (7.31b) |
|  |  | (7.31c) |
|  |  | (7.31d) |
|  |  | (7.31e) |
|  |  | (7.31f) |

Para resolver estas ecuaciones ya no se aplicó el método de Euler ya que no llega a converger, por lo que se uso el método de Hamming, sin embargo para tener resultados precisos se requiere aplicar intervalos de tiempo muy pequeños por lo que se optó a usar una función de matlab llamada ode45 la cual tiene una precisión buena para problemas como este.

En la Figura 7.5 se muestra un ejemplo resolviendo la ecuación con Hamming para 100000 datos, comparado con el ode45.

|  |
| --- |
|  |
| Figura 7.5 Solución de las ecuaciones por el método de Hamming |

|  |
| --- |
|  |
| Figura 7.5 Solución de las ecuaciones por el método ode45 de Matlab |

Se puede ver que llega a ver pequeñas diferencias, sin embargo los resultados pueden tomarse como aceptables.

**7.8 Conclusiones**

En este capítulo se revisaron las ecuaciones que determinan la velocidad crítica para obtener la inestabilidad en diferentes condiciones, siendo el aleteo la más compleja de obtener ya que requiere de iterar para obtener la solución. Se puede ver que dependiendo de las derivadas aerodinámicas puede darse la condición de aleteo o no es por ello que la obtención de ellas es muy importante. En la mayoría de la literatura, estas derivadas se obtienen a partir de ensayos experimentales.

**7.9 Referencias**

Chapra, S., & Canale, R. (2015). Numerical Methods SEVENTH EDITION. Nueva Tork: McGraw-Hill Education.

Kvamstad, T. H. (14 de Junio de 2014). Assessment of the flutter stability limit of the Hålogaland Bridge using a. Noruega: NTNU- Norwegian University of Science and Technology.

Scanlan, R. H. (1976). Modern Approaches to Solution of the Wind Problems of Long Span Bridges. ENGINEERING JOURNAL / AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, 26-34.

Yang, W. Y., Cao, W., Chung, T.-S., & Morris, J. (2005). Applied Numerical Methos Using Matlab. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.