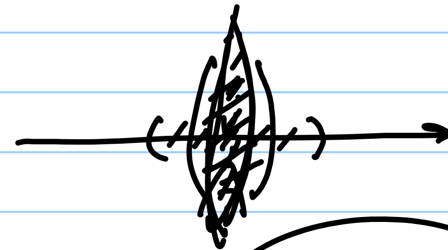
如何学好微积分

① 数学思维
② 语言表述
③ 计算能力

一.

例1: 极限语言:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.



⓪ $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in \mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时 $|a_n-A|<\varepsilon$

① $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in \mathbb{N}^*$ 当 $n>N$ 时 $|a_n-A|<2\varepsilon$.

⓪ ⇒ ① $\forall \varepsilon>0$, $2\varepsilon>0$. 对 $2\varepsilon>0$ 用 ⓪

$\exists N\in \mathbb{N}^*$ 当 $n>N$ 时 $|a_n-A|<2\varepsilon$

① ⇒ ⓪ $\forall \varepsilon>0$, $\frac{\varepsilon}{2}>0$ 由 ① $\exists N\in \mathbb{N}^*$ 当

$n>N$ 时 $|a_n-A|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

②: 对无穷多个 $\varepsilon>0$, $\exists N\in \mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时 $|a_n-A|<\varepsilon$

⓪ ⇒ ②. 显然

② + $\inf\{\varepsilon \mid \exists N\in \mathbb{N}^*, 当 n>N 时 |a_n-A|<\varepsilon\}=0$

$\Longrightarrow$ ⓪

$\forall \varepsilon > 0$: $\inf A = 0$ $\quad \exists \varepsilon_1 \in A \quad \varepsilon_1 < \varepsilon$.

$\exists N \in \mathbb{N}^*$ 当 $n > N$ 时 $|a_n - A| < \varepsilon_1 < \varepsilon$.

例2: Cauchy 收敛准则

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$. 当 $n > N$ 时

$\forall p \in \mathbb{N}^*, |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

① $\forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时 $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

② $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$

$\Longleftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon, p} \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时

$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

① $\Rightarrow$ ② $\qquad$ ② $\not\Rightarrow$ ① $\quad a_n = \ln n$

$$② + \forall \varepsilon > 0 \ \sup_{p \in \mathbb{N}^*} \left\{ \inf \left\{ N_{\varepsilon, p} \mid \text{当 } n > N_{\varepsilon, p} \text{ 时 } |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \right\} \right\} < +\infty \Longrightarrow ①$$

例3: $f \in C(a,b)$

$\Leftrightarrow \forall x_0 \in (a,b)$ f 在 $x = x_0$ 处连续

$\Leftrightarrow \forall x_0 \in (a,b)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow \forall x_0 \in (a,b)$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 当 $|x - x_0| < \delta$ 时

有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$f \in C(a,b) + \forall \varepsilon > 0 \ \inf_{x_0 \in (a,b)} \left\{ \sup \left\{ \delta_{\varepsilon, x_0} \ \middle| \ \begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \text{ 时} \\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \end{array} \right\} \right\} > 0$$

$\Longrightarrow f$ 在 (a,b) 一致连续.

例4: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ 存在

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $x \in I$ 收敛

$\Leftrightarrow \forall x \in I$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛

$\Leftrightarrow \forall x \in I \quad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)}$

① $\Leftrightarrow \forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$

$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

① $\nmid \quad \sup N < +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$$

一致收敛

二. 例题:

$\{a_n\}$ 收敛 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ 任意子列收敛

① $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = A$.

则 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

$\{a_{3n-1}\} \quad \{a_{3n}\} \quad \{a_{3n+1}\}$

例: $\{a_n\}$ 单调. $\{a_n\}$ 存在一个子列收敛

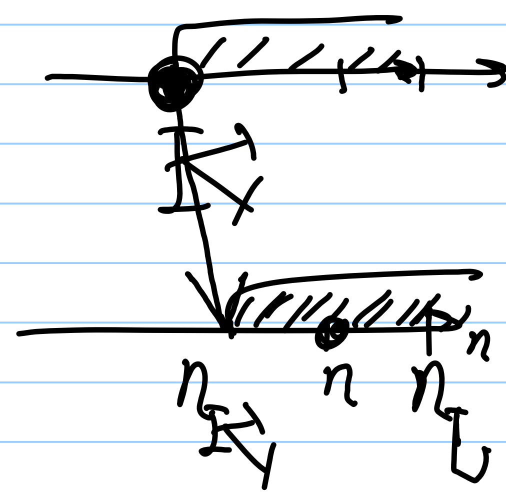
则 $\{a_n\}$ 收敛

证: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$ $\quad \{a_n\} \nearrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists K$, 当 $k \geq K$ 时 $\quad n_K$

$|a_{n_k} - A| < \varepsilon$

取 $N = n_K$ 当 $n > N$ 时



$\exists n_L$: $n_K \leq n \leq n_L$

$a_{n_K} \leq a_n \leq a_{n_L}$.

夹逼原理: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$

$a_n \leq b_n \leq c_n$

Cauchy 收敛准则 : Cauchy 列 $\Rightarrow$ 收敛列

$\xRightarrow{B-W}$ 收敛子列.

三.

例1: 有界性定理.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 x_0 区间 $f(x)$ 有界

证: 假设 $f(x)$ 无界.

$\forall M>0,\ \exists x\in[a,b]\quad |f(x)|>M.$

取 $M=1\quad \exists x_1 \cdots\quad |f(x_1)|>1$

⋮

$M=n\quad \exists x_n\in[a,b]\quad |f(x_n)|>M$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty\qquad x_n$ 有界数列

有收敛子列 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$

$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$ 矛盾 $\quad x_0\in[a,b]$

例2: 最大最小值定理 类似

例3: $f\in C[a,b]\ \therefore\ \forall x\in[a,b]\ \exists y\in[a,b]$

$|f(y)|\le \frac{1}{2}|f(x)|\quad$ 证: $\exists x_0.\ f(x_0)=0.$

证: $\forall x_1 \in [a,b]$ 由已知 $\exists x_2 \in [a,b]$

$$|f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|f(x_1)|$$

① 若 $f(x_2)=0$，证了！令 $\xi = x_2$

② 若 $f(x_2) \neq 0$ $\exists x_3 \in [a,b]$. $|f(x_3)| \leq \frac{1}{2}|f(x_2)|$

$\vdots$

$$\{x_n\}. \quad |f(x_n)| \leq \frac{1}{2}|f(x_{n-1})| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

$\{x_n\}$: $x_n \in [a,b]$ $\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$

$$\underset{\underset{\lim_{x\to\xi} f(x)}{\text{连续}\|}}{f(\xi)} \overset{\text{连续}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{\text{海涅}} \overset{\text{子}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)} = 0$$

四、复合函数求极限

$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$　$\lim_{\substack{u\to u_0\\u\neq u_0}} f(u)=A$

$x\neq x_0$ 时，$g(x)\neq u_0$ 则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=A$

2.

g 在 $x=x_0$ 处可导　f 在 $u=g(x_0)$ 处可导

则 $\underbrace{f(g(x))\text{ 在 } x=x_0 \text{ 处可导}}_{\text{不可导}}$　$(f(g(x)))'=f'(g(x))\,g'(x)$

不可导

① f 在 $u=g(x_0)$ 处不可导　g 在 $x=x_0$ 处可导

可导　不可导

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}$

$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

$f(u)=|u| \qquad g(x) = x^2$

$x_0=0$

$$f(g(x)) = x^2$$

$f(x)=g(x) = \underbrace{D}(x)$

$$f(g(x)) \equiv 1$$

中值定理:(早有预谋)

例1: $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$ $f(a)=f(b)=0$

证: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\exists \xi \in (a,b)$. $f'(\xi)=\alpha f(\xi)$

证: 令 $F(x) = f(x)e^{-\alpha x}$. $F(a)=F(b)=0$

$\exists \xi \in (a,b)$ $F'(\xi)=0$ $F'(x)= f'(x)e^{-\alpha x} + f(x)e^{-\alpha x}(-\alpha)$

$= e^{-\alpha x}\left(f'(x) - \alpha f(x)\right)$

$F(a) = F(b) = 0$

$\exists \xi \in (a, b)$

$F'(\xi) = 0$

$f'(x) = \alpha f(x)$

$\frac{df}{dx} = \alpha f(x)$

① $f \equiv 0$ ✓

② $f \neq 0$ $\int \frac{1}{f} df = \int \alpha dx$

$\Rightarrow$ $\ln|f| = \alpha x + C$

$f = \pm e^{\alpha x} e^{c}$

$= \pm e^{c} e^{\alpha x}$

$f(x) = C e^{\alpha x}$

$f(x) e^{-\alpha x} = C$

例: $f(x) \in C[a.b] \cap D(a.b)$. $a>0$

$f(a)=0$. 证明: $\exists \xi \in (a.b)$ s.t

$$f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$$

证明: 令 $F(x) = f(x)(b-x)^{a}$

$F(a)=0$, $F(b)=0$

$f(b-x)^a = C \Leftarrow$

$\exists \xi \in (a.b)$ $F'(\xi)=0$

$f'(\xi)(b-\xi)^a + f(\xi)\cdot a(b-\xi)^{a-1} = 0$

$$f(x) = \frac{b-x}{a} f'(x)$$

$$= \frac{b-x}{a} \frac{df}{dx}$$

① $f \equiv 0$ ✓

② $f \neq 0$ $\frac{1}{f} df = \frac{-a}{x-b} dx$

$\ln|f| = -a \ln|x-b| + C$

$\ln|f| + a\ln|b-x| = C$

$f(x)(b-x)^a = \pm e^C$

Taylor公式.

① 带Peano余项：f在 $x=x_0$ 处具有n阶导数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\underbrace{o((x-x_0)^n)}_{x\to x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum\cdots}{(x-x_0)^n}=0$$

②

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$[x_0, x]$

$[x, x_0]$

① 在哪点展

② 在哪点用

③ 用什么余项

④ 展到几阶

例1. $f\in D^2[a,b]$ $\quad f'_+(a)=f'_-(b)=0$

证: $\exists\, \xi\in(a,b)$ $\quad |f''(\xi)|\geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

$$f(x)=f(a)+\cancel{\frac{f'_+(a)}{1!}(x-a)}+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2$$

$$f(x)=f(b)+\cancel{\frac{f'_-(b)}{2!}(x-b)}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2.$$

$$f(a)-f(b)=\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2-\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2$$

$$|f(a)-f(b)|\leq\frac{|f''(\xi)|}{2}\left[(x-b)^2+(x-a)^2\right]$$

$f(\frac{a+b}{2})=$ — — —

— — — —

例2: $f\in D^2[0,1]$. $\quad f(0)=f(1)$. $\quad |f''(x)|\leq 2$

证: $|f'(x)|\leq 1$ $\quad x\in[0,1]$

$$f(0)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2$$

$$f(1)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x)^2$$

例3： $f\in D^2(\mathbb{R})$. $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x)|\le M_1$, $|f''(x)|\le M_2$ 证 $|f'(x)|\le\sqrt{2M_1M_2}$

证明：

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2$$

$$f(x-h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(-h)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2$$

$$\Rightarrow\quad f(x+h)-f(x-h)=f'(x)\,2h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2$$

$$|f'(x)|\le\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\left(\frac{|f''(\xi_1)|}{2}+\frac{|f''(\xi_2)|}{2}\right)\frac{h}{2}$$

$$\le\underbrace{\frac{M_1}{h}+\frac{M_2h}{2}}$$

糟糕， $\frac{M_1}{h}+\frac{M_2h}{2}\ge2\sqrt{\frac{M_1M_2}{2}}=\sqrt{2M_1M_2}$

巧了：只要取 h 满足：

$$\frac{M_1}{h}=\frac{M_2h}{2}$$ 取等

计算："瞬间积出原函数"

$$\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\text{求导} & u & u' & u'' \\
 & \int & -\int & \\
\text{积分} & v' & v & \int v
\end{array}$$

$+ \qquad -$

例：

$$\int x^4 e^{2x} \, dx = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{2^2}x^3 + \frac{12}{2^3}x^2 - \frac{24}{2^4}x + \frac{24}{2^5}\right) + C$$

$$\begin{array}{cccccc}
x^4 & 4x^3 & 12x^2 & 24x & 24 & 0 \\
 & + \quad & - \quad & + \quad & - \quad & + \quad -\int \\
e^{2x} & \frac{1}{2}e^{2x} & \frac{1}{2^2}e^{2x} & \frac{1}{2^3}e^{2x} & \frac{1}{2^4}e^{2x} & \frac{1}{2^5}e^{2x}
\end{array}$$

15247506.