费定晖　周学圣编演
郭大钧　邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

# 数学分析习题集题解

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇

# 数学分析习题集题解

（三）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 (3)/费定晖编.-2版.-济南:山东科学技术出版社,(2001.3重印)

ISBN 7-5331-0101-4

Ⅰ.Б… Ⅱ.费… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43955号

Б.П.吉米多维奇

**数学分析习题集题解**

(三)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版

(济南市玉函路16号 邮编:250002)

山东科学技术出版社发行

(济南市玉函路16号 电话2064651)

济南申汇印务有限责任公司印刷

*

787mm×1092mm 32开本 18.875印张 403千字

2001年3月第2版第10次印刷

印数:229 301-231 300

ISBN 7-5331-0101-4

O·7 定价:17.70元

# 目　　录

# 第三章　不定积分

## §1. 最简单的不定积分

1° 不定积分的概念　若 $f(x)$ 为连续函数及 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

式中 $C$ 为任意常数.

2° 不定积分的基本性质：

(a) $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$；(б) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$；

(в) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \quad (A = 常数)$；

(г) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

3° 最简积分表：

Ⅰ. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$；

Ⅱ. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C (x \neq 0)$；

Ⅲ. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$

Ⅳ. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$；

Ⅴ. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$

Ⅵ. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$；

Ⅵ. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C(a>0,a\neq 1)$; $\int e^x dx=e^x+C$;

Ⅷ. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

Ⅸ. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

Ⅹ. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$;

Ⅺ. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$;

Ⅻ. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$;

ⅩⅢ. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$;

ⅩⅣ. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C$;

ⅩⅤ. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C$.

4° 积分的基本方法

(a) 引入新变数法　若

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

则
$$\int f(u)du = F(u) + C, \text{式中 } u = \varphi(x).$$

(б) 分项积分法　若

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

则
$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

(в) 代入法　假设

$x=\varphi(t)$，式中 $\varphi(t)$ 及其导函数 $\varphi'(t)$ 为连续的，

则得
$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

(г) 分部积分法　若 $u$ 和 $v$ 为 $x$ 的可微分函数，

则
$$\int udv = uv - \int vdu.$$

利用最简积分表，求出下列积分*：

1628. $\int(3-x^2)^3dx.$

**解** $\int(3-x^2)^3dx=\int(27-27x^2+9x^4-x^6)dx$

$$=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C.$$

1629. $\int x^2(5-x)^4dx.$

**解** $\int x^2(5-x)^4dx$

$$=\int(625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6)dx$$

$$=\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C.$$

1630. $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx.$

**解** $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx$

$$=\int(1-6x+11x^2-6x^3)dx$$

$$=x-3x^3+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$$

1631. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx.$

**解** $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx$

---

* 本章在叙述习题及其解答过程中，凡出现的函数，无论是被积函数还是原函数，均默认是在有意义的定义域上进行的．例如最简积分表中 I 里当 $n\leqslant-2$ 时，要求 $x\neq0$；Ⅳ 中要求 $|x|\neq1$；Ⅴ 中要求 $|x|<1$；以及 Ⅵ 中，当取负号时要求 $|x|>1$；等等，就未加声明．在题解中也有相当多的类似情况．因此，如无特别声明，在一般情形下，这些定义域是很容易被读者确定的，此处就不再予以一一指明．

——《题解》编者注．

$$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

1632. $\int\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx.$

**解** $\int\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$

1633. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx.$

**解** $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

1634. $\int\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx.$

**解** $\int\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx$

$$= \int\left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)dx$$

$$= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

1635. $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx.$

**解** $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$

$$= \int\left(x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}\right)dx$$

$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) + C.$$

1636. $\int\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

解 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)dx$

$=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$

1637. $\int\frac{\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx$

$=\int\left(2-2\sqrt[6]{72}x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$

$=2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C.$

1638. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$

$=\int\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$

1639. $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=x-\mathrm{arctg}x+C.$

1640. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx=\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx$

$$= -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

1641. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx.$

**解** $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx = \int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx$

$$= x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

1642. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

**解** $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$$= \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

**解** $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

$$= \int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

1644. $\int (2^x+3^x)^2dx.$

**解** $\int (2^x+3^x)^2dx = \int (4^x + 2\cdot 6^x + 9^x)dx$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} + 2\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

1645. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx.$

解 $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx = \int\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$

$= -\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x + C.$

1646. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx.$

解 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int(e^{2x}-e^x+1)dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C.$

1647. $\int(1+\sin x+\cos x)dx.$

解 $\int(1+\sin x+\cos x)dx = x - \cos x + \sin x + C.$

1648. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx.$

解 $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,dx$

$= \int[sgn(\cos x-\sin x)](\cos x-\sin x)dx$

$= (\sin x+\cos x)\cdot sgn(\cos x-\sin x) + C.$

1649. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx.$

解 $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \int(\csc^2 x-1)dx = -\mathrm{ctg}\,x - x + C.$

1650. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx.$

解 $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int(\sec^2 x-1)dx = \mathrm{tg}\,x - x + C.$

1651. $\int (a\operatorname{sh}x + b\operatorname{ch}x)dx$.

**解** $\int (a\operatorname{sh}x + b\operatorname{ch}x)dx = a\operatorname{ch}x + b\operatorname{sh}x + C$.

1652. $\int \operatorname{th}^2 x dx$.

**解** $\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{th}x + C$.

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x dx$.

**解** $\int \operatorname{cth}^2 x dx = \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{cth}x + C$.

1654. 证明：若

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

**证** 由 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 得知 $F'(x) = f(x)$. 因而有 $F'(ax+b) = f(ax+b)$，且 $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]$
$= F'(ax+b)$，于是

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right] = f(ax+b),$$

所以

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

求出下列积分：

1655. $\int \frac{dx}{x+a}$.

解 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$

$=\int (1-x)^{-\frac{3}{5}}dx$

$=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C.$

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

解 $\int \frac{dx}{2+3x^2}=\int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C.$

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

解 $\int \frac{dx}{2-3x^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|+C$

$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C.$

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C.$

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

**解** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 - 1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \left| x\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 1} \right| + C_1$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}| + C.$

1665. $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$

**解** $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx = -\left(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C.$

1666. $\int (\sin 5x - \sin 5a) dx.$

**解** $\int (\sin 5x - \sin 5a) dx = -\frac{1}{5}\cos 5x - x\sin 5a + C.$

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$

**解** $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

1668. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

**解** $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}.$

**解** $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

解 $\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$

1671. $\int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx$.

解 $\int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx$

$=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]+C.$

1672. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}=2\operatorname{th}\frac{x}{2}+C.$

1673. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}=-2\operatorname{cth}\frac{x}{2}+C.$

用适当地变换被积函数的方法来求下列积分：

1674. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C.$

1675. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}dx$.

解 $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int (1+x^3)^{\frac{1}{3}} d(1+x^3)$

$= \frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C.$

1676. $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$.

解 $\int \frac{xdx}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2}$

$= -\frac{1}{4}\ln|3-2x^2| + C.$

1677. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

解 $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

$= -\frac{1}{2(1+x^2)} + C.$

1678. $\int \frac{xdx}{4+x^4}$.

解 $\int \frac{xdx}{4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{2} + C.$

1679. $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$.

解 $\int \frac{x^3dx}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C.$

1680. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}$

$$= 2\text{arc tg}\sqrt{x} + C.$$

1681. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

**解** $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int \sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C.$

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

**解** $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$$

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

**解** $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\text{arc sin}\frac{1}{|x|} + C.$$

1684. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

**解** $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{sgnx dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

$= -\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} sgnx d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$= \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} sgnx + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

**1685.** $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

**解** $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} d(x^2-1)$

$= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C.$

**1686.** $\int \frac{x^2dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$.

**解** $\int \frac{x^2dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{24}\int (8x^3+27)^{-\frac{2}{3}} d(8x^3+27)$

$= \frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27} + C.$

**1687.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

**解** 由 $x(1+x)>0$ 知:$x>0$ 或 $x<-1$.

当 $x>0$ 时,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}$$

$= 2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}) + C$;

当 $x<-1$ 时,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = -\int \frac{d[-(1+x)]}{\sqrt{(-x)[-(1+x)]}}$$

$$= -2\int \frac{d(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}$$

$$= -2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-(1+x)})+C.$$

总之，得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$$

$$= 2\operatorname{sgn} x \cdot \ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

**解** 由 $x(1-x)>0$ 知：$0<x<1$. 于是，得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$= 2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

1689. $\int xe^{-x^2}dx$.

**解** $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

1690. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

**解** $\int \frac{e^x dx}{2+e^x} = \int \frac{d(2+e^x)}{2+e^x} = \ln(2+e^x)+C.$

1691. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

**解** $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \operatorname{arc\,tg}(e^x)+C.$

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

**解** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}$

$= -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C.$

1693. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

**解** $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x + C.$

1694. $\int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)}$

**解** $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln(\ln x)}$

$= \int \frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C.$

1695. $\int \sin^5 x \cos x dx$.

**解** $\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$.

**解** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx = -\int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d(\cos x)$

$= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$

1697. $\int \mathrm{tg} x dx$.

**解** $\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$= -\ln|\cos x| + C.$

1698. $\int \operatorname{ctg} x dx$.

解 $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$= \ln|\sin x| + C$.

1699. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$.

解 $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$

$= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x)$

$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x} + C$.

1700. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$.

解 当 $|a| = |b| \neq 0$ 时,

$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$

$= \frac{1}{|a|} \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2|a|} \sin^2 x + C$;

当 $|a| \neq |b|$ 时,

$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2}}$

$= \frac{1}{a^2 - b^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2} + C$

$= \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C$.

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$.

**解** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}x} = \int \frac{\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}dx = \int \frac{d\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}$

$= \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$

1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}x}$.

**解** $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}x} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}$

$= 2\operatorname{arctg}(e^x) + C.$

1707. $\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}}dx$.

**解** 因为

$$\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x = (\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x)^2 - 2\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2x$$

$$= \operatorname{ch}^2 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x = \frac{1+\operatorname{ch}^2 2x}{2},$$

所以,得

$$\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}}dx = \int \frac{\frac{1}{4}d(\operatorname{ch}2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\operatorname{ch}2x + \sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x}) + C_1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}\right) + C.$$

1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{th}^2x}}$;

**解** $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{th}^2x}} = \int (\operatorname{th}x)^{-\frac{2}{3}}d(\operatorname{th}x)$

$$=3\sqrt[3]{\operatorname{th} x}+C.$$

1709. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

解 $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx=\int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x)$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C.$$

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}=\int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2}$

$$=-\frac{1}{\arcsin x}+C.$$

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$.

解 $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$

$$=\int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{1}{2}} d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$$

$$=\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

解 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx=\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C.$$

1713. $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

解 $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)+C.$

1714⁺. $\int\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}$.

解 $\int\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}=\int\frac{x^{14}dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4}$

$=-\frac{1}{5}\int(1+x^{-5})^{-4}d(1+x^{-5})$

$=\frac{1}{15}(1+x^{-5})^{-3}+C_1=\frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3}+C_1$

$=\frac{(x^5+1)^3-3x^{10}-3x^5-1}{15(x^5+1)^3}+C_1$

$=-\frac{3x^{10}+3x^5+1}{15(x^5+1)^3}+C$

1715. $\int\frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

解 当 $n=-2$ 时，

$\int\frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx=\int\frac{dx}{x\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|+C$；

当 $n\neq-2$ 时，

$\int\frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx=\frac{2}{n+2}\int\frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2}}$

$=\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)+C.$

1716$^{+}$. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C.$$

1717. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

解 $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}=\int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C.$$

1718. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

解 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$$

$$=-\frac{1}{4}\int \frac{d(\cos 2x)}{\frac{1+\cos^2 2x}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\cos 2x)+C.$$

1719. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$.

解 $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx=\int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2-1}dx$

$$=\frac{1}{\ln 3-\ln 2}\int\frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}$$

$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$$

1720. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

**解** $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=\int\frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$$

用分项积分法计算下列积分：

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2dx$.

**解** $\int x^2(2-3x^2)^2dx=\int(4x^2-12x^4+9x^6)dx$

$$=\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7+C.$$

1722. $\int\frac{1+x}{1-x}dx$.

**解** $\int\frac{1+x}{1-x}dx=\int\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)dx$

$$=-x-2\ln|1-x|+C.$$

1723. $\int\frac{x^2}{1+x}dx$.

解 $\int \frac{x^2}{1+x}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|1+x|+C.$

1724. $\int \frac{x^3}{3+x}dx.$

解 $\int \frac{x^3}{3+x}dx=\int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{3+x}\right)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|3+x|+C.$

1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx.$

解 $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

$=x+\ln(1+x^2)+C.$

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx.$

解 $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx=\int \frac{(x^2-2)-4x+6}{2-x^2}dx$

$=\int\left(-1-\frac{4x}{2-x^2}+\frac{6}{2-x^2}\right)dx$

$=-x+2\ln|2-x^2|+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+C.$

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx.$

解 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx=\int \frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}}dx$

$=\int[(1-x)^{-98}-2(1-x)^{-99}+(1-x)^{-100}]dx$

$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C.$

1728. $\int\frac{x^5}{x+1}dx$.

解 $\int\frac{x^5}{x+1}dx=\int\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln|1+x|+C.$

1729. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$=\int\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx$

$=\frac{1}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}]+C.$

1730. $\int x\sqrt{2-5x}dx$.

解 $\int x\sqrt{2-5x}dx$

$=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}\right](2-5x)^{\frac{1}{2}}dx$

$=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{1}{2}}\right]dx$

$=\frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C$

$=-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C.$

1731. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}=-\frac{1}{3}\int\frac{(1-3x)-1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}dx$

$=-\frac{1}{3}\int[(1-3x)^{\frac{2}{3}}-(1-3x)^{-\frac{1}{3}}]dx$

$$=\frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C$$

$$=-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx.$

解 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int[(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int[(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}]d(1+x^2)$$

$$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C$$

$$=\frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$$

1733. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

解 $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

1734. $\int\frac{dx}{x^2+x-2}.$

解 $\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

1735. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

解 $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}=\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)dx$

$$=\text{arc tg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

1736. $\int\frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^2-2}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx$

$$=\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

1737. $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)}$.

解 $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)}=\int\left(\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}\right)dx$

$$=\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}+C.$$

1738. $\int\frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$.

解 $\int\frac{xdx}{x^4+3x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+C.$$

1739. $\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}\quad(a\neq b)$.

解 $\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int\left[\frac{1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(x+b)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{(x+a)(x+b)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int[\cos\alpha-\cos(2x+\alpha)]dx$$

$$=\frac{x}{2}\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin(2x+\alpha)+C.$$

1744. $\int\sin 3x\cdot\sin 5x dx.$

解 $\int\sin 3x\cdot\sin 5x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C.$$

1745. $\int\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx.$

解 $\int\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5x}{6}+\cos\frac{x}{6}\right)dx$

$$=\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C.$$

1746. $\int\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$

解 $\int\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\sin\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\right]dx$$

$$=-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+C.$$

1747. $\int\sin^3 x dx.$

解 $\int\sin^3 x dx=\int(\cos^2 x-1)d(\cos x)$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$$

1748. $\int\cos^3 x dx.$

解 $\int\cos^3 x dx=\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

1749. $\int\sin^4 x dx$.

解 $\int\sin^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

1750. $\int\cos^4 x dx$.

解 $\int\cos^4 x dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int(3+4\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

1751. $\int\operatorname{ctg}^2 x dx$.

解 $\int\operatorname{ctg}^2 x dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-\operatorname{ctg}x-x+C.$

1752. $\int\operatorname{tg}^3 x dx$.

解 $\int\operatorname{tg}^3 x dx=\int\operatorname{tg}x\cdot(\sec^2 x-1)dx$

$$=\int\operatorname{tg}x d(\operatorname{tg}x)-\int\operatorname{tg}x dx$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C,$$

其中第二个积分见 1697 题.

1753. $\int \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x dx$.

**解** 因为

$$\sin^2 3x \cdot \sin^3 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 6x) \cdot \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)$$

$$= \frac{1}{8}(3\sin 2x - 3\cos 6x \cdot \sin 2x - \sin 6x + \sin 6x \cdot \cos 6x)$$

$$= \frac{3}{8}\sin 2x + \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 6x - \frac{3}{16}\sin 8x + \frac{1}{16}\sin 12x$$

所以,得

$$\int \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x dx = -\frac{3}{16}\cos 2x - \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{3}{128}\cos 8x - \frac{1}{192}\cos 12x + C.$$

1754. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

**解** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

$= -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$.

**解** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x} = \int \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx$

$= \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}$

$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin x} + C,$

其中第一个积分见1704题.

1756. $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos^3 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos^3 x}=\int\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)dx$

$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}+\int\frac{d(2x)}{\sin 2x}$

$=\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg}x|+C,$

其中第二个积分见1703题.

1757. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$.

解 $\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\cos x dx$

$=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)d(\sin x)$

$=\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x+C.$

1758. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\sec^2 x\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(1+\operatorname{tg}^2 x)d(\operatorname{tg}x)$

$=\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C.$

1759. $\int\frac{dx}{1+e^x}$.

解 $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=x-\ln(1+e^x)+C.$

1760. $\int\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx$.

解 $\int\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx=\int\left(1+\frac{2e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$

$= x + 2\operatorname{arc\,tg}(e^x) + C.$

1761. $\int \operatorname{sh}^2 x dx$.

**解** $\int \operatorname{sh}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}2x + 1}{2} dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x + \frac{x}{2} + C.$

1762. $\int \operatorname{ch}^2 x dx$.

**解** $\int \operatorname{ch}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}2x + 1}{2} dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x + \frac{x}{2} + C.$

1763. $\int \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}2x dx$.

**解** $\int \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}2x dx = 2\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}x dx = 2\int \operatorname{sh}^2 x d(\operatorname{sh}x)$

$= \frac{2}{3}\operatorname{sh}^3 x + C.$

1764. $\int \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}3x dx$.

**解** $\int \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}3x dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch}4x + \operatorname{ch}2x) dx$

$= \frac{1}{8}\operatorname{sh}4x + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x + C.$

1765. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}$.

**解** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \int \left( \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) dx$

$= -(\operatorname{cth}x + \operatorname{th}x) + C.$

用适当的代换，求下列积分：

1766. $\int x^2 \sqrt[3]{1 - x} dx$.

**解** 设 $1 - x = t$，则 $x = 1 - t$，$dx = -dt$，故得

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\,dx = -\int (1-t)^2 t^{\frac{1}{3}} dt$$

$$= -\int \left(t^{\frac{1}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + t^{\frac{7}{3}}\right) dt$$

$$= -\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}t^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

**1767.** $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx.$

**解** 设 $1-5x^2=t$，则 $x^2=\frac{1}{5}(1-t)$，从而 $x^3dx$

$$=\frac{1}{2}x^2d(x^2)=\frac{1}{10}(1-t)\left(-\frac{1}{5}\right)dt$$

$=-\frac{1}{50}(1-t)dt$，故得

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}dx = -\frac{1}{50}\int (t^{10}-t^{11})dt$$

$$= -\frac{1}{550}t^{11} + \frac{1}{600}t^{12} + C$$

$$= -\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11} + C.$$

**1768.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx.$

**解** 设 $2-x=t$，则 $x=2-t$，$dx=-dt$，故得

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx = -\int t^{-\frac{1}{2}}(2-t)^2 dt$$

$$= -\int \left(4t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\right) dt$$

$$= -8t^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x} + C.$$

1769. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

**解** 设 $1-x^2=t$，则 $x^2=1-t$，从而 $x^5dx=\frac{1}{2}(x^2)^2$

$\cdot d(x^2)=-\frac{1}{2}(1-t)^2dt$，故得

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^2dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(t^{-\frac{1}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$=-t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}+C.$$

1770. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$.

**解** 设 $2-5x^3=t$，则 $x^3=\frac{1}{5}(2-t)$，从而

$$x^5dx=\frac{1}{3}x^3d(x^3)=-\frac{1}{75}(2-t)dt,$$

故得

$$\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx=-\frac{1}{75}\int t^{\frac{2}{3}}(2-t)dt$$

$$=-\frac{1}{75}\int\left(2t^{\frac{2}{3}}-t^{\frac{5}{3}}\right)dt=-\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}}+C$$

$$=-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C.$$

1771⁺. $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$.

**解** 设 $\sin x=t$，则 $\cos^5 xdx=(1-\sin^2 x)^2d(\sin x)$

$=(1-t^2)^2dt$，

故得

$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\,dx = \int (1-t^2)^2 t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int \left( t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}} \right) dt$$

$$= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}} + C$$

$$= \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x \right) \sqrt{\sin^3 x} + C.$$

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx.$

**解** 设 $\cos^2 x = t$，则 $\sin x \cos x dx = -\frac{1}{2} dt$，故得

$$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{t}{1+t} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \ln(1+t) + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \ln(1+\cos^2 x) + C.$$

1773. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

**解** 设 $\operatorname{tg} x = t$，则 $\frac{1}{\cos^4 x} dx = (1+t^2) dt$，故得

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$= \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$$

1774. $\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1+\ln x}}.$

**解** 设 $1 + \ln x = t$，则 $\frac{\ln x dx}{x}$

$$= (1 + \ln x - 1) d(1 + \ln x)$$

$= (t-1) dt$，故得

$$\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int t^{-\frac{1}{2}}(t-1)dt$$
$$=\int\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C.$$

1775. $\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$.

**解** 设 $e^{\frac{x}{2}}=t$，则 $e^x=t^2$，$dx=\frac{2dt}{t}$，故得

$$\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}=2\int\frac{dt}{t^2(1+t)}=2\int\left(\frac{1-t}{t^2}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=-\frac{2}{t}-2\ln t+2\ln(1+t)+C$$
$$=-2e^{-\frac{x}{2}}-x+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}})+C.$$

1776. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

**解** 设 $\sqrt{1+e^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$，
故得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$
$$=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+C$$
$$=\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C$$
$$=x-2\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)+C.$$

1777. $\int\frac{\text{arc tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$.

代入得

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}} = 2\int \sec^3 t dt = 2\int \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)^2 d(\sin t)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2}$$

$$+ \int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin t}-\frac{1}{1+\sin t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)+C_1$$

$$= \mathrm{tg}t \cdot \sec t + \ln(\sec t + \mathrm{tg}t) + C_1$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln(x+\sqrt{x^2-2})+C.$$

(2) 当 $x<-\sqrt{2}$ 时,仍设 $x=\sqrt{2}\sec t$,但限制 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$. 其余步骤与上相同,注意到,此时 $\sec t+\mathrm{tg}t<0$,因此在对数符号里要加绝对值,即结果为

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

总之,当 $|x|>\sqrt{2}$ 时,

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

1780. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.

**解** 被积函数的存在域为 $-a\leqslant x\leqslant a$,因此设 $x=a\sin t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, dx=a\cos t dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int\cos^2 t dt$$

$$=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\overset{*)}{+}C$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

*） 利用 1742 题的结果.

1781. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

**解** 被积函数的存在域为$-\infty<x<+\infty$，因此可设 $x=a\operatorname{tg}t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 从而

$$(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sec^3 t, dx=a\sec^2 t dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\cos t dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

1782. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$.

**解** 被积函数的存在域为$-a\leqslant x<a$，因此可设 $x=a\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}=\frac{1+\sin t}{\cos t}, dx=a\cos t dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$$
$$=a\int(1+\sin t)dt=a(t-\cos t)+C$$
$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C(-a<x<a).$$

注意，上式在端点 $x=-a$ 也成立. 即函数 $F(x)=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$ 在点 $x=-a$ 的(右)导数等于被积函数 $f(x)=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ 在点 $x=-a$ 之值. 事实上，由于 $F(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $-a\leqslant x<a$ 连续，且 $F'(x)=f(x)$ 在 $-a<x<a$ 成立. 故由中值定理，知当 $-a<x<a$ 时，有

$$\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}=F'(\xi)=f(\xi),-a<\xi<x.$$

由此可知，(右)导数

$$F'(-a)=\lim_{x\to-a+0}\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}$$
$$=\lim_{\xi\to-a+0}f(\xi)=f(-a).$$

下面有些题目在端点的情况可类似地进行讨论，从略.

1783. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$.

**解** 被积函数的存在域为 $0\leqslant x<2a$，因此可设 $x=2a\sin^2 t$，并限制 $0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$. 从而

$$x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=\frac{2a\sin^3 t}{\cos t},dx=4a\sin t\cos t dt.$$

代入得

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}$$
$$=8a^2\int\sin^4 t\,dt$$
$$=8a^2\left(\frac{3}{8}t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right)\overset{*)}{+}C.$$

注意到 $\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sqrt{\frac{x}{2a}}\cdot\sqrt{1-\frac{x}{2a}}=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{x(2a-x)}$ 及 $\sin 4t=2\sin 2t\ \cos 2t=4\sin t\ \cos t(1-2\sin^2 t)=\frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)}$，最后得

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-2a^2\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)}+\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{2}{a^2}(a-x\ \sqrt{x(2a-x)}+C$$
$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C.$$

*） 利用 1749 题的结果.

**1784.** $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

**解** 不妨设 $a<b$. 被积函数的存在域为 $a<x<b$, 因此可设 $x-a=(b-a)\sin^2 t$、并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}=(b-a)\sin t\ \cos t,$$
$$dx=2(b-a)\sin t\ \cos t\ dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int dt=2t+C$$

$$=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

1785. $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx.$

**解** 与上题相同,作同一代换,并注意到 $\sin 4t = 4\sin t$

$$\cdot\cos t(1-2\sin^2 t) = 4\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\cdot$$

$$\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}\left(1-2\cdot\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$=-4\cdot\frac{2x-(a+b)}{(b-a)^2}\sqrt{(x-a)(b-x)},$$ 即得

$$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx = 2((b-a)^2\int\sin^2 t\cos^2 t dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int\sin^2 2t dt = \frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos 4t)dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$$

$$+\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

用双曲线代换 $x = a\,\mathrm{sh}t$,$x = a\mathrm{ch}t$ 等等,求下列积分(参数为正的):

1786. $\int\sqrt{a^2+x^2}dx.$

**解** 被积函数的存在域为 $-\infty < x < +\infty$,因此可设 $x = a\mathrm{sh}t$. 从而

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\mathrm{ch}t, dx = a\mathrm{ch}t dt.$$

代入得

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = a^2\int \mathrm{ch}^2 t dt$$

$$= a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2t\right)^{*)} + C_1.$$

注意到 $x+\sqrt{a^2+x^2}=a(\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t)=ae^t$，即 $t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ 及 $\mathrm{sh}2t=2\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t=\frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2}$，

最后得

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

*） 利用 1762 题的结果.

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx.$

**解** 与上题相同，设 $x=a\mathrm{sh}t$，则

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{a\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}t}, dx = a\mathrm{ch}t dt.$$

代入得

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = a^2\int \mathrm{sh}^2 t dt$$

$$= a^2\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}2t-\frac{t}{2}\right)^{*)} + C_1$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

*） 利用 1761 题的结果.

1788⁺. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx.$

**解** 被积函数的存在域为 $x \geqslant a$ 及 $x<-a$.

(1) 当 $x > a$ 时，可设 $x = a\operatorname{ch}t$，并限制 $t > 0$. 从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\operatorname{ch}t - 1}{\operatorname{sh}t}, dx = a\operatorname{sh}t dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = a\int(\operatorname{ch}t - 1)dt$$

$$= a\operatorname{sh}t - at + C_1 = a\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} - at + C_1$$

$$= a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - a\ln\left[\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} + \frac{x}{a}\right] + C_1$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - a\ln(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + C_2$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - 2a\ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}) + C.$$

(2) 当 $x < -a$ 时，可设 $x = -a\operatorname{ch}t$，并限制 $t > 0$. 从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\operatorname{ch}t + 1}{\operatorname{sh}t}, dx = -a\operatorname{sh}t dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = -a\int(\operatorname{ch}t + 1)dt$$

$$= -a\operatorname{sh}t - at + C_1$$

$$= -a\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$$

$$-a\ln\left[\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - \frac{x}{a}\right] + C_1$$

$$= -\sqrt{x^2 - a^2} - a\ln(\sqrt{x^2 - a^2} - x) + C_2$$

$$= -\sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{-x+a}$$
$$+\sqrt{-x-a}) + C.$$

总之，当 $|x| > a$ 时，

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = sgnx \cdot \sqrt{x^2-a^2}$$
$$-2a\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x+a|}) + C.$$

1789. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

**解** 不妨设 $a < b$. 被积函数的存在域为 $x > -a$ 及 $x < -b$.

(1) 当 $x > -a$ 时，可设 $x + a = (b-a)\mathrm{sh}^2 t$，并限制 $t > 0$. 从而

$$\sqrt{(x+a)(x+b)} = (b-a)\mathrm{sh}t\ \mathrm{ch}t, dx$$
$$= 2(b-a)\mathrm{sh}t\ \mathrm{ch}t\ dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2\int dt = 2t + C_1.$$

注意到 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b} = \sqrt{b-a}(\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t) = \sqrt{b-a}e^t$，就有 $t = \ln\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}}$，最后得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$
$$= 2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}) + C.$$

(2) 当 $x < -b$ 时，可设 $x + b = (a-b)\mathrm{sh}^2 t$，并限制 $t > 0$. 从而

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t,dx$$
$$=-(b-a)2\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t\,dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=-2\int dt=-2t+C_1$$
$$=-2\ln(\sqrt{-(x+a)}+\sqrt{-(x+b)})+C.$$

总之,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$
$$=\begin{cases}2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}),\\ \quad 若\ x+a>0\ 及\ x+b>0;\\ -2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}),\\ \quad 若\ x+a<0\ 及\ x+b<0.\end{cases}$$

1790. $\int\sqrt{(x+a)(x+b)}dx.$

**解** 与上题相同,作同一代换,只是在求积分的过程中变动个别地方. 今以 $x>-a$ 时为例,解法如下:

$$\int\sqrt{(x+a)(x+b)}dx=2(b-a)^2\int\operatorname{sh}^2t\operatorname{ch}^2t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)^2\int\operatorname{sh}^2 2t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\int(\operatorname{ch}4t-1)dt$$
$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}4t-t\right)+C_1$$
$$=\frac{1}{4}(b-a)^2[\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t(1+2\operatorname{sh}^2t)-t]+C_1$$
$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left(\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\cdot\sqrt{1+\frac{x+a}{b-a}}\right.$$

**解** $\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C.$

1792. $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1).$

**解** $\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x$

$-\frac{1}{n+1}\int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$

**解** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\frac{1}{x}\ln^2 x + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= -\frac{1}{x}\ln^2 x - 2\int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x$

$+ 2\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C.$

1794. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx.$

**解** $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx = \frac{2}{3}\int \ln^2 x d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\ln x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}\int \ln x d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x + \frac{8}{9}\int x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right) + C.$

1795. $\int x e^{-x} dx.$

**解** $\int xe^{-x}dx = -\int xd(e^{-x}) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$
$= -e^{-x}(x+1) + C.$

1796. $\int x^2e^{-2x}dx.$

**解** $\int x^2e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int x^2d(e^{-2x})$

$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} \cdot 2xdx$

$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}\int xd(e^{-2x})$

$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$

$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + C.$

1797. $\int x^3e^{-x^2}dx.$

**解** $\int x^3e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int x^2d\left(e^{-x^2}\right)$

$= -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(x^2) = -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + C.$

1798. $\int x\cos xdx.$

**解** $\int x\cos xdx = \int xd(\sin x)$

$= x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C.$

1799. $\int x^2\sin 2xdx.$

**解** $\int x^2\sin 2xdx = -\frac{1}{2}\int x^2d(\cos 2x)$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\int xd(\sin 2x)$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$$
$$= -\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C.$$

1800. $\int x\text{sh}x dx.$

**解** $\int x\text{sh}x dx = \int x d(\text{ch}x)$
$$= x\text{ch}x - \int \text{ch}x dx = x\text{ch}x - \text{sh}x + C.$$

1801. $\int x^3\text{ch}3x dx.$

**解** $\int x^3\text{ch}3x dx = \frac{1}{3}\int x^3 d(\text{sh}3x)$
$$= \frac{1}{3}x^3\text{sh}3x - \int x^2\text{sh}3x dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3\text{sh}3x - \frac{1}{3}\int x^2 d(\text{ch}3x)$$
$$= \frac{1}{3}x^3\text{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\text{ch}3x + \frac{2}{3}\int x\text{ch}3x dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3\text{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\text{ch}3x + \frac{2}{9}\int x d(\text{sh}3x)$$
$$= \frac{1}{3}x^3\text{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\text{ch}3x + \frac{2}{9}x\text{sh}3x - \frac{2}{9}\int \text{sh}3x dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right)\text{sh}3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27}\right)\text{ch}3x + C.$$

1802. $\int \text{arc tg}x dx.$

**解** $\int \text{arc tg}x dx = x\text{arc tg}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$
$$= x\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

1803. $\int \text{arc sin}x dx.$

**解** $\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

1804. $\int x \operatorname{arc\,tg} x dx.$

**解** $\int x\operatorname{arc\,tg} x dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{arc\,tg} x d(x^2)$

$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= \frac{1+x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + C.$

1805. $\int x^2\arccos x dx.$

**解** $\int x^2\arccos x dx = \frac{1}{3}\int \arccos x d(x^3)$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{6}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right)$

$d(1-x^2)$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2} + C.$

1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx.$

**解** $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\int \arcsin x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

作代换 $x = \sin t$，得

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t\, dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin t}$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|^{*)} + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\cos t}{\sin t}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C,$$

最后得

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\arcsin x$$

$$-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

*）　利用 1703 题的结果.

**1807.** $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx.$

**解** $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

**1808.** $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

**解** $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}d(x^2)$

$$= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \int\frac{x^2}{1-x^2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \int\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right)dx$$
$$= x - \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C.$$

1809. $\int \text{arc tg}\ \sqrt{x}\,dx.$

解 $\int \text{arc tg}\ \sqrt{x}\,dx = x\text{arc tg}\ \sqrt{x}$
$$- \frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$
$$= x\text{arc tg}\ \sqrt{x} - \int\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)d(\sqrt{x})$$
$$= (x+1)\text{arc tg}\ \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

1810. $\int \sin x \cdot \ln(\text{tg}x)dx.$

解 $\int \sin x \cdot \ln(\text{tg}x)dx = -\int \ln(\text{tg}x)d(\cos x)$
$$= -\cos x \cdot \ln(\text{tg}x) + \int \cos x \cdot \text{ctg}x \cdot \sec^2 x dx$$
$$= -\cos x \cdot \ln(\text{tg}x) + \int\frac{dx}{\sin x}$$
$$= -\cos x \cdot \ln(\text{tg}x) + \ln\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

求下列积分：

1811. $\int x^5 e^{x^3}dx.$

解 $\int x^5 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int x^3 d(e^{x^3})$
$$= \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3)$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 - 1)e^{x^3} + C.$$

1812. $\int (\arcsin x)^2 dx.$

**解** $\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x \, d(\sqrt{1-x^2})$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int dx$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

1813. $\int x(\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx.$

**解** $\int x(\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx = \frac{1}{2}\int (\operatorname{arc\,tg} x)^2 d(x^2)$

$$= \frac{1}{2}x^2(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \int \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \operatorname{arc\,tg} x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$$

$$+ \int \operatorname{arc\,tg} x \, d(\operatorname{arc\,tg} x)$$

$$= \frac{x^2}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - x \operatorname{arc\,tg} x + \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$+ \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$$

$$= \frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - x \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$+ C.$$

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

解 $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx$

$=\frac{1}{3}\int\ln\frac{1-x}{1+x}d(x^3)$

$=\frac{1}{3}x^3\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{1-x^2}dx$

$=\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{2}{3}\int\left(-x+\frac{x}{1-x^2}\right)dx$

$=\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln(1-x^2)+C.$

1815. $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\sqrt{1+x^2})$

$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$-\int\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C.$

1816. $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)$

$=-\frac{1}{2}\int xd\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$

$=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$

1817. $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

**解** 当 $a=0$ 时，

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\int\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3x^3}+C;$$

当 $a\neq 0$ 时，

$$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{a^2+x^2}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}-\frac{1}{a^3}\int\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2}$$

$$=\frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$$

$$-\frac{1}{a^3}\left[-\frac{\frac{x}{a}}{2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+C.$$

*) 利用 1816 题的结果.

**1818.** $\int\sqrt{a^2-x^2}dx.$

**解** $$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{|a|}$$

$$-\int\sqrt{a^2-x^2}dx,$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}$$

$$-\frac{a^2}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]^{*)} + C$$

$$= \frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}$$

$$-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

*） 利用 1786 题的结果.

1821. $\int x\sin^2 x dx$.

**解** $\int x\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\int x dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\int x d(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{4}\int\sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

1822. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

**解** 设 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$，代入得

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2\int te^t dt = 2\int t d(e^t)$$

$$= 2te^t - 2\int e^t dt$$

$$= 2te^t - 2e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

1823. $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$.

**解** 设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，代入得

$$\int x\sin\sqrt{x}\,dx=2\int t^3\sin t\,dt=-2\int t^3d(\cos t)$$

$$=-2t^3\cos t+6\int t^2\cos t\,dt$$

$$=-2t^3\cos t+6\int t^2d(\sin t)$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t-12\int t\sin t\,dt$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12\int td(\cos t)$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12t\cos t-12\int\cos t\,dt$$

$$=-2(t^2-6)t\cos t+6(t^2-2)\sin t+C$$

$$=2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}+C.$$

1824. $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

**解** $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\arctan x})$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}-\int e^{\arctan x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\arctan x})$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}-\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

于是得

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C.$$

1825. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

**解** $$\int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\operatorname{arctg}x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x} + \int \frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x} + \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x} \overset{*)}{+} C$$

$$= \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x} + C.$$

*) 利用 1824 题的结果.

1826. $\int \sin(\ln x)dx.$

**解** $$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx,$$

于是得

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

1827. $\int \cos(\ln x)dx.$

**解** $$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx$$

$$= x\cos(\ln x) + \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] \overset{*)}{+} C$$

$$= \frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$$

*) 利用 1826 题的结果.

1828. $\int e^{ax}\cos bx dx.$

**解** 如果$a,b$同时为零，积分显然为$x+C$；若$a=0$，$b\neq 0$，积分显然为$\frac{1}{b}\sin bx+C$；以下设$a\neq 0$：

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a}\int\cos bx d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\int\sin bx d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx dx$$

于是得

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\right)$$

$$+C=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C.$$

1829. $\int e^{ax}\sin bx dx$.

**解** 若$a=b=0$，则积分为$x+C$；以下设$a^2+b^2\neq 0$，则有

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{1}{a}\int\sin bx d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int\cos bx de^{ax}$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx dx,$$

故 $$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

1830. $\int e^{2x}\sin^2 x dx$.

**解** $\int e^{2x}\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}(1-\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\int e^{2x}dx - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx$

$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos 2x + 2\sin 2x}{8}e^{2x}\right)^{*)} + C$

$= \frac{1}{8}e^{2x}(2 - \cos 2x - \sin 2x) + C.$

*）　利用 1828 题的结果.

1831. $\int (e^x - \cos x)^2 dx.$

**解** $\int (e^x - \cos x)^2 dx = \int (e^{2x} - 2e^x\cos x + \cos^2 x)dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - 2\cdot\frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2}^{*)} +$

$\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)^{**)} + C$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x(\cos x + \sin x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

*）　利用 1828 题的结果.

**）　利用 1742 题的结果.

1832. $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg} e^x}{e^x}dx.$

**解** $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg} e^x}{e^x}dx = -\int \operatorname{arc\,ctg} e^x d(e^{-x})$

$= -e^{-x}\cdot\operatorname{arc\,ctg}(e^x) - \int\frac{dx}{1+e^{2x}}$

$= -e^{-x}\operatorname{arc\,ctg}(e^x) - \frac{1}{2}[2x - \ln(1+e^{2x})]^{*)} + C.$

$= -e^{-x}\operatorname{arc\,ctg}(e^x) - x + \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C.$

*）　利用 1759 题的结果.

1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$.

解 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx = -\int \ln(\sin x) d(\operatorname{ctg} x)$

$= -\operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) + \int \operatorname{ctg}^2 x dx$

$= -\operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) + (-\operatorname{ctg} x - x)^{*)} + C$

$= -[x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln(e \sin x)] + C$.

*) 利用 1649 题或 1751 题的结果.

1834. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

解 $\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \int x d(\operatorname{tg} x) = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx$

$= x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| \overset{*)}{+} C$.

*) 利用 1697 题的结果.

1835. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$.

解 $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx = -\int x e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$= -\frac{x}{1+x} e^x + \int -\frac{1}{1+x} e^x (x+1) dx$

$= -\frac{x}{1+x} e^x + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C$.

下列积分的求法需要把二次三项式化成正则型，并利用下列公式：

Ⅰ. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$；

Ⅱ. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0)$；

Ⅲ. $\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln|a^2 \pm x^2| + C$；

Ⅳ. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{a} + C \quad (a>0)$;

Ⅴ. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$;

Ⅵ. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$;

Ⅶ. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc sin}\,\frac{x}{a} + C \quad (a>0);$$

Ⅷ. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

求下列积分：

1836⁺. $\int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab \neq 0)$

**解** 当 $ab>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{a+bx^2}$$

$$= \text{sgn}a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \text{sgn}a \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}}\text{atc tg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C;$$

当 $ab<0$ 时，

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \text{sgn}a \cdot \int \frac{dx}{|a| - |b|x^2}$$

$$= \text{sgn}a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2 - (\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}} \right| + C.$$

1837. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$.

**解** $$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

1838. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$.

**解** $$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \ln \left| \frac{\frac{2}{3} + \left(x - \frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3} - \left(x - \frac{1}{3}\right)} \right| + C_1$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{3x + 1} \right| + C.$$

1839. $\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1}$.

**解** $$\int \frac{x\,dx}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - (\sqrt{2} + 1)}{x^2 + (\sqrt{2} - 1)} \right| + C.$$

1840. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx.$

解 $$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1841. $\int \frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$

解 $$\int \frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \int \frac{x-\cos\alpha+\cos\alpha}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d[(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha]}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$+\cos\alpha\cdot\int \frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)$$

$$+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+C$$

$(a \neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$

1842. $\int \frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}.$

解 $$\int \frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2d(x^2)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x^6 - x^3 - 2|$$

$$- \frac{1}{18}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}\right| + C$$

$$= \frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|\cdot(x^3-2)^2\} + C.$$

如果本题不化成正则型来作，则有更简单的作法，事实上，

$$\int\frac{x^5dx}{x^6-x^3-2} = \frac{1}{3}\int\frac{x^3d(x^3)}{(x^3-2)(x^3+1)}$$

$$= \frac{1}{9}\int\left(\frac{2}{x^3-2}+\frac{1}{x^3+1}\right)d(x^3)$$

$$= \frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|\cdot(x^3-2)^2\} + C.$$

1844. $\int\frac{dx}{3\sin^2x-8\sin x\cos x+5\cos^2x}$.

**解** $\int\frac{dx}{3\sin^2x-8\sin x\cos x+5\cos^2x}$

$$= \int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{3\operatorname{tg}^2x-8\operatorname{tg}x+5}$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{d\left(\operatorname{tg}x-\frac{4}{3}\right)}{\left(\operatorname{tg}x-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{3}-\left(\operatorname{tg}x-\frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{3}+\left(\operatorname{tg}x-\frac{4}{3}\right)}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right| + C.$$

1845. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx}{2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 + \sec^2 \frac{x}{2}}$$

$$= 2\int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right)^2 + 4} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2}\right) + C.$$

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}$ $(b \neq 0)$.

**解** 当 $b > 0$ 时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left| x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2} \right| + C;$$

当 $a > 0$ 及 $b < 0$ 时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \int \frac{d(\sqrt{-b}x)}{\sqrt{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{-b}x)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right) + C.$$

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} = \int \frac{d(x + 1)}{\sqrt{2 - (x + 1)^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

1848. $\int \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}$.

**解** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$

$= \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+C.$

本题即 1687 题，注意不同的解法及不同形式的结果．

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

**解** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}\right)+C.$

1850. 证明：若

$$y = ax^2+bx+c(a \neq 0),$$

则当 $a>0$ 时，$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C$；

当 $a<0$ 时，$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$

**证** 当 $a>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C;$$

当 $a<0$ 时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)+C.$$

1851. $\int\frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

**解** $$\int\frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right)+C.$$

1852. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

**解** $$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$
$$+C.$$

1853. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

**解** $$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{17}{16}-\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}\right)+C.$$

1854. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

**解** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2d(x^2)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-1)d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}$

$+ \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right|+C.$

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$.

**解** $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)d(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$+ \frac{3}{4}\int \frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}\right)+C.$

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

**解** 作代换$t=\frac{1}{x}$,则

$x\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\operatorname{sgn}t}{t^2}\sqrt{t^2+t+1}, dx=-\frac{dt}{t^2}$. 于是

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-(\operatorname{sgn}t)\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=-(\operatorname{sgn}t)\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|^{*)}+C_1$$

$$=-(\operatorname{sgn}x)\ln\left|\frac{x+2+2(\operatorname{sgn}x)\sqrt{x^2+x+1}}{2x}\right|$$

$$+C_1.$$

故当 $x>0$ 时,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C.$$

当 $x<0$ 时,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{2x}{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{2x(x+2+2\sqrt{x^2+x+1})}{(x+2)^2-4(x^2+x+1)}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C.$$

总之,不论 $x$ 为正或为负,均有

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C.$$

*) 利用 1850 题的结果.

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

**解** 作代换 $t=\frac{1}{x}$,则 $x^2\sqrt{x^2+x-1}$

$$=\operatorname{sgn}t\cdot\frac{\sqrt{-t^2+t+1}}{t^3}, dx=-\frac{dt}{t^2}.$$ 于是

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}=-(\operatorname{sgn}t)\int\frac{t}{\sqrt{-t^2+t+1}}dt$$

$$=-(\operatorname{sgn}t)\cdot\left(-\frac{1}{2}\int\frac{d(-t^2+t+1)}{\sqrt{-t^2+t+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{-t^2+t+1}}\right)$$

$$=-(\operatorname{sgn}t)\cdot\left(-\sqrt{-t^2+t+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right)^{*)}+C$$

$$=(\operatorname{sgn}x)\cdot\left[\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{|x|}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{x\sqrt{5}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}\right)+C.$$

其存在域为 $\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}$.

*) 利用 1850 题的结果.

1858. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

**解** 设 $y=x+1$,本题即转化为 1856 题的类型. 由于解法类似,且 $x+1$ 的符号对结果没有影响,故仅就

$x+1>0$ 列出解法的主要步骤如下：

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-2y+2}}$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{\frac{2}{y^2}-\frac{2}{y}+1}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y^2-2y+2}}{y\sqrt{2}}\right| + C_1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right| + C.$$

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

**解** 设 $x-1=\frac{1}{t}$,则

$$(x-1)\sqrt{x^2-2} = \frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t|t|}, dx = -\frac{1}{t^2}dt,$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = -\int \frac{\operatorname{sgn}t\, dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$= -\operatorname{sgn}t \cdot \arcsin\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \arcsin\left(\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}\right) + C \quad (|x|>\sqrt{2}).$$

1860⁺. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

**解** 设 $x+2=\frac{1}{t}$,则

$$(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5} = \frac{\sqrt{1-2t-5t^2}}{t^2|t|},$$

**解** $\int \sqrt{2+x+x^2}dx$

$$= \int \sqrt{\frac{7}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}$$

$$+\frac{7}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{2+x+x^2}\right)+C.$$

1863. $\int \sqrt{x^4+2x^2-1}xdx.$

**解** $\int \sqrt{x^4+2x^2-1}xdx$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{(x^2+1)^2-2}d(x^2+1)$$

$$= \frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1})+C.$$

1864. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

**解** 由于

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$= -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|+C_1$$

(可仿照 1856 题求得),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_2,$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_3,$$

所以

$$\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$= -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{1+x-x^2} + C.$$

其中存在域为满足不等式 $1+x-x^2>0$ 且 $x\neq 0$ 的一切 $x$ 值，即 $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ 及 $x\neq 0$.

1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx.$

**解** $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx.$

$$= \int \frac{\operatorname{sgn}x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx = \int \frac{\operatorname{sgn}x\, d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$$

$$= \operatorname{sgn}x\cdot\ln\left[x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right]+C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C.$$

## §2. 有理函数的积分法

利用待定系数法，求下列积分：

1866. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

**解** 设$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$，通分后应有

$$2x+3 \equiv A(x+5) + B(x-2).$$

在这恒等式中，

令 $x = 2^{*)}$，得 $7 = 7A$，$A = 1$；

令 $x = -5$，得 $-7 = -7B$，$B = 1$.

于是，

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5}\right)dx$$

$$= \ln|(x-2)(x+5)| + C.$$

*) 注意，这是一种习惯的说法. 实际上，不能直接令 $x = 2$（因为上述恒等式是当 $x \neq 2$，$x \neq -5$ 时得出来的），而应令 $x \to 2$ 取极限，得 $7 = 7A$，以下类似情况都作此理解.

1867. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

**解** 设$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$，

通分后应有

$$x \equiv A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)$$

$\cdot (x+2)$.

在这恒等式中，

令 $x=-1$，得 $-1=2A$，$A=-\frac{1}{2}$；

令 $x=-2$，得 $-2=-B$，$B=2$；

令 $x=-3$，得 $-3=2C$，$C=-\frac{3}{2}$.

于是，

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{-\frac{3}{2}}{x+3}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|$$

$$+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C.$$

1868. $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$.

**解** $\frac{x^{10}}{x^2+x-2}=x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4$

$-21x^3+43x^2-85x+171+\frac{-341x+342}{x^2+x-2}$，

设 $\frac{-341x+342}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$，通分后应有

$-341x+342\equiv A(x-1)+B(x+2)$.

在这恒等式中，

令 $x=-2$，得 $1024=-3A$，$A=-\frac{1024}{3}$；

令 $x=1$，得 $1=3B$，$B=\frac{1}{3}$.

于是，

$$\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx=\int\Big[x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4$$
$$-21x^3+43x^2-85x+171$$
$$-\frac{1024}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)}\Big]dx$$
$$=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}$$
$$+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|+C.$$

1869. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

**解** $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$

$$=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}.$$

设 $\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$，通分后应有

$$5x^2-6x+1\equiv A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)$$
$$+Cx(x-2).$$

在这恒等式中，

令 $x=0$，得 $1=6A$，$A=\frac{1}{6}$；

令 $x=2$，得 $9=-2B$，$B=-\frac{9}{2}$；

令 $x=3$，得 $28=3C$，$C=\frac{28}{3}$.

于是，

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$$
$$=\int\left[1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}\right]dx$$
$$=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|$$
$$+C.$$

1870. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx.$

**解** $\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}=1+\frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}.$

设$\frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+4}.$

通分后应有

$$-(5x^2+4)\equiv(A_1x+B_1)(x^2+4)+(A_2x$$
$$+B_2)(x^2+1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{r|l} x^3 & A_1+A_2=0, \\ x^2 & B_1+B_2=-5, \\ x^1 & 4A_1+A_2=0, \\ x^0 & 4B_1+B_2=-4. \end{array}$$

由此，$A_1=0, B_1=\frac{1}{3}, A_2=0, B_2=-\frac{16}{3}.$

于是，

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$$
$$=\int\left[1+\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{16}{3(x^2+4)}\right]dx$$
$$=x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

1871. $\int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}$.

**解** $\frac{x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$，通分后应有

$$x \equiv A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2.$$

在这恒等式中，

令 $x = 1$，得 $1 = 3B, B = \frac{1}{3}$；

令 $x = -2$，得 $-2 = 9C, C = -\frac{2}{9}$，

比较 $x^2$ 的系数，得 $A + C = 0$，从而 $A = \frac{2}{9}$.

于是，

$$\int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2} = \int \left( \frac{2}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{2}{9(x+2)} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

1872. $\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

**解** 设 $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$，通分后应有

$$x^2 + 1 \equiv A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2.$$

在这恒等式中，

令 $x=-1$，得 $2=-2B, B=-1$；

令 $x=1$，得 $2=4C, C=\frac{1}{2}$；

比较 $x^2$ 的系数，得 $A+C=1$，从而 $A=\frac{1}{2}$.

于是，

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$$

$$=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

1873. $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx.$

**解** $\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2=\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$

$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}$，通分后应有

$$x^2\equiv A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2+C(x-2)(x-1)^2+D(x-1)^2.$$

在这恒等式中，

令 $x=1$ 得 $B=1$；

令 $x=2$，得 $D=4$；

比较 $x^3$ 及 $x^2$ 的系数，得

$$A+C=0 \text{ 及 } -5A+B-4C+D=1;$$

由此，$A=4, C=-4$.

于是，

$$\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx$$

$$= \int \left( \frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$= 4\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 4\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + C$$

$$= 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + C.$$

1874. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

**解** 设 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3}$$，通分后应有

$$\begin{aligned} 1 \equiv & A(x+2)^2(x+3)^3 \\ & + B(x+1)(x+2)(x+3)^3 \\ & + C(x+1)(x+3)^3 \\ & + D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2 \\ & + E(x+1)(x+2)^2(x+3) \\ & + F(x+1)(x+2)^2. \end{aligned}$$

在这恒等式中，

令 $x=-1$，得 $1=8A, A=\frac{1}{8}$；

令 $x=-2$，得 $1=-C, C=-1$；

令 $x=-3$，得 $1=-2F, F=-\frac{1}{2}$.

比较 $x^5$、$x^4$ 及 $x^3$ 的系数，得

令 $x=1$，得 $1=8B, B=\frac{1}{8}$.

令 $x=-1$，得 $1=4E, E=\frac{1}{4}$.

令 $x=0$，得 $-A+B+C+D+E=1$；

令 $x=2$，得 $27A+27B+9C+3D+E=1$；

令 $x=-2$，得 $3A-B+9C-9D+9E=1$；

由此，$A=-\frac{3}{16}, C=\frac{3}{16}, D=\frac{1}{4}$.

于是，

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}\\
&=\int\Big[-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{8(x-1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}\\
&\quad+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^3}\Big]dx\\
&=-\frac{3}{16}\ln|x-1|-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\ln|x+1|\\
&\quad-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{8(x+1)}+C\\
&=\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+C.
\end{aligned}$$

1876. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

**解**　设 $\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$，通分后应有

$$\begin{aligned}
x^2+5x+4 &\equiv (Ax+B)(x^2+4)\\
&\quad+(Cx+D)(x^2+1).
\end{aligned}$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=1, \\ x^1 & 4A+C=5, \\ x^0 & 4B+D=4. \end{array}$$

由此，$A=\frac{5}{3}$，$B=1$，$C=-\frac{5}{3}$，$D=0$.

于是，

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx \\
&=\int\left(\frac{\frac{5}{3}x+1}{x^2+1}+\frac{-\frac{5}{3}x}{x^2+4}\right)dx \\
&=\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+\text{arc tg}x+C.
\end{aligned}$$

本题如不直接用待定系数法将被积函数进行分解，而使用其它技巧，也可有更简单的方法. 事实上，

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx \\
&=\int \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}dx+5\int \frac{xdx}{(x^2+4)(x^2+1)} \\
&=\int \frac{dx}{x^2+1}+\frac{5}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+4)(x^2+1)} \\
&=\text{arc tg}x+\frac{5}{6}\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)d(x^2) \\
&=\text{arc tg}x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C.
\end{aligned}$$

**1877.** $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

**解** 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，通分

后应有

$$1 \equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$；$C=\frac{1}{2}$.

于是，

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

1878. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

**解** 由于 $\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

$$=\frac{(x^2-4x+5)-(x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$

$$=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5},$$

于是，

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{x-2}-\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1}$$

$$=-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arc\,tg}(x-2)+C.$$

本题若用待定系数法，较麻烦一些，也可获得同样的结果，此处从略.

1879. $\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

**解** 设 $\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$，通分后应有

$$x\equiv A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)$$
$$+(Cx+D)(x-1)^2.$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & A+B-2C+D=0, \\ x^1 & 2B+C-2D=1, \\ x^0 & -2A+2B+D=0. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{25}$，$B=\frac{1}{5}$，$C=-\frac{1}{25}$，$D=-\frac{8}{25}$.

于是，

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{25(x-1)}+\frac{1}{5(x-1)^2}-\frac{x+8}{25(x^2+2x+2)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$$

$$-\frac{7}{25}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\ln(x^2+2x+2)$$

$$-\frac{7}{25}\text{arc tg}(x+1)+C$$

$$=\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{5(x-1)}$$

$$-\frac{7}{25}\text{arc tg}(x+1)+C.$$

1880. $\int\frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

**解** 设 $\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

通分后应有

$$1\equiv A(x+1)(1+x+x^2)+Bx(1+x+x^2)$$
$$+x(x+1)(Cx+D).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & 2A+B+C+D=0, \\ x^1 & 2A+B+D=0, \\ x^0 & A=1. \end{array}$$

由此，$A=1,B=-1,C=0,D=-1$.

于是，

$$\int\frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+x^2}\right)dx$$

$$= \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

本题也可以不用待定系数法.事实上,

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$= \frac{1}{(x+x^2)(1+x+x^2)}$$

$$= \frac{1}{x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^2}.$$

1881. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

**解** 设 $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$,通分后应有

$$1 \equiv A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此,$A=\frac{1}{3}$,$B=-\frac{1}{3}$,$C=\frac{2}{3}$,

于是,

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \int\left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

1882. $\int\frac{xdx}{x^3-1}$.

**解** 设$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$,通分后应有

$$x\equiv A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & A-B+C=1, \\ x^0 & A-C=0 \end{array}$$

由此,$A=\frac{1}{3}$,$B=-\frac{1}{3}$,$C=\frac{1}{3}$.

于是,

$$\int\frac{x}{x^3-1}dx=\int\left(\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

1883. $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

**解** $\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

本题若用待定系数法，则较麻烦. 从略.

1884. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

**解** 本题如用待定系数法来作，主要步骤如下：

设 $\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$,

则经计算可求得 $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$D = \frac{1}{2}$. 于是，

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx$$

$$+ \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)]$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+C.$$

如应用下列解法，则更简单些.

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^{*)}$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1^{**)}}{x^2+x\sqrt{2}+1}+C_1,$$

注意到 $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$，最后即得

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+C.$$

*) 利用 1712 题的结果.

**) 利用 1713 题的结果.

1885. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

$$+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+C.$$

如不用待定系数法解本题，则更简单些，解法与上题类似：

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+C.$$

1886. $\int\frac{dx}{x^6+1}$.

**解** 本题如用待定系数法来作，运算较麻烦，经计算可得

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3(x^2+1)}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}$$

$$+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1},$$

积分步骤与 1884 题与 1885 题完全类似，不再详解，其结果为$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^3)$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

本题如不用待定系数法来作，则更简单些. 下面列举两种解法：

解法一：

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^4-1}{x^6+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+(x^4-x^2+1)}{x^6+1}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^6+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^3)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-\sqrt{3}+1}$$

$$+C.$$

解法二：

仿照 1881 题的分解法，可得

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{x^2-2}{3(x^4-x^2+1)}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{(x^2-2)dx}{x^4-x^2+1}$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{6}\int \frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx$$

$$+ \frac{1}{3}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{6}\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{6}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1} + C.$$

两种答案形式不同，实质上是一致的.

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

**解** 设$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{A}{x+1}$

$$+ \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1},$$

通分后应有

$$1 \equiv A(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1) + B(x^2+1)$$
$$(x^2-x+1) + (Cx+D)(x+1)^2(x^2-$$
$$x+1) + (Ex+F)(x+1)^2(x^2+1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 & A+C+E=0, \\
x^4 & B+C+D+2E+F=0, \\
x^3 & A+D+2E+2F-B=0, \\
x^2 & A+2B+C+2E+2F=0, \\
x^1 & -B+C+D+E+2F=0, \\
x^0 & A+B+D+F=1.
\end{array}
$$

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=\frac{1}{6}$，$C=0$，$D=\frac{1}{2}$，$E=-\frac{1}{3}$，$F=0$.

于是，

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} \\
&=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{6(x+1)^2}\right. \\
&\quad\left.+\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{x}{3(x^2-x+1)}\right]dx \\
&=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x \\
&\quad-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x \\
&\quad-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.
\end{aligned}
$$

1888. $\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

**解** 设$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$

$$= \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1},$$

通分后应有

$$1 \equiv A(x^2+x+1)(x^2-x+1) + (Bx+C)(x-1)(x^2-x+1) + (Dx+E)(x-1)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+B+D=0, \\ x^3 & -2B+C+E=0, \\ x^2 & A+2B-2C=0 \\ x^1 & -B+2C-D=0, \\ x^0 & A-C-E=1. \end{array}$$

因此，$A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=-\frac{1}{6}, D=0, E=-\frac{1}{2}$，

于是，

$$\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$$

$$= \int \left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2-x+1)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

1889. $\int \frac{x^2dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

**解** 设 $\dfrac{x^2}{x^4+3x^3+\dfrac{9}{2}x^2+3x+1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+2x+2}$

$+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+\dfrac{1}{2}}$，通分后应有

$$x^2 \equiv (Ax+B)(x^2+x+\frac{1}{2})$$
$$+(Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & A+B+2C+D=1, \\ x^1 & \dfrac{A}{2}+B+2C+2D=0, \\ x^0 & \dfrac{B}{2}+2D=0. \end{array}$$

由此，$A=\dfrac{4}{5}$，$B=\dfrac{12}{5}$，$C=-\dfrac{4}{5}$，$D=-\dfrac{3}{5}$.

于是，

$$\int \frac{x^2dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$$

$$=\int\left[\frac{4(x+3)}{5(x^2+2x+2)}-\frac{4x+3}{5(x^2+x+\frac{1}{2})}\right]dx$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2}+\frac{8}{5}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$-\frac{2}{5}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}} + \frac{8}{5}\operatorname{arctg}(x+1)$$

$$- \frac{2}{5}\operatorname{arctg}(2x+1) + C.$$

1890. 在什么条件下，积分

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$$

为有理函数？

**解** 设$\dfrac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x-1} + \dfrac{E}{(x-1)^2}$,

通分后应有

$$ax^2+bx+c \equiv Ax^2(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + C(x-1)^2 + Dx^3(x-1) + Ex^3.$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+D=0, \\ x^3 & -2A+B-D+E=0, \\ x^2 & A-2B+C=a \\ x^1 & B-2C=b, \\ x^0 & C=c. \end{array}$$

由此，$A=a+2b+3c$，$B=b+2c$，$C=c$，

$$D=-(a+2b+3c),\ E=a+b+c.$$

当 $A=D=0$，即 $a+2b+3c=0$ 时，积分

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$$

为有理函数.

利用奥斯特洛格拉得斯基方法*，计算积分：

1891. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

**解** $Q=(x-1)^2(x+1)^3$,

$$Q_1=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1,$$

$$Q_2=(x-1)(x+1)=x^2-1.$$

设 $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}$

$$=\left(\frac{Ax^2+Bx+c}{x^3+x^2-x-1}\right)'+\frac{Dx+E}{x^2-1},$$ 从而

$$x\equiv(2Ax+B)(x-1)(x+1)-(3x-1)\cdot(Ax^2+Bx+C)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2.$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

---

* 所谓奥氏方法，是指关于有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分，可以借助代数方法来分离成一个真分式与另一个真分式积分的和，使得在新的被积真分式函数中，其分母次数达到最低状态，也即在公式

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (1)$$

中，如果 $P(x)$，$Q(x)$ 已知，且设分母 $Q(x)$ 可以分解成一次与二次类型的实因式：

$$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots,$$

其中 $k,\cdots,m,\cdots$ 是自然数．在公式(1)的右端分母已知，形如：

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots,$$

$$Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots,$$

且满足 $Q_1(x)\cdot Q_2(x)=Q(x)$．而 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 为相应比 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 更低次的多项式，一般可用待定系数法求得．这种利用公式(1)来求积分的方法，就是所谓的奥斯特洛格拉得斯基方法．详细可以参见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著(北大译)，微积分学教程，第二卷一分册，第264目．　——《题解》编者注

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 & D=0, \\
x^3 & -A+D+E=0, \\
x^2 & A-2B-D+E=0, \\
x^1 & -2A-3C+B-D-E=1, \\
x^0 & -B+C-E=0.
\end{array}
$$

由此，$A=-\frac{1}{8}$，$B=-\frac{1}{8}$，$C=-\frac{1}{4}$，$D=0$，

$E=-\frac{1}{8}$.

于是，

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} \\
&= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2-1} \\
&= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.
\end{aligned}
$$

1892. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

**解** $Q=(x+1)^2(x^2-x+1)^2$,

$Q_1=Q_2=x^3+1$.

设$\frac{1}{(x^3+1)^2}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)'+$

$\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$，从而

$$
\begin{aligned}
1 = &(2Ax+B)(x^3+1)-3x^2(Ax^2+Bx+C) \\
&+(Dx^2+Ex+F)(x^3+1).
\end{aligned}
$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & E=0, \\
x^4 & -A+F=0, \\
x^3 & -2B+2E=0, \\
x^2 & 3A-3C+2F=0, \\
x^1 & 2B-4D+E=0, \\
x^0 & C+F=1.
\end{array}$$

由此，$A=\frac{3}{8}$，$B=0$，$C=\frac{5}{8}$，$D=0$，$E=0$，$F=\frac{3}{8}$.

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^3}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C.$$

1894. $\int\frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

**解** $Q=(x^2+2x+2)^2$，$Q_1=Q_2=x^2+2x+2$.

设 $\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}\right)'+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$，

从而

$$x^2\equiv A(x^2+2x+2)-2(x+1)(Ax+B)$$
$$+(Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较 等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & C=0, \\
x^2 & -A+2C+D=1, \\
x^1 & -2B+2C+2D=0, \\
x^0 & 2A-2B+2D=0.
\end{array}$$

由此，$A=0$，$B=1$，$C=0$，$D=1$.

于是，

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$+\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$= \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

本题如不用奥斯特洛格拉得斯基方法，则更容易得出上述结果. 事实上，

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} - \int \frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C.$$

1895. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

**解** $Q=(x^4+1)^2, Q_1=Q_2=x^4+1$,

设 $\frac{1}{(x^4+1)^2} = \left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1}\right)'$

$+\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}$，从而

$$1 \equiv (3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1)-4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(Ex^3+Fx^2+Gx+H)(x^4+1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$
\begin{array}{l|l}
x^7 & E = 0, \\
x^6 & -A + F = 0, \\
x^5 & -2B + G = 0, \\
x^4 & -3C + H = 0, \\
x^3 & -4D + E = 0, \\
x^2 & 3A + F = 0, \\
x^1 & 2B + G = 0, \\
x^0 & C + H = 1.
\end{array}
$$

由此，$A = 0, B = 0, C = \frac{1}{4}, D = 0, E = 0, F = 0,$

$G = 0, H = \frac{3}{4}.$

于是，

$$\int \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^4+1}$$

$$= \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}}\ln \frac{x^2 + x\sqrt{2}+1}{x^2 - x\sqrt{2}+1}$$

$$- \frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}{}^{*)} + C$$

*) 利用 1884 题的结果.

**1896.** $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx.$

**解** $Q = (x-1)(x^2+x+1)^2, Q_1 = x^2+x+1,$

$Q_2 = (x-1)(x^2+x+1).$

设 $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'$

$+ \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-1)(x^2+x+1)}$，从而

$$x^2+3x-2\equiv A(x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)$$
$$\cdot(Ax+B)(x-1)+(Cx^2+Dx+E)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^4 & C=0, \\ x^3 & -A+C+D=0, \\ x^2 & A-2B+C+D+E=1, \\ x^1 & A+B+D+E=3, \\ x^0 & -A+B+E=-2. \end{array}$$

由此，$A=\frac{5}{3}$，$B=\frac{2}{3}$，$C=0$，$D=\frac{5}{3}$，$E=-1$.

再将 $\dfrac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ 分解，可得

$$\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{9(x-1)}$$
$$-\frac{2x-11}{9(x^2+x+1)}.$$

于是，

$$\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$$
$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}$$
$$-\frac{1}{9}\int\frac{2x-11}{x^2+x+1}dx$$
$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\ln|x-1|$$
$$-\frac{1}{9}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{4}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

$$+ \frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

1897. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

**解** $Q=(x^4-1)^3, Q_1=(x^4-1)^2, Q_2=x^4-1$.

设 $\frac{1}{(x^4-1)^3} = \left(\frac{P(x)}{(x^4-1)^2}\right)' + \frac{P_1(x)}{x^4-1}$，其中

$$P(x) = Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3$$
$$+Fx^2+Gx+H,$$
$$P_1(x) = A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1.$$

从而利用待定系数法，解出 $A=0$，$B=0$，$C=\frac{7}{32}$，$D=0$，$E=0$，$F=0$，$G=-\frac{11}{32}$，$H=0$，$A_1=0$，$B_1=0$，$C_1=0$，$D_1=\frac{21}{32}$.

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^4-1)^3} = \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{32}\int\frac{dx}{x^4-1}$$

$$= \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{21}{64}\operatorname{arctg}x^{*)} + C.$$

*) 利用 1883 题的结果.

分出下列积分的代数部分：

1898. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$.

**解** 设 $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$

$$= \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^4 + x^2 + 1}$$
$$+ \int \frac{A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

上述等式右端的积分为非代数部分，因此，只需要求出 $A$、$B$、$C$、$D$ 就可以了. 等式两端求导并通分，得

$$x^2 + 1 \equiv (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^4 + x^2 + 1)$$
$$- (4x^3 + 2x)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$$
$$+ (A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1)(x^4 + x^2 + 1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，解出 $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{3}$, $D = 0$, $A_1 = 0$, $B_1 = \frac{1}{6}$, $C_1 = 0$, $D_1 = \frac{2}{3}$. 因此，所求积分的代数部分为

$$\frac{x^3 + 2x}{6(x^4 + x^2 + 1)}.$$

1899[+]. $\int \frac{dx}{(x^3 + x + 1)^3}$.

**解** 设$\int \frac{dx}{(x^3 + x + 1)^3}$

$$= \frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{(x^3 + x + 1)^2}$$
$$+ \int \frac{Gx^2 + Hx + L}{x^3 + x + 1} dx.$$

对上述等式两端求导再通分，得

$$1 \equiv (5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E)$$
$$(x^3 + x + 1) - 2(3x^2 + 1)(Ax^5 + Bx^4$$
$$+ Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) + (Gx^2 + Hx + L)$$
$$(x^3 + x + 1)^2.$$

比较等式两端$x$的同次幂系数，解出$A=-\frac{243}{961}$，$B=\frac{357}{1922}$，$C=-\frac{405}{961}$，$D=-\frac{315}{1922}$，$E=\frac{156}{961}$，$F=-\frac{224}{961}$，$G=0$，$H=-\frac{243}{961}$，$L=\frac{357}{961}$. 因此，所求积分的代数部分为

$$-\frac{486x^5-357x^4+810x^3+315x^2-312x+448}{1922(x^3+x+1)^2}$$

1900. $\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx.$

**解** 设$\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx$

$$=\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}+\int\frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M}{x^5+x+1}dx.$$

对上述等式两端求导再通分，得

$$4x^5-1\equiv(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)(x^5+x+1)-(5x^4+1)(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)+(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M)(x^5+x+1).$$

比较等式两端$x$的同次幂系数，解出$A=0$，$B=0$，$C=0$，$D=-1$，$E=0$，$F=0$，$G=0$，$H=0$，$L=0$，$M=0$. 因此，所求积分的代数部分为

$$-\frac{x}{x^5+x+1}\text{（全部积分）}.$$

1901. 计算积分

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

**解** $Q=x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$，

$$Q_1 = Q_2 = x^2 + x + 1.$$

设 $\dfrac{1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$

$$= \left(\frac{Ax + B}{x^2 + x + 1}\right)' + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1},$$ 从而

$$1 \equiv A(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(Ax + B)$$
$$+ (Cx + D)(x^2 + x + 1).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，解出 $A = \frac{2}{3}$，$B = \frac{1}{3}$，$C = 0$，$D = \frac{2}{3}$. 于是，

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$$
$$= \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$
$$= \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2}{3}\int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$
$$= \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

1902⁺. 在甚么条件下，积分

$$\int \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2} dx$$

为有理函数？

**解** (1) 当 $a \neq 0$ 且 $b^2 - ac = 0$ 时，$ax^2 + 2bx + c = a(x - x_0)^2$，其中 $x_0$ 为实数. 此时

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2}$$

$$= \frac{\alpha(x-x_0)^2 + 2\alpha x_0(x-x_0) + \alpha x_0^2 + 2\beta(x-x_0) + 2\beta x_0 + \gamma}{a^2(x-x_0)^4}$$

$$= \frac{\alpha}{a^2(x-x_0)^2} + \frac{2\alpha x_0 + 2\beta}{a^2(x-x_0)^3} + \frac{\alpha x_0^2 + 2\beta x_0 + \gamma}{a^2(x-x_0)^4}$$

从而积分为有理函数.

(2) 当 $a \neq 0$ 且 $b^2 - ac \neq 0$ 时,则设

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$

$$= \left(\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c)}\right)' + \frac{Cx+D}{ax^2+2bx+c},$$

从而

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \equiv A(ax^2+2bx+c) - (2ax+$$

$$2b)$$

$$(Ax+B) + (Cx+D)(ax^2+2bx+c).$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数,可解得 $C = 0$.

$D = \dfrac{2b\beta - a\gamma - c\alpha}{2(b^2 - ac)}$. 从而当 $a\gamma + c\alpha = 2b\beta$ 时 $D = 0$,此时积分为有理函数.

(3) 当 $a = 0, b \neq 0$ 时,

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$

$$= \frac{\alpha\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{\alpha c}{b}\left(x+\frac{c}{2b}\right) + \frac{\alpha c^2}{4b^2} + 2\beta\left(x+\frac{c}{2b}\right) - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2}$$

$$= \frac{\alpha}{4b^2} + \frac{2\beta - \frac{\alpha c}{b}}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)} + \frac{\frac{\alpha c^2}{4b^2} - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2}.$$

1905. $\int \frac{x^3dx}{x^8+3}$.

**解** $$\int \frac{x^3dx}{x^8+3} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2+3}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx$.

**解** $$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^3+1}$$
$$= \frac{1}{3}\text{arc tg}(x^3) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)\right)^{*)} + C$$
$$= \frac{1}{3}\text{arc tg}(x^3) + \frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

*) 利用 1881 题的结果.

1907. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx$.

**解** $$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx = \int \frac{\left(1-\frac{3}{x^4}\right)dx}{x^5\left(1+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^8}\right)}$$
$$= \int \frac{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{x^4}\right)d\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{2}{x^8}+\frac{3}{x^4}+1}$$
$$= -\frac{1}{4}\int\left(\frac{5}{\frac{2}{x^4}+1} - \frac{4}{\frac{1}{x^4}+1}\right)d\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$= -\frac{5}{8}\ln\left(\frac{2}{x^4}+1\right)+\ln\left(\frac{1}{x^4}+1\right)+C$$

$$= \frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-\ln\frac{x^4}{x^4+1}+C.$$

1908. $\int\frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}$.

解 $\int\frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}$

$$= \frac{1}{5}\int\frac{d(x^5)}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}$$

$$= \frac{1}{200}\int\frac{[x^5+\sqrt{10})-(x^5-\sqrt{10})]^2}{[x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}d(x^5)$$

$$= \frac{1}{200}\int\left(\frac{1}{x^5-\sqrt{10}}-\frac{1}{x^5+\sqrt{10}}\right)^2d(x^5)$$

$$= \frac{1}{200}\int\frac{d(x^5-\sqrt{10})}{(x^5-\sqrt{10})^2}-\frac{1}{100}\int\frac{d(x^5)}{(x^5)^2-10}$$

$$+\frac{1}{200}\int\frac{d(x^5+\sqrt{10})}{(x^5+\sqrt{10})^2}$$

$$= -\frac{1}{200(x^5-\sqrt{10})}-\frac{1}{200\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|$$

$$-\frac{1}{200(x^5+\sqrt{10})}+C$$

$$= -\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)+C.$$

1909. $\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$.

解 $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^8d(x^4)}{(x^4+1)(x^4+2)}$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-\frac{3x^4+2}{(x^4+1)(x^4+2)}\right)d(x^4)$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1 + \frac{1}{x^4+1} - \frac{4}{x^4+2}\right)d(x^4)$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4} + C.$$

1910. $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

**解** $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{x^5 d(x^5)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{(x^5+1)d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2} - \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{d[(x^5+1)^2+1]}{[(x^5+1)^2+1]^2} - \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$$

$$= -\frac{1}{10[(x^5+1)^2+1]} - \frac{1}{5}\left\{\frac{x^5+1}{2[(x^5+1)^2+1]} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x^5+1)\right\}^{*)} + C$$

$$= \frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10}\operatorname{arc\,tg}(x^5+1) + C.$$

*） 利用 1817 题的结果.

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$.

**解** 当 $n \neq 0$ 时，

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \int \frac{x^n \cdot x^{n-1}dx}{x^n+1}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{x^n d(x^n)}{x^n+1}$$

$$= \frac{1}{n}\int\left(1 - \frac{1}{x^n+1}\right)d(x^n)$$

$$= \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1| + C;$$

当 $n = 0$ 时，

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln|x| + C.$$

1912. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx.$

**解** 当 $n \neq 0$ 时,

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx = \int \frac{x^{2n}\cdot x^{n-1}dx}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{x^{2n}d(x^n)}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{(x^{2n}+1)-1}{(x^{2n}+1)^2}d(x^n)$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{d(x^n)}{x^{2n}+1} - \frac{1}{n}\int \frac{d(x^n)}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\text{arc tg}(x^n) - \frac{1}{n}\Big(\frac{x^n}{2(x^{2n}+1)}$$

$$+ \frac{1}{2}\text{arctg}(x^n)\Big)^{*)} + C$$

$$= \frac{1}{2n}\Big(\text{arc tg}(x^n) - \frac{x^n}{x^{2n}+1}\Big) + C.$$

当 $n = 0$ 时,

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\ln|x| + C.$$

*) 利用 1817 题的结果.

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$

**解** $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+2}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{20}\int \frac{d(x^{10}+2)}{x^{10}+2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{20}\ln(x^{10}+2) + C$$

$$= \frac{1}{20}\ln \frac{x^{10}}{x^{10}+2} + C.$$

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

**解** 由于

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)^2} = \frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(x^{10}+1)} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},$$

所以

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}\right)dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}+1} - \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{10}\ln(x^{10}+1) + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C$$

$$= \frac{1}{10}\ln \frac{x^{10}}{x^{10}+1} + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + C.$$

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$.

**解** $$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{2x^6}{1+x^7}\right)dx$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{7}\int \frac{d(1+x^7)}{1+x^7}$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{7}\ln|1+x^7| + C$$

$$= \frac{1}{7}\ln \frac{|x|^7}{(1+x^7)^2} + C.$$

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx$.

**解** $\int \frac{x^4 - 1}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)} dx$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5 - 5x)}{(x^5 - 5x)(x^5 - 5x + 1)}$$

$$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{x^5 - 5x} - \frac{1}{x^5 - 5x + 1}\right) d(x^5 - 5x)$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5 - 5x)}{x^5 - 5x} - \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5 - 5x + 1)}{x^5 - 5x + 1}$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4 - 5)}{x^5 - 5x + 1}\right| + C.$$

1917. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$

**解** 由于

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2 - x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1}\right),$$

所以

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} + C.$$

1918. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$

解 $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$

$$= \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1}$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1}$$

$$= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln \frac{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln \frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}+C.$$

1919. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx.$

解 $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)^2-1}{(x^2)^4+1}d(x^2)$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln \frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1^{*)}}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}+C.$$

*） 利用 1713 题的结果.

1920. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

**解** $\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int\frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1}dx$

$$=\int\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx+\int\frac{x^2dx}{x^6+1}$$

$$=\int\frac{1}{x^2+1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}$$

$$=\mathrm{arctg}x+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3)+C.$$

1921. 试导出计算积分

$$I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}(a\neq 0)$$

的递推公式.

利用这个公式计算

$$I_3=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

**解** 由于

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)$$

$=t^2+\Delta$,其中 $t=2ax+b,\Delta=4ac-b^2$. 于是

$$I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{(4a)^n dx}{[(2ax+b)^2+\Delta]^n}$$

$$=2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}.$$

当 $\Delta\neq 0$ 时,对于积分 $\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$ 施用分部积分法,即有

$$\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{t^2dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}}$$

$$=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{(t^2+\Delta)-\Delta}{(t^2+\Delta)^{n+1}}dt$$

$$=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}-2n\Delta\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}}.$$

若令 $\overline{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$，则得

$$\overline{I}_n = \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n\overline{I}_n - 2n\Delta\overline{I}_{n+1},$$

或 $$\overline{I}_{n+1} = \frac{1}{2n\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \overline{I}_n,$$

从而 $$\overline{I}_n = \frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta}\overline{I}_{n-1}.$$

代入 $I_n$，即得

$$\begin{aligned} I_n &= 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \cdot \left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \overline{I}_{n-1}\right\} \\ &= 2^{2n-1} \cdot a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(4a)^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{2a}{(4a)^{n-1}}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right\} \\ &= \frac{1}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1}, \end{aligned}$$

最后得递推公式

$$I_n = \frac{1}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1}.$$

当 $\Delta = 0$ 时，则有

代入 $I$，即得

$$I=\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}dt\quad(a\neq b).$$

将 $(1-t)^{m+n-2}$ 展开，即可分项积分求得 $I$.

如果 $b=a$，则

$$I=\int\frac{dx}{(x+a)^{m+n}}=\frac{1}{1-m-n}(x+a)^{1-m-n}+C.$$

令 $a=-2,b=3,m=2$ 及 $n=3$，并设 $t=\frac{x-2}{x+3}$，即得

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}\\&=\frac{1}{5^4}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}dt\\&=\frac{1}{5^4}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}+3-t\right)dt\\&=\frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t}-3\ln|t|+3t-\frac{t^2}{2}\right)+C\\&=\frac{1}{625}\left[-\frac{x+3}{x-2}-3\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+\frac{3(x-2)}{x+3}\right.\\&\quad\left.-\frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2}\right]+C.\end{aligned}$$

**1923.** 若 $P_n(x)$ 为 $x$ 的 $n$ 次多项式，计算

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx.$$

**解** 由于 $P_n(x)$ 为 $x$ 的 $n$ 次多项式，故得

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

其中 $P_n^{(0)}(a)=P_n(a)$，$0!=1$.

于是，

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}P_n^{(k)}(a)\int \frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}$$

$$+ \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\int \frac{dx}{x-a}$$

$$= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}$$

$$+ \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\ln|x-a| + C,$$

其中$\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} = a_0$ 为 $P_n(x)$ 的首项系数，即

$$P_n(x) = a_0(x-a)^n + a_1(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$+ a_{n-1}(x-a) + a_n.$$

1924$^+$. 设 $R(x) = R^*(x^2)$，其中 $R^*$ 为有理函数，则函数 $R(x)$ 分解为有理分式时有甚么特性?

**解** 设 $R^*(x) = P(x) + H(x)$，

其中 $P(x)$ 是多项式；若 $R^*(x)$ 本身也为多项式时，则 $H(x) \equiv 0$；否则 $H(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是真分式，而 $P_1(x)$，$Q_1(x)$ 也均为多项式.

设 $Q_1(x)$ 有非负实根为 $a_i^2$，其重数为 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, m)$；负根为 $-b_k^2$，其重数为 $\beta_k (k = 1, 2, \cdots, t)$；二次因式为 $x^2 + C_p x + D_p$，其重数为 $\gamma_p (p = 1, 2, \cdots, s)$. 其中 $C_p^2 - 4D_p < 0$，于是，

$$Q_1(x)=\begin{cases} a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)_{ai}\cdot\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}\cdot\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px \\ \quad +D_p)^{\gamma_p},\text{当}m\neq 0,t\neq 0,s\neq 0\text{ 时;} \\ a_0\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}\cdot\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\gamma_p}, \\ \quad \text{当}m=0,t\neq 0,s\neq 0\text{ 时;} \\ a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{a_i}\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\gamma_p}, \\ \quad \text{当}m\neq 0,t=0,s\neq 0\text{ 时;} \\ a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{a_i}\cdot\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}, \\ \quad \text{当}m\neq 0,t\neq 0,s=0\text{ 时;} \\ a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{a_i},\text{当}m\neq 0,t=0,s=0\text{ 时;} \\ a_0\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k},\text{当}m=0,t\neq 0,s=0\text{ 时;} \\ a_0\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\gamma_p},\text{当}m=0,t=0,s\neq 0\text{ 时;} \end{cases}$$

以下就 $Q_1(x)$ 表达式中的第一种情形予以论证.

由 $C_p^2-4D_p<0$,必有

$x^4+C_px^2+D_p=(x^2+E_px+F_p)\cdot(x^2-E_px+F_p)$ $(p=1,2,\cdots,s)$,则此时有

$$Q_1(x^2)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{ai}(x+a_i)^{a_i}\cdot\prod_{k=1}^{t}(x^2+b_k^2)^{\beta_k}$$

$$\cdot\prod_{p=1}^{s}(x^2+E_px+F_p)^{\gamma_p}(x^2-E_px+F_p)^{\gamma_p},\text{以及}$$

$$H(x^2)=\frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{a_i}\left[\frac{A_{it}}{(a_i-x)^t}+\frac{A'_{it}}{(a_i+x)^t}\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{t=1}^{\beta_k}\frac{B_{kt}x+C_{kt}}{(x^2+b_k^2)^t}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{t=1}^{\gamma_p}\left[\frac{M_{pt}x+N_{pt}}{(x^2+E_px+F_p)^t}\right.$$

$$\left.+\frac{M'_{pt}x+N'_{pt}}{(x^2-E_px+F_p)^t}\right].$$

显然有 $H(x^2)=H((-x)^2)$，由 $H(x^2)$ 的分解式的唯一性，比较系数，即得常数关系为：

$A'_{it_1}=A_{it_1},M'_{pt_2}=-M_{pt_2},N'_{pt_2}=N_{pt_2},B_{kt_3}=0$，

$(t_1=1,2,\cdots,a_i,i=1,2,\cdots,m;t_2=1,2,\cdots,\gamma_p,p=1,2,\cdots,s;t_3=1,2,\cdots,\beta_k,k=1,2,\cdots,t)$. 最后得

$R(x)=P(x^2)+H(x^2)=$

$$=P(x^2)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{a_i}A_{it}\left[\frac{1}{(a_i-x)^t}+\frac{1}{(a_i+x)^t}\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{t=1}^{\beta_k}\frac{C_{kt}}{(x^2+b_k^2)^t}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{t=1}^{\gamma_p}\left[\frac{M_{pt}x+N_{pt}}{(x^2+E_px+F_p)^t}\right.$$

$$\left.-\frac{M_{pt}x-N_{pt}}{(x^2-E_px+F_p)^t}\right].$$

如若 $H(x)\neq 0$，而 $m=0$，但 $t\neq 0,s\neq 0$ 时，则在上述表达式中就应缺乏第二项的和式，形如

$$R(x)=P(x^2)+\sum_{k=1}^{t}\sum_{t=1}^{\beta_k}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{t=1}^{\gamma_p},$$

其它情形可以类似推演，此处不再一一细叙。至于当 $H(x)\equiv 0$ 时，当然有 $R(x)=P(x^2)$.

另外，本题也可在复数域上作分解考虑.

仍记 $R^*(x)=P(x)+H(x)$，其中 $P(x)$ 为多项

式，而 $H(x)$ 要么是零（当 $R^*(x)$ 为多项式时），要么是一个真分式，例如 $H(x)\not\equiv 0$ 时，记 $H(x)=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是其真分式. $P_1(x)$, $Q_1(x)$ 为多项式. 若记 $Q_1(x)$ 在复数域中的根为 $a_i$，其相应重数记为 $n_i(i=1,2,\cdots,m$；显然 $m\geqslant 1)$. 即

$$Q_1(x)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{n_i},$$

那么 $Q_1(x^2)$ 中的每一项 $x^2-a_i$ 可分解为一次式乘积

$$x^2-a_i=(x-b_i)(x+b_i),$$

于是

$$Q_1(x^2)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-b_i)^{n_i}(x+b_i)^{n_i}.$$

相应地有

$$H(x^2)=\frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\Big[\frac{B_{ik}}{(x-b_i)^k}+\frac{B'_{ik}}{(x+b_i)^k}\Big],$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\Big[\frac{A_{ik}}{(x-b_i)^k}+\frac{A'_{ik}}{(x+b_i)^k}\Big].$$

由 $H(x^2)=H((-x)^2)$，从 $H(x^2)$ 的分解式的唯一性，比较系数，即得 $A'_{ik}=A_{ik}(k=1,2,\cdots,n_i;i=1,2,\cdots,m)$. 最后得到

$$R(x)=P(x^2)+H(x^2)=P(x^2)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}$$

$\Big[\dfrac{A_{ik}}{(b_i-x)^k}+\dfrac{A_{ik}}{(b_i+x)^k}\Big]$，其中 $b_i$ 为分母 $Q_1(x^2)$ 的根，$A_{ik}$ 为常系数.

1925. 计算

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

式中 $n$ 为正整数.

**解** 先将被积函数分解成部分分式之和，我们可以证明

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1}.$$

事实上，记多项式 $x^{2n}+1$ 的 $2n$ 个根为 $a_k(k=1,2,\cdots,2n)$，显然 $a_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi + j\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$，其中 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位.

于是，$|a_k| = 1, a_k^{2n} = -1, \bar{a}_k = a_{2n-k+1}$，

$$a_k \cdot \bar{a}_k = 1, a_k + \bar{a}_k = 2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

设 $\frac{1}{1+x^{2n}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{x-a_k}$

即 $1 = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x-a_k}$

令 $x \to a_i$ 并应用洛比塔法则，即得

$$1 = \lim_{x\to a_i}\sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x-a_k} = \lim_{x\to a_i}\frac{A_i(1+x^{2n})}{x-a_i}$$

$$= \lim_{x\to a_i}(2nA_i x^{2n-1})$$

$$= 2nA_i \cdot \frac{a_i^{2n}}{a_i} = -\frac{2nA_i}{a_i}(i = 1,2,\cdots,2n),$$

即 $A_k = -\frac{a_k}{2n}(k = 1,2,\cdots,2n).$

于是，

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{a_k}{x-a_k}$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{x-a_k}+\frac{\bar{a}_k}{x-\bar{a}_k}\right)$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+\bar{a}_k)x-2a_k\bar{a}_k}{x^2-(a_k+\bar{a}_k)x+a_k\cdot\bar{a}_k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

最后得到

$$\int\frac{dx}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cdot$$

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\int\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}dx\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\right.$$

$$\left.\int\frac{dx}{\left(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cdot$$

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]+C.$$

## §3. 无理函数的积分法

化被积函数为有理函数，以求下列积分：

1926. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

**解** 设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2, dx=2tdt$.

代入得

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{tdt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=2[t-\ln(1+t)]+C=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

1927. $\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

**解** 设 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6, dx=6t^5dt$.

代入得

$$\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$$

$$=6\int\frac{dt}{t(1+2t^3+t^2)}$$

$$=6\int\frac{dt}{t(1+t)(2t^2-t+1)}$$

$$=6\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)}\right)dt$$

$$= 6\left\{\ln t - \frac{1}{4}\ln(1+t) - \frac{3}{8}\int \frac{4t-1}{2t^2-t+1}dt\right.$$

$$\left. - \frac{1}{16}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{4}\right)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\right\}$$

$$= 6\left\{\ln|t| - \frac{1}{4}\ln|1+t| - \frac{3}{8}\ln(2t^2-t+1)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right\} + C$$

$$= \frac{3}{4}\ln\frac{t^8}{(1+t)^2(2t^2-t+1)^3}$$

$$- \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C$$

$$= \frac{3}{4}\ln\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)^3}$$

$$- \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.$$

1928[+]. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx.$

**解** 设 $\sqrt[3]{2+x}=t$,则 $x=t^3-2, dx=3t^2dt.$ 代入得

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx = 3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt$$

$$= 3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3+t-2}\right)dt$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 3\int\left[-\frac{1}{4(t-1)}+\frac{\frac{5}{4}t-\frac{1}{2}}{t^2+t+2}\right]dt$$

$$= 4\int\left[\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3}\right]dt$$

$$= -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} + C$$

$$= \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + C.$$

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx.$

**解** 设$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$，则

$$x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt.$$

代入得

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}dx$$

$$= -4\int \frac{tdt}{(t-1)(t+1)^3}$$

$$= \int\left[-\frac{2}{(t+1)^3} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2(t+1)}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2(t-1)}\right]dt$$

$$= \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C.$$

如果不限制将被积函数化为有理函数，本题的解法可简单些.事实上，

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$$

$$=\int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)}dx$$

$$=\int (x-\sqrt{x^2-1})dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

**解** 设 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$，则

$$x=\frac{t^3+1}{t^3-1},dx=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=-\frac{3}{2}\int dt=-\frac{3}{2}t+C$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

1933. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\quad(a>0)$.

**解** 设 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}=t$，则 $x=\frac{a}{1+t^4}$.

$$dx=-\frac{4at^3}{(1+t^4)^2}dt.$$

代入得

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}}$$

$$=-4a\int\frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$=-4a\int\left(\frac{t}{(t^2-t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)}\right)^2dt$$

$$=-\frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\right)^2dt$$

$$=-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2-t\sqrt{2}+1)^2}-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2+t\sqrt{2}+1)^2}$$

$$+a\int\frac{dt}{t^4+1}.$$

现在分别求上述积分，利用 1921 题的递推公式，即得

$$\int\frac{dt}{(t^2-t\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}$$

$$+\int\frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{d\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)+C_1$$

及

$$\int\frac{dt}{(t^2+t\sqrt{2}+1)^2}$$

$$=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)} + \int \frac{d\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)} + \sqrt{2}\,\text{arc tg}(\sqrt{2}t+1) + C_2.$$

利用 1884 题的结果，即得

$$\int \frac{dt}{t^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\,\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + C_3.$$

最后得到

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = -\frac{a}{2}\left[\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)} + \frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}\right] - \frac{a\sqrt{2}}{2}\{\text{arctg}(\sqrt{2}t-1) + \text{arctg}(\sqrt{2}t+1)\} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{a}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right) + C_4$$

$$= -\frac{at^3}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} - \frac{a}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right) + C_4$$

$$= -\frac{at^3}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}\right)+C,$$

其中 $t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}\quad(0<x<a)$.

1934. $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$($n$ 为自然数).

**解** 当$a=b$时,显然被积函数为$(x-a)^{-2}$,因此积分为 $-\frac{1}{x-a}+C$;当 $a\neq b$ 时,设$\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}=t$,则

$$x=a+\frac{a-b}{t^n-1},dx=-\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}dt,$$

$$x-a=\frac{a-b}{t^n-1},x-b=\frac{(a-b)t^n}{t^n-1},$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=-\frac{n}{a-b}\int dt$$

$$=-\frac{n}{a-b}t+C$$

$$=-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

1935. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

**解** 设$\sqrt{x}=\frac{t^2-1}{2t}$ 并限制 $t>1$,则

$$x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2,dx=\frac{t^4-1}{2t^3}dt,\sqrt{x+1}=\frac{t^2+1}{2t},$$

$t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$.

代入得

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^4-1}{t^3(t+1)}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C_1$$

$$= \sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$$

$$+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C.$$

1936. 证明：若

$$p+q=kn,$$

式中 $k$ 为整数，则积分

$$\int R[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}]dx$$

（式中 $R$ 为有理函数及 $p,q,n$ 为整数）为初等函数.

**证** 当 $a=b$ 时，$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}=(x-a)^k$，则积分显然为初等函数.

当 $a\neq b$ 时，设 $\frac{x-a}{x-b}=y(\neq 1)$，则

$$x=\frac{a-by}{1-y}, dx=\frac{a-b}{(1-y)^2}dy,$$

$$x-a=\frac{(a-b)y}{1-y}, x-b=\frac{a-b}{1-y}.$$

代入得

$$\int R[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}]dx$$

$$=(a-b)\int R\left[\frac{a-by}{1-y},y^{\frac{p}{n}}\left(\frac{a-b}{1-y}\right)^k\right]\frac{dy}{(1-y)^2}.$$

再设 $\sqrt[n]{y}=t$，则 $y=t^n$，$dy=nt^{n-1}dt$. 从而上述积分化为

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

$$=n(a-b)\int R\left[\frac{a-bt^n}{1-t^n},t^p\left(\frac{a-b}{1-t^n}\right)^k\right]\frac{t^n-1}{(1-t^n)^2}dt,$$

因为被积函数为 $t$ 的有理函数，所以积分是初等函数，

求最简单二次无理式的积分：

**1937.** $\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

**解** $\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx=\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$=\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x+x^2)}{\sqrt{1+x+x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+x+x^2}\right)-\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C$$

$$=\frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C.$$

1938⁺. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$.

**解** 设 $x+1=\frac{1}{t}$，则

$x=\frac{1-t}{t}, dx=-\frac{1}{t^2}dt,$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{|t|}=sgnt\cdot\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-sgnt\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-sgnt\cdot\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_1$$

$$=-sgn(x+1)$$

$$\cdot\ln\left|\frac{1-x+2[sgn(x+1)]\cdot\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)}\right|$$

$$+C_1.$$

当 $x+1>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C;$$

当 $x+1<0$ 时，

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\ln\left|\frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{2(1+x)}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{-3(x+1)}{2(1-x+2\sqrt{x^2+x+1})}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

总之，

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

1939. $\int\frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

**解** 设$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$，则

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt,$$

$$1-x=\frac{2t^2}{1+t^2}, \sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^4}dt$$

$$=\frac{1}{6t^3}+\frac{1}{2t}+C$$

$$=\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

1940. $\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$.

**解** 设 $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$，则

$$x=\frac{t^2-2}{2(t+1)}, dx=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt,$$

$$=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+[sgn(1+x)]$$

$$\cdot\ln\left|\frac{3+x+2[sgn(x+1)]\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C_1.$$

当 $x+1>0$ 时，

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C;$$

当 $x+1<0$ 时，

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$-\ln\left|\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C_1$$

$$=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C.$$

总之，

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C.$$

以后诸题中，出现二次无理式时也会碰到用 *sgnt* 的问题，可参照 1938 题及 1941 题类似地处理. 在解这类习题时，不妨就开方后取正值求解. 如无特殊情况，今后不再另加说明.

1942. $\int\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

**解** $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx = \int \frac{(x^2-x-1)+2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

$$=-\int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$+2\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{5}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+2\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$=\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

利用公式

$$\int\frac{P_n(x)}{y}dx=Q_{n-1}(x)y+\lambda\int\frac{dx}{y},$$

式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，$P_n(x)$ 为 $n$ 次多项式，$Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式及 $\lambda$ 为常数，求下列积分：

1943. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

**解** 设 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$$=(ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

两边对 $x$ 求导数，得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=(2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+\frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^3}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

从而有

$$x^3\equiv(2ax+b)(1+2x-x^2)+(ax^2+bx+c)$$
$$\cdot(1-x)+\lambda.$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & -3a=1, \\ x^2 & 5a-2b=0, \\ x^1 & 2a+3b-c=0, \\ x^0 & b+c+\lambda=0. \end{array}$$

由此，$a=-\frac{1}{3}$，$b=-\frac{5}{6}$，$c=-\frac{19}{6}$，$\lambda=4$.

于是，

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}$$
$$+4\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$
$$=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}$$
$$+4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

**1944.** $\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

**解** 设 $\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx=(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5$

$+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m)\sqrt{1+x^2}$

$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$，

从而有

$$x^{10}\equiv(9ax^8+8bx^7+7cx^6+6dx^5+5ex^4+4fx^3+3gx^2+2hx+l)(1+x^2)+x(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m)+\lambda.$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{10},b=0,c=-\frac{9}{80},d=0,$$

$$e=\frac{21}{160},f=0,g=-\frac{21}{128},h=0,$$

$$l=\frac{63}{256},m=0,\lambda=-\frac{63}{256}.$$

于是，

$$\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7+\frac{1}{10}x^9\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx$.

**解** $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\frac{x^4(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$=(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

从而有

$$x^4(a^2-x^2)\equiv(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(a^2-x^2)-x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)+\lambda.$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，求得

$$A=\frac{1}{6},B=0,C=-\frac{a^2}{24},D=0,$$

$$E=-\frac{a^4}{16},F=0,\lambda=\frac{a^4}{16}.$$

于是，

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx=\left(\frac{1}{6}x^5-\frac{a^2}{24}x^3-\frac{a^4}{16}x\right)\sqrt{a^2-x^2}$$

$$+\frac{a^4}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C\ (a\neq 0).$$

1946. $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$

**解** 设 $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$

$$=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+4x+3}$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}},$$

从而有

$$x^3-6x^2+11x-6\equiv(2ax+b)(x^2+4x+3)$$

$$+(x+2)(ax^2+bx+c)+\lambda.$$

比较等式两端 $x$ 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{14}{3},c=37,\lambda=-66.$$

于是，

$$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{3}x+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}$$

$$-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C.$$

1947. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

**解** 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，这里碰到二次无理式 $\sqrt{x^2+1}$需引用 $sgnt$ 的问题，不妨设

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\ (t>0).$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=-\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$=-\int \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$=-\int \sqrt{t^2+1}dt+\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$=-\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}-\frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{t^2+1}|$$

$$+\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C.$$

1948$^+$. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

**解** 不妨设 $x=\frac{1}{t}>0$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 由 $|x|>1$ 知必有 $|t|<1$，则有

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\ (0<t<1).$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \int \frac{t(1-t^2)-t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \int t\sqrt{1-t^2}dt - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-t^2)^{\frac{1}{2}}d(1-t^2)$$

$$+\frac{1}{2}\int (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-t^2)$$

$$= -\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$= \frac{1+2x^2}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C.$$

1949$^+$. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

**解** 设 $x-1=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t>0$，则有

$$\sqrt{x^2+3x+1}=\frac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}} = -\int \frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}dt$$

$$= (at+b)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}},$$

从而

$$-t^2 \equiv a(1+5t+5t^2)+(5t+\frac{5}{2})(at+b)+\lambda.$$

比较等式两端 $t$ 的同次幂系数，求得

$$a=-\frac{1}{10}, b=\frac{3}{20}, \lambda=-\frac{11}{40}.$$

于是,

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$$

$$=\left(-\frac{t}{10}+\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}$$

$$-\frac{11}{40}\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

$$=\frac{3-2t}{20}\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C_1$$

$$=\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}$$

$$-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|$$

$$+C.$$

1950$^+$. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

**解** 设 $x+1=\frac{1}{t}$,则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 先设 $t>0$,则有

$$\sqrt{x^2+2x}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=-\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=(at^3+bt^2+ct+e)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

从而有

$$-t^4 \equiv (3at^2+2bt+c)(1-t^2)-t(at^3+bt^2+ct+e)+\lambda.$$

比较等式两端 $t$ 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{4}, b=0, c=\frac{3}{8}, e=0, \lambda=-\frac{3}{8}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=\left(\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{8}t\right)\cdot\sqrt{1-t^2}-\frac{3}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$$

再设 $t<0$，则答案前一项不改变符号，但后一项要改变符号. 因此，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}+C,$$

其中 $x>0$ 或 $x<-2$.

**1951.** 在什么条件下，积分

$$\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

是代数函数？

**解** 设 $\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$=(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

从而有

$$a_1x^2+b_1x+c_1\equiv A(ax^2+bx+c)$$

$$= -\int \frac{tdt}{\sqrt{2t^2-1}} - \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-1}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2-1}\right| + C$$

$$= \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right| + C.$$

1953. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

**解** $\int \frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$= \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2.$$

对于 $I_1$，设 $x+1=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t>0$，则有

$$\sqrt{x^2-x-1} = \frac{\sqrt{t^3-3t+1}}{t}.$$

代入 $I_1$，得

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3t+1}}$$

$$= -\ln\left|t-\frac{3}{2}+\sqrt{t^2-3t+1}\right|+C_1$$

$$= -\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|+C_2;$$

对于 $I_2$，设 $x-1=\frac{1}{t}$，同上可得

$$I_2=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right)+C_3.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right)+C.$$

1954. $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx.$

**解** $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$

$$=\int\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\int\frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$+\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}=I_1-I_2+I_3.$$

对于 $I_1$，显然有

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$+C_1;$$

对于 $I_2$,利用 1938 题的结果,即得

$$I_2=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C_2;$$

对于 $I_3$,设 $x+1=\frac{1}{t}$,则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t>0$,则有

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

代入得

$$I_3=-\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(2t-1)dt}{\sqrt{t^2-t+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-\sqrt{t^2-t+1}-\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|$$

$$+C_3$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C_4.$$

于是,最后得到

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$$

$$=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

如用下述解法更简单些：

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$$

$$=-\int\sqrt{x^2+x+1}\,d\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|^{*)}+C.$$

*） 利用 1938 题的结果.

1955. $\displaystyle\int\frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx.$

**解** $\displaystyle\int\frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$$=\int\frac{(x^3+1)-1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$

$$=\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx-\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\int \frac{1+2x-x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx+\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$+3\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}-\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\int \sqrt{2-(x-1)^2}d(x-1)$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+3\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}}-I_1$$

$$=\frac{1-x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\sqrt{1+2x-x^2}+3\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)-I_1$$

$$=-\frac{x+1}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+2\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)-I_1.$$

对于 $I_1$，设 $x+1=\frac{1}{t}$，可得

$$I_1=\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{x+1}\right)+C_1.$$

于是，最后得到

$$\int \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-2\arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right)+C.$$

1956. $\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

**解** $$\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=\int\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=\int\frac{2dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$-\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=2I_1-I_2.$$

对于 $I_1$，设 $x-2=\frac{1}{t}$，可得

$$I_1=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=-\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right)+C_1;$$

对于 $I_2$，设 $x-1=\frac{1}{t}$，可得

$$I_2=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}+C_2.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$
$$=-2\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right)-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}+C,$$

其中 $x<1$ 或 $x>3$.

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

**解** 设 $x=\sin t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,则

$$dx=\cos t dt,\ \sqrt{1-x^2}=\cos t.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

$$=\int \frac{dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)}{(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C.$$

1958. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

**解** 当 $x>1$ 时,设 $x=\sec t$,并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$,则

$$dx=\sec t\cdot \mathrm{tg}t dt,\ \sqrt{x^2-1}=\mathrm{tg}t.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{\sec t dt}{1+\sec^2 t}$$

$$=\int \frac{\cos t}{\cos^2 t+1}dt=\int \frac{d(\sin t)}{2-\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin t}{\sqrt{2}-\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

当 $x<-1$ 时，仍设 $x=\sec t$，但限制 $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$，经计算可获得同样的结果.

总之，当 $|x|>1$ 时，

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

1959. $\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

**解** 设 $x=\operatorname{tg}t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 且 $|t|\neq\frac{\pi}{4}$，则

$$dx=\sec^2 t dt,\ \sqrt{1+x^2}=\sec t.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\sec^2 t dt}{(1-\operatorname{tg}^4 t)\sec t}$$
$$=\int\frac{\cos^3 t dt}{1-2\sin^2 t}=\int\frac{1-\sin^2 t}{1-2\sin^2 t}d(\sin t)$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-2\sin^2 t}{1-2\sin^2 t}d(\sin t)+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t}$$
$$=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$
$$=\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$$
$$+C\ (|x|\neq 1).$$

1960. $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

**解** $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2+2}) + I_1.$$

对于$I_1$，设 $x = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}t$，并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$，则

$$dx = \sqrt{2}\sec^2 t dt, \sqrt{x^2+2} = \sqrt{2}\sec t.$$

代入得

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{\sec t dt}{1+2\mathrm{tg}^2 t}$$

$$= \int \frac{\cos t dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t} = \mathrm{arctg}(\sin t) + C_1$$

$$= \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right) + C_1$$

$$= -\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right) + C.$$

于是，最后得到

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$$

$$-\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right) + C.$$

化二次三项式为正则型，以计算下列积分：

**1961.** $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

**解** $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C.$$

1962. $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

**解** $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$

$$= \int \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}} dx.$$

设 $x-1=\sqrt{3}\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$，则

$dx = \sqrt{3}\cos t dt$，$\sqrt{2+2x-x^2} = \sqrt{3}\cos t$.

代入得

$$\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$= \int \frac{1+2\sqrt{3}\sin t + 3\sin^2 t}{3(1+\sin^2 t)} dt$$

$$= \int dt + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sin t}{1+\sin^2 t} dt - \frac{2}{3} \int \frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

$$= t - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\cos t)}{2-\cos^2 t} - \frac{2}{3} \int \frac{d(\operatorname{tg} t)}{1+2\operatorname{tg}^2 t}$$

$$= t - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t} \right|$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} t) + C$$

$$= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}}+C.$$

1963. $\displaystyle\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

**解** $\displaystyle\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

$$=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\sqrt{x^2+x+1}}\quad{}^{*)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C$$

$$=\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

*） 利用 1781 题的结果.

1964⁺ 利用线性分式的代换 $x=\dfrac{\alpha+\beta t}{1+t}$，计算积分：

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

**解** 线性分式的代换

$$x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$$

给出

$x^2 \pm x + 1$

$$= \frac{(\beta^2 \pm \beta + 1)t^2 + [2\alpha\beta \pm (\alpha + \beta) + 2]t + (\alpha^2 \pm \alpha + 1)}{(1 + t)^2}$$

要求　$2\alpha\beta \pm (\alpha + \beta) + 2 = 0$ 即化成正则型. 当 $\alpha + \beta = 0$ 及 $\alpha\beta = -1$ 时即得上式. 例如, 取

$$\alpha = -1, \beta = 1,$$

我们有

$$x = \frac{t-1}{1+t} \text{ 或 } t = \frac{1+x}{1-x},$$

$$dx = \frac{2dt}{(1+t)^2}, x^2 - x + 1 = \frac{t^2+3}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\sqrt{1+3t^2}}{t+1},$$

其中不妨设 $t + 1 > 0$.

于是,

$$\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$= 2\int \frac{t+1}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} dt$$

$$= 2\int \frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} + 2\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}$$

$$= 2(I_1 + I_2).$$

对于 $I_1$, 设 $u = \sqrt{1+3t^2}$, 则

$$du = \frac{3tdt}{\sqrt{1+3t^2}}, t^2 + 3 = \frac{u^2+8}{3}.$$

代入得

$$I_1=\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=\int\frac{du}{u^2+8}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(\frac{u}{2\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}\right]+C_1.$$

对于 $I_2$，设 $u=\dfrac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}$，则

$$\frac{dt}{\sqrt{1+3t^2}}=\frac{du}{3-u^2},t^2+3=\frac{27-8u^2}{3(3-u^2)},$$

代入得

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=3\int\frac{du}{27-8u^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u}\right|+C_2$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|$$
$$+C_2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|$$
$$+C_2.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|$$
$$+C.$$

1965⁺. 求

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

**解** 此题与 1964 题均属于下述类型的积分

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

【参看微积分学教程(Г.М.菲赫金哥尔茨)第二卷第一分册 55 页“272.其它的计算方法”】

设 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$,适当选择 $\alpha$ 与 $\beta$,使得在两个三项式中同时消去一次项.为此,将 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 分别代入 $x^2+2$ 及 $2x^2-2x+5$ 中,并令一次项的系数等于零,求得

$$\alpha=-1,\beta=2,$$

即设

$$x=\frac{2t-1}{1+t}.$$

从而有

$$dx=\frac{3}{(t+1)^2}dt,x^2+2=\frac{3(2t^2+1)}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{2x^2-2x+5}=\frac{3\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}.$$

以下不妨设 $t+1>0$.

代入得

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x-2x+5}}$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{t+1}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}.$$

对于右端的第一个积分，设 $u=\sqrt{t^2+1}$，代入后

计算得

$$\frac{1}{3}\int \frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{2u^2-1}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln \frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1}+C_1$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}+C_1.$$

对于右端的第二个积分，设 $u=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$，代入后

计算得

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}u+C_2=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}}\right)+C_2$$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right)+C_3.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}$$

$$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right)+C.$$

利用尤拉代换

(1) 若 $a>0$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$;

(2) 若 $c>0$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$;

(3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$.

以求下列积分:

**1966.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

**解** 设 $\sqrt{x^2+x+1}=z-x$,则

$$x=\frac{z^2-1}{1+2z},dx=\frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{z^2+z+1}{1+2z}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{z^2+z+1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{4}{z}-\frac{3}{z+\frac{1}{2}}-\frac{3}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{\left|z+\frac{1}{2}\right|^3}+\frac{3}{4(z+\frac{1}{2})}+C_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln \frac{z^4}{|2z+1|^3} + \frac{3}{2(2z+1)} + C,$$

其中 $z = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1967. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

**解** 设 $\sqrt{1 - 2x - x^2} = xz - 1$,则

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x}, x = \frac{2(z-1)}{z^2+1},$$

$$dx = \frac{2(1 + 2z - z^2)}{(z^2+1)^2}dz,$$

$$\sqrt{1 - 2x - x^2} + 1 = \frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} = \int \frac{1 + 2z - z^2}{z(z-1)(z^2+1)}dz$$

$$= \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2+1}\right)dz$$

$$= \ln\left|\frac{z-1}{z}\right| - 2\mathrm{arctg}z + C,$$

其中 $z = \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x}$.

1968. $\int x \sqrt{x^2 - 2x + 2}dx$.

**解** 设 $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = z - x$,则

$$x = \frac{z^2 - 2}{2(z-1)}, dx = \frac{z^2 - 2z + 2}{2(z-1)^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \frac{z^2 - 2z + 2}{2(z-1)}.$$

代入得

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2-2)(z^2-2z+2)^2}{(z-1)^4}dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{[(z-1)^2+2(z-1)-1]\cdot[(z-1)^2+1]^2}{(z-1)^4}dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\Big\{\Big[(z-1)^2-(z-1)^{-4}\Big]$$

$$+\Big[2(z-1)+2(z-1)^{-3}\Big]$$

$$+\Big[1-(z-1)^{-2}\Big]+4(z-1)^{-1}\Big\}d(z-1)$$

$$=\frac{1}{8}\Big\{\frac{1}{3}\Big[(z-1)^3+(z-1)^{-3}\Big]$$

$$+\Big[(z-1)^2-(z-1)^{-2}\Big]$$

$$+\Big[(z-1)+(z-1)^{-1}\Big]\Big\}+\frac{1}{2}\ln|z-1|+C,$$

其中 $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$.

1969. $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx.$

**解** 设 $\sqrt{x^2+3x+2}=z(x+1)$，则

$$x=\frac{2-z^2}{z^2-1},dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{z}{z^2-1}.$$

代入得

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$$

$$=\int\frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2}dz$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+z+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-z-\frac{1}{2}}\right|$$

$$+\frac{2}{1-z-z^2}-\frac{4(2z+1)}{5(1-z-z^2)}+C$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2z+1}{\sqrt{5}-2z-1}\right|+\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+C,$$

其中 $z=\sqrt{x(1+x)}-x$.

*） 利用 1921 题的递推公式.

利用各种方法，计算下列积分：

1971. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

**解** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

$$=\int\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)-(x^2-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}dx$$

$$=\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})$$

$$+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

1972. $\int\frac{xdx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

**解** 设$\frac{1+x}{1-x}=z$，则

$$x=\frac{z-1}{z+1},dx=\frac{2}{(z+1)^2}dz,$$

代入得

$$\int \frac{x dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(z^2-1)dz}{\sqrt{z}(3z^2+1)}$$

$$= \int \frac{(z^2-1)d(\sqrt{z})}{3z^2+1}$$

$$= \int\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3(3z^2+1)}\right)d(\sqrt{z})$$

$$= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{d(\sqrt[4]{3z^2})}{(\sqrt[4]{3z^2})^4+1}$$

$$= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{4}{3\sqrt[4]{3}}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{1-z\sqrt{3}}\right)\right)^{*)} + C$$

$$= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\left(\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}\right.$$

$$\left.-2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3}-1}\right)\right)+C,$$

其中 $z = \dfrac{1+x}{1-x}$.

*) 利用 1884 题的结果.

1973. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$= \int \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}$$

$$\cdot \frac{1}{(-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}dx$$

$$=\int \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+C.$$

1974. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

**解** $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$

$$=\int \frac{(x+\sqrt{1+x+x^2})(1+x-\sqrt{1+x+x^2})}{(1+x)^2-(1+x+x^2)}dx$$

$$=\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}dx$$

$$=\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}dx-\ln|x|.$$

对于积分$\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}dx$，设 $x=\frac{1}{t}$，则

$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，$\sqrt{1+x+x^2}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t|}$.

不妨设 $t>0$，代入得

$$\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}dx$$

$$=-\int \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t^2}dt$$

$$= \int \sqrt{t^2 + t + 1}\, d\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{t^2 + t + 1}}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{2t + 1}{t\sqrt{1 + t + t^2}} dt$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1} - \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t + t^2}}$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{1 + t + t^2}}$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1} - \ln\left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + t + t^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right) + 1}}$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1} - \ln\frac{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{2x}$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1}\right) + C_1$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1} - \ln\frac{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{2x}$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\frac{2x + 1 + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{2} + C_1$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2}\ln\frac{2x + 1 + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{(2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2})^2}$$

$$+ \ln x + C.$$

于是，当 $x > 0$ 时，最后得到

$$\int \frac{x + \sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}} dx$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C,$$

当 $x<0$ 时,可获同样的结果.

1975. $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx.$

**解** $$\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$$

$$=\int\frac{\sqrt{x(x+1)}\cdot(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(x+1)-x}dx$$

$$=\int[(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}]dx$$

$$=\int[x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}]dx$$

$$=\frac{2}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]-\frac{2}{5}[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}]+C.$$

1976. $\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

**解** $$\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}}}$$

$$=\int\frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}\right)^2}}$$

下面我们先考虑积分$\int\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx$. 设 $x=\mathrm{tg}t$,

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,则有 $dx=\sec^2 t dt$.

代入得

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{\mathrm{tg}^2 t - 1}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt$$

$$= \int (\sin^2 t - \cos^2 t)dt = -\int \cos 2t dt$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2t + C_1 = -\frac{x}{1+x^2} + C_1,$$

从而，可得$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)$.

于是，

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right) + C.$$

1977. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}dx.$

**解** 仿照1976题，可得

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}dx = \int \frac{\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2-1)^2}}}dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+\sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|+C.$$

1978. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

**解** 作变换$\frac{1}{x}=\sqrt{t}$（这里设$x>0$。若$x<0$，则作变换$\frac{1}{x}=-\sqrt{t}$．最后结果相同），则

$$dx=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}dt,\ \sqrt{x^4+2x^2-1}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C\quad\left(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}\right).$$

1979. $\int\frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

**解** $\int\frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$

$$=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln \frac{x^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4}}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln \frac{x^2(1 + 2x^2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1})}{2 + x^2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} + C.$$

1980. 证明积分

$$\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})dx$$

(式中 $R$ 为有理函数) 的求法,归结为有理函数的积分法.

**证** 当 $a$,$c$ 中至少有一个为零时,则积分

$$\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d})dx$$

的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a \neq 0$,$c \neq 0$ 时,设 $\sqrt{ax + b} = z$,则

$$x = \frac{z^2 - b}{a}, dx = \frac{2}{a}zdz,$$

$$\sqrt{cx + d} = \sqrt{\frac{c}{a}z^2 + d - \frac{bc}{a}} = \sqrt{c_1z^2 + d_1},$$

式中 $c_1=\frac{c}{a}, d_1=d-\frac{bc}{a}$.

代入得

$$\begin{aligned}&\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})dx\\&=\int R\left(\frac{z^2-b}{a},z,\sqrt{c_1z^2+d_1}\right)\frac{2}{a}zdz,\\&=\int R_1(z,\sqrt{c_1z^2+d_1})dz,\end{aligned}$$

其中 $R_1$ 为有理函数.

再设 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=\pm\sqrt{c_1}z+u(c_1>0)$ 或 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=zu\pm\sqrt{d_1}(d_1>0)$——尤拉代换，就可将被积函数有理化. 于是，积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})dx$$

的求法可归结为有理函数的积分法.

二项微分式

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

(式中 $m,n$ 和 $p$ 为有理数)仅在下列三种情形可化为有理函数的积分(契比协夫定理):

第一种情形，$p$ 为整数. 假定 $x=z^N$，其中 $N$ 为分数 $m$ 和 $n$ 的公分母.

第二种情形，$\frac{m+1}{n}$ 为整数. 假定 $a+bx^n=z^N$，其中 $N$ 为分数 $p$ 的分母.

第三种情形，$\frac{m+1}{n}+p$ 为整数. 利用代换：$ax^{-n}$

$$+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C\ (x>0).$$

*) 利用 1921 题的结果.

1982. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx.$

**解** $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}.m=\frac{1}{2},n=\frac{1}{3},$ $p=-2$；$p$ 为整数，这是二项微分式的第一种情形.

设 $x=z^6$，则

$$dx=6z^5dz,\sqrt{x}=z^3,\sqrt[3]{x}=z^2.$$

代入得

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=6\int \frac{z^3}{(z^2+1)^2}dz$$

$$=6\int\left[z^4-2z^2+3-\frac{4}{z^2+1}+\frac{1}{(z^2+1)^2}\right]dz$$

$$=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z-24\mathrm{arc\ tg}z$$

$$+6\left[\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\mathrm{arc\ tg}z\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\mathrm{arc\ tg}(x^{\frac{1}{6}})$$

$$+C.$$

*) 利用 1921 题的结果.

1983. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

**解** $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}.m=1,n=\frac{2}{3},p$

$=-\frac{1}{2}$；$\frac{m+1}{n}=3$，这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$，则

$$x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}},dx=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int(z^2-1)^2dz$$

$$=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C,$$

其中 $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$.

1984. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$

**解** $\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}=x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，$m=5,n=2,p=-\frac{1}{2}$；$\frac{m+1}{n}=3$，这是二项微分式的第二种情形.

设 $\sqrt{1-x^2}=z$（不妨设 $x>0$），则

$$x=\sqrt{1-z^2},dx=-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int(1-z^2)^2dz$$

$$=-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5+C,$$

其中 $z=\sqrt{1-x^2}$.

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

**解** $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} = x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}$. $m=0, n=3$, $p=-\frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n}+p=0$,这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-3}+1=z^3$,则

$x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}}, dx=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz$.

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = -\int \frac{z}{z^3-1}dz$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3}\int \frac{z-1}{z^2+z+1}dz$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|z-1| + \frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

**解** $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}$. $m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}$; $\frac{m+1}{n}+p=0$,这是二项微分式的第三种情

形.

设 $x^{-4}+1=z^4$,则

$$z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}(z>0,x>0),$$

$$x=(z^4-1)^{-\frac{1}{4}},dx=-z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^2}{z^4-1}dz$$

$$=\int\left[\frac{1}{4(z+1)}-\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\text{arc tg}z+C,$$

其中 $z=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

1987+. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

**解** $\dfrac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=x^{-1}(1+x^6)^{-\frac{1}{6}}$. $m=-1,n=6$,

$p=-\dfrac{1}{6}$;$\dfrac{m+1}{n}=0$,这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^6=z^6$,则

$$z=\sqrt[6]{1+x^6}(z>0,x>0),$$

$$x=\sqrt[6]{z^6-1},dx=z^5(z^6-1)^{-\frac{5}{6}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=\int\frac{z^4dz}{z^6-1}$$

$$=\int\left[-\frac{1}{6(z+1)}+\frac{z+1}{6(z^2-z+1)}\right.$$

$$+\frac{1}{6(z-1)}+\frac{-z+1}{6(z^2+z+1)}\Big)dz$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$+C_1$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\sqrt[6]{1+x^6}$.

1988. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

**解** $\dfrac{1}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}$. $m=-3$, $n=-1$, $p=-\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{m+1}{n}=2$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{-1}=z^5$, 则

$x=(z^5-1)^{-1}$, $dx=-5z^4(z^5-1)^{-2}dz$.

代入得

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=-5\int z^3(z^5-1)dz$$

$$=-\frac{5}{9}z^9+\frac{5}{4}z^4+C,$$

其中 $z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$.

1989. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$.

**解** $\sqrt[3]{3x-x^3}=x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}$. $m=\frac{1}{3}$, $n=2$, $p=\frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n}+p=1$,这是二项微分式的第三种情形.

设 $3x^{-2}-1=z^3$(不妨设 $x>0$),则

$$z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}, x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{z^3+1}},$$

$$dx=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z^2}{(z^3+1)^{\frac{3}{2}}}dz.$$

代入得

$$\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx=-\frac{9}{2}\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}dz$$

$$=-\frac{9}{2}\int\frac{dz}{z^3+1}+\frac{9}{2}\int\frac{dz}{(z^3+1)^2}$$

$$=-\frac{9}{2}\left\{\frac{1}{6}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}^{*)}$$

$$+\frac{9}{2}\left\{\frac{z}{3(z^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}^{**)}+C$$

$$=\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^{3}}}{x}$.

*） 利用 1881 题的结果.

**） 利用 1892 题的结果.

1990. 在甚么情形下，积分

$$\int\sqrt{1+x^{m}}dx$$

（式中 $m$ 为有理数）为初等函数？

**解** $\sqrt{1+x^{m}}=x^{0}(1+x^{m})^{\frac{1}{2}}$. 由于 $p=\frac{1}{2}$，故由契比协夫定理知，仅在下述两种情形，此函数的积分可化为有理函数的积分.

第一种情形，$\frac{1}{m}$ 为整数，即 $m=\frac{1}{k_{1}}=\frac{2}{2k_{1}}$，其中 $k_{1}=\pm1,\pm2,\cdots$；

第二种情形，$\frac{1}{m}+\frac{1}{2}$ 为整数，即 $m=\frac{2}{2k_{2}-1}$，其中 $k_{2}=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

综上所述，即得：当

$$m=\frac{2}{k}$$

（式中 $k=\pm1,\pm2,\cdots$）时，积分

$$\int\sqrt{1+x^{m}}dx$$

为初等函数.

## §4. 三角函数的积分法

形如

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

的积分(式中 $m$ 及 $n$ 为整数),可利用巧妙的变换或运用递推公式计算.

求下列积分:

1991. $\int \cos^5 x dx$.

**解** $\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x)$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

1992. $\int \sin^6 x dx$.

**解** $\int \sin^6 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx$$

$$- \frac{1}{8}\int (1 - \sin^2 2x)\cos 2x dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64}\sin 4x$$

$$-\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)d(\sin 2x)$$

$$=\frac{5x}{16}-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$$

$$=\frac{5x}{16}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$$

1993. $\int\cos^6 x dx$.

**解** $\int\cos^6 x dx=\int\sin^6\left(x-\frac{\pi}{2}\right)d\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\frac{5}{16}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{3}{64}\sin 4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{48}\sin^3 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{*)}+C_1$$

$$=\frac{5x}{16}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

*） 利用 1992 题的结果.

1994. $\int\sin^2 x\cos^4 x dx$.

**解** $\int\sin^2 x\cos^4 x dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\cos^2 x dx$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2x d(\sin 2x)$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

1995. $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$.

**解** $\int\sin^4 x\cos^5 x dx=\int\sin^4 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x} - \int \operatorname{ctg}x \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$$

于是,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= -\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|^{*)} + C$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

*) 利用 1999 题的结果.

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x} = 16\int \frac{dx}{\sin^4 2x}$$

$$= -8\int \csc^2 2x d(\operatorname{ctg}2x)$$

$$= -8\int (1+\operatorname{ctg}^2 2x)d(\operatorname{ctg}2x)$$

$$= -8\operatorname{ctg}2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x + C.$$

2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x\cos^5 x}dx$

$= \int \frac{dx}{\sin x\cos^5 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$.

$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos^5 x}dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x\cos^3 x}dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx + 2\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$

$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x} + 2\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

$+ 3\int \frac{dx}{\sin x\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

$= \frac{1}{4\cos^4 x} - 2\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + 3\int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}$

$= \frac{1}{4\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C_1$

$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg} x| + C.$

2003. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos^4 x}dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx + \int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$

$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \int \frac{dx}{\sin x}$

$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$

$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$

2004. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$.

**解** $\int \mathrm{tg}^5 x dx = \int \mathrm{tg} x (\sec^2 x - 1)^2 dx$

$= \int \sec^4 x \mathrm{tg} x dx - 2\int \sec^2 x \mathrm{tg} x dx + \int \mathrm{tg} x dx$

$= \int \sec^3 x d(\sec x) - 2\int \sec x d(\sec x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$= \frac{1}{4}\sec^4 x - \sec^2 x - \ln|\cos x| + C_1$

$= \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x - \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.$

2005. $\int \mathrm{ctg}^6 x dx$.

**解** $\int \mathrm{ctg}^6 x dx = \int \mathrm{ctg}^2 x (\csc^2 x - 1)^2 dx$

$= \int \mathrm{ctg}^2 x \csc^4 x dx - 2\int \mathrm{ctg}^2 x \csc^2 x dx + \int \mathrm{ctg}^2 x dx$

$= -\int \mathrm{ctg}^2 x (1 + \mathrm{ctg}^2 x) d(\mathrm{ctg} x)$

$+ 2\int \mathrm{ctg}^2 x d(\mathrm{ctg} x) + \int (\csc^2 x - 1) dx$

$= -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x + \frac{2}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg} x - x + C$

$= -\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x + \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg} x - x + C.$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$.

**解** $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx = \int \mathrm{tg}^4 x d(\mathrm{tg} x) = \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x + C.$

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} = \int \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$$

$$= \int \sqrt{\mathrm{tg}x}\, d(\mathrm{tg}x) - \int \frac{d(\mathrm{ctg}x)}{\sqrt{\mathrm{ctg}x}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{tg}^3 x} - 2\sqrt{\mathrm{ctg}x} + C.$$

2008⁺. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

**解** 设 $t = \sqrt[3]{\sin x}$，不妨只考虑 $\cos x$ 为正的情况，即 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 且 $x \neq 0$，则有

$$dx = \frac{3t^2}{\sqrt{1-t^6}}dt, \cos x = \sqrt{1-t^6}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = 3\int \frac{dt}{1-t^6}$$

$$= \frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{1-t^3} + \frac{1}{1+t^3}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{t+2}{1+t+t^2}\right)dt + \frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t^3}$$

$$= \frac{-1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{4}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}$$

$$+ \frac{3}{4}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2(t^2+t+1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)} \quad + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t\sqrt{3}}{1-t^2}\right)$$

$$+ C,$$

其中 $t = \sqrt[3]{\sin x}$.

*) 利用 1881 题的结果.

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

**解** 设 $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$,则

$$x = \operatorname{arctg} t^2, dx = \frac{2t}{1+t^4}dt,$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 2\int \frac{dt}{1+t^4}$$

$$= 2\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right]^{*)} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + C.$$

其中 $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

*) 利用 1884 题的结果.

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

**解** 设 $\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}=t$，则

$$x=\mathrm{arctg}t^3, dx=\frac{3t^2}{1+t^6}dt,$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}}=3\int\frac{tdt}{1+t^6}=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2)}{1+(t^2)^3}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right)^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+C,$$

其中 $t=\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}$.

*） 利用 1881 题的结果.

2011. 推出下列积分的递推公式

(a) $I_n=\int\sin^n xdx$； (6) $K_n=\int\cos^n xdx \quad (n>2)$.

并利用推得的公式来计算

$$\int\sin^6 xdx \text{ 及} \int\cos^8 xdx.$$

**解** (a) $I_n=\int\sin^n xdx=-\int\sin^{n-1}xd(\cos x)$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\cos^2 x\sin^{n-2}xdx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}+(1-n)I_n,$$

于是，

$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2};$$

利用此公式及

$$I_0 = \int dx = x + C,$$

即得

$$I_6 = \int \sin^6 x dx = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6} I_4$$

$$= -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5\cos x \sin^3 x}{24} + \frac{5}{8} I_2$$

$$= -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5\cos x \sin^3 x}{24}$$

$$- \frac{5\cos x \sin x}{16} + \frac{5}{16} x + C.$$

(6) $K_n = \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x d(\sin x)$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) K_{n-2} - (n-1) K_n$$

于是，

$$K_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2};$$

利用此公式及

$$K_0 = x + C$$

即得

$$K_8 = \int \cos^8 x dx = \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{8} K_6 = \cdots$$

$$= \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cos^5 x + \frac{35}{192} \sin x \cos^3 x$$

$$+ \frac{35}{128} \sin x \cos x + \frac{35}{128} x + C.$$

2012. 推出下列积分的递推公式

(a) $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}$; (б) $K_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}(n>2)$

并利用推得的公式计算

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}\text{ 及}\int\frac{dx}{\cos^7 x}.$$

**解** (a) $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}dx$

$$=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int\cos x d\left(\frac{1}{\sin^{n-1}x}\right)$$

$$=I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}I_{n-2}$$

$$=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2};$$

利用此公式及

$$I_1=\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,$$

即得

$$I_5=\int\frac{dx}{\sin^5 x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{3}{4}I_3=\cdots$$

$$=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

(б) $K_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^n x}dx$

$$=\frac{1}{n-1}\int\sin x d\left(\frac{1}{\cos^{n-1}x}\right)+K_{n-2}$$

$$=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}K_{n-2}+K_{n-2}$$

$$=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2};$$

利用此公式及

$$K_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$$

即得

$$K_7 = \int \frac{dx}{\cos^7 x} = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5}{6}K_5 = \cdots$$

$$= \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5\sin x}{24\cos^4 x} + \frac{5\sin x}{16\cos^2 x}$$

$$+ \frac{5}{16}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

运用公式

Ⅰ $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$;

Ⅱ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$;

Ⅲ $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

来计算下列的积分.

求积分：

2013. $\int \sin 5x \cos x dx$.

**解** $\int \sin 5x \cos x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 4x + \sin 6x] dx$

$$= -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + C.$$

2014. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$.

**解** $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos 6x + \cos 2x) dx + \frac{1}{4}\int (1 + \cos 4x) dx$$

解 $\int \cos^2 ax\cos^2 bx dx=\int(\cos ax\cos bx)^2 dx$

$$=\frac{1}{4}\int[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]^2 dx$$

$$=\frac{1}{4}\int[\cos^2(a-b)x+\cos^2(a+b)x$$

$$+2\cos(a-b)x\cos(a+b)x]dx.$$

$$=\frac{1}{8}\int[2+\cos 2(a+b)x+\cos 2(a-b)x]dx$$

$$+\frac{1}{4}\int(\cos 2ax+\cos 2bx)dx$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}$$

$$+\frac{1}{8a}\sin 2ax+\frac{1}{8b}\sin 2bx+C.$$

2018. $\int \sin^3 2x\cos^2 3x dx.$

解 先利用三角公式化简 $\sin^3 2x\cos^2 3x$，得

$$\sin^3 2x\cos^2 3x=-\frac{1}{16}\sin 12x+\frac{3}{16}\sin 8x$$

$$-\frac{1}{8}\sin 6x-\frac{3}{16}\sin 4x+\frac{3}{8}\sin 2x,$$

于是

$$\int \sin^3 2x\cos^2 3x dx$$

$$=\frac{1}{192}\cos 12x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{48}\cos 6x$$

$$+\frac{3}{64}\cos 4x-\frac{3}{16}\cos 2x+C.$$

运用恒等式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$

及 $\cos(\alpha-\beta)=\cos[(x+\alpha)-(x+\beta)]$

来计算积分.

求积分:

2019. $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

**解** $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(a+x)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C,$$

其中设 $\sin(a-b)\neq 0$.

2020. $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

**解** $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}+\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C,$$

其中设 $\cos(a-b)\neq 0$.

2021. $\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

**解** $\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[ \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)} - \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)} \right| + C,$$

其中设 $\sin(a-b) \neq 0^{*}$).

*) 当 $a-b=2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时，是更简单的积分，2019 题及 2020 题与本题类似，解法从略.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{\cos a} \int \frac{\cos\left( \frac{x+a}{2} - \frac{x-a}{2} \right)}{\sin x - \sin a} dx$$

$$= \frac{1}{\cos a} \int \frac{\cos \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2} + \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{2\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\cos a} \int \left( \frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} + \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\cos a} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| + C,$$

其中设 $\cos a \neq 0$.

2023. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\cos x + \cos a} = \int \frac{d\left( x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin\left( x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin\left( a + \frac{3}{2}\pi \right)}$$

$$= \frac{1}{\cos\left(a + \frac{3}{2}\pi\right)} \ln \left| \frac{\sin \frac{x - a - \pi}{2}}{\cos \frac{x + a + 2\pi}{2}} \right|^{*)} + C$$

$$= \frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos \frac{x - a}{2}}{\cos \frac{x + a}{2}} \right| + C,$$

其中设 $\sin a \neq 0$.

*) 利用 2022 题的结果.

**2024.** $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x + a) dx$.

**解** $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x + a) dx$

$$= \int \frac{\sin x \sin(x + a)}{\cos x \cos(x + a)} dx$$

$$= \int \frac{\cos x \cos(x + a) + \sin x \sin(x + a) - \cos x \cos(x + a)}{\cos x \cos(x + a)} dx$$

$$= \int \frac{\cos a - \cos x \cos(x + a)}{\cos x \cos(x + a)} dx$$

$$= -x + \cos a \cdot \int \frac{dx}{\cos(x + a) \cos x}$$

$$= -x + \operatorname{ctg} a \cdot \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x + a)} \right|^{*)} + C,$$

其中设 $\sin a \neq 0$.

*) 利用 2021 题的结果.

形如

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

(式中 $R$ 为有理函数) 的积分的一般情形可利用代换 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ 化为有理函数的积分.

(a) 若等式

$$R(-\sin x,\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x),$$

或 $$R(\sin x,-\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$$

成立，则最好利用代换 $\cos x=t$ 或对应的 $\sin x=t$.

(6) 若等式

$$R(-\sin x,-\cos x)\equiv R(\sin x,\cos x)$$

成立，则最好利用代换 $\operatorname{tg}x=t$.

求积分：

2025. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

**解** 设 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

于是，

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{dt}{3t^2+2t+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

2026. $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

**解** 设 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 同 2025 题，得

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{1+t^2}{t(3+t^2)}dt$$

$$=\int\left[\frac{1}{3t}+\frac{2t}{3(3+t^2)}\right]dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t(3+t^2)| + C_1$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}{}^{*)} + C.$$

*) 由于

$$t(3+t^2) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(2+\sec^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}(\cos x+2)$$

$$= 2\left[\frac{(1-\cos x)(\cos x+2)^2}{(1+\cos x)^3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

因而

$$\ln|t(3+t^2)| = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}.$$

2027. $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx.$

**解** 设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$,同 2025 题,得

$$\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx = 4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)}$$

$$= \frac{4}{5}\int\left[\frac{1}{1+t^2}+\frac{-2+t}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{1+t-t^2}\right]dt$$

$$= \frac{4}{5}\int\frac{dt}{1+t^2} - \frac{8}{5}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{5}\int\frac{2tdt}{(1+t^2)^2}$$

$$+\frac{4}{5}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{5}\text{arc tg}t-\frac{8}{5}\left(\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\text{arc tg}t\right)^{*)}$$

$$-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+t^2}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-(t-\frac{1}{2})}\right|+C_1$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2t}{1+t^2}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)^{**)}$$

$$+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\text{arctg}2}{2}\right)\right|^{***)}+C.$$

*) 利用 1817 题的结果.

$$**)\quad -\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2t}{1+t^2}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2\text{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}}{\frac{2}{1+\cos x}}$$

$$=-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)-\frac{1}{5}.$$

$$* * * )\quad \ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+\ln\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)}$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\right|-\ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\right).$$

**2028.** $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$;

(a) $0<\varepsilon<1$;(б) $\varepsilon>1$.

**解** 设 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 同 2025 题,得

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}=I.$$

(a) $0<\varepsilon<1$,

$$I=\frac{2}{1+\varepsilon}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C;$$

(б) $\varepsilon>1$,

$$I=\frac{2}{\varepsilon-1}\int\frac{dt}{\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)-t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}t}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|^{*)}$$
$$+C.$$

$$*)\ \frac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}}$$

$$=\frac{\varepsilon+1+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}+(\varepsilon-1)t^2}{(\varepsilon+1)-(\varepsilon-1)t^2}$$

$$=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1-t^2)+2\sqrt{\varepsilon^2-1}t}{\varepsilon(1-t^2)+(1+t^2)}$$

$$=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1+t^2)\cos x+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon(1+t^2)\cos x+(1+t^2)}$$

$$=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\varepsilon\cos x+1}$$

$$=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{\varepsilon\cos x+1}.$$

**2029.** $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx.$

**解** $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin^2 x}\right)dx$

$$=x-\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\sec^2 x+\operatorname{tg}^2 x}=x-\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{1+2\operatorname{tg}^2 x}$$

$$=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C.$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

2033. $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$.

**解** $$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a}\int \frac{d(a\operatorname{tg}x+b)}{(a\operatorname{tg}x+b)^2}$$

$$=-\frac{1}{a\operatorname{tg}x+b}+C=-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C.$$

2034. $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

**解** $$\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$$

$$=\int \frac{\sin x dx}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(\sin x-\cos x)dx}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\sin x\cos x}$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{-(\cos x-\sin x)dx}{\sin x+\cos x}$$

$$+\frac{1}{6}\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{1-\sin x\cos x}dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\sin x\cos x}$$

$$=-\frac{1}{3}\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{6}\int \frac{d(1-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\int d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)+C.$$

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{2dx}{2 - \sin^2 2x}$

$$= \int \frac{d(\mathrm{tg}2x)}{2\sec^2 2x - \mathrm{tg}^2 2x}$$

$$= \int \frac{d(\mathrm{tg}2x)}{2 + \mathrm{tg}^2 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{\mathrm{tg}2x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

2036. $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}dx.$

解 $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}dx = \int \frac{2\sin^2 2x dx}{\sin^4 2x - 8\sin^2 2x + 8}$

$$= \int \frac{\mathrm{tg}^2 2x d(\mathrm{tg}2x)}{\mathrm{tg}^4 2x - 8\mathrm{tg}^2 2x \sec^2 2x + 8\sec^4 2x}$$

$$= \int \frac{\mathrm{tg}^2 2x d(\mathrm{tg}2x)}{\mathrm{tg}^4 2x + 8\mathrm{tg}^2 2x + 8}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(2 + \sqrt{2})\int \frac{d(\mathrm{tg}2x)}{\mathrm{tg}^2 2x + 4 + 2\sqrt{2}}$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{4}(2 - \sqrt{2})\int \frac{d(\mathrm{tg}2x)}{\mathrm{tg}^2 2x + 4 - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{\mathrm{tg}2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)\right.$$

$$\left. - \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{\mathrm{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)\right] + C.$$

2037. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx.$

解 $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = -\int \frac{\cos 2x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}dx$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} + \frac{2\cos 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} + C.$$

2038. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$

解 $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{\sec^4 x + \operatorname{tg}^4 x} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(\operatorname{tg}^2 x)}{2\operatorname{tg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1 + 2\operatorname{tg}^2 x)$$

$+ C.$

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \int \frac{dx}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x}$

$$= \int \frac{dx}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x} = \int \frac{2d(\operatorname{tg} 2x)}{4\sec^2 2x - 3\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}\right) + C.$$

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}.$

解 $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2} = \int \frac{\frac{1}{\cos^4 x} dx}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$

$$= \int \frac{\sec^2 x d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$$

$$= \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$$

$$= \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 2) - 2}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\text{tg}x}{4(\text{tg}^2 x + 2)}$$

$$- \frac{1}{4\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}\right)^{*)} + C$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\text{tg}x}{4(\text{tg}^2 x + 2)} + C.$$

*） 利用 1817 题的结果.

2041. 求积分

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$$

先化分母为对数的形状.

**解** $\displaystyle\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\int \frac{dx}{\sin(x + \varphi)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ln\left|\text{tg}\left(\frac{x + \varphi}{2}\right)\right| + C,$$

其中 $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

并设 $a^2 + b^2 \neq 0$.

2042. 证明

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$$

$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C.$$

式中 $A, B, C$ 为常数.

**证** $a_1\sin x + b_1\cos x = A(a\sin x + b\cos x)$

$$+ B(a\cos x - b\sin x),$$

式中 $A = \dfrac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \dfrac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2}, a^2 + b^2 \neq 0.$

于是

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$$

$$= A\int dx + B\int \frac{d(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x}$$

$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C.$$

求积分：

2043. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx.$

**解** 此为 2042 题的特例，这里

$$a_1 = 1, b_1 = -1, a = 1, b = 2;$$

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1-2}{1+4} = -\frac{1}{5},$$

$$B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2} = \frac{-1-2}{1+4} = -\frac{3}{5}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx$$

$$= -\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\ln|\sin x + 2\cos x| + C.$$

2044. $\int \frac{dx}{3 + 5\operatorname{tg}x}.$

**解** $\int \frac{dx}{3 + 5\operatorname{tg}x} = \int \frac{\cos x}{5\sin x + 3\cos x}dx.$

此为 2042 题的特例，这里

$$a_1 = 0, b_1 = 1, a = 5, b = 3;$$

$$A = \frac{3}{34}, B = \frac{5}{34}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{3 + 5\operatorname{tg}x} = \frac{3}{34}x + \frac{5}{34}\ln|5\sin x + 3\cos x| + C.$$

2045. $\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}dx.$

**解** 仿 2042 题，$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}dx$

$$= A\int \frac{a\sin x + b\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}dx$$

$$+ B\int \frac{a\cos x - b\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^2}dx$$

$$= A\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} + B\int \frac{d(a\sin x + b\cos x)}{(a\sin x + b\cos x)^2}dx$$

$$= \frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right|^{*)}$$

$$- \frac{B}{a\sin x + b\cos x} + C$$

$$= \frac{aa_1 + bb_1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right|$$

$$- \frac{ab_1 - a_1b}{(a^2+b^2)(a\sin x + b\cos x)} + C,$$

式中 $A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}$，$B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2}$，

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$a^2 + b^2 \neq 0$（显然按题意 $a$，$b$ 不同时为零）.

*） 利用 2041 题的结果.

2046. 证明：

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}dx$$

$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c|$$

$$+ C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

式中 $A,B,C$ 都是常系数.

**证** 按题意 $a$、$b$ 不同时为零. 设

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1\equiv A(a\sin x+b\cos x+c)$$
$$+B(a\cos x-b\sin x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数,则有

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},$$
$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}.$$

代入得

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx$$
$$=A\int dx+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x+c)}{a\sin x+b\cos x+c}$$
$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$$
$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|$$
$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

求积分:

2047. $\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx.$

**解** 此为 2046 题之特例,这里

$$a_1=1,b_1=2,c_1=-3,a=1,b=-2,c=3;$$
$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5},$$
$$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{2+2}{1+4}=\frac{4}{5},$$
$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{(-3-3)+(-2)(6-6)}{1+4} = -\frac{6}{5}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx$$

$$= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\ln|\sin x - 2\cos x + 3|$$

$$-\frac{6}{5}\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3}$$

$$= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\ln|\sin x - 2\cos x + 3|$$

$$-\frac{6}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+5\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}^{*)} + C.$$

*) 设 $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$,积分即得所求式子.

2048. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}$.

**解** 此为 2046 题之特例,这里

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, a = 1, b = 1, c = \sqrt{2};$$

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x|$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x|$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

2049. $\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx.$

**解** 本题也是 2046 题之特例，这里

$a_1=2, b_1=1, c_1=0, a=3, b=4, c=-2;$

$A=\frac{2}{5}, B=-\frac{1}{5}, C=\frac{4}{5}.$

代入得

$$\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$$

$$=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|$$

$$+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x-2}$$

$$=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|$$

$$+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}\right|^{*)}$$

$$+C.$$

**解** 此为 2050 题之特例，这里

$$a_1=1,b_1=-2,c_1=3,a=1,b=1;$$

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2}=\frac{3-1-4}{1+1}=-1,$$

$$B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2}=\frac{3-1+4}{1+1}=3,$$

$$C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}=\frac{1+3+4}{1+1}=4.$$

代入得

$$\int\frac{\sin^2x-4\sin x\cos x+3\cos^2x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=-\sin x+3\cos x+4\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$$

$$=-\sin x+3\cos x+\frac{4}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\sin x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

2052. $\displaystyle\int\frac{\sin^2x-\sin x\cos x+2\cos^2x}{\sin x+2\cos x}dx.$

**解** 本题也是 2050 题的特例，这里

$$a_1=1,b_1=-\frac{1}{2},c_1=2,a=1,b=2;$$

$$A=\frac{1}{5},B=\frac{3}{5},C=\frac{8}{5}$$

代入得

$$\int\frac{\sin^2x-\sin x\cos x+2\cos^2x}{\sin x+2\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x+\frac{8}{5}\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x}$$

$$= \frac{1}{5}(\sin x + 3\cos x).$$

$$+ \frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{5}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|^{*)} + C.$$

*） 设 $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$，积分即得所求式子.

2053. 证明：若 $(a-c)^2+b^2 \neq 0$，则

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}dx$$

$$= A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1} + B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

式中 $A,B$ 为未定系数，$\lambda_1,\lambda_2$ 为下方程式的根

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

及

$$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x, k_i = \frac{1}{a-\lambda_i}(i=1,2).$$

**证** 记

$$a^2\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x$$

$$= (a-\lambda_i)\sin^2 x + 2b\sin x\cos x$$

$$+ (c-\lambda_i)\cos^2 x + \lambda_i$$

$$= \frac{1}{a-\lambda_i}[(a-\lambda_i)^2\sin^2 x + 2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x$$

$$+ (c-\lambda_i)(a-\lambda_i)\cos^2 x] + \lambda_i,$$

其中 $\lambda_i(i=1,2)$ 为 $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$ 的根.

由假定 $(a-c)^2+b^2 \neq 0$，从而 $(a-c)^2+4b^2 \neq 0$，

因此 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

再设 $k_i = \dfrac{1}{a-\lambda_i}(i=1,2)$ 及

$$u_i = (a-\lambda_i)\sin x + b\cos x.$$

由于$(a-\lambda_i)(c-\lambda_i)-b^2=0$,即$b^2=(a-\lambda_i)(c-\lambda_i)$.
于是,

$$\begin{aligned}
&a^2\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x \\
&= k_i[(a-\lambda_i)^2\sin^2 x + 2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x \\
&\quad + b^2\cos^2 x] + \lambda_i = k_i[(a-\lambda_i)\sin x + b\cos x]^2 \\
&\quad + \lambda_i = k_i u_i^2 + \lambda_i. \qquad (1)
\end{aligned}$$

其次,设

$$\begin{aligned}
&a_1\sin x + b_1\cos x = A[(a-\lambda_1)\cos x - b\sin x] \\
&\quad + B[(a-\lambda_2)\cos x - b\sin x], \qquad (2)
\end{aligned}$$

比较等式两端同类项的系数,则有

$$-b(A+B) = a_1,$$

$$A(a-\lambda_1) + B(a-\lambda_2) = b_1,$$

$$A = -\frac{a_1(\lambda_1-\lambda_2) + bb_1 + a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)},$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a-\lambda_1)^{*)}}{b(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

由(1)式及(2)式即得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a^2\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}dx \\
&= A\int \frac{(a-\lambda_1)\cos x - b\sin x}{k_1[(a-\lambda_1)\sin x + b\cos x]^2 + \lambda_1}dx \\
&\quad + B\int \frac{(a-\lambda_2)\cos x - b\sin x}{k_2[(a-\lambda_2)\sin x + b\cos x]^2 + \lambda_2}dx
\end{aligned}$$

$$= A\int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B\int \frac{du_2}{k_1 u_2^2 + \lambda_2}.$$

*） 按题意，$b \neq 0$. 因若 $b = 0$，则 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = c$，从而 $k_1$ 无意义．不过，当 $b = 0$ 时，仍能化为所要求的类似形式．事实上，当 $b = 0$ 时，$a \neq c$，

我们有

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + c\cos^2 x}dx$$

$$= a_1\int \frac{\sin x}{a\sin^2 x + c\cos^2 x}dx + b_1\int \frac{\cos x}{a\sin^2 x + c\cos^2 x}dx$$

$$= a_1\int \frac{d(\cos x)}{(c-a)\cos^2 x + a} + b_1\int \frac{d(\sin x)}{(a-c)\sin^2 x + c}$$

$$= A\int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B\int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

式中 $A = -a_1, B = b_1, k_1 = c - a, k_2 = a - c$,

$$u_1 = \cos x, u_2 = \sin x, \lambda_1 = a, \lambda_2 = c.$$

本题也可用下法另证：命 $u_i = (a - \lambda_i)\sin x + b\cos x$，$k_i = \frac{1}{a - \lambda_i}(i = 1,2)$，代入积分等式．然后两边求导，整理并比较系数，便可知 $\lambda_i$ 必为 $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$ 的根．相应可求出系数，$A, B$.

求积分：

**2054.** $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx.$

**解** $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{2\sin x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$$

$$= -2\int \frac{d(\cos x)}{3 + \cos^2 x} - \int \frac{d(\sin x)}{4 - \sin^2 x}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} + C.$$

**2055.** $\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} dx.$

**解** 此为 2053 题之特例，这里

$$a_1 = 1, b_1 = 1, a = 2, b = -2, c = 5.$$

由

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

求得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$. 从而

$$A = -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + b_1 b + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$= \frac{(1 - 6) - 2 + (2 - 1)}{-2(1 - 6)} = \frac{3}{5},$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{-2 + 1}{10} = -\frac{1}{10};$$

$$u_1 = (a - \lambda_1)\sin x + b\cos x = \sin x - 2\cos x,$$

$$u_2 = (a - \lambda_2)\sin x + b\cos x = -4\sin x - 2\cos x;$$

$$k_1 = \frac{1}{a - \lambda_1} = 1,$$

$$k_2 = \frac{1}{a - \lambda_2} = -\frac{1}{4}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{d(\sin x - 2\cos x)}{(\sin x - 2\cos x)^2 + 1}$$

$$+ \frac{1}{10}\int \frac{d(4\sin x + 2\cos x)}{6 - \frac{1}{4}(4\sin x + 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{3}{5}\operatorname{arc\,tg}(\sin x - 2\cos x)$$

$$+ \frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6} + 2\sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2\sin x - \cos x}\right| + C.$$

2056. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}dx.$

**解** 本题也是 2053 题的特例，因为

$$\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}dx$$

$$= \int \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x}dx,$$

这里，

$$a_1 = 1, b_1 = 2, a = 1, b = 2, c = 1;$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1; k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = \frac{1}{2};$$

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{3}{4};$$

$$u_1 = 2(\cos x - \sin x), u_2 = 2(\cos x + \sin x).$$

代入得

$$\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2d(\cos x - \sin x)}{-2(\cos x - \sin x)^2 + 3}$$

$$- \frac{3}{4}\int \frac{2d(\cos x + \sin x)}{2(\cos x + \sin x)^2 - 1}$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|+C.$$

**2057. 证明**

$$\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+C\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

式中 $A,B,C$ 为未定系数.

**证** $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$,

式中 $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

于是,

$$\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int\frac{dx}{\sin^n(x+\alpha)}$$

$$=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int\frac{1}{\sin^{n-2}(x+\alpha)}d[\operatorname{ctg}(x+\alpha)]$$

$$=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\frac{\operatorname{ctg}(x+\alpha)}{\sin^{n-2}(x+\alpha)}$$

$$-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int\frac{\operatorname{ctg}(x+\alpha)\cos(x+\alpha)}{\sin^{n-2}(x+\alpha)}dx$$

$$=\frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int\frac{1-\sin^2(x+\alpha)}{\sin^n(x+\alpha)}dx.$$

设 $I_n=\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}$,则由上式可得

$$I_n = \frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x - \frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ (2-n)I_n + \frac{n-2}{a^2+b^2}I_{n-2}.$$

于是，

$$I_n = \frac{\frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}\sin x - \frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)}\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}I_{n-2},$$

即

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ C\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

式中 $A = \frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}, B = \frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)},$

$C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}.$

2058. 求$\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$.

**解** 此为 2057 题之特例，这里

$a = 1, b = 2, n = 3;$

$A = \frac{2}{10}, B = -\frac{1}{10}, C = \frac{1}{10}.$

代入得

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3} = \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2}$$

$$+ \frac{1}{10}\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x}$$

$$= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)}$$

$$= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2}$$

$$+ \frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right| + C.$$

其中 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \alpha = \operatorname{arctg}2.$

**2059.** 若 $n$ 为大于 1 的自然数，证明

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ B\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

$(|a| \neq |b|)$，

并求出系数 $A$，$B$ 和 $C$.

**证** 设 $I_n = \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$，先考虑 $I_{n-1}$.

$$I_{n-1} = \frac{1}{a}\int \frac{(a+b\cos x) - b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx$$

$$= \frac{1}{a}I_{n-2} - \frac{b}{a}\int \frac{d(\sin x)}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{a}I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{(n-1)b^2}{a}\int \frac{\sin^2 x}{(a+b\cos x)^n}dx$$

$$= \frac{1}{a}I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{n-1}{a}\int \frac{\begin{matrix}(b^2-a^2)\\ +(a+b\cos x)(a-b\cos x)\end{matrix}}{(a+b\cos x)^n}dx$$

$$+B\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}},$$

式中 $A=-\dfrac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$，$B=\dfrac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$，

$$C=-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}\ (|a|\neq|b|;n>1\text{ 且}a\neq 0).$$

若 $a=0$，则 $b\neq 0$，我们有

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{1}{b^n}\int\frac{dx}{\cos^n x}$$

$$=\frac{1}{b^n}\left(\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}\right)^{*)}.$$

*） 利用 2012 题(6) 的结果.

求积分：

2060. $\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

**解** $$\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}=\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}}$$

$$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x\sqrt{2\sec^2 x-1}}=\int\frac{d(\sec x)}{\sqrt{2\sec^2 x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\sec x+\sqrt{2\sec^2 x-1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}+C.$$

2061. $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}x}}dx$.

**解** $$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}x}}dx=\int\frac{\sin^2 x\,d(\operatorname{tg}x)}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$$

$$=2\int\sin^2 x\,d(\sqrt{\operatorname{tg}x})=2\int(1-\cos^2 x)\,d(\sqrt{\operatorname{tg}x})$$

$$= 2\sqrt{\operatorname{tg}x} - 2\int \frac{d(\sqrt{\operatorname{tg}x}}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$= 2\sqrt{\operatorname{tg}x} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{\operatorname{tg}x-1}^{*)} + C \quad (\operatorname{tg}x > 0).$$

*） 利用 1884 题的结果.

2062. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

**解** 由于

$$2+\sin 2x = 1+(\sin x+\cos x)^2$$

$$= 3-(\sin x-\cos x)^2.$$

于是,

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} = \int \frac{\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx$$

$$= \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}dx$$

$$- \ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$$

$$= -\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} + \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$- \ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}),$$

因而,

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$- \frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+C.$$

2063. $\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}(0<\varepsilon<1)$.

**解** 此为 2059 题之特例，这里

$a=1,b=\varepsilon,n=2$,

$$A=-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2},B=\frac{1}{1-\varepsilon^2},C=0.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{1}{1-\varepsilon^2}\int\frac{1}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]^{*)}+C.$$

*) 利用 2028 题($a$)的结果.

2064⁺. $\int\frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}dx$

**解** 设 $t=\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$，则

$$dt=\frac{-\frac{1}{2}\cos a}{\sin^2\frac{x-a}{2}}dx,\frac{dx}{\sin^2\frac{x-a}{2}}=-\frac{2}{\cos a}dt.$$

于是，

$$\int \frac{con^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}dx = -\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1}dt$$

$$= -\frac{2}{n\cos a}t^{n}+C$$

$$= -\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^{n}+C(\cos a\neq 0).$$

2065. 推出积分

$$I_n = \int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n}dx$$

的递推公式($n$ 为自然数).

证　方法一:

设 $t = \dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}$,则

$$x = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+t}{1-t}\cdot\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right),$$

$$dx = \frac{4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^{2}\sec^{2}\frac{a}{2}+2t\left(\operatorname{tg}^{2}\frac{a}{2}-1\right)+\sec^{2}\frac{a}{2}}dt.$$

由于

$$\frac{4t^{n}\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^{2}\sec^{2}\frac{a}{2}+2t\cdot\left(\operatorname{tg}^{2}\frac{a}{2}-1\right)+\sec^{2}\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{4\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}}{\sec^2\frac{a}{2}} t^{n-2} + \frac{-4\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2} + 2t\left(\mathrm{tg}^2\frac{a}{2} - 1\right) + \sec^2\frac{a}{2}}$$

$$\cdot \frac{2\left(\mathrm{tg}^2\frac{a}{2} - 1\right)}{\sec^2\frac{a}{2}} t^{n-1}$$

$$+ \frac{-4\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2} + 2t\cdot\left(\mathrm{tg}^2\frac{a}{2} - 1\right) + \sec^2\frac{a}{2}}$$

$\cdot\, t^{n-2} \quad (n > 2)$,

两端对 $t$ 积分,即得递推公式

$$I_n = \frac{2\sin a}{n-1} t^{n-1} + 2I_{n-1}\cos a - I_{n-2}.$$

方法二:

设 $y = \frac{x+a}{2}$,则$\frac{x-a}{2} = y - a$,从而

$$I_n = 2\int\left(\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right)^n dy$$

$$= 2\int \frac{\sin(y-a)}{\sin y}\left(\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right)^{n-1} dy$$

$$= 2\int \frac{\sin y\cos a - \cos y\sin a}{\sin y}\left(\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right)^{n-1} dy$$

$$= \cos a I_{n-1} - 2\sin a\int \frac{\cos y}{\sin y}\left(\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right)^{n-1} dy.$$

再设

$$\frac{\sin(y-a)}{\sin y} = t = \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\frac{x+a}{2}}, J_n = 2\int \frac{\cos y}{\sin y} t^n dy,$$

则

$$I_n = \cos a I_{n-1} - \sin a J_{n-1}, J_{n-1} = \frac{\cos a I_{n-1} - I_n}{\sin a}. \quad (1)$$

又

$$J_n = 2\int \frac{\cos y}{\sin y}\left(\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right)^n dy$$

$$= \frac{-2}{n}\int \sin^n(y-a) d\left(\frac{1}{\sin^n y}\right)$$

$$= -\frac{2}{n}\left(\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right)^n$$

$$+ 2\int \frac{\sin^{n-1}(y-a)}{\sin^n y}\cos(y-a) dy$$

$$= -\frac{2}{n}t^n + 2\int t^{n-1}\frac{\cos y\cos a + \sin y\sin a}{\sin y} dy$$

$$= -\frac{2}{n}t^n + \cos a J_{n-1} + \sin a I_{n-1}. \quad (2)$$

由(1)式和(2)式解得

$$I_n = I_{n-1}\cos a - \sin a J_{n-1}$$

$$= I_{n-1}\cos a - \sin a\left(-\frac{2}{n-1}t^{n-1}\right.$$

$$\left. + \cos a J_{n-2} + I_{n-2}\sin a\right)$$

$$= I_{n-1}\cos a + \frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}$$

$$- \sin a\cos a\left(\frac{I_{n-2}\cos a - I_{n-1}}{\sin a}\right) - \sin^2 a I_{n-2}$$

$$= 2I_{n-1}\cos a - I_{n-2} + \frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}.$$

## §5. 各种超越函数的积分法

2066. 证明若 $P(x)$ 为 $n$ 次多项式，则

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2}\right.$$

$$\left. + \cdots + (-1)^n \frac{P^{n}(x)}{a^{n+1}}\right) + C.$$

**证** $\int P(x)e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int P(x)d(e^{ax})$

$$= \frac{1}{a}P(x)e^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax}P'(x)dx$$

$$= \frac{1}{a}P(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2}\int P'(x)d(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a}P(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2}P'(x)e^{ax} + \frac{1}{a^2}\int e^{ax}P''(x)dx$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C.$$

因为 $P(x)$ 为 $n$ 次多项式，所以 $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$，从而上述等式括号中的导数到 $P^{(n)}(x)$ 为止.

2067. 证明若 $P(x)$ 为 $n$ 次多项式，则

$$\int P(x)\cos ax dx$$

$$= \frac{\sin ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right)$$

$$+ \frac{\cos ax}{a^2}\left(P'(x) + \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right) + C$$

及

$$\int P(x)\sin ax dx$$

$$= -\frac{\cos ax}{a}\left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right)$$

$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

证 $\int P(x)\cos ax dx=\frac{1}{a}\int P(x)d(\sin ax)$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax-\frac{1}{a}\int P'(x)\sin ax dx$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)d(\cos ax)$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax$$

$$-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\cos ax dx$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax-\frac{1}{a^3}P''(x)\sin ax$$

$$-\frac{1}{a^4}P'''(x)\cos ax+\frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\cos ax dx$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$

$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$

$$+C.$$

$$\int P(x)\sin ax dx=-\frac{1}{a}\int P(x)d(\cos ax)$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a}\int P'(x)\cos ax dx$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)d(\sin ax)$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax$$

$$-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\sin ax dx$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax+\frac{1}{a^3}P''(x)\cos ax$$
$$-\frac{1}{a^4}P'''(x)\sin ax+\frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\sin ax dx$$
$$=\cdots\cdots$$
$$=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{p^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$
$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$
$$+C.$$

上述导数项是有限的，其次数 $\leqslant n$.

求积分：

**2068.** $\int x^3e^{3x}dx.$

**解** $$\int x^3e^{3x}dx=e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{9}+\frac{6x}{27}-\frac{6}{81}\right)^{*)}+C$$
$$=e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)+C.$$

*) 利用 2066 题的结果.

**2069.** $\int(x^2-2x+2)e^{-x}dx.$

**解** $$\int(x^2-2x+2)e^{-x}dx=e^{-x}\left(\frac{x^2-2x+2}{-1}\right.$$
$$\left.-\frac{2x-2}{1}+\frac{2}{-1}\right)^{*)}+C$$
$$=-e^{-x}(x^2+2)+C.$$

*) 利用 2066 题的结果.

**2070.** $\int x^5\sin 5x dx.$

**解** $$\int x^5\sin 5x dx=-\frac{\cos 5x}{5}\left(x^5-\frac{20x^3}{25}+\frac{120x}{625}\right)$$

*） 利用 2066 题的结果.

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx dx$.

解 $\int e^{ax}\cos^2 bx dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}(1+\cos 2bx)dx$

$= \frac{1}{2a}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx^{*)}}{a^2+4b^2} + C.$

*） 利用 1828 题的结果.

2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx dx$.

解 $\int e^{ax}\sin^3 bx dx = \int e^{ax}\sin bx\cdot\frac{1-\cos 2bx}{2}dx$

$= \int e^{ax}\left(\frac{3}{4}\sin bx - \frac{1}{4}\sin 3bx\right)dx$

$= \frac{3}{4}e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx - b\cos bx^{*)}}{a^2+b^2}$

$- \frac{1}{4}e^{ax}\cdot\frac{a\sin 3bx - 3b\cos 3bx^{*)}}{a^2+9b^2} + C.$

*） 利用 1829 题的结果.

2076. $\int xe^x\sin x dx$.

解 $\int xe^x\sin x dx = \int x\sin x d(e^x)$

$= xe^x\sin x - \int e^x(\sin x + x\cos x)dx$

$= xe^x\sin x - \int(\sin x + x\cos x)d(e^x)$

$= e^x(x\sin x - \sin x - x\cos x)$

$+ \int e^x(2\cos x - x\sin x)dx$

$= e^x(x\sin x - \sin x -- x\cos x)$

$$+ 2\int e^x \cos x dx - \int x e^x \sin x dx,$$

于是，

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(x\sin x - \sin x$$

$$- x\cos x) + \int e^x \cos x dx$$

$$= \frac{e^x}{2}(x\sin x - \sin x - x\cos x) + \frac{e^x}{2}(\sin x$$

$$+ \cos x)^{*)} + C$$

$$= \frac{e^x}{2}[x(\sin x - \cos x) + \cos x] + C.$$

*） 利用 1828 题的结果.

**2077.** $\int x^2 e^x \cos x dx.$

**解** $\int x^2 e^x \cos x dx = \int x^2 \cos x d(e^x)$

$$= x^2 e^x \cos x - \int e^x (2x\cos x - x^2 \sin x) dx$$

$$= x^2 e^x \cos x - \int (2x\cos x - x^2 \sin x) d(e^x)$$

$$= x^2 e^x \cos x - e^x(2x\cos x - x^2\sin x)$$

$$+ \int e^x (2\cos x - 4x\sin x - x^2\cos x) dx$$

$$= e^x [x^2(\sin x + \cos x) - 2x\cos x] + 2\int e^x \cos x dx$$

$$- 4\int x e^x \sin x dx - \int x^2 e^x \cos x dx,$$

于是，

$$\int x^2 e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}[x^2(\sin x + \cos x) - 2x\cos x]$$

$$+\int e^x\cos x dx-2\int xe^x\sin x dx$$

$$=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]+\frac{e^x}{2}(\sin x$$

$$+\cos x)^{*)}-2\cdot\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]^{**)}$$

$$+C.$$

$$=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\sin x$$

$$+(\sin x-\cos x)]+C.$$

*) 利用 1828 题的结果.

* *) 利用 2076 题的结果.

2078. $\int xe^x\sin^2 x dx.$

**解** $\int xe^x\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int xe^x(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int xe^x dx-\frac{1}{2}\int xe^x\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}\int x\cos 2x d(e^x)$$

$$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}xe^x\cos 2x$$

$$+\frac{1}{2}\int e^x(\cos 2x-2x\sin 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}xe^x\cos 2x$$

$$+\frac{e^x}{2}\cdot\frac{\cos 2x+2\sin 2x^{*)}}{5}-\int xe^x\sin 2x dx,$$

而

$$\int xe^x\sin 2x dx=\int x\sin 2x d(e^x)$$

$$= xe^x\sin 2x - \int e^x(\sin 2x + 2x\cos 2x)dx$$

$$= xe^x\sin 2x - \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x)^{**)}$$

$$- 2\int xe^x(1 - 2\sin^2 x)dx$$

$$= xe^x\sin 2x - \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x)$$

$$- 2(x-1)e^x + 4\int xe^x\sin^2 x dx.$$

代入得

$$\int xe^x\sin^2 x dx = e^x\Big(\frac{x-1}{2} - \frac{x}{10}(2\sin 2x + \cos 2x)$$

$$+ \frac{1}{50}(4\sin 2x - 3\cos 2x)\Big) + C.$$

*） 利用 1828 题的结果.

* *） 利用 1829 题的结果.

2079. $\int (x - \sin x)^3 dx.$

**解** $\int (x - \sin x)^3 dx$

$$= \int (x^3 - 3x^2\sin x + 3x\sin^2 x - \sin^3 x)dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + 3\int x^2 d(\cos x) + \frac{3}{2}\int x(1 - \cos 2x)dx$$

$$+ \int (1 - \cos^2 x)d(\cos x)$$

$$= \frac{x^4}{4} + 3x^2\cos x - 6\int x\cos x dx + \frac{3}{4}x^2$$

$$- \frac{3}{4}\int xd(\sin 2x) + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2\cos x - 6\int xd(\sin x) - \frac{3}{4}x\sin 2x$$

$$+\frac{3}{4}\int\sin 2x dx+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{4}+3x^2\cos x-6x\sin x-6\cos x$$

$$-\frac{3}{4}x\sin 2x+\cos x-\frac{3}{8}\cos 2x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{4}+3x^2\cos x-x\left(6\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

$$-\left(5\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

2080. $\int\cos^2\sqrt{x}\,dx.$

**解** 设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,dx=2tdt$. 于是

$$\int\cos^2\sqrt{x}\,dx=2\int t\cos^2 t dt=\int t(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int td(\sin 2t)$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{1}{2}\int\sin 2t dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+C$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C.$$

2081. 证明若 $R$ 为有理函数及 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为可公度的数，则积分

$$\int R(e^{a_1x},e^{a_2x},\cdots,e^{a_nx})dx$$

是初等函数.

**证** 按题意 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为可公度的数，于是存在一个实数 $\alpha$，使得

$$a_1=k_1\alpha,a_2=k_2\alpha,\cdots,a_n=k_n\alpha(\alpha\neq 0),$$

其中，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为整数.

设 $e^{\alpha x}=t$，则 $x=\frac{1}{\alpha}\ln t, dx=\frac{1}{\alpha t}dt$.

于是，

$$\int R(e^{\alpha_1 x},e^{\alpha_2 x},\cdots,e^{\alpha_n x})dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int R(t^{k_1},t^{k_2},\cdots,t^{k_n})\frac{dt}{t}=\int R^*(t)dt,$$

其中 $R^*(t)$ 是 $t$ 的有理函数. 因此，积分

$$\int R(e^{\alpha_1 x},e^{\alpha_2 x},\cdots,e^{\alpha_n x})dx$$

为初等函数.

求下列积分：

2082. $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

**解** $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}=\int\frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^2}dx$

$$=\int\frac{dx}{1+e^x}-\int\frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}$$

$$=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx-\int\frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C.$$

2083. $\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$.

**解** $\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}=\int\frac{(e^{2x}-1)+1}{1+e^x}dx$

$$=\int(e^x-1)dx+\int\frac{1}{1+e^x}dx$$

$$=e^x-x+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= e^x - \ln(1 + e^x) + C.$$

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$.

**解** $$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \int \frac{dx}{(e^x + 2)(e^x - 1)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{e^x - 1} dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{e^x + 2} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int\left(1 - \frac{e^x}{e^x - 1}\right)dx - \frac{1}{6}\int\left(1 - \frac{e^x}{e^x + 2}\right)dx$$

$$= -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\ln|e^x - 1| - \frac{x}{6} + \frac{1}{6}\ln(e^x + 2) + C$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\ln|e^x - 1| + \frac{1}{6}\ln(e^x + 2) + C.$$

2085. $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}$.

**解** 设 $e^{\frac{x}{6}} = t$，则 $x = 6\ln t, dx = \frac{6}{t}dt$.

代入得

$$\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} = 6\int \frac{dt}{t(1 + t^3 + t^2 + t)}$$

$$= 6\int \frac{dt}{t(t + 1)(t^2 + 1)}$$

$$= 6\int\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2(t + 1)} - \frac{t + 1}{2(t^2 + 1)}\right]dt$$

$$= 6\ln t - 3\ln(t + 1) - \frac{3}{2}\ln(1 + t^2)$$

$$- 3\text{arc tg}\, t + C$$

$$= x - 3\ln\left[\left(1 + e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1 + e^{\frac{x}{3}}}\right] - 3\text{arc tg}\, e^{\frac{x}{6}} + C.$$

2086. $\int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{(1 + e^{\frac{x}{4}})^2} dx$.

**解** 设 $e^{\frac{x}{4}} = t$，则 $x = 4\ln t, dx = \frac{4}{t}dt$.

代入得

$$\int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{(1 + e^{\frac{x}{4}})^2}dx = 4\int \frac{1 + t^2}{t(1 + t)^2}dt$$

$$= 4\int \left[\frac{1}{t} - \frac{2}{(1 + t)^2}\right]dt$$

$$= 4\ln t + \frac{8}{1 + t} + C = x + \frac{8}{1 + e^{\frac{x}{4}}} + C.$$

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

**解** $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1 - (e^{-\frac{x}{2}})^2}}$$

$$= -2\int \frac{d(e^{-\frac{x}{2}})}{\sqrt{1 - (e^{-\frac{x}{2}})^2}}$$

$$= -2\arcsin\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) + C.$$

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}dx$.

**解** $$\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}dx = \int \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}dx$$

$$= \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

$$= \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2 - 1}} + \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}}$$

$$= \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin(e^{-x}) + C.$$

2089. $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}dx$.

**解** $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}dx=\int \frac{e^{2x}+4e^x-1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}dx$

$$=\int \frac{2e^{2x}+4e^x}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}dx$$

$$+2\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}-\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}$$

$$=\int \frac{d(e^{2x}+4e^x-1)}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}+2\int \frac{d(e^x+2)}{\sqrt{(e^x+2)^2-5}}$$

$$+\int \frac{d(e^{-x}-2)}{\sqrt{5-(e^{-x}-2)^2}}$$

$$=\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln(e^x+2$$

$$+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1})-\arcsin\frac{2e^x-1}{\sqrt{5}e^x}+C.$$

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

**解** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$

$$=\frac{1}{2}\int e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})d(e^{-x})$$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})$$

$$+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}I_1+\frac{1}{4}I_2.$$

对于 $I_1=\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,设 $\sqrt{1+e^x}=t$,则

$$\int \frac{e^{ax}}{x}dx = li(e^{ax}) + C，式中\ lix = \int \frac{dx}{\ln x}$$

来表示.

**证**　因为 $R$ 的分母仅有实根，所以仅包含形如 $(x - a_i)^{k_i}$ 的因子 $(i = 1,2,\cdots l)$. 分解 $R(x)$ 为部分分式得

$$R(x) = P(x) + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j},$$

其中 $P(x)$ 为 $x$ 的多项式，$A_{ij}$ 是常系数.

从而积分

$$\int R(x)e^{ax}dx$$

$$= \int P(x)e^{ax}dx + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\int\frac{e^{ax}}{(x - a_i)^j}dx.$$

上式右端第一个积分显然是初等函数. 而积分

$$\int\frac{e^{ax}}{(x - a_i)^j}dx$$

可用初等函数和超越函数来表示. 事实上，设 $x - a_i = t$，则

$$\int\frac{e^{ax}}{(x - a_i)^j}dx = \int\frac{e^{a(a_i+t)}}{t^j}dt$$

$$= \frac{e^{aa_i}}{1 - j}\int e^{at}d\left(\frac{1}{t^{j-1}}\right)$$

$$= \frac{e^{aa_i}}{1 - j}e^{t}\cdot\frac{1}{t^{j-1}} - \frac{ae^{aa_i}}{1 - j}\int\frac{e^{at}}{t^{j-1}}dt.$$

这样，被积函数中分母的次数便降低一次，再继续运用分部积分法 $(j - 2)$ 次，即可得

$$\int\frac{e^{ax}}{(x - a_i)^j}dx = g_{ij}(x) + B_{ij}li(e^{a(x-a_i)}),$$

其中 $g_{ij}(x)$ 为 $x$ 的初等函数，$B_{ij}$ 为常数.

因而积分

$$\int R(x)e^{ax}dx = \int P(x)e^{ax}dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i} A_{ij}g_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i} A_{ij}B_{ij}li(e^{a(x-a_i)})$$

是初等函数与超越函数之和.

2092. 在甚么情形下，积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$$

（式中 $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$ 及 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为常数）为初等函数?

**解** $\displaystyle\int \frac{a_k}{x^k}e^x dx = -\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}} + \frac{a_k}{k-1}\int\frac{e^x}{x^{k-1}}dx$

$$= \cdots = -\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}} - \frac{a_k}{(k-1)(k-2)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-2}} - \cdots$$

$$- \frac{a_k}{(k-1)!}\cdot\frac{e^x}{x} + \frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx,$$

于是，

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx = \int\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}\right)e^x dx = \sum_{k=0}^{n}\int\frac{a_k}{x^k}dx$$

$$= -\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_k}{(k-1)(k-2)\cdots(k-j)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-j}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx + a_0e^x.$$

因而，若

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!} = 0,$$

即

$$a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0,$$

则积分$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$是初等函数.

求积分:

2093. $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$

**解** $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx=\int\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x dx$

$$=e^x-4li(e^x)-4\int e^x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^x-4li(e^x)-\frac{4}{x}e^x+4\int\frac{e^x}{x}dx$$

$$=e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)+C.$$

2094. $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx.$

**解** $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx=-e^{-x}-li(e^{-x})+C.$

2095. $\int\frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx$

**解** $\int\frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{e^{2x}}{(x-2)(x-1)}dx$

$$=\int\frac{e^{2x}}{x-2}dx-\int\frac{e^{2x}}{x-1}dx$$

$$=e^4\int\frac{e^{2(x-2)}d(x-2)}{x-2}-e^2\int\frac{e^{2(x-1)}d(x-1)}{x-1}$$

$$=e^4 li(e^{2x-4})-e^2 li(e^{2x-2})+C.$$

2096. $\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx.$

解 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = -\int xe^x d\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$= -xe^x\frac{1}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C$

$= \frac{e^x}{x+1} + C.$

2097. $\int \frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx.$

解 $\int \frac{x^4e^{2x}}{(x-2)^2}dx = \int (x^2+4x+12)e^{2x}dx$

$+ 32\int \frac{e^{2x}dx}{x-2} + 16\int \frac{e^{2x}dx}{(x-2)^2}$

$= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4}\right)^{*)} + 32e^4 li(e^{2x-4})$

$- 16\int e^{2x} d\left(\frac{1}{x-2}\right)$

$= \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 + 3x + \frac{21}{2}\right) + 32e^4 li(e^{2x-4})$

$- \frac{16e^{2x}}{x-2} + 32\int \frac{e^{2x}dx}{x-2}$

$= \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} - \frac{32}{x-2}\right) + 64e^4 li(e^{2x-4})$

$+ C.$

*) 利用 2066 题的结果.

求含有 $\ln f(x)$, $\mathrm{arctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ 等函数的积分,其中 $f(x)$ 为代数函数:

2098. $\int \ln^n x dx$ ($n$ 为自然数).

解 $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx$

$= x\ln^n x - nx\ln^{n-1} x + n(n-1)\int \ln^{n-2} x dx = \cdots$

$$= x[\ln^n x - n\ln^{n-1}x + n(n-1)\ln^{n-2}x - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}n!\ln x + (-1)^n n!] + C.$$

2099. $\int x^3\ln^3 x dx.$

**解** $\int x^3\ln^3 x dx = \frac{1}{4}\int \ln^3 x d(x^4)$

$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{4}\int x^3\ln^2 x dx$$
$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}\int \ln^2 x d(x^4)$$
$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{8}\int x^3\ln x dx$$
$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{32}\int \ln x d(x^4)$$
$$= \frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{32}x^4\ln x - \frac{3}{32}\int x^3 dx$$
$$= \frac{1}{4}x^4\left(\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{8}\ln x - \frac{3}{32}\right) + C.$$

2100. $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$

**解** $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx = -\frac{1}{2}\int \ln^3 x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x + \frac{3}{2}\int \frac{\ln^2 x}{x^3}dx$$
$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4}\int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\int \frac{\ln x}{x^3}dx$$
$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x - \frac{3}{4}\int \ln x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2x^2}\ln^3 x - \frac{3}{4x^2}\ln^2 x - \frac{3}{4x^2}\ln x + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right) + C.$$

2101. $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

**解** $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

$$= \int \frac{\ln(x+a)}{x+b}dx + \int \frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$$

$$= \int \ln(x+a)d[\ln(x+b)]$$

$$+ \int \ln(x+b)d[\ln(x+a)]$$

$$= \ln(x+a)\ln(x+b) - \int \ln(x+b)d[\ln(x+a)]$$

$$+ \int \ln(x+b)d[\ln(x+a)]$$

$$= \ln(x+a)\ln(x+b) + C.$$

2102. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})dx$.

**解** $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$$- 2\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$- 2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\sqrt{1+x^2})$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$- 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2\int dx$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$- 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$$

2103. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$.

解 $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x+C.$$

2104. $\int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

解 $\int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int \ln x d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

2105. $\int x\operatorname{arctg}(x+1)dx$.

解 $\int x\operatorname{arctg}(x+1)dx=\frac{1}{2}\int\operatorname{arctg}(x+1)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C.$$

2106. $\int\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

解 $\int\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+C.$$

2107. $\int x\arcsin(1-x)dx$.

**解** $\int x\arcsin(1-x)dx=\frac{1}{2}\int\arcsin(1-x)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx.$$

对于积分 $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx$，设 $1-x=t$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx=-\int\frac{1-2t+t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\int\frac{-t^2+1}{\sqrt{1-t^2}}dt-2\int\frac{d}{\sqrt{1-t^2}}+2\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\int\sqrt{1-t^2}dt-2\arcsin t-2\sqrt{1-t^2}$$

$$=\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin t-2\arcsin t$$

$$-2\sqrt{1-t^2}+C_1$$

$$=\frac{-3-x}{2}\sqrt{2x-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin(1-x)+C_1.$$

于是，

$$\int x\arcsin(1-x)dx$$

$$=\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)-\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2}+C.$$

2108. $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx$.

**解** $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx=x\arcsin\sqrt{x}$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$$

对于积分 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$，设 $\sqrt{x}=t$，则 $dx=2tdt$.

于是，

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=2\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-2\int\sqrt{1-t^2}dt+2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-t\sqrt{1-t^2}-\arcsin t+2\arcsin t+C_1$$

$$=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C_1.$$

因而，

$$\int\arcsin\sqrt{x}\,dx=\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C.$$

2109. $\int x\arccos\frac{1}{x}dx$.

**解** $\int x\arccos\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int\arccos\frac{1}{x}d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}x)\sqrt{x^2-1}+C.$$

2110. $\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx$.

**解** $\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx=\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}d(x+1)$

2113. $\int x\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)dx$.

解 $\int x\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)dx$

$$=\frac{1}{2}\int \operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}\int x^2\left(\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx+\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$$

$$-\int x\operatorname{arctg}x dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\int\frac{2x^2dx}{1+x^2}$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)-\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$$

$$+\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$$

$$-\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)$$

$$+x-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

$$=x-\operatorname{arctg}x+\left(\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}\right)$$

$$[\ln(1+x^2)-1]+C.$$

2114. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

**解** $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C.$$

2115. $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

**解** $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

$$=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\sqrt{1+x^2}+C.$$

求含有双曲线函数的积分：

2116. $\int \operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2xdx$.

**解** $\int \operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2xdx=\frac{1}{4}\int\operatorname{sh}^2 2xdx$

$$=\frac{1}{8}\int\operatorname{sh}^2 2xd(2x)$$

$$= -\frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32}^{*)} + C.$$

*） 利用 1761 题的结果.

2117. $\int \operatorname{ch}^4 x dx$.

解 $\int \operatorname{ch}^4 x dx = \int\left(\frac{1+\operatorname{ch} 2x}{2}\right)^2 dx$

$$= \int\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + \frac{1}{4}\operatorname{ch}^2 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 4x\right)^{*)} + C$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x + C.$$

*） 利用 1762 题的结果.

2118. $\int \operatorname{sh}^3 x dx$.

解 $\int \operatorname{sh}^3 x dx = \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x dx = \int (\operatorname{ch}^2 x - 1) d(\operatorname{ch} x)$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C.$$

2119. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx$.

解 $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx$

$$= \int \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x)\operatorname{sh} 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 4x \operatorname{sh} 2x dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (\operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 2x) dx - \frac{1}{4}\int \operatorname{sh} 4x dx$$

$$= \frac{1}{24}\operatorname{ch} 6x - \frac{1}{16}\operatorname{ch} 4x - \frac{1}{8}\operatorname{ch} 2x + C.$$

2120. $\int \operatorname{th} x dx$.

**解** $\int \operatorname{th} x dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \ln(\operatorname{ch} x) + C.$

2121. $\int \operatorname{cth}^2 x dx$.

**解** $\int \operatorname{cth}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx$

$= x - \operatorname{cth} x + C.$

2122. $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx$.

**解** $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx = \int \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} dx$

$$= \int \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{e^{2x} - e^{-2x}}} dx$$

$$= \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} - 1}} - \int \frac{e^{-2x} dx}{\sqrt{1 - e^{-4x}}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x})}{\sqrt{(e^{2x})^2 - 1}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{-2x})}{\sqrt{1 - (e^{-2x})^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + \frac{1}{2} \arcsin(e^{-2x}) + C.$$

2123. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}$.

**解** 设 $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$，则

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2},\ \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$x = \ln \frac{1+t}{1-t},\ dx = \frac{2}{1-t^2} dt.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{\text{sh}x+2\text{ch}x}=\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{1+2\text{th}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$$

2124. $\int\text{sh}ax\sin bx\,dx$.

**解** $\int\text{sh}ax\sin bx\,dx=\frac{1}{2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$$-\frac{1}{2}\int e^{-ax}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}{}^{*)}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-ax}\cdot\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}{}^{*)}+C$$

$$=\frac{a\,\text{ch}ax\cdot\sin bx-b\,\text{sh}ax\cdot\cos bx}{a^2+b^2}+C.$$

*) 利用 1829 题的结果.

2125. $\int\text{sh}ax\cos bx\,dx$.

**解** $\int\text{sh}ax\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$

$$-\frac{1}{2}\int e^{-ax}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}{}^{*)}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-ax}\cdot\frac{a\cos bx-b\sin bx}{a^2+b^2}{}^{*)}+C$$

$$=\frac{a\,\text{ch}ax\cdot\cos bx+b\,\text{sh}ax\cdot\sin bx}{a^2+b^2}+C.$$

*) 利用 1828 题的结果.

## §6. 函数的积分法的各种例子

求积分：

2126. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

**解** $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^6(1+x^2)}dx$

$$= \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$$

$$= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(1+x^2)}dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{x^2}{x^4(1+x^2)}dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

2127. $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$.

**解** $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3} = \int \frac{(x^2-1)+1}{(1-x^2)^3}dx$

$$= -\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2-1)^3}$$

$$= -\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \left(\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}\right)^{*)}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} + \frac{x}{4(1-x^2)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{-\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1}\right\}$$
$$+\frac{x}{4(1-x^2)^2}=\frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$
$$+C.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

2128. $\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

**解** 因为

$$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1),$$
$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$
$$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2+x\sqrt{3}+1)$$
$$(x^2-x\sqrt{3}+1),$$

所以

$$\frac{1}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\right),$$
$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right),$$
$$\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1}+\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

于是,

$$\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}dx$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1}dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{3}}[\ln(x^2 + x\sqrt{3} + 1)$$

$$- \ln(x^2 - x\sqrt{3} + 1)] + C_1$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}\right)$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + C.$$

2129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

**解** 设 $\sqrt[6]{x} = t$，则

$$\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^3 dt}{t+1}$$

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(1+t) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x})$$

$$+ C(x > 0)..$$

2130. $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$.

**解** 设 $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$，则

$$x = \frac{1}{1+t^2} \quad dx = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt.$$

代入得

$$\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=-2\int\frac{dt}{(t^2+1)^4}$$

$$=-2\left(\frac{t}{6(t^2+1)^3}+\frac{5t}{24(t^2+1)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{5t}{16(t^2+1)}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}t\right)^{*)}+C_1$$

$$=-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}$$

$$-\frac{5}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C_1$$

$$=-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}$$

$$+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}+C(0<x<1).$$

*） 利用 1921 题的递推公式.

2131. $\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx.$

**解** 设 $x=\sin t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,则 $dx=\cos t dt$.

代入得

$$\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin t+2}{\sin^2 t}dt$$

$$=\int\frac{dt}{\sin t}+2\int\frac{dt}{\sin^2 t}$$

$$=\ln|\csc t-\operatorname{ctg}t|-2\operatorname{ctg}t+C$$

$$=-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}+C(0<|x|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = -3\int \frac{t}{t^3+1}dt$$

$$= \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt$$

$$= \ln|t+1| - \frac{1}{2}\int \frac{2t-1}{t^2-2t+1}dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

其中 $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$.

2135. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

**解** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}}$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|x^{-3}+\frac{1}{2}+\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}\right| + C_1$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{x^3}\right| + C.$$

**注** 以上实际已设 $x>0$. 对于 $x<0$,利用 1856 题的方法可得同一结果.

2136. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

**解** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-2x^{-2}-x^{-4}}}$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}}\right) + C_1$$

$$= -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right) + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right) + C.$$

2137. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx.$

**解** $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= \int \frac{(1+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}dx$$

$$= \int \frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$$

$$= -\frac{2}{x} - x - 2\int \sqrt{1-x^2}\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{2}{x} - x - \frac{2}{x}\sqrt{1-x^2} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{2+x^2}{x} - \frac{2}{x}\sqrt{1-x^2} - 2\arcsin x + C.$$

2138. $\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}.$

**解** $\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$

$$= \int \frac{(1+x)(x-\sqrt{x+x^2})}{(x+\sqrt{x+x^2})(x-\sqrt{x+x^2})}dx$$

$$= \int \frac{x+x^2-\sqrt{x+x^2}-x\sqrt{x+x^2}}{-x}dx$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx + \int \sqrt{x+x^2}dx$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 + 2\int \sqrt{1+(\sqrt{x})^2}d(\sqrt{x})$$

$$+ \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x} + \ln(\sqrt{x}$$

$$+ \sqrt{1+x}) + \frac{2x+1}{4}\sqrt{x+x^2}$$

$$- \frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right) + C_1$$

$$= -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x+x^2})$$

$$- \frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right) + C_1$$

$$= -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}$$

$$+ \frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right) + C,$$

其中设 $x > 0$,对于 $x < -1$,同样可获得上述结果,但要注意加对数中的绝对值.

2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx.$

**解** $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx$

$$= -\int \ln(1+x+x^2)d\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int\frac{2x+1}{(x+1)(1+x+x^2)}dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int\left(\frac{x+2}{1+x+x^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+1}{1+x+x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{1+x+x^2}\right)dx-\ln|1+x|$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\ln|1+x|+C$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

**2140.** $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx.$

**解** $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx$

$$=\int\arccos(2x-3)d(x^2+3x)$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)$$

$$+\int\frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)$$

$$-\int\sqrt{-x^2+3x-2}dx$$

$$-3\int \frac{-2x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx$$
$$+7\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$$
$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)$$
$$-\int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}d\left(x-\frac{3}{2}\right)$$
$$-6\sqrt{-x^2+3x-2}+7\int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$
$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)$$
$$-\frac{2x-3}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}$$
$$-\frac{1}{8}\arcsin(2x-3)-6\sqrt{-x^2+3x-2}$$
$$-7\arccos(2x-3)+C_1$$
$$=\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3)$$
$$-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+C(1<x<2).$$

**2141.** $\int x\ln(4+x^4)dx.$

**解** $\int x\ln(4+x^4)dx=\frac{1}{2}\int \ln(4+x^4)d(x^2)$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int \frac{x^5}{4+x^4}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int\left(x-\frac{4x}{4+x^4}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-x^2+2\text{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

2142. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

**解** $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=(\operatorname{sgn}x)\int\frac{\arcsin x dx}{x^3\sqrt{x^{-2}-1}}+\int\arcsin x d(\arcsin x)$$

$$=-(\operatorname{sgn}x)\int\arcsin x d(\sqrt{x^{-2}-1})$$

$$+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-(\operatorname{sgn}x)\cdot\left((\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\arcsin x-\int\frac{dx}{|x|}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|$$

$$+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C(0<|x|<1).$$

2143. $\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

**解** $\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\int\ln(1+\sqrt{1+x^2})d(1+\sqrt{1+x^2})$$

$$=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

2144. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

**解** $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$

$$=\frac{1}{3}\int \ln\sqrt{x^2-1}\,d[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}]$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}$$

$$-\frac{1}{3}\int (x^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x}{x^2-1}dx,$$

对于右端的积分，设 $\sqrt{x^2+1}=t$，则 $x^2+1=t^2$，$xdx=tdt$. 于是，

$$-\frac{1}{3}\int(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\frac{xdx}{x^2-1}=-\frac{1}{3}\int\frac{t^4dt}{t^2-2}$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(t^2+2+\frac{4}{t^2-2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{9}t^3-\frac{2}{3}t-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}+C.$$

最后得到

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}+C\ (|x|>1).$$

2145+. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$.

**解** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$

$$= -\int \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{1-x^2})$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx.$$

右端的积分

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx$$

$$= \int \frac{(1-x^2)(2-x)}{x(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{2+x-x^2}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -2\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$= -2\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right| + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$= -2\ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1.$$

于是,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin x+C(0<x<1).$$

2146. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$

**解** 设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，不妨限制 $-\pi<x<\pi$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(1+t+t^2)-\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{1}{2}}{(1+t+t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t+t^2}-\frac{1}{4}\int \frac{(2t+1)dt}{(1+t+t^2)^2}$$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1+t+t^2)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4(1+t+t^2)}$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{2t+1}{3(1+t+t^2)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}$$

$$+C_1$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}^{**)}+C.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

$$= 32 \cdot \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\int \frac{\sin 4x}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}}dx\right.$$

$$\left.- \int \frac{\sin 4x}{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}}dx\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2})}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2})}{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln \frac{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} + C.$$

2148. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1 + \cos x}}$.

**解** 设 $1 + \cos x = t^2$，并限制 $t > 0$，则

$$\sin x = t\sqrt{2 - t^2}, dx = -\frac{2}{\sqrt{2 - t^2}}dt.$$

于是，

$$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1 + \cos x}} = -\int \frac{2dt}{t^2(2 - t^2)}$$

$$= -\int\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2 - t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln \frac{\sqrt{2} + t}{\sqrt{2} - t} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}} + C.$$

2149. $\int \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1}\operatorname{arctg} x dx$.

**解** $\int \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1}\operatorname{arctg} x dx = \int\left(a - \frac{a - b}{x^2 + 1}\right)\operatorname{arctg} x dx$

$$= ax\operatorname{arctg}x - a\int\frac{xdx}{1+x^2} - \frac{a-b}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$$

$$= a\left(x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) - \frac{a-b}{2}(\operatorname{arctg}x)^2 + C.$$

2150. $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx.$

**解** $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$

$$= \int\left(a+\frac{a+b}{x^2-1}\right)\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$$

$$= ax\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - a\int\frac{2xdx}{x^2-1} + \frac{a+b}{2}\int\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|d\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$

$$= a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln|x^2-1|\right) + \frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

2151. $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$

**解** $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int\ln x\, d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

2152. $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \operatorname{arctg}x\, d(\sqrt{1+x^2})$

$$= \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

2153⁺. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$

解 $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}} = -\int \frac{d(1+\cos 2x)}{\sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}}$

$$= -\ln(1+\cos 2x+\sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}) + C_1$$

$$= -\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}) + C.$$

2154. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int x^2\arccos x\, d(\sqrt{1-x^2})$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x + \int \sqrt{1-x^2}\left(2x\arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{2}{3}\int \arccos x\, d[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}] - \int x^2 dx$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arccos x - \frac{2}{3}\int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}x^3$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arccos x$$

$$-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{3}x^3+C$$

$$=-\frac{6x+x^3}{9}-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x+C.$$

2155. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$

**解** $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)\operatorname{arctg} x dx$

$$=\frac{1}{3}\int \operatorname{arctg} x d(x^3)-\int \operatorname{arctg} x dx$$

$$+\int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x)$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x-\frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{1+x^2}-x \operatorname{arctg} x$$

$$+\int \frac{x dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx-x \operatorname{arctg} x$$

$$+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)-x \operatorname{arctg} x$$

$$+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C$$

$$=-\frac{1}{6}x^2-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg} x$$

$$+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C.$$

2156. $\int \frac{x \operatorname{arcctg} x}{(1+x^2)^2}dx.$

**解** $\int \frac{x \operatorname{arcctg} x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int \operatorname{arcctg} x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$=-\frac{\operatorname{arcctg}x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{\operatorname{arcctg}x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}x\right)^{*)}+C$$

$$=-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\operatorname{arcctg}x-\frac{x}{4(1+x^2)}+C.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

2157[+]. $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx.$

**解** $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2(1-x^2)}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}.$$

对于右端积分设 $x=\operatorname{tg}t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,则

$$\sqrt{1+x^2}=\sec t,dx=\sec^2 tdt.$$

于是,

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2})}=\int\frac{\sec tdt}{1-\operatorname{tg}^2 t}$$

$$=\int\frac{\cos tdt}{\cos^2 t-\sin^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C,$$

因而，

$$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}\right|+C.$$

2158. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx.$

**解** $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx = x\sqrt{1-x^2}\arcsin x$

$$-\int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{2}$$

$$-\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$-\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx,$$

于是，

$$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}(\arcsin x)^2$$

$$+C \quad (|x|<1).$$

2159. $\int x(1+x^2)\operatorname{arcctg} x dx.$

**解** $\int x(1+x^2)\operatorname{arcctg} x dx$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{arcctg} x d[(1+x^2)^2]$$

$$= \frac{1}{4}(1+x^2)^2\text{arcctg}x + \frac{1}{4}\int(1+x^2)dx$$

$$= \frac{1}{4}(1+x^2)^2\text{arcctg}x + \frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + C.$$

2160. $\int x^x(1+\ln x)dx.$

解 $\int x^x(1+\ln x)dx = \int e^{x\ln x}(1+\ln x)dx$

$$= \int e^{x\ln x}d(x\ln x)$$

$$= e^{x\ln x} + C = x^x + C(x>0).$$

2161. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx.$

解 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = -\int \arcsin e^x d(e^{-x})$

$$= -e^{-x}\arcsin e^x + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$= -e^{-x}\arcsin e^x - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}$$

$$= -e^{-x}\arcsin e^x - \ln(e^{-x} + \sqrt{(e^{-2x}-1)}) + C$$

$$= x - e^{-x}\arcsin e^x - \ln(1+\sqrt{1-e^{2x}}) + C(x<0).$$

2162. $\int \frac{\text{arc tg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx.$

解 $\int \frac{\text{arc tg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx = \int\left(e^{-\frac{x}{2}} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}\right)\text{arc tg}e^{\frac{x}{2}}dx$

$$= -2\int \text{arc tg}e^{\frac{x}{2}}d(e^{-\frac{x}{2}})$$

$$-2\int \text{arc tg}e^{\frac{x}{2}}d(\text{arc tg}e^{\frac{x}{2}})$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}}\text{arc tg}e^{\frac{x}{2}} + \int \frac{dx}{1+e^x} - (\text{arc tg}e^{\frac{x}{2}})^2$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}} + \int\left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$- (\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}})^2$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}} + x - \ln(1+e^x) - (\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{2}})^2$$

$$+ C.$$

2163. $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2 - (e^{x-1}+1)^2}$.

**解** $$\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2 - (e^{x-1}+1)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{(e^{x+1} - e^{x-1})(e^{x+1} + e^{x-1} - 2)}$$

$$= \int \frac{dx}{e^{2x}(e - e^{-1})(e + e^{-1} + 2e^{-x})}$$

$$= \int \frac{dx}{e^{2x} \cdot 2\operatorname{sh}1 \cdot (2\operatorname{ch}1 + 2e^{-x})}$$

$$= \int \frac{dx}{4e^x\operatorname{sh}1 \cdot (1 + e^x\operatorname{ch}1)}$$

$$= \frac{1}{4\operatorname{sh}1}\int\left(\frac{1}{e^x} - \frac{\operatorname{ch}1}{1+e^x\operatorname{ch}1}\right)dx$$

$$= -\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1} - \frac{\operatorname{ch}1}{4\operatorname{sh}1}\int\left(1 - \frac{e^x\operatorname{ch}1}{1+e^x\operatorname{ch}1}\right)dx$$

$$= -\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1} - \frac{\operatorname{cth}1}{4}[x - \ln(1+e^x\operatorname{ch}1)] + C.$$

2164. $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}\,dx$.

**解** $$\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}\,dx = \int \frac{\operatorname{th}^2 x + 1}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}}dx$$

$$= \int \frac{\frac{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}dx}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}}$$

$$= \int \frac{2\text{ch}^2 x - 1}{\sqrt{1 + \text{th}^2 x}} d(\text{th}x)$$

$$= 2\int \frac{\text{ch}^2 x d(\text{th}x)}{\sqrt{1 + \text{th}^2 x}} - \int \frac{d(\text{th}x)}{\sqrt{1 + \text{th}^2 x}}$$

$$= 2\int \frac{dx}{\sqrt{\text{th}^2 x + 1}} - \ln(\text{th}x + \sqrt{1 + \text{th}^2 x})$$

$$= 2\int \frac{\text{ch}x dx}{\sqrt{\text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x}} - \ln(\text{th}x + \sqrt{1 + \text{th}^2 x})$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{d(\sqrt{2}\,\text{sh}x)}{\sqrt{1 + 2\text{sh}^2 x}} - \ln(\text{th}x + \sqrt{1 + \text{th}^2 x})$$

$$= \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}\,\text{sh}x + \sqrt{1 + 2\text{sh}^2 x})$$

$$- \ln(\text{th}x + \sqrt{1 + \text{th}^2 x}) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln \frac{\sqrt{1 + \text{th}^2 x} + \sqrt{2}\,\text{th}x}{\sqrt{1 + \text{th}^2 x} - \sqrt{2}\,\text{th}x}$$

$$- \ln(\text{th}x + \sqrt{1 + \text{th}^2 x}) + C.$$

2165. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx.$

**解** $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx$

$$= \int \left( \frac{1 + 2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right) e^x dx$$

$$= \int \frac{e^x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int e^x \text{tg} \frac{x}{2} dx$$

$$= \int e^x d\left(\text{tg} \frac{x}{2}\right) + \int \text{tg} \frac{x}{2} d(e^x)$$

$$= e^x \text{tg} \frac{x}{2} - \int \text{tg} \frac{x}{2} de^x + \int \text{tg} \frac{x}{2} d(e^x)$$

2170. $\int e^{-|x|}dx$.

**解** 当 $x \geqslant 0$ 时，$\int e^{-|x|}dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C_1$，

当 $x < 0$ 时，$\int e^{-|x|}dx = \int e^{x}dx = e^{x} + C_2$.

由于 $e^{-|x|}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，故其原函数必在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微，而且任意两个原函数之间差一常数. 今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知，必有

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + C_1, x \geqslant 0, \\ e^{x} + C_2, x < 0. \end{cases}$$

其中 $C_1, C_2$ 是两个常数. 由于 $0 = F(0) = \lim\limits_{x \to 0-} F(x)$，即 $0 = -1 + C_1 = 1 + C_2$，因此 $C_1 = 1, C_2 = -1$，从而

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, x \geqslant 0; \\ e^{x} - 1, x < 0. \end{cases}$$

所以，

$$\int e^{-|x|}dx = \begin{cases} 1 - e^{-x} + C, x \geqslant 0; \\ e^{x} - 1 + C, x < 0. \end{cases}$$

2171. $\int \max(1, x^2)dx$.

**解** 仿上题，当 $|x| \leqslant 1$ 时，

$$\int \max(1, x^2)dx = \int dx = x + C_1;$$

当 $x > 1$ 时，

$$\int \max(1, x^2)dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2,$$

当 $x < -1$ 时，

$$\int \max(1,x^2)dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_3.$$

今求满足 $F(1)=1$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知

$$F(x)=\begin{cases} x+C_1, & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & x>1; \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x<-1. \end{cases}$$

其中 $C_1, C_2, C_3$ 是三个常数. 由于 $1 = F(1) = \lim\limits_{x\to 1+0} F(x)$, 即 $1 = 1 + C_1 = \frac{1}{3} + C_2$, 故 $C_1 = 0, C_2 = \frac{2}{3}$. 再由 $F(-1) = \lim\limits_{x\to -1-0} F(x)$, 得 $-1 = -\frac{1}{3} + C_3$, 故 $C_3 = -\frac{2}{3}$.

由此可知

$$F(x)=\begin{cases} x, & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}, & x>1; \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}, & x<-1. \end{cases}$$

最后得

$$\int \max(1,x^2)dx = \begin{cases} x + C, & |x| \leqslant 1; \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sgn} x + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

**2172.** $\int \varphi(x)dx$, 其中 $\varphi(x)$ 为数 $x$ 至其最接近的整数之距离.

**解** 显然 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故其原函数

在$(-\infty,+\infty)$上连续可微. 今求满足$F(0)=0$的原函数. 由于

$$\varphi(x)=\begin{cases}x-n, 当 n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2} 时;\\ -x+n+1, 当 n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1 时\end{cases}$$

故

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+C_n, 当 n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2} 时;\\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x+C_n', 当 n+\dfrac{1}{2}\\ \leqslant x<n+1 时.\end{cases}$$

其中$C_n,C_n'$是两个常数. 由$\lim\limits_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)-0}F(x)=F\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$,

得$C_n'=C_n-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2$.

故

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+C_n, 当 n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2} 时;\\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2+C_n,\\ 当 n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1 时.\end{cases}$$

由$\lim\limits_{x\to(n+1)-0}F(x)=F(n+1)$

得递推公式$C_{n+1}=C_n+n+\dfrac{3}{4}$.

显然$0=F(0)=C_0$. 由此得$C_n=\dfrac{1}{4}n(2n+1)$.

于是

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+\dfrac{1}{4}n(2n+1)=\dfrac{x}{4}\\ \quad+\dfrac{1}{4}\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left[1-2\left(\dfrac{1}{2}-x+n\right)\right],\\ \qquad\text{当} n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}\text{时;}\\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x-\dfrac{1}{4}(2n+1)(n+1)=\dfrac{x}{4}\\ \quad+\dfrac{1}{4}\cdot\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\left[1-2\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\right],\\ \qquad\text{当} n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{时}\end{cases}$$

记$(x)=x-[x]$表数$x$去掉其整数部分$[x]$后所剩下的零头部分，那么最后得 $F(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\left((x)-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left\{1-2\left|(x)-\dfrac{1}{2}\right|\right\}(-\infty<x<+\infty)$.

故

$$\int\varphi(x)dx=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}+C(-\infty<x<+\infty).$$

2173. $\int[x]|\sin\pi x|dx \quad (x\geqslant 0)$.

**解** 分别求出在区间$[0,1)$，$[1,2)$，$[2,3)$，…，$[[x],x]$上满足$F(0)=0$的原函数$F(x)$的增量如下：

在$[0,1)$上，$\int 0\cdot\sin\pi x dx=C_1$，$F(1)-F(0)=0$；

在$[1,2)$上，$-\int\sin\pi x dx=\frac{1}{\pi}\cos\pi x+C_2$，$F(2)$

$-F(1)=\frac{2}{\pi}$;

在 $[2,3)$ 上，$2\int\sin\pi x dx=-\frac{2}{\pi}\cos\pi x+C_3$，$F(3)-F(2)=\frac{2\cdot 2}{\pi}$；……

在 $[[x],x]$ 上，$(-1)^{[x]}[x]\int\sin\pi x dx=(-1)^{[x]}\cdot[x]\left(-\frac{1}{\pi}\right)\cos\pi x+C_{[x]+1}$，

$$F(x)-F([x])=\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x).$$

从而，对于 $x\geqslant 0$，得到

$$\begin{aligned}\int[x]|\sin\pi x|dx&=F(x)+C=(F(1)-F(0))\\&\quad+(F(2)-F(1))+(F(3)-F(2))+\cdots\\&\quad+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)+C\\&=\frac{2}{\pi}+\frac{2\cdot 2}{\pi}+\cdots+\frac{2([x]-1)}{\pi}\\&\quad+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)+C\\&=\frac{[x]\cdot([x]-1)}{\pi}+\frac{(-1)^{[x]}\cdot[x]\cdot(-1)^{[x]}}{\pi}\\&\quad-\frac{(-1)^{[x]}\cdot[x]\cdot\cos\pi x}{\pi}+C\\&=\frac{[x]}{\pi}([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x)+C.\end{aligned}$$

**2174.** $\int f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{当 } |x|\leqslant 1;\\ 1-|x|, & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$

**解** 当 $|x|\leqslant 1$ 时，

$$\int f(x)dx = \int (1-x^2)dx = x - \frac{x^3}{3} + C_1;$$

当 $x > 1$ 时，$\int f(x)dx = \int (1-|x|)dx$

$$= x - \frac{x|x|}{2} + C_2;$$

当 $x < -1$ 时，$\int f(x)dx = \int (1-|x|)dx$

$$= x - \frac{x|x|}{2} + C_3.$$

今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0)=0$，$\lim\limits_{x\to1+0} F(x) = F(1)$，$\lim\limits_{x\to-1-0} F(x) = F(-1)$，仿2171题，可得

$$F(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3}, |x| \leqslant 1; \\ x - \dfrac{x|x|}{2} + \dfrac{1}{6}, x > 1; \\ x - \dfrac{x|x|}{2} - \dfrac{1}{6}, x < -1. \end{cases}$$

于是

$$\int f(x)dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + C, |x| \leqslant 1; \\ x - \dfrac{x|x|}{2} + \dfrac{1}{6}sgnx + C, |x| > 1. \end{cases}$$

**2175.** $\int f(x)dx$，式中

$$f(x) = \begin{cases} 1, 若 -\infty < x < 0; \\ x+1, 若 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2x, 若 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

**解** 当 $-\infty < x < 0$ 时，

$$\int f(x)dx=\int dx=x+C_1;$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\int f(x)dx=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C_2;$$

当 $1<x<+\infty$ 时，

$$\int f(x)dx=\int 2xdx=x^2+C_3.$$

今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0-0}F(x)=F(0)$, $\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)=F(1)$，仿 2171 题，可得

$$F(x)=\begin{cases}x, \text{当} -\infty<x<0 \text{时};\\ \dfrac{x^2}{2}+x, \text{当} 0\leqslant x\leqslant 1 \text{时};\\ x^2+\dfrac{1}{2}, \text{当} 1<x<+\infty \text{时}.\end{cases}$$

故

$$\int f(x)dx=\begin{cases}x+C, \text{当} -\infty<x<0 \text{时};\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, \text{当} 0\leqslant x\leqslant 1 \text{时};\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, \text{当} 1<x<+\infty \text{时}.\end{cases}$$

2176. 求 $\int xf''(x)dx$.

**解** $\int xf''(x)dx=\int xd[f'(x)]=xf'(x)$

$$-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)+C.$$

2177. 求 $\int f'(2x)dx$.

**解**[*] $\int f'(2x)dx = \frac{1}{2}\int f'(2x)d(2x) = \frac{1}{2}f(2x) + C.$

* 这里暗中分别假定了被积函数 $f'$,$f'$ 是连续的.

2178. 设 $f'(x^2) = \frac{1}{x}(x > 0)$,求 $f(x)$.

**解** 由 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$,得 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ (x > 0)$.

于是,

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

2179. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$,求 $f(x)$.

**解** 由 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 得 $f'(x) = 1 - x$.

于是,

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (1 - x)dx$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + C(|x| \leqslant 1).$$

2180. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, 当\ 0 < x \leqslant 1; \\ x, 当\ 1 < x < +\infty \end{cases}$

及 $f(0) = 0$,求 $f(x)$.

**解** 设 $t = \ln x$,则

$$f'(t) = \begin{cases} 1, -\infty < t \leqslant 0, \\ e^t, 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

于是,

$$f(x) = \int f'(x)dx = \begin{cases} x + C_1, -\infty < x \leqslant 0; \\ e^x + C_2, 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

其中 $C_1$,$C_2$ 是两个常数. 由假定 $f(0) = 0$,得 $C_1 = 0$.

再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性，知 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$，由此得 $C_2=-1$.

于是

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{当} -\infty < x \leqslant 0 \text{时;} \\ e^x - 1, \text{当} 0 < x < +\infty \text{时.} \end{cases}$$

$f(x)$ 于已知闭区间$[a,b]$上可积分的充要条件.

2181. 把区间$[-1,4]$分为$n$个相等的子区间,并取这些子区间中点的坐标作自变量$\xi$的值($i=0,1,\cdots,n-1$).求函数$f(x)=1+x$在此区间上的积分和$S_n$.

**解** 每一个子区间的长为$\frac{5}{n}$,第$i$个子区间为$\left(-1+\frac{5i}{n},\ -1+\frac{5i}{n}+\frac{5}{n}\right)$,其中点$\xi_i=-1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{n}$.于是,所求的积分和为

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{1+\left[-1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{5}{n}\right]\right\}\cdot\frac{5}{n}$$

$$=\frac{25}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)=12\frac{1}{2}.$$

2182. 设

(a) $f(x)=x^3\quad[-2\leqslant x\leqslant 3]$;

(б) $f(x)=\sqrt{x}\quad[0\leqslant x\leqslant 1]$;

(в) $f(x)=2^x\quad[0\leqslant x\leqslant 10]$.

把相应区间等分成$n$份,求给定函数$f(x)$在相应区间上的积分下和$\underline{S_n}$及积分上和$\overline{S_n}$.

**解** (a) 把区间$[-2,3]$ $n$等分,则每一个子区间的长为$h=\frac{5}{n}$,且第$i$个子区间为

$[-2+ih,\ -2+(i+1)h]$($i=0,1,\cdots,n-1$).

若令$m_i$及$M_i$分别表示函数$f(x)$在第$i$个子区间上的下确界及上确界,则因$f(x)=x^3$为增函数,所以

$m_i=(-2+ih)^3$,

$$M_i = [-2+(i+1)h]^3 (i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

于是,

$$\underline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (-2+ih)^3 h$$

$$= -8nh + 12h^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i - 6h^3 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + h^4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^3$$

$$= -40 + \frac{12 \cdot 25n(n-1)}{2n^2} - \frac{125(2n^3-3n^2+n)}{n^3}$$

$$+ \frac{625(n^4-2n^3+n^2)}{4n^4}$$

$$= \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2};$$

$$\overline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [-2+(i+1)h]^3$$

$$= \frac{65}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

(б) $h = \frac{1}{n}$,

$$m_i = \sqrt{\frac{i}{n}},$$

$$M_i = \sqrt{\frac{i+1}{n}} (i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

于是,

$$\underline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}};$$

$$\overline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{i+1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n}}.$$

(в) $h = \frac{10}{n}$,

$$m_i = 2^{ih},$$
$$M_i = 2^{(i+1)h} \quad (i = 0,1,2,\cdots,n-1).$$

于是,

$$\underline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} h2^{ih} = \frac{h(2^{nh}-1)}{2^h-1} = \frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)};$$

$$\overline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} h2^{(i+1)h} = \frac{h2^h(2^{nh}-1)}{2^h-1}$$
$$= \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}.$$

2183. 分闭区间〔1,2〕为 $n$ 份,使这分点的横坐标构成一等比级数*).以求函数 $f(x) = x^4$ 在〔1,2〕上的积分下和.当 $n \to \infty$ 时此和的极限等于甚么?

**解** 设 $\sqrt[n]{2} = q$ 或 $2 = q^n$,分点为

$$1 = q^0 < q^1 < q^2 < \cdots < q^n = 2.$$

由于 $f(x) = x^4$ 在〔1,2〕上为增函数,故积分下和为

$$\underline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [(q^i)^4 \cdot (q^{i+1} - q^i)]$$
$$= (q-1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (q^i)^5 = \frac{(q-1)(q^{5n}-1)}{q^5-1}$$
$$= \frac{31 \cdot (\sqrt[n]{2}-1)}{\sqrt[n]{32}-1},$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S_n} = 31 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$$
$$= 31 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{16} + \sqrt[n]{8} + \sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{2} + 1}$$

$$= \frac{31}{5}.$$

*) 原题为"使这 $n$ 份的长构成等比级数",现根据原题答案予以改正.

2184$^+$. 从积分的定义出发,求

$$\int_0^T (v_0 + gt)dt,$$

其中 $v_0$ 及 $g$ 为常数.

**解** $f(t) = v_0 + gt$ 在$[0,T]$上为增函数$(T > 0)$.

$$h = \frac{T}{n},$$

$$m_i = v_0 + igh,$$

$$M_i = v_0 + (i+1)gh \quad (i = 0,1,2,\cdots,n-1).$$

于是

$$\underline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1}(v_0 + igh)\cdot h = nv_0h + gh^2\sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= v_0T + \frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= v_0T + \frac{gT^2}{2} - \frac{gT^2}{2n},$$

$$\overline{S_n} = \sum_{i=0}^{n-1}[v_0 + (i+1)gh]h = v_0T + \frac{gT^2}{2} + \frac{gT^2}{2n}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n} = \lim_{n\to\infty}\overline{S_n} = v_0T + \frac{gT^2}{2},$$

所以

$$\int_0^T (v_0 + gt)dt = v_0T + \frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方法进行积分区间的分段,把积分看作是

对应的积分和的极限，来计算定积分.

2185. $\int_{-1}^{2} x^2 dx$.

**解** 将区间$[-1,2]$ $n$ 等分，得 $h=\frac{3}{n}$. 取

$$\xi_i = -1 + ih (i = 0,1,\cdots,n-1).$$

作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}(-1+ih)^2 h = nh - 2h^2\sum_{i=0}^{n-1} i + h^3\sum_{i=0}^{n-1} i^2$$
$$= 3 + \frac{9-9n}{2n^2}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 3.$$

由于 $f(x)=x^2$ 在$[-1,2]$上连续，故积分$\int_{-1}^{2} x^2 dx$ 是存在的，且它与分法无关，同时也与点的取法无关. 因此上述和的极限就是所求的积分值(以后如无特殊情况，不再说明)，即定积分

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = 3.$$

2186. $\int_0^1 a^x dx (a>0)$.

**解** 当 $a \neq 1$ 时，将区间$[0,1]$ $n$ 等分，得 $h=\frac{1}{n}$.

取

$$\xi_i = ih (i = 0,1,\cdots,n-1).$$

作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h a^{ih} = \frac{h(a^{nh}-1)}{a^h - 1} = \frac{a-1}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} = \frac{a-1}{\ln a},$$

即

$$\int_0^1 a^x dx = \frac{a-1}{\ln a} \quad (a \neq 1).$$

当 $a = 1$ 时，积分显然为 1.

2187. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

**解** 将区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $n$ 等分，得 $h = \frac{\pi}{2n}$. 取

$$\xi_i = ih (i = 0,1,\cdots,n-1).$$

作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h \sin ih.$$

由于

$$\sin ih = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \cdot \left[\cos\frac{2i-1}{2}h - \cos\frac{2i+1}{2}h\right],$$

所以

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\cos\frac{2i-1}{2}h - \cos\frac{2i+1}{2}h\right) \\ &= \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}} \left(\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{2n-1}{2}h\right). \end{aligned}$$

最后得到

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\frac{2n-1}{4n}\pi\right)$$

$$= 1.$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

2188. $\int_0^x \cos t dt$.

**解** 将区间$[0,x]$$n$ 等分，得 $h = \frac{x}{n}$. 取

$$\xi_i = ih (i = 0,1,\cdots,n-1).$$

与 2187 题类似，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} h\cos ih$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}} \cdot \left[\sin\frac{h}{2} + \sin\frac{2n-1}{2}h\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{x}{2n} + \sin\frac{(2n-1)x}{2n}\right]$$

$$= \sin x.$$

即

$$\int_0^x \cos t\, dt = \sin x.$$

2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^2} (0 < a < b)$.

**解** 将区间$[a,b]$ 作 $n$ 等分，设分点为

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

取 $\xi_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}} (i = 0,1,2,\cdots,n-1)$. 显然 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}} (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

即

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

2190. $\int_a^b x^m dx \quad (0 < a < b; m \neq -1)$.

**解** 选择诸分点，使它们的横坐标构成一等比级数，即

$$a < aq < aq^2 < \cdots < aq^i < \cdots < aq^{n-1} < aq^n = b,$$

其中

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

取 $\xi_i = aq^i \quad (i = 0,1,2,\cdots,n-1)$. 作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^m (aq^{i+1} - aq^i)$$

$$= a^{m+1}(q-1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^{(m+1)i}$$

$$= a^{m+1}(q-1)\frac{q^{n(m+1)}-1}{q^{m+1}-1}$$

$$= (b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\frac{q-1}{q^{m+1}-1}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}q=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{q-1}{q^{m+1}-1}$$

$$=(b^{m+1}-a^{m+1})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q^m+q^{m-1}+\cdots+1}$$

$$=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1},$$

即

$$\int_a^b x^m dx=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x}(0<a<b)$.

**解** 同 2190 题的分法及取法,得和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^{-1}\cdot(aq^{i+1}-aq^i)$$

$$=n(q-1)$$

$$=n\left[\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right].$$

由于$\lim\limits_{t\to0}\frac{\alpha^t-1}{t}=\ln\alpha(\alpha>0)$(可用洛比塔法则),命$\alpha=\frac{b}{a}$,而$\frac{1}{n}$是趋向于 0 的变量,应用这一极限即得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n\left[\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right]$$

$$=\ln\frac{b}{a},$$

而

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\left(\sin^2\frac{i\pi}{n}+\cos^2\frac{i\pi}{n}-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\left[\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{i\pi}{n}\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}-j\sin\frac{i\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}+j\sin\frac{i\pi}{n}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i)$$

$$=\frac{t^{2n}-1}{(t+1)(t-1)}$$

$$=\frac{t^{2n}-1}{t^2-1}.$$

即

$$t^{2n}-1=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

当 $t=\alpha$ 时，利用上式就可把 $S_n$ 表成下面的形式

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha^{2n}-1)\right].$$

于是，(a) 当 $|\alpha|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$，即

$$\int_0^{\pi}(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=0.$$

(б) 当 $|\alpha|>1$ 时，把 $S_n$ 改写成

$$S_n=2\pi\ln|\alpha|+\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\right]$$

后，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}=1$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\pi\ln|\alpha|$，即

$$\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=2\pi\ln|\alpha|.$$

2193. 设函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

其中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$，$x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 及 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ $(x_0=a,x_n=b)$.

**证** 因为 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 均在$[a,b]$上连续，所以它们的乘积 $f(x)\varphi(x)$ 也在$[a,b]$上连续. 因此，积分

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$ 存在.

由于 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，故有界，即存在常数 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$ $(a\leqslant x\leqslant b)$；又由于$\varphi(x)$在$[a,b]$连续，故一致连续，因此任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $\max|\Delta x_i|<\delta$ 时，恒有

$$|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)}(i=0,1,\cdots,n-1).$$

从而

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i)\varphi(\theta_i)-f(\xi_i)\varphi(\xi_i)]\Delta x_i\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\cdot|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|\cdot|\Delta x_i|$$

$$<\sum_{i=0}^{n-1}M\cdot\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot|\Delta x_i|=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}[f(\xi_i)\varphi(\theta_i)-f(\xi_i)\varphi(\xi_i)]\Delta x_i$$
$$=0. \qquad (2)$$

由(1)式和(2)式，最后得到

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i.$$

2194. 证明不连续的函数：

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

于区间[0,1]上可积分.

**证** 首先注意，函数 $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 在[0,1]上有界，其不连续点是

$$0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

并且，$f(x)$ 在 [0,1] 的任何部分区间上的振幅 $\omega\leqslant 2$.

任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$上只有有限个间断点，故可积. 因此存在 $\eta>0$，使对$\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$的任何分法，只要 $\max|\Delta x'_i|<\eta$，就有 $\sum\limits_{i'}\omega'_i\Delta x'_i<\frac{\varepsilon}{5}$. 显然，若$[\alpha,\beta]\subset\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$，则对于$[\alpha,\beta]$的任何分法，只要 $\max|\Delta x'_i|<\eta$，也有 $\sum\limits_{i'}\omega'_i\Delta x'_i<\frac{\varepsilon}{5}$.

令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{5},\eta\right\}$. 现设 $0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=1$ 是[0,1]的满足 $\max|\Delta x_i|<\delta$

的任一分法. 设 $x_{i_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{5} < x_{0+1}$.

由上述，有 $\sum_{i=i_{0+1}}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{5}$. 又，显然

$$\sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i \leqslant 2 \sum_{i=0}^{i_0} \Delta x_i < 2 \cdot \frac{2\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5}.$$

故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=i_{0+1}}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

于是，$f(x)$ 在〔0,1〕可积.

2195. 证明黎曼函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{若 } x \text{ 为无理数}, \\ \frac{1}{n}, \text{若 } x = \frac{m}{n}, \end{cases}$$

（式中 $m$ 及 $n(n \geqslant 1)$ 为互质的整数）在任何有穷的区间上可积分.

**证** 为简单起见，我们只考虑闭区间〔0,1〕（对于一般的有限闭区间〔$a$,$b$〕，可类似地讨论之）.

命 $\lambda > 0$ 将区间〔0,1〕分成长度 $\Delta x_i < \lambda$ 的若干部分区间，取任意的自然数 $N$，将所有的部分区间分成两类：把包含分母 $n \leqslant N$ 的数 $\frac{m}{n}$ 的区间列入第一类，而把不包含上述数的那些区间列入第二类. 对于第一类，由于满足条件 $n \leqslant N$ 的数 $\frac{m}{n}$ 只有有限个，个数记为 $k = k_N$，

所以第一类区间的个数就不大于 $2k$，而它们长度的总和不超出 $2k\lambda$；对于第二类，由于在这些区间内除含有无理数外，仅能含 $n>N$ 的有理数$\frac{m}{n}$，而在这种有理点上，$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}$，所以，振幅 $\omega_i$ 小于$\frac{1}{N}$.

这样一来，和数 $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$ 就分成两部分，分别估计它们的值，即得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<2k_N\lambda+\frac{1}{N}.$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取定一个 $N>\frac{2}{\varepsilon}$，然后取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4k_N}$. 于是，当 $\lambda<\delta$ 时，必有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

所以函数 $\varphi(x)$ 在〔0,1〕上可积分.

2196. 证明函数

$$\text{当 } x\neq 0, f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\text{及 } f(0)=0,$$

于闭区间〔0,1〕上可积分.

**证** 首先注意，函数 $f(x)$ 在〔0,1〕上有界，其不连续点是

$$0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

并且，$f(x)$ 在$[0,1]$ 的任何部分区间上的振幅 $\omega \leqslant 1$.

任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在$\left[\frac{\varepsilon}{3},1\right]$上只有有限个间断点，故可积. 因此，存在 $\eta > 0$，使对$\left[\frac{\varepsilon}{3},1\right]$的任何分法，只要 $\max|\Delta x_{i'}| < \eta$，就有 $\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3}$. 显然，若$[\alpha,\beta] \subset \left[\frac{\varepsilon}{3},1\right]$，则对于$[\alpha,\beta]$ 的任何分法，只要 $\max|\Delta x_{i'}| < \eta$，也有 $\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3}$.

令 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3},\eta\right\}$. 现设 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = 1$ 是$[0,1]$ 的满足 $\max|\Delta x_i| < \delta$ 的任一分法. 设 $x_{i_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} < x_{i_0+1}$. 由上述，有

$$\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又，显然 $\sum\limits_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i \leqslant \sum\limits_{i=0}^{i_0}\Delta x_i < \frac{2\varepsilon}{3}$. 故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

于是

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0.$$

由此可知，$f(x)$ 在$[0,1]$ 上可积.

2197. 证明迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0, 若 x 为无理数, \\ 1, 若 x 为有理数,\end{cases}$$
于任意区间上不可积分.

**证** 在任意区间$[a,b]$的任何部分区间上均有

$$\omega_i=1,$$

所以$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=b-a$,它不趋于零.因此函数$\chi(x)$在$[a,b]$上不可积分.

2198. 设函数$f(x)$于$[a,b]$上可积分,且

$$f_n(x)=\sup f(x)\quad 当\ x_i<x\leqslant x_{i+1},$$

其中$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)\left(\begin{array}{l}i=0,1,\cdots,n-1; \\ n=1,2,\cdots\cdots\end{array}\right)$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$

**证** $f_n(x)$是不超过$n+1$个间断点的阶梯函数,因此$f_n(x)$在$[a,b]$上可积分,于是

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leqslant\int_a^b|f_n(x)-f(x)|dx$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f_n(x)-f(x)|dx$$
$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\omega_i dx=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\to 0$$
$$\left(当\ \max|\Delta x_i|=\frac{b-a}{n}\to 0\ 时\right),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

2199. 证明：若函数 $f(x)$ 于$[a,b]$上可积分，则有连续函数 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 的叙列，使

$$\int_a^c f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n(x)dx, \text{当 } a\leqslant c\leqslant b.$$

**证** 将区间$[a,b]$作 $n$ 等分，设分点为

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{n-1}^{(n)}<x_n^{(n)}=b,$$

即 $x_i^{(n)}=a+\dfrac{i}{n}(b-a), i=0,1,\cdots,n.$

在 $\Delta x_i^{(n)}=[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$ 上令 $\varphi_n(x)$ 为过点$[x_{i-1}^{(n)}, f(x_{i-1}^{n})]$及$[x_i^{(n)},f(x_i^{(n)})]$的直线，即当 $x\in[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$时，令

$$\varphi_n(x)=f(x_{i-1}^{(n)})+\frac{x-x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}}[f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})],$$

则 $\varphi_n(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数，因此，它是可积分的．

若令 $m_i^{(n)}, M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$ 分别表示函数 $f(x)$ 在$[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$上的下确界，上确界及振幅，则当 $x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$时，

$$m_i^{(n)}\leqslant\varphi_n(x)\leqslant M_i^{(n)}, m_i^{(n)}\leqslant f(x)\leqslant M_i^{(n)},$$

从而

$$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\omega_i^{(n)}.$$

于是，当 $a\leqslant c\leqslant b$ 时，

$$\left|\int_a^c f(x)dx-\int_a^c\varphi_n(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^c|f(x)-\varphi_n(x)|dx$$

$$\leqslant\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}} |f(x) - \varphi_n(x)| dx$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)}.$$

由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积分，因此，

当 $\max|\Delta x_i^{(n)}| = \frac{b-a}{n} \to 0$ 时，必有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)} \longrightarrow 0.$$

由此可知

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx (a \leqslant c \leqslant b).$$

2200. 证明：若有界的函数 $f(x)$ 于闭区间$[a,b]$上可积分，则其绝对值 $|f(x)|$ 于$[a,b]$上也可积分，并且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx.$$

**证**　对于区间$[x_i, x_{i+1}]$上任意两点 $x'$ 及 $x''$，总有

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leqslant |f(x') - f(x'')|,$$

所以函数 $|f(x)|$ 在$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅 $\omega_i^*$ 不超过 $f(x)$ 在此区间上的振幅 $\omega_i$，因而

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^* \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \longrightarrow 0,$$

即 $|f(x)|$ 在$[a,b]$上可积分.

其次，因为

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

所以

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leqslant \int_a^b f(x) dx \leqslant \int_a^b |f(x)| dx,$$

$< \delta$,就有 $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\eta\varepsilon}{2\Omega}$.($\omega_i(f)$ 表 $f(x)$ 在$[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅).

下证对$[a,b]$ 的任何分法,只要 $\max|\Delta x_i| < \delta$,就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i < \varepsilon.$$

事实上,将诸区间$[x_i, x_{i+1}]$ 分成两组,第一组是满足 $\omega_i(f) < \eta$ 的(其下标以"$i'$"记之),第二组是满足 $\omega_i(f) \geqslant \eta$ 的(下标以"$i''$"记之).

于是,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i \\
&= \sum_{i'}\omega_{i'}(\varphi(f))\Delta x_{i'} + \sum_{i''}\omega_{i''}(\varphi(f))\Delta x_{i''} \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i'}\Delta x_{i'} + \Omega\sum_{i''}\Delta x_{i''},
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
&\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega} > \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i \\
&= \sum_{i'}\omega_{i'}(f)\Delta x_{i'} + \sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''} \\
&\geqslant \sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''} \geqslant \eta\sum_{i''}\Delta x\, i'',
\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \Omega \cdot \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \varepsilon.$$

由此可知，$\varphi[f(x)]$ 在$[a,b]$上可积．

2203. 若函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 可积分，则函数 $f[\varphi(x)]$ 是否也必定可积分？

**解**　未必．例如函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x = 0, \\ 1 & 若\ x \neq 0, \end{cases}$$

及 $\varphi(x)$ 为黎曼函数(参阅 2195 题)．

它们在任何有穷的区间上均可积(前者不连续点仅为原点一个，且是有界函数，因而是可积分的)．

但 $f[\varphi(x)] = \chi(x)$，利用 2197 题的结果得知它在任何有穷的区间上不可积分．

2204. 设函数 $f(x)$ 于闭区间$[A,B]$上可积分，证明函数 $f(x)$ 有积分的连续性，即是说

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0,$$

式中$[a,b] \subset [A,B]$．

**证**　方法一：

不妨设 $A < a, b < B$. 由于 $f(x)$ 在$[A,B]$可积，故任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$，使对$[A,B]$的任何分法，只要 $max|\Delta x_i| < \eta$，就恒有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon;$$

显然，对$[A,B]$的任一子区间$[A',B']$的任何分法，只要 $max|\Delta x_{i'}| < \eta$，也有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon. \tag{1}$$

今设 $0 < h < \delta = \min\left\{\frac{\eta}{2}, \frac{B-b}{3}\right\}$,则对于 $h$,存在正整数 $n = n(h)$,使有

$a + (2n-2)h < b \leqslant a + 2nh < a + (2n+1)h < B$.

用 $\omega_i$ 表 $f(x)$ 在$[a+ih, a+(i+2)h]$上的振幅,则

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx$$

$$\leqslant \int_a^{a+2nh} |f(x+h) - f(x)|dx$$

$$= \sum_{i=0}^{2n-1}\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} |f(x+h) - f(x)|dx \leqslant \sum_{i=0}^{2n-1}\omega_i h$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}2h + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h.$$

显然,$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}\cdot 2h$ 是对于区间$[a, a+2nh]$的分法 $a < a + 2h < a + 4h < \cdots < a + 2nh$ 所作的(1)式中的和,而$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h$ 是对于区间$[a+h, a+(2n+1)h]$的分法

$a + h < a + 3h < a + 5h < \cdots < a + (2n+1)h$ 所作的(1)式中的和. 故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}2h < \varepsilon, \sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h < \varepsilon.$$

从而

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{h\to 0+}\int_b^a |f(x+h)-f(x)|dx = 0.$$

同理可证

$$\lim_{h\to 0-}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx = 0.$$

于是，得

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx = 0.$$

方法二：

由 2199 题的结果可知：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 在$[A,B]$ 上可积，故存在$[A,B]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

由于$\varphi(x)$在$[A,B]$上一致连续，故存在$\delta>0$，使当 $|x'-x''|<\delta(x'\in[A,B],x''\in[A,B])$ 时，恒有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是，当 $|h|<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx\\
\leqslant &\int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|dx\\
&+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx\\
&+\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx\\
\leqslant &\ 2\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|dx\\
&+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx
\end{aligned}$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

故

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

2205. 设函数 $f(x)$ 于闭区间$[a,b]$上可积分，证明等式

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

当而且仅当对属于闭区间$[a,b]$内函数 $f(x)$ 连续的一切点有 $f(x) = 0$ 时方成立.

**证** 先证必要性：

采用反证法. 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，但 $f(x_0) \neq 0$，则存在 $\delta > 0$，$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a,b]$，使当 $|x - x_0| \leqslant \delta$ 时

$$|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

从而

$$\int_a^b f^2(x) dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x) dx > \frac{f^2(x_0)}{4} \cdot 2\delta$$

$$= \frac{\delta \cdot f^2(x_0)}{2} > 0.$$

这与假设$\int_a^b f^2(x) dx = 0$ 矛盾.

再证充分性：

也即要证：$f(x)$ 在$[a,b]$上可积条件下，假设 $f(x)$ 在一切连续点 $x_0$ 上均有 $f(x_0) = 0$，则必有

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0.$$

证明分两个部分. 第一，首先要指出当 $f(x)$ 在

$[a,b]$ 上可积时，$f(x)$ 的连续点在 $[a,b]$ 中必定是稠密的．此处所谓"稠密"性是指：对于任意区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 总存在一点 $x_0\in[\alpha,\beta]$，使 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续．第二，利用假设，并借助于稠密性，可证得充分性．现在先证第二部分，如下：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全体连续点 $X$ 的稠密性以及当 $x_0\in X$ 时有 $f(x_0)=0$ 的假设．便知，对于区间 $[a,b]$ 的任一分法，均可适当地取 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$，使 $f(\xi_i)=0$. 从而积分和 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f^2(\xi_i)\Delta x_i=0$. 由此，再注意到 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 的可积性，便有

$$\int_a^b f^2(x)dx=\lim_{\max|\Delta xi|\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f^2(\xi_i)\Delta x_i=0.$$

如今再补证第一部分：应当首先指明，若 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，则对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $[\alpha,\beta]$ 的子区间 $[\alpha',\beta']$ 使得振幅

$$\omega(\alpha',\beta')<\varepsilon.$$

事实上，如果上述结论不成立，则存在一个 $\varepsilon_0>0$，使对于 $[\alpha,\beta]$ 的任意分法，有

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i\geqslant\varepsilon_0\sum_i\Delta x=\varepsilon_0(\beta-\alpha)>0,$$

这与 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积矛盾，因此，结论为真．

今取 $[\alpha,\beta]$ 为 $[a_1,b_1]$．由于 $f(x)$ 在 $\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},\ b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]$ 上可积，故存在区间 $[a_2,b_2]\subset\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},\ b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]\subset[a_1,b_1]$，使

$$\omega(a_2,b_2] < \frac{1}{2},$$

同样，存在区间$[a_3,b_3] \subset \left[a_2+\frac{b_2-a_2}{4}, b_2-\frac{b_2-a_2}{4}\right] \subset [a_2,b_2]$，使

$$\omega[a_3,b_3] < \frac{1}{3}.$$

这样继续下去，得一串闭区间$[a_n,b_n]$ $(n=1,2,3,\cdots)$，满足

$\alpha = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1 = \beta$，并且 $b_n - a_n \leqslant \frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}} \to 0$，$\omega[a_n,b_n] < \frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

由区间套定理，诸$[a_n,b_n]$具有唯一的公共点$c$. 显然$a_n < c < b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 下证 $f(x)$ 在点 $c$ 连续.

任给$\varepsilon>0$，取正整数$n_0$使$n_0>\frac{1}{\varepsilon}$. 再取$\delta>0$使$(c-\delta,c+\delta)\subset[a_{n_0},b_{n_0}]$. 于是，当$|x-c|<\delta$时，必有

$$|f(x)-f(c)| \leqslant \omega[a_{n_0},b_{n_0}] < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

故$f(x)$在点$x=c$连续. 到此，充分性证毕.

## §2. 利用不定积分计算定积分的方法

1° 牛顿—莱布尼兹公式　若函数$f(x)$于闭区间$[a,b]$上有定义而且连续，$F(x)$为它的原函数(即$F'(x)=f(x)$)，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b{}^*.$$

定积分$\int_a^b f(x)dx$的几何意义表示由曲线$y=f(x)$,$OX$轴及垂直于$OX$轴的二直线$x=a$和$x=b$四者所围成的代数面积$S$(图4.1).

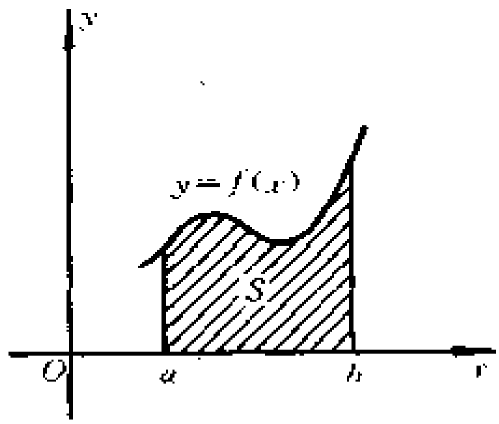


图 4.1

2° 部分积分法　若函数$f(x)$和$g(x)$于闭区间$[a,b]$上连续并有连续导数$f'(x)$和$g'(x)$,则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx =$$

$$f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

3° 变数代换　若:(1)函数$f(x)$于闭区间$[a,b]$内连续,(2)函数$\varphi(t)$及其导数$\varphi'(t)$皆于闭区间$[\alpha,\beta]$上连续,其中$a=\varphi(\alpha)$,$b=\varphi(\beta)$;(3)复合函数$f[\varphi(t)]$于闭区间$[\alpha,\beta]$上有定义并连续,则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

利用牛顿—莱布尼兹公式,求下列定积分并绘出对应的曲边图形面积:

**2206.** $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$

**解** $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{8}$

$= 11\frac{1}{4}$ (图4.2).

**2207.** $\int_0^\pi \sin x\, dx$

---

* 本节个别题是收敛的广义积分,仍按此公式计算. —— 题解编者注.

**解** $\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2$ （图 4.3）.

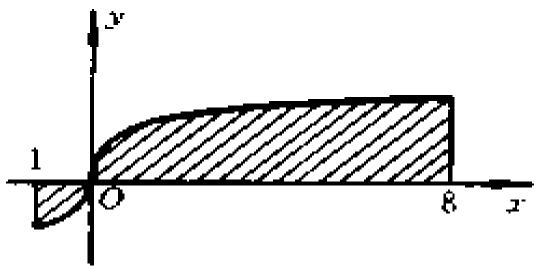


图 4.2

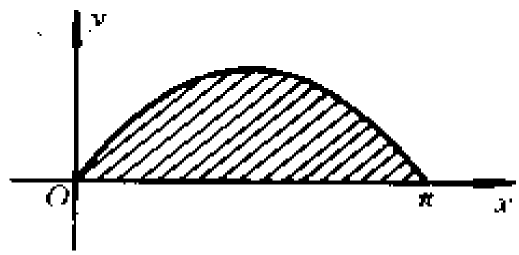


图 4.3

**2208.** $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

**解** $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ （图 4.4）.

**2209.** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

**解** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{3}$ （图 4.5）.

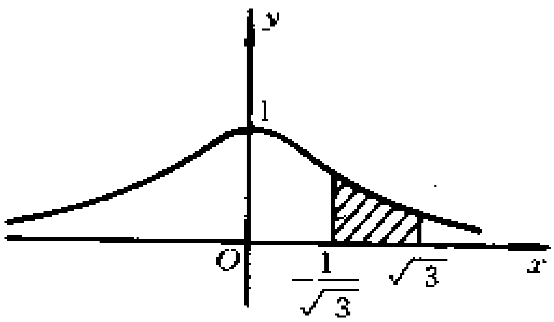


图 4.4

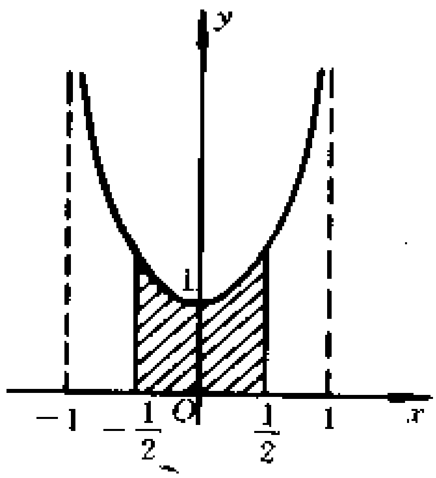


图 4.5

$$= \frac{\pi}{2\sin\alpha} \quad (\text{图 } 4.8).$$

**注** 以下图形从略.

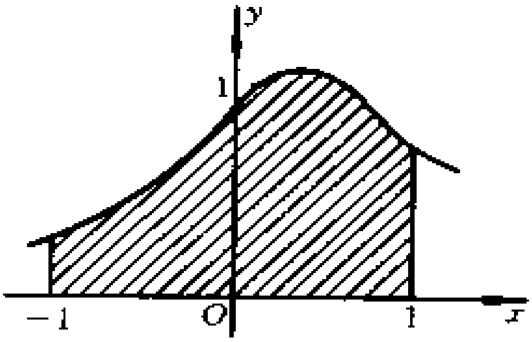


图 4.8

2213. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$ $(0 \leqslant \varepsilon < 1)$.

**解** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + \int_{\pi}^{0} \frac{d(2\pi - x)}{1+\varepsilon\cos(2\pi - x)}$$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\varepsilon\cos x}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\varepsilon^2\cos^2 x}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-\varepsilon^2)\cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + (1-\varepsilon^2)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

2214. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ $(|a|<1,$ $|b|<1,ab>0)$.

**解** 在公式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left|Ax+\frac{B}{2}+\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right|+C^{*)}$$

中，设

$$Ax^2+Bx+C=(1-2ax+a^2)(1-2bx^2+b^2),$$

两端求导数得

$$Ax+\frac{B}{2}=-b(1-2ax+a^2)-a(1-2bx+b^2).$$

由此推得，当 $x=1$ 时，在对数符号下的表达式的值为

$$-a(1-b)^2-b(1-a)^2+2\sqrt{ab}(1-a)(1-b)$$
$$=-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1+\sqrt{ab})^2,$$

而当 $x=-1$ 时，得到值 $-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1-\sqrt{ab})^2$.

于是，

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

*) 利用 1850 题的结果.

2215. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$ $(ab\neq 0)$.

**解** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$

$$=\frac{1}{|ab|}\text{arc tg}\left(\frac{|a|\text{tg }x}{|b|}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}\,*)}=\frac{\pi}{2|ab|}.$$

*） 利用 2030 题的结果.

2216. 设

(a) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$； (б) $\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2xdx}{2+\text{tg}^2x}$；

(в) $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\text{arc tg }\frac{1}{x}\right)dx$.

说明为甚么运用牛顿—莱布尼兹公式会得到不正确的结果.

**解** (a) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1}=-2<0.$$

这是不正确的.事实上,由于函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}>0$,所以当积分存在时,其值必大于零.原因在于该函数在区间 $[-1,1]$ 上有第二类间断点 $x=0$.因而不能运用公式.

(б) 若应用公式得

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2xdx}{2+\text{tg}^2x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

但 $\frac{\sec^2x}{2+\text{tg}^2x}>0$,故积分若存在,必为正.原因在于原函数在 $[0,2\pi]$ 上 $x=\frac{\pi}{2}$,$x=\frac{3\pi}{2}$ 为第一类不连续点,

故不能直接运用公式.

(B) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}>0.$$

这是不正确的,因为$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1+x^2}<0.$ 所以,积分值必为负.原因在于原函数 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 为第一类不连续点,故不能直接运用公式.

2217. 求$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx.$

**解** 我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx+\int_{0}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}.$$

注意,被积函数$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$显然在 $x=0$ 间断,但易知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)=0$,故 $x=0$ 是可去间断点.若我们补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0,则被积函数在整个〔$-1$,1〕上都是连续的,从而积分$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$ 存在.以后,凡是被积函数有可去间断点的情形,我们都按此法处理,理解为连续函数的

积分，另外，

$$\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

应理解为

$$\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\lim_{\eta\to0+}\int_{-1}^{-\eta}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$$

$$=\lim_{\eta\to0+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\bigg|_{-1}^{-\eta}=\frac{1}{3}.$$

以后，凡是定积分存在而原函数有间断点的情况，都按此理解，省去取极限的式子，但应理解为取极限的结果.

2218. 求$\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}dx$

**解** $\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}dx$

$$=\sum_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sqrt{\sin^2x}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{100}\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin^2x}dx$$

$$=100\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sin xdx=200\sqrt{2}.$$

利用定积分求下列和的极限值：

2219. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

**解** 这是和的极限，该极限即为函数 $f(x)=x$ 在区间〔0,1〕上的定积分. 事实上，函数 $f(x)=x$ 在〔0,1〕上是连续的，因而可积分. 这样便可将〔0,1〕$n$ 等份，并取 $\xi_i$ 为小区间的左端点，这样作出的和的极限就是题中所要求的极限. 于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

以下各题不再说明.

2220. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

**解** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$

2221. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

**解** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-\frac{\pi}{4}.$$

2222. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right]$.

**解** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi xdx$

$$=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

2223. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$.

**解** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p+1}$.

2224. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right]$.

**解** $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$$
$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

2225. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\ln i\right)-n\ln n\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x dx^{*)}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\ln x dx$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}x(\ln x-1)\Big|_\varepsilon^1=-1.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

*） 参看后面 2388 题.

2226. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

**解** $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$$
$$=\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

弃掉高阶同等无穷小，求下列和的极限值：

2227. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}\right.$
$\left.+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$.

**解** 由于对于一切 $k<n$，$3<n$ 有

$$0\leqslant\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\leqslant\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}$$
$$\leqslant\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)$$
$$\leqslant\frac{\sin\frac{k\pi}{n^2}}{\cos\frac{k\pi}{n^2}}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)$$
$$\leqslant\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

从而，

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$
$$\leqslant 2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\to 0\ (n\to+\infty).$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}$$
$$-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{k^2\pi}{n^2}\right)$$

$$= \int_0^1 \pi(x + x_2)dx = \frac{5\pi}{6}.$$

2228. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

**解** 由于

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}(1 + \alpha_r),$$

式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

于是,

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$= \left(\lim_{n\to 1}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)$$

$$= \pi\int_0^1\frac{dx}{2+\cos\pi x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

2229. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}\quad(x>0).$

**解** 由于

$$0 \leqslant \sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)} - \left(x+\frac{k}{n}\right)$$

$$0<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}<\frac{2}{n}\to 0$$

$(n\to\infty)$.

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}}\cdot 2^{\frac{k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}.$$

2231. 求：$\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx$，$\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx$，

$\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx$.

**解** $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx=0$

$$\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx=-\frac{d}{da}\int_b^a \sin x^2 dx$$

$$=-\sin a^2$$

$$\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx=\sin b^2.$$

2232. 求：(a) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$；

(б) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$；

(в) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

**解** (a) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

$$= \left( \frac{d}{d(x^2)} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt \right) \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= 2x \cdot \sqrt{1+x^4};$$

(б) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

$$= \frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{d}{dx}\int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$= \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{d}{d(x^3)}\int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$- \frac{d}{dx}(x^2) \cdot \frac{d}{d(x^2)}\int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}};$$

(в) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt$

$$= \frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{0} \cos(\pi t^2)\,dt$$

$$+ \frac{d}{dx}\int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt$$

$$= -\frac{d(\sin x)}{dx} \cdot \frac{d}{d(\sin x)}\int_0^{\sin x} \cos(\pi t^2)\,dt$$

$$+ \frac{d(\cos x)}{dx} \cdot \frac{d}{d(\cos x)}\int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2)\,dt$$

$$= -\cos x \cdot \cos(\pi \sin^2 x)$$

$$- \sin x \cdot \cos(\pi \cos^2 x)^{*)}$$

$$= (\sin x - \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x).$$

*) $\cos(\pi\cos^2 x) = \cos(\pi - \pi\sin^2 x)$

$$= -\cos(\pi \sin^2 x).$$

2233. 求:

(а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}$； (б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$；

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$.

**解** (а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x^2)=1$；

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

$=\dfrac{\pi^2}{4}$；

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\cdot\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

**2234.** 证明

当 $x\to\infty$ 时，$\int_0^x e^{x^2}dx\sim\dfrac{1}{2x}e^{x^2}$.

**证** 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{x^2}dx}{\frac{1}{2x}e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}=1,$$

所以，当 $x\to\infty$ 时，

$$\int_0^x e^{x^2}dx\sim\frac{1}{2x}e^{x^2}.$$

2235. 求：

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin x}\,dx}.$$

**解** $$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin x}\,dx}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}(\sin x)'}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg}x)}(\operatorname{tg}x)'}.$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\operatorname{tg}x}{\sin(\operatorname{tg}x)}}$$

$$\cdot\lim_{x\to+0}\cos^3x=1.$$

2236. 设 $f(x)$ 为连续正值函数，证明当 $x\geqslant0$ 时，函数

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

增加.

**证** 首先注意，$\lim\limits_{x\to0+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{xf(x)}{f(x)}=0$，故若规定 $\varphi(0)=0$，则 $\varphi(x)$ 是 $x\geqslant0$ 上的连续函数. 另外，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\left\{xf(x)\int_0^x f(t)dt\right.$$
$$\left.-f(x)\int_0^x tf(t)dt\right\}$$
$$=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\cdot\int_0^x (x-t)f(t)dt$$
$$>0(\text{当 } x>0 \text{ 时}),$$

所以,$\varphi(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时是增加的.

2237. 求

(a) $\int_0^2 f(x)dx$,设 $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, \text{当 } 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(б) $\int_0^1 f(x)dx$,设 $f(x)=\begin{cases}x, \text{当 } 0\leqslant x\leqslant t,\\ t\cdot\dfrac{1-x}{1-t}, \text{当 } t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

**解** (a) $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx$
$$=\frac{5}{6}.$$

(б) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^t xdx+\int_t^1 t\cdot\frac{1-x}{1-t}dx$
$$=\frac{t}{2}.$$

2238. 计算下列积分并把它们当作参数 $\alpha$ 的函数作出积分 $I=I(\alpha)$的图形. 设:

(a) $I=\int_0^1 x|x-\alpha|dx$;

(б) $I=\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}dx$;

(в) $I=\int_0^{\pi}\frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$.

**解** (a) 分三种情况：

1° 若 $\alpha<0$,则

$$I=\int_0^1 x(x-\alpha)dx=\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2};$$

2° 若 $\alpha>1$,则

$$I=\int_0^1 x(\alpha-x)dx=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3};$$

3° 若 $0\leqslant\alpha\leqslant1$,则

$$I=\int_0^{\alpha}x(\alpha-x)dx+\int_{\alpha}^1 x(x-\alpha)dx$$
$$=\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}.$$

于是，

$$\int_0^1 x|x-\alpha|dx=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}, \text{当 } \alpha<0,\\ \frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}, \text{当 } 0\leqslant\alpha\leqslant1,\\ \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}, \text{当 } \alpha>1 \text{ 图(4.9)}.\end{cases}$$

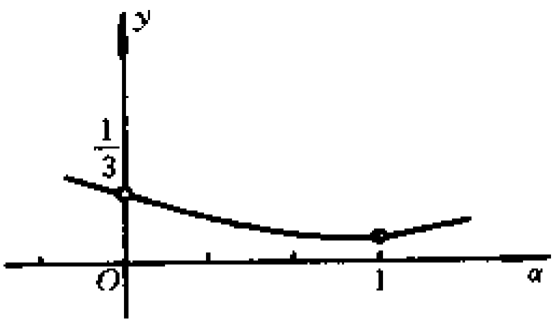


图 4.9

(6) 分两种情况：

1° 若$|\alpha|\leqslant 1$，则

$$I=\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\cos x+\alpha^2}dx$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi \frac{4\alpha^2(1-\cos^2 x)dx}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi \frac{[(1+\alpha^2)^2-4\alpha^2\cos^2 x]+[4\alpha^2-(1+\alpha^2)^2]}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi[(1+\alpha^2)-2\alpha\cos x]dx-\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}$$

$$\cdot\int_0^\pi \frac{dx}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}\ ^{*)}$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}[(1+\alpha^2)x-2\alpha\sin x]\Big|_0^\pi-\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}$$

$$\cdot\frac{2}{1-\alpha^2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(1-\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{2}.$$

2° 若$|\alpha|>1$，则同上述情况类似有

$$I=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}$$

$$\cdot\frac{2}{\alpha^2-1}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(\alpha^2-1)\pi}{4\alpha^2}$$

$$=\frac{\pi}{2\alpha^2}.$$

于是，

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, 当 |\alpha|\leqslant 1; \\ \dfrac{\pi}{2\alpha^2}, 当 |\alpha|>1.\end{cases} \quad (图 4.10)$$

*)利用 2028 题(a)的结果.

(в) $\int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$

$$=\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}\Big|_0^\pi$$

$$=\begin{cases}2, 当 |\alpha|\leqslant 1, \\ \dfrac{2}{|\alpha|}, 当 |\alpha|>1.\end{cases} \quad (图 4.11)$$

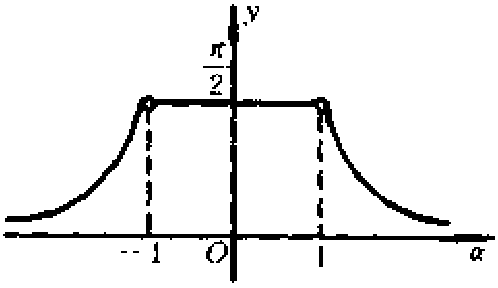


图 4.10

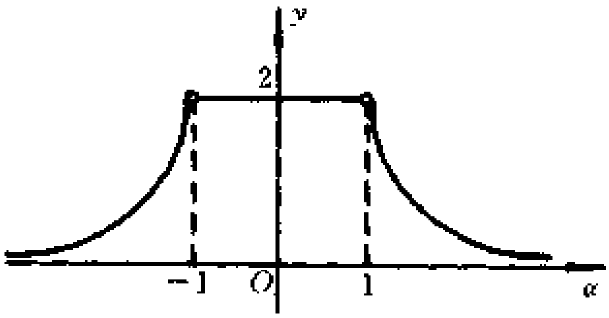


图 4.11

利用部分积分法的公式,求下列定积分:

2239. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$.

**解** $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx=-\int_0^{\ln 2} xd(e^{-x})$

$$=-xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2} e^{-x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2-e^{-x}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

2240. $\int_0^{\pi} x\sin x dx$.

解 $\int_0^{\pi} x\sin x dx=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx=\pi.$

2241. $\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx$.

解
$$\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx=x^2\sin x\Big|_0^{2\pi}-2\int_0^{2\pi} x\sin x dx$$
$$=2\left(x\cos x\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos x dx\right)$$
$$=4\pi.$$

2242$^+$. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\lg x|dx$.

解
$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\lg x|dx$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\lg x)dx+\int_{1}^{e}\lg x dx$$
$$=\left(-x\lg x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{\ln 10}dx\right)+x\lg x\Big|_1^{e}$$
$$-\int_1^{e}\frac{1}{\ln 10}dx$$
$$=2\left(1-\frac{1}{e}\right)\lg e.$$

2243. $\int_0^1 \arccos x dx$.

解
$$\int_0^1\arccos x dx$$
$$=x\arccos x\Big|_0^1-\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

**解** 设 $t=\dfrac{1}{x+1}$，则

$$\int_0^{0.75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\int_{\frac{4}{7}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(2t-1+\sqrt{2t^2-2t+2}\right)\Big|_{\frac{4}{7}}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\dfrac{1}{7}+\sqrt{\dfrac{50}{49}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+7\sqrt{2}}{1+5\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}.$$

2248. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

**解** 设 $\sqrt{e^x-1}=t$，则

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$$

$$=2\int_0^1\frac{t^2dt}{1+t^2}=2(t-\operatorname{arctg}t)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}.$$

2249. $\displaystyle\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

**解** 设 $\sqrt{x}=t$，则

$$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$=2\int_0^1\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=(\arcsin t)^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}.$$

2250. 假设 $x-\dfrac{1}{x}=t$，来计算积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx .$$

**解** 由于被积函数是偶函数，于是，

$$\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

$$=2\int_{0}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \lim_{N\to-\infty} 2\int_{N}^{0} \frac{dt}{t^2+2}$$

$$=\lim_{N\to-\infty} \sqrt{2}\operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{N}^{0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2251. 设：

(a) $\int_{-1}^{1} dx$ ，$t=x^{\frac{2}{3}}$；

(б) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ ，$x=\frac{1}{t}$；

(в) $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ ，$\operatorname{tg}x=t$.

说明为甚么用 $\varphi(t)$ 代换 $x$ 会引致不正确的结果.

**解** (a) $\int_{-1}^{1} dx=2$. 但若作代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$，则得

$$\int_{-1}^{1} dx = \pm\frac{3}{2}\int_{1}^{1} t^{\frac{1}{2}}dt=0.$$

其错误在于代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的.

(б) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$. 但若作代换 $x=\frac{1}{t}$，则得

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果：$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}=0$.

其错误在于 $x=\frac{1}{t}$，当 $t=0$（0 属于$[-1,1]$）时不连续.

（B）$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$ 大于零，但若作代换 $t=\operatorname{tg}x$，则得

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)\Big|_0^{\pi}=0.$$

其错误在于 $t=\operatorname{tg}x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处不连续.

2252. 在积分

$$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

中，令 $x=\sin t$ 是否可以？

**解** 不可以，因为 $\sin t=x$ 不可能大于 1.

2253. 于积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ 中，当作变数的代换 $x=\sin t$ 时，可否取数 $\pi$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 作为新的上下限？

**解** 可以. 因为满足定积分换元的条件.

事实上，

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,d(\sin t)$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,dt=-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$=\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}.$$

2254. 证明：若函数 $f(x)$ 于闭区间$[a,b]$内连续，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\,dx.$$

**证** 设 $x=a+(b-a)t$，则 $dx=(b-a)dt$.

代入得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt,$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx.$$

2255. 证明：等式

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx\ (a>0).$$

**证** 设 $x=\sqrt{t}$，则

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx$$

$$=\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t)\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt.$$

即

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx.$$

2256. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[A,B]\supset[a,b]$ 上的连续函数，当 $A-a<x<B-b$ 时，求 $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)dy$.

**解** $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)dy$

$$=\frac{d}{dx}\int_{a+x}^{b+x} f(y)dy=f(b+x)-f(a+x).$$

2257. 证明：若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[0,1]$ 上连续，则

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

(б) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

证(a) 设$\frac{\pi}{2}-t=x$,则 $dx=-dt$,且

$$f(\sin x)=f(\cos t).$$

代入得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt,$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

(6) 设 $\pi-t=x$,则 $dx=-dt$,且

$$xf(\sin x)=(\pi-t)f(\sin t).$$

代入得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=-\int_{\pi}^0 (\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt,$$

即

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

2258. 证明:若函数 $f(x)$ 于闭区间$[-l,l]$上连续,则

(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数时,

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=2\int_0^{l} f(x)dx;$$

(2) 若函数 $f(x)$ 为奇函数时,

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=0.$$

给出这些事实的几何解释.

**证** (1) 由于 $f(x)$ 为偶函数,即 $f(x)=f(-x)$, $(x\in[-l,l])$. 于是设 $x=-t$,则有

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx=\int_{-l}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{l}f(x)dx$$

$$=-\int_{-l}^{0}f(-x)d(-x)+\int_{0}^{l}f(x)dx$$

$$=-\int_{l}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{l}f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{l}f(t)dt+\int_{0}^{l}f(x)dx=2\int_{0}^{l}f(x)dx.$$

其几何解释如下:

由于 $f(x)=f(-x)$,故图形关于 $Oy$ 轴对称. 于是由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=-l$ 及 $x=l$ 所围成图形的面积为由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=0$ 及 $x=l$ 所围成的图形的面积 $S$ 的两倍(图 4.12).

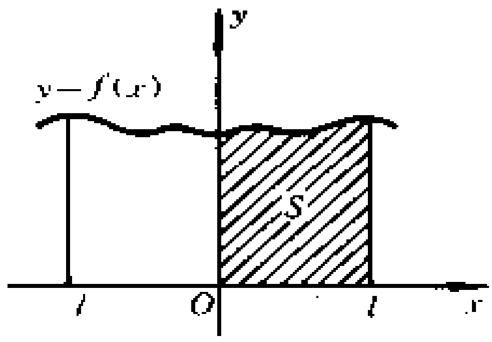

图 4.12

(2) 由于 $f(x)=-f(-x)$,设 $x=-t$,则

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$=-\int_{-l}^{0}f(-x)dx+\int_{0}^{l}f(x)dx$$

$$=\int_{l}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{l}f(x)dx=0.$$

其几何解释如下:

由于 $f(x)=-f(-x)$,故图形关于原点对称. 于是

由 $-l$ 到 0 之间所围之面积，与由 0 到 $l$ 之间所围成之面积绝对值相等，符号相反，故其面积的代数和为零（图 4.13）.

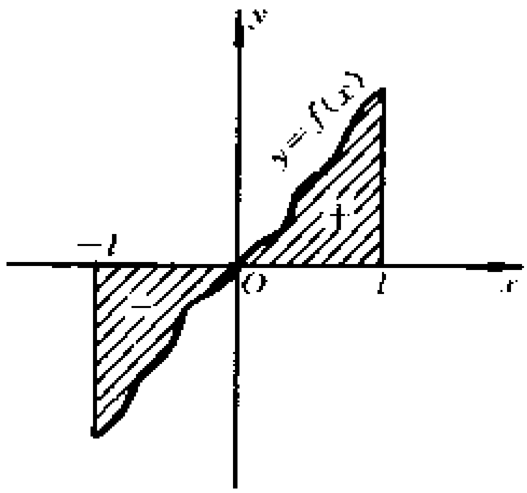

图 4.13

2259. 证明：偶函数的原函数中之一个为奇函数，而奇函数的一切原函数皆为偶函数.

证　设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上定义*)，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 当 $f(-x)=f(x)$ 时，由于

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x) \text{ 及 } f(-x)=-\frac{d}{dx}F(-x),$$

故有　$\frac{d}{dx}[F(x)+F(-x)]=0$. 从而可得

$$F(x)+F(-x)=C_1, \text{且 } C_1=2F(0).$$

于是，$f(x)$ 有一个原函数 $F(x)-F(0)$ 是奇函数.

当 $f(-x)=-f(x)$ 时，类似地可得

$$F(x)-F(-x)=C_2, \text{且 } C_2=0.$$

于是，$F(-x)=F(x)$，即 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x)+C$（$C$ 为任意常数）也为偶函数.

*）　如果 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上可积，则由

$$F_c(x)=\int_0^x f(t)dt+C \text{（} C \text{ 是任意常数）}$$

也可获证，其中 $F_c(x)$ 为 $f(x)$ 的全部原函数.

2260. 引入新变数

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

来计算积分$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

**解** 设$t = x + \frac{1}{x}$,则

$$t^2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2, x = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{t^2 - 4}).$$

于是,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$= \int_{1}^{2}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$= \int_{2}^{\frac{5}{2}}(1 + \sqrt{t^2 - 4})e^t d\left[\frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2 - 4})\right]$$

$$+ \int_{\frac{5}{2}}^{2}(1 - \sqrt{t^2 - 4})e^t d\,\frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2 - 4})$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2}^{\frac{5}{2}}(1 + \sqrt{t^2 - 4})e^t\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right)dt$$

$$- \frac{1}{2}\int_{2}^{\frac{5}{2}}(1 - \sqrt{t^2 - 4})e^t\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right)dt$$

$$= \int_{2}^{\frac{5}{2}}e^t\left(\sqrt{t^2 - 4} + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right)dt$$

$$= \int_{2}^{\frac{5}{2}}[\sqrt{t^2 - 4}\,d(e^t) + e^t d\,\sqrt{t^2 - 4}]$$

$$= (\sqrt{t^2 - 4})e^t\Big|_{2}^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$$

2261. 于积分

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx.$$

中实行变数代换 $\sin x = t$.

**解** $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x dx$$

$$+ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x dx.$$

在右端的第一个积分中，设 $\sin x = t$；第二、第三个积分中，设 $\sin(\pi - x) = t$；第四个积分中，设 $\sin(2\pi - x) = -t$，代入得

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx$$

$$= \int_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]dt$$

$$+ \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]dt.$$

2262. 计算积分

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \left[\cos\left(\ln \frac{1}{x}\right)\right]' \right| dx,$$

式中 $n$ 为自然数.

**证** $\left[\cos\left(\ln \frac{1}{x}\right)\right]' = \frac{\sin(-\ln x)}{x}$. 设 $x = e^{-t}$,

则 $dx = -e^{-t}dt$, $\frac{\sin(-\ln x)}{x} = \frac{\sin t}{e^{-t}} = e^t \sin t$.

代入得

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \left[\cos\left(\ln \frac{1}{x}\right)\right]' \right| dx = \int_0^{2\pi n} |\sin t| dt$$

2265. 证明：若 $f(x)$ 为定义在 $-\infty<x<+\infty$ 而周期为 $T$ 的连续的周期函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

式中 $a$ 为任意的数.

**证** $\int_a^{a+T} f(x)dx$

$$=\int_a^0 f(x)dx+\int_a^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx.$$

对上述等式右端的第三个积分，设 $x-T=t$，则

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(t+T)dt=\int_0^a f(t)dt.$$

于是，

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

2266. 证明：当 $n$ 为奇数时，函数

$$F(x)=\int_0^x \sin^n x dx \text{ 及 } G(x)=\int_0^x \cos^n x dx$$

为以 $2\pi$ 为周期的周期函数；而当 $n$ 为偶数时，则其中的任何一个皆为线性函数与周期函数的和.

**证** 当 $n$ 为奇数时，$\sin^n x$ 是奇函数，而且是以 $2\pi$ 为周期的函数. 于是，

$$F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi} \sin^n x dx$$

$$=\int_0^{2\pi} \sin^n x dx+\int_{2\pi}^{2\pi+x} \sin^n x dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(\pi-x)dx+\int_0^x \sin^n x dx$$

$$=0+\int_0^x \sin^n x dx=F(x)$$

及

$$
\begin{aligned}
G(x+2\pi) &= G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n x dx \\
&= G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n x dx+\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n x dx \\
&= G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n x dx+\int_0^{\pi}\cos^n(x+\pi)dx \\
&= G(x),
\end{aligned}
$$

从而得知：$F(x)$ 和 $G(x)$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数. 当 $n$ 为偶数时，显然有

$$
F(x+2\pi)=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^n x dx,
$$

$$
G(x+2\pi)=G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n x dx.
$$

但因

$$
\int_0^{2\pi}\sin^n x dx=\int_0^{2\pi}\cos^n x dx=a>0,
$$

所以，$F(x)$、$G(x)$ 都不是 $2\pi$ 为周期的周期函数.

设

$$
F_1(x)=F(x)-\frac{a}{2\pi}x,
$$

则

$$
\begin{aligned}
F_1(x+2\pi) &= F(x+2\pi)-\frac{a}{2\pi}(x+2\pi) \\
&= F(x)+a-\frac{a}{2\pi}x-a \\
&= F(x)-\frac{a}{2\pi}x=F_1(x).
\end{aligned}
$$

即 $F_1(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数，而

$$
F(x)=F_1(x)+\frac{a}{2\pi}x.
$$

所以，$F(x)$ 为周期函数与线性函数之和.

同理，可以证明 $G(x)$ 也是周期函数与线性函数之和.

2267. 证明：函数

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

（式中 $f(x)$ 为具周期 $T$ 的连续的周期函数）在一般的情形下是线性函数与周期函数之和.

**证** 因为 $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$，所以

$$F(x+T) - F(x) = \int_{x}^{x+T} f(x)dx.$$

又因 $f(x)$ 是一周期为 $T$ 的连续函数，所以

$$\int_{x}^{x+T} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)dx = K.$$

于是，$F(x+T) - F(x) = K$.

如果 $K = 0$，则 $F(x)$ 为一周期函数.

如果 $K \neq 0$，可考虑函数 $\varphi(x) = F(x) - \frac{K}{T}x$，则因

$$\begin{aligned}\varphi(x+T) &= F(x+T) - \frac{K}{T}(x+T) \\ &= F(x+T) - \frac{K}{T}x - K \\ &= F(x) - \frac{K}{T}x = \varphi(x),\end{aligned}$$

所以，$\varphi(x)$ 也为一周期函数，从而

$$F(x) = \varphi(x) + \frac{K}{T}x,$$

即 $F(x)$ 是线性函数与周期等于 $T$ 的周期函数之和.

计算下列积分：

**2268.** $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$.

**解** $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$

$$=-\frac{1}{26}(2-x^2)^{13}\Big|_0^1=315\frac{1}{26}.$$

**2269.** $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$.

**解** $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_{-1}^1-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

**2270⁺.** $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$.

**解** $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$

$$=x^3\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e x^2\ln x\cdot(1+\ln x)dx$$

$$=e^3-2\int_1^e x^2\ln x dx-2\int_1^e (x\ln x)^2 dx.$$

移项合并得

$$\int_1^e (x\ln x)^2 dx=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x dx$$

$$=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{2}{9}x^3\ln x-\frac{2}{27}x^3\right)\Big|_1^e$$

$$= \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.$$

2271. $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx.$

**解** 设 $\sqrt[3]{1-x} = t$，则

$$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$$

$$= -3\int_0^{-2}(t^3 - t^6)dt = -66\frac{6}{7}.$$

2272$^+$. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

**解** 设 $x = \frac{1}{t}$，则

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1} = -\frac{\pi}{3}.$$

2273. $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx.$

**解** 设 $1 + 3x^8 = t$，则 $24x^7dx = dt, x^8 = \frac{1}{3}(t-1)$.
于是，

$$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$$

$$= \frac{1}{72}\int_1^4 (t-1)t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{29}{270}.$$

2274. $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx.$

解 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{\sqrt{x}\,dx}{2(1+x)}$$

$$= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2dt}{1+t^2}{}^{*)} = \pi - (t - \operatorname{arctg} t)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

*) 设 $\sqrt{x} = t$.

2275. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

解 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} + \int_0^{\pi} \frac{dx}{2-\cos x} - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$$

$$= 4\int_0^{\pi} \frac{dx}{4-\cos^2 x} - 6\int_0^{\pi} \frac{dx}{9-\cos^2 x}$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x} - 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{9\sin^2 x + 8\cos^2 x}$$

$$= 8\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 12\,\frac{1}{3\cdot\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg} x}{\sqrt{8}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

2276. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$.

**解** $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)^{*)}\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{2}.$$

*) 利用 2035 题的结果.

2277. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x dx$.

**解** $\sin x\sin 2x\sin 3x$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\cdot\sin 2x$$

$$=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x).$$

于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x dx$$

$$=\left(-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{8}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

2278. $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$.

**解** $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{6}x^3\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{x^2}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{x}{4}\cos 2x\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

2279. $\int_0^\pi e^x\cos^2 x dx.$

**解** $\int_0^\pi e^x\cos^2 x dx$

$$= \int_0^\pi \frac{e^x(1+\cos 2x)}{2}dx$$

$$= \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{10}(\cos 2x + 2\sin 2x)^{*)}\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{3}{5}(e^\pi - 1).$$

*) 利用 1828 题的结果.

2280. $\int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^4 x dx.$

**解** $\int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^4 x dx$

$$= \int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^2 x \cdot (\mathrm{ch}^2 x - 1) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^2 2x dx - \int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^2 x dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\mathrm{sh}4x\right)^{*)}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$- \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x\right)^{*)}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{3}{8}\ln 2 - \frac{225}{1024}.$$

*） 利用 1761 题的结果.

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数 $n$ 的积分.

2281. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$.

**解** $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x d(\cos x)$

$$=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,$$

移项合并得

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

利用上述递推公式即可求得

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{若 } n=2k;\\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{若 } n=2k+1.\end{cases}$$

2282. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$.

**解** 设 $\frac{\pi}{2}-x=t$，则 $dx=-dt$，且

$$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t.$$

代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt.$$

**解** 设 $x = \sin t$，代入得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

因此，与 2281 题的结果相同.

2286. $I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx.$

**解** $$I_n = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln^n x \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx.$$

于是，

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{n}{m+1} I_{n-1} \\ &= \left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+1}\right) I_0 \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

2287. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx.$

**解** $$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[\sec^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) d\left[\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] - I_{n-1} \\ &= -\frac{1}{2n} - I_{n-1}, \end{aligned}$$

即

$$I_n = -\frac{1}{2n} - I_{n-1}$$

递推之，得

$$I_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n-2)} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} + (-1)^n I_0.$$

但

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \\ &= -\ln\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\sqrt{2}, \end{aligned}$$

于是，

$$I_n = (-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}.$$

设 $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ 是实变数 $x$ 的复函数，其中 $f_1(x) = \mathrm{Re} f(x)$，$f_2(x) = \mathrm{Im} f(x)$ 及 $i = \sqrt{-1}$，则按定义有：

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + i\int f_2(x)dx.$$

显而易见

$$\mathrm{Re}\int f(x)dx = \int \mathrm{Re} f(x)dx.$$

及 $$\mathrm{Im}\int f(x)dx = \int \mathrm{Im} f(x)dx.$$

2288. 利用尤拉氏公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

证明：

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \begin{cases} 0, 若\ m \neq n, \\ 2\pi, 若\ m = n. \end{cases}$$

($n$ 及 $m$ 为整数).

**证** 当 $m = n$ 时，

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

当 $m \neq n$ 时，

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos nx + i\sin nx)(\cos mx - i\sin mx)dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(m-n)xdx - i\int_0^{2\pi} \sin(m-n)xdx = 0.$$

2289. 证明

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha + i\beta}$$

($\alpha$ 及 $\beta$ 为常数).

**证** $\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}dx$

$$= \int_a^b e^{\alpha x}\cos\beta x dx + i\int_a^b e^{\alpha x}\sin\beta x dx$$

$$= \frac{e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x + i(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)]}{\alpha^2 + \beta^2}\Bigg|_a^b$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\alpha - i\beta)(\cos\beta x + i\sin\beta x)}{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)}\Bigg|_a^b$$

$$= \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha + i\beta}\Bigg|_a^b = \frac{e^{(\alpha+i\beta)b} - e^{(\alpha+i\beta)a}}{\alpha + i\beta}.$$

利用尤拉氏公式：

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

计算下列积分($m$ 及 $n$ 为正整数)：

2290. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$

**解**：方法一：记

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx,$$

易见 $I_0 = \frac{1}{4}I$，其中

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$$

利用尤拉公式，有

$$\sin^{2m} x \cos^{2n} x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{2m}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k c_{2m}^k e^{2(m-k)ix} \sum_{l=0}^{2n} c_{2n}^l e^{2(n-l)ix},$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l e^{2(m+n-k-l)ix}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k c_{2m}^k C_{2n}^l [\cos 2(m+n-k-l)x + i\sin 2(m+n-k-l)x],$$

今不妨设 $m \leqslant n^*$，作积分计算，则有

$$I = \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l \left(\int_0^{2\pi} \cos(m+n-k-l)2x dx + i\int_0^{2\pi} \sin(m+n-k-l)2x dx\right)$$

---

* 若 $m > n$ 作代换 $x = \frac{\pi}{2} - u$ 即得.

$$= \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+2n-1}} \sum_{\substack{k+l=m+n \\ 0 \leqslant k \leqslant 2m \\ 0 \leqslant l \leqslant 2n}} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l$$

$$= \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+2n-1}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}$$

经计算，可以验证有*

$$(-1)^m \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}$$

$$= \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}.$$

于是得

$$I_0 = \frac{1}{4} I = \frac{\pi (2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1} m!n!(m+n)!}.$$

方法二：

令 $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$. 显然

$$I_{m,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n-1} x d\sin x$$

$$= \frac{1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x d\sin^{2m+1} x$$

$$= \frac{1}{2m+1} \cos^{2n-1} x \sin^{2m+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

---

* 用 $C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k} = C_{2m}^m C_{2n}^n (C_{m+n}^m)^{-2} C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k}$，以及由恒等式 $(1-x)^{m+n}(1+x)^{m+n} = (1-x^2)^{m+n}$ 展开，取 $x^{2m}$ 的系数的关系式 $\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k} = (-1)^m C_{m+n}^m$ 可以验证.

$$-\frac{1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x d\cos^{2n-1}x$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2}x\cos^{2n-2}x dx$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x(1-\cos^2 x)\cos^{2(n-1)}x dx$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n-1}-\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n},$$

整理后得

$$I_{m,n}=\frac{2n-1}{2(m+n)}I_{m,n-1}.$$

由此不难得

$$I_{m,n}=\frac{(2n-1)!!}{2^n(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)}I_{m,0}$$

$$=\frac{(2n-1)!!m!}{2^n(m+n)!}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi(2n-1)!!(2m-1)!!}{2^{m+n+1}(m+n)!}$$

$$=\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}.$$

2291. $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx.$

**解** 设 $u=\frac{\sin nx}{\sin x}$,利用尤拉公式得

$$u=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}}.$$

当 $n=2k$ 时,

$$u=(e^{ikx}+e^{-ikx})\cdot(e^{i(k-1)x}+e^{i(k-3)x}+\cdots$$
$$+e^{-i(k-3)x}+e^{-i(k-1)x})$$
$$=e^{(2k-1)ix}+e^{(2k-3)ix}+\cdots+e^{ix}+e^{-ix}$$

$$+\cdots+e^{-(2k-1)ix}$$
$$=2[\cos(2k-1)x+\cos(2k-3)x+\cdots+\cos x],$$
于是,
$$\int_0^\pi u dx=2\Big[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\frac{\sin(2k-3)x}{2k-3}$$
$$+\cdots+\sin x\Big]\Big|_0^\pi=0.$$
当 $n=2k+1$ 时,同上得
$$u=2[\cos 2kx+\cos 2(k-1)x+\cdots+\cos 2x]+1,$$
于是,
$$\int_0^\pi u dx=\pi.$$
最后得到
$$\int_0^\pi\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\begin{cases}0, n\text{ 为偶数};\\ \pi, n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

2292. $\int_0^\pi\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx.$

**解** $$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}=\frac{e^{i(2n+1)x}+e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix}+e^{-ix}}$$
$$=e^{2nix}-e^{2(n-1)ix}+\cdots+(-1)^n+\cdots+e^{-2nix}$$
$$=2[\cos 2nx-\cos 2(n-1)x+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\cos 2x]+(-1)^n.$$
于是,
$$\int_0^\pi\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx=(-1)^n\pi.$$

2293. $\int_0^\pi\cos^n x\cos nx dx$

**解** $\cos^n x\cos nx$

$$= \frac{1}{2^n+1}(e^{ix}+e^{-ix})^n(e^{inx}+e^{-inx})$$

$$= \frac{1}{2^n}[\cos 2nx + c_n^1\cos 2(n-1)x + \cdots$$

$$+ c_n^{n-1}\cos 2x + 1].$$

于是,

$$\int_0^\pi \cos^n x\cos nx dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

2294. $\int_0^\pi \sin^n x\sin nx dx.$

**解** 方法一:

$$\int_0^\pi \sin^n x\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{(2i)^{n+1}}\int_0^\pi [\sum_{k=0}^n (-1)^k c_n^k e^{i(n-2k)x}(e^{inx}$$

$$- e^{-inx})]dx$$

$$= \frac{1}{(2i)^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^n (-1)^k c_n^k \int_0^\pi e^{i(2n-2k)x}dx\right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^n (-1)^k c_n^k \int_0^\pi e^{-i2kx}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}i^{n+1}}[(-1)^n c_n^n \cdot \pi - (-1)^0 c_n^0 \pi]$$

$$= \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数;} \\ \frac{\pi}{2^n}\cdot(-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

由于

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

于是

$$\int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx = \frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

方法二：

设 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin\left(\frac{n\pi}{2}-nt\right)dt$$

$$=\sin\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos nt dt$$

$$-\cos\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin nt dt$$

$$=\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx$$

$$=\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

求下列积分($n$ 为自然数)：

2295. $\int_0^\pi \sin^{n-1}x\cos(n+1)x dx.$

**解** $\int_0^\pi \sin^{n-1}x\cos(n+1)x dx$

$$=\int_0^\pi \sin^{n-1}x(\cos nx\cos x-\sin nx\sin x)dx$$

$$=\int_0^\pi \sin^{n-1}x\cos nx d(\sin x)-\int_0^\pi \sin^n x\sin nx dx$$

$$=\left.\frac{\sin^n x\cos nx}{n}\right|_0^\pi-\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin^n x d(\cos nx)$$

$$-\int_0^\pi \sin^n x\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left\{c_{2n}^n \cdot \int_0^{2\pi} e^{-ax}dx + 2\sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \cdot \int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos 2(n-k)xdx\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}c_{2n}^n e^{-ax}\Big|_0^{2\pi} + 2\sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \cdot \frac{(2n-2k)\cdot\sin 2(n-k)x - a\cos 2(n-k)x}{a^2+(2n-2k)^2}e^{-ax}\Big|_0^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}c_{2n}^n\cdot(e^{-2\pi a}-1) - a(e^{-2\pi a}-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2c_{2n}^k}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}\cdot a}\left\{c_{2n}^n + 2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k \cdot \frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right\},$$

即

$$\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos^{2n}xdx$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}\cdot a}\cdot\left\{c_{2n}^n + 2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k \cdot \frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}$$

方法二：

由于

$$\int_0^{2\pi} e^{(\alpha+ik)x}dx = \frac{e^{(\alpha+ik)x}}{\alpha+ik}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{e^{2\pi a}-1}{\alpha+ik}$$

$$= \frac{(e^{2\pi a} - 1)(a - ik)}{a^2 + k^2},$$

取实部，得

$$\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x}dx = \frac{a(e^{2\pi a} - 1)}{a^2 + k^2}$$

于是，

$$\int_0^{2\pi} e^{ax}\cos^{2n}x dx$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-ax}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2n} dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{2\pi} e^{-ax}\left(\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2n-2k)x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \int_0^{2\pi} e^{-a+i(2n-2k)x} dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{e^{-2\pi a} - 1}{-a + i(2n-2k)}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{a(1 - e^{-2\pi a})}{a^2 + (2n-2k)^2}$$

$$= \frac{1 - e^{-2\pi a}}{2^{2n}\cdot a}\left[C_{2n}^n + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2}\right].$$

2298. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cdot \cos 2nx dx.$

**解** 利用分部积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cdot \cos 2nx dx$$

$$= \frac{1}{2n}\sin 2nx \cdot \ln\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \cdot \sin x}{\cos x} dx$$

$$= 0^{*)} + \frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}dx$$

$$- \frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx.$$

对于上述等式右端的第二项和第三项的被积函数有下列等式：

$$\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} = \frac{e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

$$= 2[\cos 2(n-1)x - \cos 2(n-2)x + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-2}\cos 2x] + (-1)^{n-1},$$

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}$$

$$= 2[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\cos 2x] + (-1)^n.$$

由于积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx dx \text{（}k\text{ 为任意的正整数）}$$

的值恒等于零，所以积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}dx \quad \text{及} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$$

分别等于$(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}$及$(-1)^n\frac{\pi}{2}$.

这样，我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cdot \cos 2nx dx$$

$$= \frac{1}{4n}\left[(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2} - (-1)^n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}.$$

*） 在 $x=0$ 处，$\sin 2nx\cdot\ln\cos x=0$；而在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处，为"$0\cdot\infty$"型，采用洛比塔法则定值：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin 2nx\cdot\ln\cos x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\sin 2nx}}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin x\cdot\sin^2 2nx}{\cos x\cdot\cos 2nx}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x\cdot\sin^2 2nx+4n\sin x\sin 2nx\cos 2nx}{-\sin x\cos 2nx-2n\cos x\sin 2nx}$$

$$=0.$$

2299. 利用多次的部分积分法，计算尤拉氏积分：

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx,$$

式中 $m$ 及 $n$ 为正整数.

**解** $$B(m,n)=\frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx$$

$$=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1).$$

继续利用部分积分法，可得

$$B(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!}\cdot\frac{1}{m+n-1}x^{m+n-1}\Big|_0^1$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

2300. 勒让德多项式 $P_n(x)$ 被下面公式来定义：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n](n=0,1,2,\cdots).$$

证明

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0,若 m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1},若 m=n.\end{cases}$$

**证** 当 $m\neq n$ 时，不失一般性，设 $n<m$. 由于 $P_m(x)$ 为一 $m$ 次的多项式，我们记

$$P_m(x)=R^{(m)}(x),$$

其中 $R(x)=\dfrac{1}{2^m m!}(x^2-1)^m$.

利用多次部分积分法得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx\\&=[P_n(x)R^{(m-1)}(x)-P_n'(x)R^{(m-2)}(x)+\cdots\\&\quad+(-1)^{m-1}P_n^{(m-1)}(x)R(x)]\Big|_{-1}^{1}\\&\quad+(-1)^m\int_{-1}^{1}R(x)P_n^{(m)}(x)dx=0.\end{aligned}$$

当 $m=n$ 时，

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx\\&=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\right]^2dx,\end{aligned}$$

设 $u=\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$，$v=(x^2-1)^n$，则

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v]\Big|_{-1}^{1} + (-1)^n$$

$$\cdot \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} vu^{(n)}dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \cdot \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}[(x^2-1)^n]dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}t dt$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \overset{**)}{=} \frac{2}{2n+1}.$$

*) 设 $x = \sin t$.

**) 利用 2282 题的结果.

**2301.** 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积分,函数 $F(x)$ 在$[a,b]$内除了有限个点 $c_i(i=1,\cdots,p)$ 及点 $a$ 与 $b$ 外皆有 $F'(x) = f(x)$,而在这除去的有限个点上 $F(x)$ 有第一类的间断点(广义原函数).证明

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

**证** 为确定起见,设 $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_p < b$,并记 $a = c_0, b = c_{p+1}$. 由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,故

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to 0+} \sum_{i=0}^{p} \int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)dx.$$

显然,在$[c_i+\eta, c_{i+1}-\eta]$上 $F'(x) = f(x)$,从而可应

用牛顿—莱布尼兹公式，得

$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)dx = F(c_{i+1}-\eta) - F(c_i+\eta),$$

由此可知

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to 0+} \sum_{i=0}^{p} [F(c_{i+1}-\eta) - F(c_i+\eta)]$$

$$= \sum_{i=0}^{p} [F(c_{i+1}-0) - F(c_i+0)]$$

$$= F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

2302. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积分，而

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi)d\xi$$

为 $f(x)$ 的不定积分. 证明函数 $F(x)$ 连续且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处有等式

$$F'(x) = f(x)$$

成立，问在函数 $f(x)$ 不连续点处函数 $F(x)$ 的导函数为何？

**解** 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故必有界：$|f(x)| \leqslant M \quad (a \leqslant x \leqslant b)$. 因此，对任何 $x \in [a,b]$，有

$$|F(x+\Delta x) - F(x)|$$

$$= \left|\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi\right| \leqslant M \cdot |\Delta x| \to 0 (\text{当 } \Delta x \to 0 \text{ 时}).$$

由此可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

现设 $f(\xi)$ 在点 $\xi = x$ 处连续. 于是，任给 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $|\xi - x| < \delta$ 时，恒有 $|f(\xi) - f(x)| <$

$\varepsilon$. 于是，当 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}[f(\xi)-f(x)]d\xi\right|$$

$$<\frac{1}{|\Delta x|}\varepsilon\cdot|\Delta x|=\varepsilon,$$

故 $F'(x)$ 存在，且

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x).$$

而在不连续点处 $F'(x)$ 可能存在也可能不存在. 例如，设

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x=\dfrac{1}{n}, \\ 0, \text{当 } x\neq\dfrac{1}{n},\end{cases}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的可积性可仿2194题证明，而且显然有

$$\int_0^x f(t)dt=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

然而在点 $x=\dfrac{1}{n}$ 处，$F(x)=C$ 的导函数 $F'(x)=0$ 是存在的.

但函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$，它在 $[-1,1]$ 上是可积的，且

$$\int_0^x f(x)dx=|x|,$$

然而在点 $x=0$ 处，$F(x)=|x|+C$ 的导函数 $F'(x)$ 不存在.

求下列有界非连续函数的不定积分：

2303. $\int \operatorname{sgn} x dx$.

**解** $\int \operatorname{sgn} x dx = \int_0^x \operatorname{sgn} x dx + C = |x| + C$.

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx$.

**解** 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 在任何有限区间上都可积，故其原函数 $F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 对任何 $x$，必存在唯一的整数 $k$ 使 $k\pi \leqslant x < (k+1)\pi$. 于是

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt \\
&= \int_0^{k\pi + \frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\sin t) dt + \int_{k\pi + \frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \int_{k\pi + \frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \arccos(\cos t) \Big|_{k\pi + \frac{\pi}{2}}^x \\
&= \frac{\pi}{2} + \arccos(\cos x) - \frac{\pi}{2} \\
&= \arccos(\cos x).
\end{aligned}$$

故

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx = \arccos(\cos x) + C$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

2305. $\int [x] dx \ (x \geqslant 0)$.

**解** $\int [x] dx = C + \int_0^x [x] dx$

$$= \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin\pi x)dx + C$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arc}\cos(\cos\pi x)\Big|_0^{x^{*)}} + C$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arc}\cos(\cos\pi x) + C.$$

*) 利用 2304 题的结果.

2308. $\int_0^x f(x)dx$,其中 $f(x) = \begin{cases} 1, 若\ |x| < l, \\ 0, 若\ |x| > l. \end{cases}$

**解** $\int_0^x f(x)dx = \int_0^l f(x)dx + \int_l^x f(x)dx$

$$= \int_0^l 1 \cdot dx + \int_l^x 0dx = l\ (x \geqslant l),$$

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x 1 \cdot dx = x\ (|x| < l),$$

$$\int_0^x f(x)dx$$

$$= -\int_x^{-l} f(x)dx - \int_{-l}^0 f(x)dx = -l(x \leqslant -l).$$

合并得

$$\int_0^x f(x)dx = \frac{1}{2}(|l + x| - |l - x|).$$

计算下列有界非连续函数的定积分.

2309. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)dx$.

**解** $\operatorname{sgn}(x - x^3) = \begin{cases} 1, 当\ x \in (0,1)\ 时, \\ -1, 当\ x \in (1,3]\ 时. \end{cases}$

于是,

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)dx = \int_0^1 dx - \int_1^3 dx = -1.$$

2310. $\int_0^2 [e^x] dx$.

解 $\int_0^2 [e^x] dx$

$$= \int_0^{\ln 2} 1 dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2 \cdot dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} 3 \cdot dx$$
$$+ \cdots + \int_{\ln 7}^{2} 7 \cdot dx$$
$$= \ln 2 + 2(\ln 3 - \ln 2) + 3(\ln 4 - \ln 3) + \cdots$$
$$+ 7(-\ln 7 + 2)$$
$$= 14 - (\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln 7)$$
$$= 14 - \ln 7!.$$

2311. $\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx$.

解 $\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx$

$$= \int_1^2 \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_2^3 2\sin \frac{\pi x}{6} dx + \cdots$$
$$+ \int_5^6 5\sin \frac{\pi x}{6} dx$$
$$= \frac{30}{\pi}.$$

2312. $\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$.

解 $\int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x) dx = -\frac{\pi^2}{4}.$$

2313. $\int_1^{n+1} \ln[x] dx$，其中 $n$ 为自然数.

解 $\int_1^{n+1} \ln[x] dx$

$$= \int_2^3 \ln 2dx + \int_3^4 \ln 3dx + \cdots + \int_n^{n+1} \ln ndx$$
$$= \ln n!.$$

2314. $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]dx.$

**解** $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]dx$

$$= \int_{e^{-\pi}}^1 (-1)dx + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}} dx$$
$$= -1 + 2e^{-\pi} \cdot \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} e^{-(k-1)\pi}$$
$$= -1 + \frac{2e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1}$$
$$= - th \frac{\pi}{2}.$$

2315. 求$\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x}dx$,其中 $E$ 为闭区间$[0,4\pi]$中使被积分式有意义的一切值所成之集合.

**解** $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x}dx$

$$= \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x}dx + \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x}dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x}dx$$
$$+ \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}dx + \int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x}dx$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}dx$$
$$= \frac{8}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}.$$

## §3. 中值定理

1° 函数的平均值　数

$$M[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则可求得一点 $c \in (a,b)$ 适合

$$M[f] = f(c).$$

2° 第一中值定理　若：(1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于闭区间 $[a,b]$ 上有界并可积分；(2) 当 $a < x < b$ 时，函数 $\varphi(x)$ 不变号，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu\int_a^b \varphi(x)dx,$$

式中 $m \leqslant \mu \leqslant M$ 及 $M = \sup\limits_{a<x<b} f(x)$，$m = \inf\limits_{a<x<b} f(x)$；(3) 除此而外，若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\mu = f(c)$，其中 $a \leqslant c \leqslant b$（编者注：可以证明，$c$ 可取值使 $a < c < b$）.

3° 第二中值定理　若：(1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于闭区间 $[a,b]$ 上有界并可积分；(2) 当 $a < x < b$ 时，函数 $\varphi(x)$ 是单调的，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

$$= \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx,$$

式中 $a \leqslant \xi \leqslant b$；(3) 除此而外，若函数 $\varphi(x)$ 单调下降（广义的）且不为负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)dx\ (a \leqslant \xi \leqslant b);$$

(3′) 若函数 $\varphi(x)$ 单调上升（广义的）且不为负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)dx\ (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

2316. 确定下列定积分的符号：

(а) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$；　　(б) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$；

(в) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$；　　(г) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x dx$.

**解** (а) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$

$$= \int_0^{\pi} x\sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi} x\sin x dx - \int_0^{\pi}(t+\pi)\sin t dt$$

$$= -\pi\int_0^{\pi}\sin x dx < 0.$$

(б) 由第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}dx$$

$$= \frac{\pi^2\sin c}{c(c+\pi)} > 0,$$

其中 $0 < c < \pi$.

(в) 由第一中值定理知

$$\int_{-2}^{2} x^3 e^x dx$$

$$= \int_{-2}^{0} x^3 e^x dx + \int_0^2 x^3 e^x dx$$

$$= \int_2^0 t^3 e^{-t} dt + \int_0^2 x^3 e^x dx$$

$$= \int_0^2 x^3(e^x - e^{-x})dx = 2c^3(e^c - e^{-c}) > 0,$$

其中 $0 < c < 2$.

(г) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx$

$$= \frac{1}{2}c^2 \ln c < 0 \text{ (其中} \frac{1}{2} < c < 1)$$

2317. 于下列各题中确定那个积分较大：

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ 或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$?

(б) $\int_0^1 e^{-x} dx$ 或 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$?

(в) $\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ 或 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$?

**解** (a) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$0 < \sin x < 1$ 从而

$$0 < \sin^{10} x < \sin^2 x,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

(б) 当 $0 < x < 1$ 时，$x > x^2$，从而

$$e^{-x} < e^{-x^2},$$

于是

$$\int_0^1 e^{-x} dx < \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

(в) $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$

$$= \int_0^{\pi} e^{-(\pi+x)^2} \cos^2 x dx < \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

2318. 求下列已知函数在所给区间内的平均值：

(а) $f(x)=x^2$ 在$[0,1]$上；

(б) $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,100]$上；

(в) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ 在$[0,2\pi]$上；

(г) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ 在$[0,2\pi]$上.

**解** (а) $M[f]=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$；

(б) $M[f]=\frac{1}{100}\int_0^{100}\sqrt{x}\,dx=6\frac{2}{3}$；

(в) $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(10+2\sin x+3\cos x)dx$

$=10$；

(г) $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\cdot\sin(x+\varphi)dx$

$=\frac{1}{2}\cos\varphi.$

2319. 求椭圆之焦径

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}(0<\varepsilon<1)$$

之长的平均值.

**解** 设$\varphi=\pi+t$，则

$$\begin{aligned}M(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}d\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos t}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}d\varphi\\&=\frac{p}{2\pi}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{}^{*)}\\&=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b,\end{aligned}$$

其中 $b$ 为椭圆的短半轴.

*) 利用 2213 题的结果.

2320. 求初速度为 $v_0$ 之自由落体的速度之平均值.

**解** 自由落体的速度为 $v=v_0+gt$，从 $t=0$ 到 $t=T$ 时间内的速度的平均值

$$M[v]=\frac{1}{T}\int_0^T(v_0+gt)dt=\frac{1}{2}gT+v_0$$
$$=\frac{1}{2}(v_0+v_T).$$

物理意义：平均速度等于初速与末速之和的一半.

2321. 电流的强度依下面的规律变化

$$i=i_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right),$$

其中 $i_0$ 表振幅，$t$ 表时间，$T$ 表周期，$\varphi$ 表初相，求电流强度之平方的平均值.

**解** $$M(i^2)=\frac{1}{T}\int_0^T i_0^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)dt$$
$$=\frac{i_0^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\sin 2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\right]\Bigg|_0^T=\frac{i_0^2}{2}.$$

将上式开平方，即得电流的有效值 $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

2322. 命 $\int_0^x f(t)dt=xf(\theta x)$，求 $\theta$，设：

(a) $f(t)=t^n(n>-1)$； (б) $f(t)=\ln t$；

(в) $f(t)=e^t$.

$\lim\limits_{x\to 0}\theta$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$ 等于甚么？

**解** (a) $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,从而

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta^n x^{n+1}.$$

于是

$$\theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

(б) $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \ln t dt$

$$= t(\ln t - 1)\Big|_0^x$$

$$= x(\ln x - 1),$$

从而

$$x(\ln x - 1) = x\ln\theta x,$$

于是

$$\theta = \frac{1}{e}.$$

(в) $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^t dt = e^t\Big|_0^x = e^x - 1$,从而

$$e^x - 1 = xe^{\theta x},$$

于是

$$\theta = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x - 1}{x}.$$

由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$,故当$x \to 0$时,$\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$是$\frac{0}{0}$型未定形. 因此

$$\lim_{x\to0}\theta = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}\right]$$

2324. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$.

**解** 由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leqslant x^9 (0 \leqslant x \leqslant 1)$，从而，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9 dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$\leqslant \int_0^1 x^9 dx,$$

即

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx \leqslant \frac{1}{10}.$$

2325. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx$.

**解** $$I = \int_0^{50} \frac{e^{-x}}{x+100}dx + \int_{50}^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx$$

$$= \frac{1}{100+\xi_1}\int_0^{50} e^{-x}dx + \frac{1}{100+\xi_2}\int_{50}^{100} e^{-x}dx$$

$$= \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}$$，其中 $0 \leqslant \xi_1 \leqslant 50$，$50 \leqslant \xi_2 \leqslant 100$.

显然

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}$$

$$\leqslant \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_1}$$

$$= \frac{1-e^{-100}}{100+\xi_1} < \frac{1}{100},$$

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}$$

$$> \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} \geqslant \frac{1-e^{-50}}{150} > \frac{1}{200},$$

故$\frac{1}{200}<I<\frac{1}{100}$，即$I=0.01-0.005\theta, 0<\theta<1$.

另外，按中值定理，可写

$$I=\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx=\frac{1}{\xi+100}\int_0^{100}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{\xi+100}\left(1-\frac{1}{e^{100}}\right),$$

其中$0\leqslant\xi\leqslant 100$，如果改写$I$为

$$I=0.01-0.005\theta,$$

则有

$$\theta=f(\xi)=\frac{2}{100+\xi}\left(\xi+\frac{100}{e^{100}}\right).$$

易见导数

$$f'(\xi)=\frac{200(1-e^{-100})}{(100+\xi)^2}>0,$$

$f(\xi)$单调上升，故在$[0,100]$上有$f(0)\leqslant f(\xi)\leqslant f(100)$，也即有

$$\frac{2}{e^{100}}\leqslant\theta\leqslant 1+\frac{1}{e^{100}}.$$

根据前面的估计$0<\theta<1$，综合起来，便有

$$\frac{2}{e^{100}}\leqslant\theta<1.$$

这个结果比原来的估计又好了一些.如果更精确一些，采用些近似计算方法，还可进一步明确$\theta$的数值范围.此处从略.

2326. 证明等式

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$；　(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0$.

**证** (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\xi_n} \cdot \frac{1}{n+1} = 0$;

(б) 任意给定 $\varepsilon > 0$，且设 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$，则

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \varepsilon$$

$$\leqslant \varepsilon + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right).$$

当 $n \to \infty$ 时，上述不等式的第二项趋于零，于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

2327. 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，而 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续且在$(a,b)$上可微分，并且

$$\varphi'(x) \geqslant 0 \quad 当 \quad a < x < b.$$

应用部分积分法及第一中值定理以证明第二中值定理.

**证** 设 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dF(x)$$

$$= F(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\varphi'(x)dx$$

$$= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)\int_a^b \varphi'(x)dx$$

$$= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)[\varphi(b) - \varphi(a)]^{*)}$$

$$= \varphi(b)[F(b) - F(\xi)] + \varphi(a)[F(\xi) - F(a)]$$

$$= \varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx + \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

*） 一般数学分析中已有第二中值定理的证明，本题限用部分积分法证明，应加 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的条件.

利用第二中值定理，估计积分：

2328. $\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx$.

**解** 设 $f(x)=\sin x,\varphi(x)=\frac{1}{x}$，则 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[100\pi,200\pi]$ 上满足第二中值定理的条件，又 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 单调下降且不为负，于是，

$$\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi}\sin x dx$$

$$=\frac{1-\cos\xi}{100\pi}=\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}}{50\pi}=\frac{\theta}{50\pi},$$

其中 $100\pi\leqslant\xi\leqslant200\pi$ 及 $0\leqslant\theta\leqslant1$.

2329. $\int_a^b\frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x dx(\alpha\geqslant0;0<a<b)$.

**解** 设 $f(x)=\sin x,\varphi(x)=\frac{e^{-\alpha x}}{x}$，同上题，有

$$\int_a^b\frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x dx=\frac{e^{-\alpha a}}{a}\int_a^{\xi}\sin x dx$$

$$=\frac{1}{ae^{\alpha a}}(\cos a-\cos\xi)$$

$$=-\frac{2}{a}e^{-\alpha a}\sin\frac{a+\xi}{2}\sin\frac{a-\xi}{2}=\frac{2}{a}\theta,$$

其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$ 及 $|\theta|<1$.

2330. $\int_a^b\sin x^2dx\quad(0<a<b)$.

**解** 设 $x=\sqrt{t}$. 则

$$\int_a^b \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

其次，设 $f(t)=\sin t$, $\varphi(t)=(\sqrt{t})^{-1}$, 则 $\varphi(t)$ 单调下降，且 $\varphi(t)>0$, 于是

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2a}\int_{a^2}^{\xi} \sin t dt$$

$$= \frac{1}{2a}(\cos a^2 - \cos\xi)$$

$$= \frac{1}{a}\sin\frac{\xi+a^2}{2}\sin\frac{\xi-a^2}{2}$$

$$= \frac{1}{a}\theta,$$

其中 $a^2\leqslant\xi\leqslant b^2$, $|\theta|\leqslant 1$. 所以

$$\int_a^b \sin x^2 dx = \frac{\theta}{a}\ (|\theta|\leqslant 1).$$

**2331.** 设函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 和它们的平方在区间 $[a,b]$ 上可积分. 证明哥西—布尼雅可夫斯基不等式

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)dx \int_a^b \psi^2(x)dx.$$

**证** 证法一：我们有

$$\left(\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \psi^2(x)dx\right) - \left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \psi^2(y)dy\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\int_a^b \psi^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \varphi^2(y)dy\right)$$

$$- \left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \varphi(y)\psi(y)dy\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left\{\int_a^b [\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)]^2 dx\right\} dy \geqslant 0,$$

故

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)dx.$$

证法二：考虑积分

$$\int_a^b [\varphi(x) - \lambda\psi(x)]^2 dx,$$

其中 $\lambda$ 为任意实数. 从而

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx - 2\lambda\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$$

$$+ \lambda^2\int_a^b \psi^2(x)dx \geqslant 0.$$

这是关于变数 $\lambda$ 的不等式，左端是二次三项式. 于是其判别式

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right\}^2 - \int_a^b \varphi^2(x)dx$$

$$\int_a^b \psi^2(x)dx \leqslant 0,$$

即

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right\}^2$$

$$\leqslant \int_a^b \varphi^2(x)dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)dx.$$

2332. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续可微分且 $f(a) = 0$，证明不等式

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx,$$

其中 $\qquad M = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$

**证** 设 $x$ 为$[a,b]$上任一点，则利用哥西—布尼雅可夫斯基不等式得到

$$\left\{\int_a^x f(x)dx\right\}^2 \leqslant \int_a^x 1\cdot dx\cdot\int_a^x f'^2(x)dx,$$

即

$$f^2(x) = [f(x)-f(a)]^2 \leqslant (x-a)\int_a^x f'^2(x)dx$$

$$\leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx.$$

由此可知

$$M^2 = \sup_{x\in[a,b]} f^2(x) \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx.$$

2333. 证明等式：

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = 0.$$

**证** 证法一：应用第一中值定理，知

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p = 0,$$

其中 $\xi_n$ 为界于 $n$ 与 $n+p$ 之间的某值.

证法二：应用第二中值定理，得

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right| = \frac{1}{n}\left|\int_n^{\xi'_n}\sin x dx\right|$$

$$= \frac{1}{n}|\cos n - \cos\xi'_n| \leqslant \frac{2}{n} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

其中 $\xi'_n$ 是界于 $n$ 与 $n+p$ 之间的某值. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = 0.$$

## §4. 广义积分

1° 函数的广义可积分性　若函数 $f(x)$ 于每一个有穷区间 $[a,b]$ 上依寻常的意义是可积分的，则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

若函数 $f(x)$ 于点 $b$ 的邻域内无界且于每一个区间 $(a,b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 内依寻常的意义是可积分的，则取

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{2}$$

若极限(1)或(2)存在，则对应的积分称为收敛的，在相反的情形则称为发散的.

2° 哥西准则　积分(1)收敛的充要条件为对于任意的 $\varepsilon>0$，存在有数 $b=b(\varepsilon)$，当 $b'>b$ 及 $b''>b$ 时，下面的不等式成立

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

同样地对形状为(2)的积分可述出哥西准则.

3° 绝对收敛的判别法　若 $|f(x)|$ 是广义可积分的，则函数 $f(x)$ 的对应的积分(1)或(2)称为绝对收敛的，而且显然也是收敛的积分.

比较判别法 Ⅰ. 设当 $x\geqslant a$ 时 $|f(x)|\leqslant F(x)$.

若 $\int_a^{+\infty}F(x)dx$ 收敛，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛.

比较判别法 Ⅱ. 若 $\psi(x)>0$ 及当 $x\to+\infty$ 时，

$$\varphi(x) = O^*[\psi(x)],$$

则积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 及 $\int_a^{+\infty}\psi(x)dx$ 同时收敛或同时发散. 就特别情形来说，若当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\sim\psi(x)$，则上面的结果也成立.

比较判别法 Ⅲ. (a) 设当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

在这种情况下，当 $p>1$ 时，积分(1)收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，积分(1)发散.

(6) 设当 $x\to b-0$ 时，

$$f(x)=O^*\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right].$$

在这种情况下，当 $p<1$ 时，积分(2)收敛；当 $p\geqslant 1$ 时，积分(2)发散.

4° 收敛性的较精密的判别法　若(1)当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调地趋近于零；(2)函数 $f(x)$ 有有界的原函数

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)d\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

收敛，但一般地说，并非绝对收敛.

特殊情形，若 $p>0$，则积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx \text{ 及} \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx \quad (a>0)$$

收敛.

5° 在哥西意义上的主值　若函数 $f(x)$ 对任意的 $\epsilon>0$ 积分

$$\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx \text{ 及} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx \quad (a<c<b)$$

存在，则在哥西意义上的主值($V\cdot P\cdot$)为

$$V\cdot P\cdot\int_a^b f(x)dx$$
$$=\lim_{\epsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right].$$

相仿地，$V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^a f(x)dx.$

**计算下列积分：**

**2334.** $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}(a>0)$.

**解**　由于

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

2338. $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

**解** 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\right)\Big|_2^b$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{b-1}{b+2}+2\ln 2\right) = \frac{2}{3}\ln 2,$$

所以

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{2}{3}\ln 2.$$

2339. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

**解** $$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}^{*)} + C.$$

由于

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} + \lim_{a\to+\infty}\int_0 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)}+\frac{1}{3\sqrt{4}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$+ \lim_{b\to+\infty}\left\{\left(\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2b+1}{\sqrt{3}}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

2340. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

**解** 由于

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^3}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left( \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^{*)} \Bigg|_0^b$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用 1881 题的结果.

2341. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

**解** 由于

$$\lim_{\substack{b\to+\infty \\ \varepsilon\to+0}} \int_\varepsilon^b \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ \varepsilon\to+0}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \right)^{*)} \Bigg|_\varepsilon^b = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*） 利用 1712 题的结果.

2342. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

**解** 先求$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. 设$\sqrt{1-x}=t$,则

$$x=1-t^2, dx=-2tdt, 2-x=1+t^2.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-2\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$=-2\operatorname{arc\,tg} t+C$$

$$=-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-x}+C.$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-(1-\varepsilon)}-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\frac{\pi}{2}.$$

2343. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

**解** 设$\sqrt{1+x^5+x^{10}}=t-x^5$. 则当$1\leqslant x<+\infty$时,$1+\sqrt{3}\leqslant t<+\infty$,代入得

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$$

$$= \frac{2}{5}\int_{1+\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{5}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{1+\sqrt{3}}^{+\infty} {}^{*)}$$

$$= \frac{1}{5}\ln 1 - \frac{1}{5}\ln\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{5}\ln(1+\frac{2}{\sqrt{3}}).$$

*） 牛顿—莱不尼兹公式对于广义积分也成立. 例如

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty},$$

其中 $F(+\infty)$ 是一个符号，代表 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$（假定此极限存在有限），下同，不再说明.

2344. $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$

**解** 我们有

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \ln x d(\frac{1}{1+x^2})$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\int_\varepsilon^b \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]\Big|_\varepsilon^b$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{b^2}{b^2+1}\right.$$

$$- \frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}\Big)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big(-\frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2+1)}\ln\varepsilon + \frac{1}{4}\ln(\varepsilon^2+1)\Big)$$

$$= 0,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = 0.$$

**注** $\varepsilon \to +0$ 与 $b \to +\infty$ 的极限过程是独立的，因此可分别取极限.

**2345.** $\int_0^{+\infty}\frac{\text{arc tg}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

**解** 设 $x = \text{tg } t$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\text{arc tg}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sec^2 t dt}{\sec^3 t}$$

$$= (t\sin t + \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

**2346.** $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx dx \ (a > 0).$

**解** $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx dx$

$$= \left(\frac{-a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right)^{*)}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}.$$

*) 利用 1828 题的结果.

**2347.** $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx \ (a > 0).$

**解** $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx$

$$= \left( \frac{-a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right)^{*)} \Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

*) 利用 1829 题的结果.

利用递推公式计算下列广义积分($n$ 为自然数):

2348. $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$

**解** $I_n = \int_0^{+\infty} x^n d(-e^{-x})$

$$= -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$= n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1},$$

即 $I_n = nI_{n-1}$. 利用此递推公式及

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

容易得到

$$I_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 I_0 = n!.$$

2349$^+$. $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^n} (ac - b^2 > 0).$

**解** $I_n = \frac{ax + b}{2(n-1)(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)^{n-1}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$

$$+ \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{a}{2(ac-b^2)} I_{n-1}{}^{*)}$$

$$= \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{a}{ac-b^2} I_{n-1},$$

即

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{a}{ac-b^2} I_{n-1} (n > 1).$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ax^2+2bx+c}$$

$$=\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{|a|\left(x+\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

利用递推公式及 $I_1$ 容易得到

$$I_n=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

*） 利用 1921 题的结果.

2350⁺. $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

**解** 由于 $x^{n+1}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}\to1$（当 $x\to+\infty$ 时），且 $n+1>1$，所以积分 $I_n$ 收敛.

其次，我们来计算 $I_n$. 由于

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$=\frac{1}{n!x}-\frac{1}{(n-1)!(x+1)}$$

$$+\frac{1}{2!(n-2)!(x+2)}$$

$$-\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!(x+k)}$$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!(x+n)},$$

所以

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \frac{bx}{x+k}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \ln(x+k)\Big|_1^{+\infty},$$

其中 $C_n^k$ 为从 $n$ 个元素中每次取 $k$ 个的组合数.

对于 $n$,不论是偶数还是奇数,用上限代入(此处理解为趋近于无穷时的极限)后均为零. 事实上,
当 $n = 2m$ 时,

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k)$$

$$= \ln \frac{x\cdot(x+2)^{C_{2m}^2}\cdots(x+2m)^{C_{2m}^{2m}}}{(x+1)^{C_{2m}^1}(x+3)^{C_{2m}^3}\cdots(x+2m-1)^{C_{2m}^{2m-1}}}.$$

由于

$$1 + C_{2m}^2 + \cdots + C_{2m}^{2m} = C_{2m}^1 + C_{2m}^3 + \cdots + C_{2m}^{2m-1},$$

所以,当 $m \to +\infty$ 时

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k) \longrightarrow \ln 1 = 0;$$

当 $n = 2m-1$ 时,

$$\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k C_{2m-1}^k \ln(x+k)$$

$$= \ln \frac{x(x+2)^{C_{2m-1}^2}\cdots(x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-2}}}{(x+1)^{C_{2m-1}^1}(x+3)^{C_{2m-1}^3}\cdots(x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-1}}}$$

$$\longrightarrow 0(\text{当 } m \to +\infty \text{ 时}).$$

最后我们得到

$$I_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1} C_n^k \ln(1+k).$$

2351. $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

**解** 由于 $\sqrt{1-x}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\longrightarrow\frac{1}{2}$

(当 $x\to 1-0$ 时),

且 $p=\frac{1}{2}<1$,所以积分 $I_n$ 收敛.

其次,设 $x=\sin t$,则

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$$

$$=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n=2k \text{ 时;}^{*)}\\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时.}\end{cases}$$

*) 利用 2281 题的结果.

2352. $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1}x}$.

**解** 设 $x=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$,则

当 $0\leqslant x<+\infty$ 时,$\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\pi$,

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1}x}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u\,du$$

$$=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n=2k \text{ 时;}^{*)}\\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时.}\end{cases}$$

*) 利用 2282 题的结果.

2353. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$; (б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$.

于是，$2A = A - \frac{\pi}{2}\ln 2$，$A = -\frac{\pi}{2}\ln 2$，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

2354. 求：

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx,$$

其中 $E$ 表区间$(0, +\infty)$中使被积分式有意义的一切 $x$ 值所成之集合.

**解** $\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx, ^{*}$$

对于广义积分$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$

作如下处理：

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$= \int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$+ \int_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$= 2e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} \Big|_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi} - 2e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} \Big|_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi}$$

$$= 2\sqrt[4]{8} \cdot e^{-k\pi} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}}.$$

---

* 记号$\sum_{k=0}^{\infty} S_k$理解为极限$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} S_k$. 以后题解中不再说明.

由于

$$\sum_{k=0}^{n} 2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}e^{-k\pi}=2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{1-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}.$$

当 $n\to+\infty$ 时,上式的极限为 $2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}$.

于是,

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx=\frac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}.$$

2355. 证明等式

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})dx,$$

其中 $a>0,b>0$(假定等式左端的积分有意义).

**证** 设 $ax-\frac{b}{x}=t$,则

当 $0<x<+\infty$ 时,$-\infty<t<+\infty$,

$$ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}.$$

将此二式相加得

$$x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab}).$$

从而有

$$dx=\frac{1}{2a}\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt.$$

代入欲证的等式左端,得

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0} f(\sqrt{t^2+4ab}) \cdot \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \cdot \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \cdot \frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab}) \cdot \frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})$$

$$\cdot \frac{\sqrt{t^2+4ab}-t+\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$= \frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})dt,$$

于是

$$\int_{0}^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_{0}^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})dx.$$

**2356.** 数

$$M[f] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(\xi)d\xi$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的平均值. 求下列函数的平均值:

(a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$;

(б) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$; (в) $f(x) = \sqrt{x}\sin x$.

**解** (a) 由于

$$\int_{0}^{x} [\sin^2\xi + \cos^2(\xi\sqrt{2})]d\xi$$

$$= \int_0^x \left(\frac{1-\cos 2\xi}{2} + \frac{1+\cos(2\xi\sqrt{2}}{2}\right) d\xi$$

$$= x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(2x\sqrt{2}),$$

所以

$$M[f] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x [\sin^2\xi + \cos^2(\xi\sqrt{2})] d\xi$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{4x}\sin 2x + \frac{1}{4x\sqrt{2}}\sin(2x\sqrt{2})\right]$$

$$= 1;$$

(б) $$M[f] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arc\,tg}\xi d\xi$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left[x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{2x}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2(1+x^2)} = \frac{\pi}{2};$$

(в) 利用第二中值定理，得

$$\int_0^x \sqrt{\xi}\sin\xi d\xi = \sqrt{x}\int_c^x \sin\xi d\xi$$

$$= \sqrt{x}(\cos c - \cos x)\ (0 \leqslant c \leqslant x),$$

于是，

$$M[f] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{\xi}\sin\xi d\xi$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos c - \cos x}{\sqrt{x}} = 0.$$

**2357.** 求：

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt$； (б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt}{x^3}$；

(в) $\lim\limits_{x\to +0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt *)}{\ln \frac{1}{x}}$；

(г) $\lim\limits_{x\to +0} x^a\int_x^1 \frac{f(t)^{*)}}{t^{a+1}}dt$，

其中 $a>0$，$f(t)$ 为闭区间[0,1]上的连续函数.

**解** (a) 由于

$$1-\frac{t^2}{2}\leqslant \cos t\leqslant 1,$$

所以

$$\int_x^1 \frac{1-\frac{t^2}{2}}{t^2}dt \leqslant \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt \leqslant \int_x^1 \frac{dt}{t^2},$$

计算得

$$-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\leqslant \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt \leqslant -1+\frac{1}{x}.$$

又由于

$$\lim_{x\to 0} x\left(-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)=1$$

及

$$\lim_{x\to 0} x\left(-1+\frac{1}{x}\right)=1,$$

故最后得到

$$\lim_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt=1;$$

(б) 由于

$$t^2 < \sqrt{1+t^4},$$

所以

$$\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt > \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

从而当 $x \to +\infty$ 时，$\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt \to +\infty$.

利用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^3} = \frac{1}{3};$$

(в) 由于 $\lim\limits_{t\to+0} t \cdot (t^{-1}e^{-t}) = 1$，故广义积分 $\int_0^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt$ 发散. 从而，所求的极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 利用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to+0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{-e^{-x}\cdot x^{-1}}{-\frac{1}{x}} = 1;$$

(г) 由于 $f(t)$ 在 $t=0$ 处右连续，故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta' > 0$，使当 $0 < t < \delta'$ 时，恒有

$$|f(t) - f(0)| < \frac{\alpha\varepsilon}{2}.$$

今又取 $0 < \delta < \delta'$，使当 $0 < x < \delta$ 时，有

$$\left| x^\alpha \int_{\delta'}^1 \frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $0 < x < \delta$ 时，就有

$$\left| x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt \right|$$

$$= \left| x^\alpha \int_x^{\delta'} \frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt \right.$$

$$+x^{a}\int_{\delta'}^{1}\frac{f(t)-f(0)}{t^{a+1}}dt\Bigg|$$

$$\leqslant\frac{\alpha\varepsilon}{2}\cdot x^{a}\int_{x}^{\delta'}\frac{dt}{t^{a+1}}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}x^{a}\left(\frac{1}{x^{a}}-\frac{1}{\delta'^{a}}\right)+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{x\to+0}x^{a}\int_{x}^{1}\frac{f(t)-f(0)}{t^{a+1}}dt=0,$$

最后得到

$$\lim_{x\to+0}x^{a}\int_{x}^{1}\frac{f(t)}{t^{a+1}}dt=\lim_{x\to+0}x^{a}\int_{x}^{1}\frac{f(0)}{t^{a+1}}dt$$

$$=\lim_{x\to+0}x^{a}f(0)\left(-\frac{1}{a}t^{-a}\right)\Bigg|_{x}^{1}$$

$$=\lim_{x\to+0}x^{a}f(0)\left(\frac{1}{ax^{a}}-\frac{1}{a}\right)=\frac{f(0)}{a}.$$

*） 原题(в)(г)中 $x\to+0$ 误印为 $x\to0$.

研究下列积分的收敛性:

**2358.** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{2}dx}{x^{4}-x^{2}+1}$.

**解** 由于 $x^{2}\cdot\dfrac{x^{2}}{x^{4}-x^{2}+1}\to1$(当 $x\to+\infty$ 时),

所以积分$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{2}dx}{x^{4}-x^{2}+1}$收敛.

**2359.** $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^{2}+1}}$.

**解** 由于 $x^{\frac{5}{3}}\cdot\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x^{2}+1}}\to1$(当 $x\to+\infty$ 时)

所以积分$\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^{2}+1}}$收敛.

2360. $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

**解** 当 $0 < x < 1$ 时 $\ln x < 0$. 由于

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \cdot \frac{1}{-\ln x} = \lim_{x \to 1-0} \frac{-1}{-\frac{1}{x}} = 1,$$

所以积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ 发散，从而积分 $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ 也发散.

2361. $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$.

**解** 将积分分成 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$

$+ \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$.

对于积分 $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$. 由于

$x^{1-p} \cdot (x^{p-1} e^{-x}) \to 1$（当 $x \to +0$ 时），故当 $p > 0$

时（从而 $1 - p < 1$），积分 $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ 收敛.

对于积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$. 由于

$$x^2 \cdot (x^{p-1} e^{-x}) = \frac{x^{p+1}}{e^x} \to 0 \text{（当 } x \to +\infty \text{ 时）},$$

故对于一切 $p$ 值，积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 恒收敛.

于是，当 $p > 0$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

收敛.

2362. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$.

**解** 将积分分成$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$.

对于积分$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$，由于

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x)^{-q} \cdot x^p \ln^q \frac{1}{x} = \lim_{x \to 1-0} x^p \left( \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} \right)^q$$

$$= \left( \lim_{x \to 1-0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} \right)^q$$

$$= \left( \lim_{x \to 1-0} \frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1} \right)^q = 1,$$

故$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 当 $-q < 1$（即 $q > -1$）时收敛，当 $-q \geqslant 1$（即 $q \leqslant -1$）时发散. 于是，当 $q \leqslant -1$ 时，$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 必发散. 故下面可在 $q > -1$ 的假定下来讨论$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$.

若 $p > -1$，可取 $\tau > 0$ 充分小，使 $p - \tau > -1$. 于是

$$\lim_{x \to +0} x^{-p-\tau} \cdot x^p \ln^q \frac{1}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^q}{\left(\frac{1}{x}\right)^\tau} = 0.$$

由于 $-p + \tau < 1$，故此时$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 收敛；

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx(n \geqslant 0)$$

收敛.

2364. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx(a \neq 0)$.

**解** 由于 $\operatorname{arc\,tg} ax = -\operatorname{arc\,tg}(-ax)$，故可设 $a > 0$，先考虑积分 $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$. 由于

$$\lim_{x\to -0} x^{n-1} \cdot \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n} = \lim_{x\to+0} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{a}{1+a^2x^2}}{1} = a,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$ 仅当 $n-1<1$ 即当 $n<2$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$. 由于

$$x^n \cdot \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n} \to \frac{\pi}{2}(\text{当 } x \to +\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$ 仅当 $n>1$ 时收敛.

于是，仅当 $1<n<2$ 时，积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx(a \neq 0)$$

收敛.

2365. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$.

**解** 先考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$. 当 $n>1$ 时，取 $a>0$ 充分小，使 $n-a>1$. 由于

$$x^{n-a}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\frac{\ln(1+x)}{x^a}\to 0$$

(当 $x\to+\infty$ 时),

故此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛. 当 $n\leqslant 1$ 时,由于

$$x^n\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}\to+\infty(\text{当 } x\to+\infty \text{ 时}),$$

故此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 发散.

再考虑积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$. 由于

$$\lim_{x\to+0}x^{n-1}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

故积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 仅当 $n-1<1$ 即当 $n<2$ 时收敛.

于是,仅当 $1<n<2$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$$

收敛.

2366. $\int_0^{+\infty}\frac{x^m\text{arc tg } x}{2+x^n}dx.\ (n\geqslant 0).$

**解** 先考虑积分 $\int_0^1\frac{x^m\text{arc tg } x}{2+x^n}dx$. 由于

$$\lim_{x\to+0}x^{-m-1}\cdot\frac{x^m\text{arc tg } x}{2+x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\text{arc tg } x}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\frac{1}{2},$$

故积分 $\int_0^1\frac{x^m\text{arc tg } x}{2+x^n}dx$ 仅当 $-m-1<1$ 即当 $m>$

$-2$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m\mathrm{arc\,tg}\,x}{2+x^n}dx$. 由于

$$x^{n-m}\cdot\frac{x^m\mathrm{arc\,tg}\,x}{2+x^n}$$

$$=\frac{x^n\mathrm{arc\,tg}\,x}{2+x^n}\to\frac{\pi}{2}(\text{当 } x\to+\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m\mathrm{arc\,tg}\,x}{2+x^n}dx$ 仅当 $n-m>1$ 时收敛.

于是,仅当 $m>-2$ 且 $n-m>1$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\mathrm{arc\,tg}\,x}{2+x^n}(n\geqslant 0)$$

收敛.

2367. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx \quad (n\geqslant 0)$.

**解** 当 $a\neq 0$ 时,设 $f(x)=\cos ax, g(x)=\frac{1}{1+x^n}$,则对于任意的 $A>0$,均有 $\left|\int_0^A f(x)dx\right|\leqslant\frac{2}{a}$;其次,当 $n>0$ 时,$g(x)$ 单调下降且趋于零($n\to+\infty$). 从而得知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$$

收敛. 至于当 $n=0$ 时,积分显然发散.

当 $a=0$ 时,由于

$$x^n\cdot\frac{1}{1+x^n}\to 1 \quad (\text{当 } x\to+\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$ 仅当 $n>1$ 时收敛.

于是,当 $a\neq 0$、$n>0$ 及 $a=0$、$n>1$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx.$$

收敛.

2368. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$

**解** 方法一：

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right).$$

积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$显然发散.

又因对于任意的 $A>1$, $\left|\int_1^A\cos 2x dx\right|\leqslant 2$,且当 $x\to+\infty$ 时,$\frac{1}{x}$ 单调地趋于零,故积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx \text{ 收敛.}$$

于是,积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散,从而积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

发散.

方法二：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{t+n\pi}dt\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

由于不论 $N$ 取多大,只要取 $p=N$,就有

$$\sum_{k=N+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\sum_{i=N+1}^{2N}\frac{1}{k}$$

$$=\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{2N}>\underbrace{\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}+\cdots+\frac{1}{2N}}_{N\text{个}}$$

$$=\frac{1}{2N}\cdot N=\frac{1}{2},$$

故递增叙列

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(n=1,2,\cdots)$$

的极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$是$+\infty$,即$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$.

于是,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

发散.

2369. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$.

**解** 先考虑积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$,对于任何$q$值,由于

$$\lim_{x\to+0}x^p\cdot\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p\cdot\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\cos^q x}\right)=1,$$

故积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$仅当$p<1$($q$为任意值)时收敛.

再考虑积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$,对于任何$p$值,由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q\cdot\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^q\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{\sin^p x}\right)$$

$$=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^q=1,$$

故积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$仅当$q<1$($p$为任意值)时收敛.

于是,当$p<1$且$q<1$时,积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$$

收敛.

2370. $\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

**解** 先考虑积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{-n}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right)=1,$$

故积分$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$仅当$-n<1$即当$n>-1$时收敛.

再考虑积分$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 对于任意的$n$,

由于

$$\lim_{x\to1-0}\left(\sqrt{1-x}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1-0} \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

故积分$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 恒收敛.

于是,当 $n > -1$ 时,积分

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

收敛.

2371. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$.

**解** 先考虑积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$. 不妨设 $\min(p,q) = p$,由于

$$\lim_{x \to +0} \left( x^p \cdot \frac{1}{x^p + x^q} \right) = \lim_{x \to +0} \frac{1}{1 + x^{q-p}} = 1,$$

故积分$\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $p < 1$,即当 $\min(p,q) < 1$ 时收敛.

再考虑积分$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$. 不妨设 $\max(p,q) = q$,由于

$$\lim_{x \to +\infty} \left( x^q \cdot \frac{1}{x^p + x^q} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{-(q-p)} + 1} = 1,$$

故积分$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $q > 1$ 即当 $\max(p,q) > 1$ 时收敛.

于是,当 $\min(p,q) < 1$ 且 $\max(p,q) > 1$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$$

收敛.

2372. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

**解** 先考虑积分$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$. 由于

$$\lim_{x\to+0}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}\right)=0,$$

故积分$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛.

再考虑积分$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$. 由于

$$\lim_{x\to1-0}\left(\sqrt{1-x}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}\right)=0,$$

故积分$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛.

于是,积分

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$$

收敛.

2373. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$.

**解** 由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{\frac{5}{6}}\cdot\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\sin x}\ln(\sin x)\right]=0,$$

故积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$ 收敛.

2374. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$.

**解** 先考虑$\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$. 对于任意的 $p$,由于

$$\lim_{x\to 1+0}\left[(x-1)^q\cdot\frac{1}{x^p\ln^q x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\left[\frac{1}{x^p}\cdot\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q\right]=\left(\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q$$

$$=\left(\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^q=1,$$

故积分$\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$仅当 $q<1$ 且 $p$ 为任意值时收敛.

再考虑积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$. 如果 $p>1$,取 $\alpha>0$ 充分小,使 $p-\alpha>1$,则对于任意的 $q$,由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-\alpha}\cdot\frac{1}{x^p\ln^q x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha\ln^q x}\right)=0,$$

故积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$收敛;如果 $p\leqslant 1$,$q<1$,由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}\geqslant\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x}$$

$$=\left.\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\right|_2^{+\infty}=+\infty,$$

故积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$发散.

于是,当 $p>1$ 且 $q<1$ 时,积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$$

收敛.

2375. $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$.

(3) 当 $p<1$ 时，取 $\delta>0$ 充分小，使 $p+\delta<1$. 对于任意的 $q$ 和 $r$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+\delta}}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\delta}{(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=+\infty,$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 发散.

于是，当 $p>1$，$q$ 是任意的，$r<1$ 和当 $p=1$，$q>1$，$r<1$ 时，积分

$$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

收敛.

2376. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$.

**解** 首先，被积函数关于 $\frac{1}{x}$ 是 $\sum_{i=1}^n P_i$ 级无穷小（当 $x\to\pm\infty$ 时）.

其次（不妨设当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$），

$$\lim_{x\to a_i}\left(|x-a_i|^p\cdot\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}\right)$$

$=c_i$，$0<c_i<+\infty(i=1,2,\cdots,n)$，

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$ 仅当

$\sum_{i=1}^n p_i>1$ 且 $p_i<1(i=1,2,\cdots,n)$ 时收敛.

2377. $\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$,

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为次数分别为 $m$ 及 $n$ 的互质的多

项式.

**解** 当 $P_n(x)=0$ 在 $[0,+\infty)$ 上有根 $\lambda$ 并设其重数为 $r(\geqslant 1)$ 时，由于 $P_n(x)$ 与 $P_m(x)$ 互质，故 $\lambda$ 不是 $P_m(x)$ 的根. 从而有

$$\lim_{x\to\lambda}\left[(x-\lambda)^r\cdot\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right]=a\neq 0,$$

而且显然在点 $\lambda$ 的右(左)近旁，$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 都保持定号. 由于 $r\geqslant 1$，故积分发散. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{n-m}\cdot\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right]=b\neq 0,$$

故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$ 仅当 $n-m>1$ 即当 $n>m+1$ 时收敛.

于是，当 $P_n(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内无根且 $n>m+1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$$

收敛.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性：

2378. $\int^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

**解** 对于任意的 $A>1$，由于 $\left|\int_1^A\sin x dx\right|\leqslant 2$，且当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 单调地趋于零，故积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

收敛．而积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$是普通的定积分$\left(\frac{\sin x}{x}\right.$在$x=0$有可去间断点，故补充定义其值为1后，$\frac{\sin x}{x}$可视为〔0，1〕上的连续函数$\left.\right)$，故积分

$$\int^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

收敛　但它不是绝对收敛的．事实上，当$x>0$时，$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x}$，由2368题知，积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$发散，故积分$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$发散．

2379. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$.

**解**　对于任意的$A>0$，由于$\left|\int_0^A \cos x dx\right| \leqslant 2$，且当$x \to +\infty$时，$\frac{\sqrt{x}}{x+100}$单调地趋于零，故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$$

收敛．但它不是绝对收敛的．事实上，由于

$$\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100} \geqslant \frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+100}-\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\right),$$

且$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+100}\right)=1$，故积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100}dx$发散．仿照前半段证明，可知$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx$

收敛. 从而，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}dx$发散. 于是，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}dx$$

发散.

2380. $\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)dx\,(q\neq 0)$.

**解** 设$t=x^q$，则$dx=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt$. 于是

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)dx=\frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt.$$

先考虑积分$\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$. 由于

$$\lim_{t\to+0}\left(t^{-\frac{p+1}{q}}\cdot t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right)=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

故积分$\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$仅当$-\frac{p+1}{q}<1$，即当$\frac{p+1}{q}>-1$时收敛，又由于被积函数在〔0,1〕上非负，故也是绝对收敛的.

再考虑积分$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$. 如果$\frac{p+1}{q}<1$，则由于对任意的$A>1$，$\left|\int_1^A\sin t\,dt\right|\leqslant 2$且$t^{\frac{p+1}{q}-1}$单调地趋于零（当$t\to+\infty$时），故此时积分$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$收敛. 如果$\frac{p+1}{q}=1$，则积分$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$显然发散，从而积分$\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}$

$\cdot \sin t dt$ 也发散. 如果$\frac{p+1}{q}>1$,则由于$\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}$ $=+\infty$,故对任给的 $A>0$,总存在自然数 $N$,使有 $2N\pi+\frac{\pi}{4}>A$,且当 $t>2N\pi+\frac{\pi}{4}$ 时,$t^{\frac{p+1}{q}-1}>\sqrt{2}$. 今取

$$A'=2N\pi+\frac{\pi}{4}, A''=2N\pi+\frac{\pi}{2},$$

则有

$$\left|\int_{A'}^{A''} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t dt\right|>\sqrt{2}\left|\int_{A'}^{A''}\sin t dt\right|$$
$$=1,$$

它不可能小于任给的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,因而,积分

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t dt,$$

发散,从而积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t dt$$

也发散.

于是,仅当 $-1<\frac{p+1}{q}<1$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t dt$$

收敛,且当$\frac{p+1}{q}>-1$ 时,积分

$$\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t dt$$

绝对收敛.

下面我们考虑积分$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t dt$ 的绝对收

敛性. 分三种情形讨论：

(1) 当$\frac{p+1}{q}<0$时，由于

$$\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\leqslant t^{\frac{p+1}{q}-1}(1\leqslant t<+\infty),$$

且$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}dt$ 收敛，故当$\frac{p+1}{q}<0$时，积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t dt$ 绝对收敛；

(2) 当$\frac{p+1}{q}=0$时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|dt$$

$$=\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt=+\infty$$

故此时积分不绝对收敛(但条件收敛)；

(3) 当$\frac{p+1}{q}>0$时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|dt$$

$$\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}dt=+\infty,$$

故此时积分也不是绝对收敛的.

于是，当$-1<\frac{p+1}{q}<0$时，积分

$$\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t dt$$

绝对收敛.

最后我们得到：当$-1<\frac{p+1}{q}<0$时，积分

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)dx$$

绝对收敛；当 $0 \leqslant \frac{p+1}{q} < 1$ 时，积分条件收敛.

2381. $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx \quad (q \geqslant 0)$.

**解** 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$. 由于

$$\lim_{x \to +0} \left( x^{-1-p} \cdot \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \right)$$

$$= \lim_{x \to +0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+x^q} \right) = 1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 仅当 $-1-p<1$ 即当 $p>-2$ 时收敛，且是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$. (1) 若 $p \geqslant q$，则对任何 $A>1$，必存在正整数 $N$，使 $2N\pi + \frac{\pi}{4} > A$ 且当 $x \geqslant 2N\pi + \frac{\pi}{4}$ 时，恒有 $\frac{x^p}{1+x^q} > \frac{1}{3}$. 于是，对 $A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}$，$A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$，有

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{x^p}{1+x^q} \sin x dx \right| > \frac{1}{3} \int_{A'}^{A''} \sin x dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6},$$

它不可能小于任给的 $\varepsilon$，故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 发散.

(2) 若 $p<q-1$，取 $\alpha>0$ 使 $p+\alpha<q-1$，即 $q-p-\alpha>1$，由于

$$\lim_{x \to +\infty} x^{q-p-\alpha} \cdot \frac{x^p}{1+x^q} |\sin x|$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^q}{1+x^q} \cdot \frac{|\sin x|}{x^\alpha} = 0,$$

故积分$\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$绝对收敛. (3) 现设$q-1 \leqslant p < q$. 先证$\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$发散. 事实上, 此时, 可取$A_0 > 1$, 使当$x \geqslant A_0$时, $\frac{x^{p+1}}{1+x^q} > \frac{1}{3}$;

$$\text{故} \int_{A_0}^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx = \int_{A_0}^{+\infty} \frac{x_{p+1}}{1+x^q} \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\geqslant \frac{1}{3} \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty,$$

从而$\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$发散.

再证$\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$收敛. 事实上, 若$q=0$, 则$-1 \leqslant p < 0$, 此时积分$\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$

$= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^p \sin x dx$显然收敛; 若$q > 0$, 由于

$\left( \frac{x^p}{1+x^q} \right)' = \frac{x^{p-1}[p-(q-p)x^q]}{(1+x^q)^2} < 0$(当$x$充分大时),

故当$x \to +\infty$时, $\frac{x^p}{1+x^q}$单调递减趋于零. 而$\left| \int_1^A \sin x dx \right| = |\cos 1 - \cos A| \leqslant 2$有界, 故积分$\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$收敛. 总之, 我们证明了: 当$q-1 \leqslant p < q$时, $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$条件收敛.

于是，最后得结论：积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$当$p>-2$，$q>p+1$时绝对收敛；当$p>-2$，$p<q\leqslant p+1$时条件收敛.

2382. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$.

**解** 当$n\leqslant 0$时，积分显然是发散的.

当$n>0$时，首先考虑积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx(a>1)$. 由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}dx,$$

而

$$\left|\int_a^A\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)dx\right|$$

$$\left|\cos\left(a+\frac{1}{a}\right)-\cos\left(A+\frac{1}{A}\right)\right|\leqslant 2.$$

又当$x$充分大时，有

$$\frac{d}{dx}x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=nx^{n-3}\left(x^2-\frac{n-2}{n}\right)>0,$$故当$x$

$$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} \geqslant \frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}$$

$$= \frac{1-\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{2x^n},$$

而当 $0 < n \leqslant 1$ 时,积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ 显然发散,积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{x^n} dx$ 收敛(仿前半段证明),故当 $0 < n \leqslant 1$ 时,积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$ 发散.从而当 $0 < n \leqslant 1$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$$

发散.对于 $1 < n < 2$ 的情况,可考虑对积分作变换 $x = \frac{1}{t}$,则得

$$\int_0^a \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)\right|}{t^{2-n}} dt.$$

仿前可知,当 $0 < 2-n \leqslant 1$ 即当 $1 \leqslant n < 2$ 时,积分 $\int_0^a \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$ 发散.从而,当 $1 < n < 2$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$$

发散

最后我们得到：当 $0 < n < 2$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$$

条件收敛.

2383$^+$. $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$,

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式，且若 $x \geqslant a$, $P_n(x) > 0$.

**解** 今仿 2381 题解之. 设

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m,$$

$$P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

其中 $m, n$ 是非负整数，$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

(1) 若 $n > m+1$，可取 $\alpha > 0$ 充分小，使 $n - \alpha > m + 1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n-m-\alpha} \cdot \left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x\right|$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left|\frac{x^n P_m(x)}{x^m P_n(x)}\right| \cdot \frac{|\sin x|}{x^\alpha} = 0,$$

而 $n - m - \alpha > 1$，故积分 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 绝对收敛.

(2) 若 $n = m+1$. 我们证明此时 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 条

件收敛. 事实上,由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xP_m(x)}{P_n(x)}=\dfrac{a_0}{b_0}$,故存在 $A_0>a$,使当 $x\geqslant A_0$ 时,恒有 $\left|\dfrac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right|>\dfrac{|a_0|}{2|b_0|}$,

于是

$$\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|dx$$

$$=\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right|\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

$$\geqslant\frac{|a_0|}{2|b_0|}\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty,$$

故 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|dx$ 发散. 此外,易知($n=m+1$ 时)

$$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'=\frac{1}{[P_n(x)]^2}\{-a_0b_0x^{2m}-2a_1b_0x^{2m-1}+\cdots+(a_{m-1}b_{m+1}-a_mb_m)\},$$

故若 $a_0b_0>0$,则当 $x$ 充分大时,$\left(\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'<0$,函数 $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 减小;若 $a_0b_0<0$,则当 $x$ 充分大时,$\left(\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'>0$,函数 $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 增加. 总之,当 $x\to+\infty$ 时,$\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 单调地趋于零. 又显然可知

$\left|\displaystyle\int_a^A\sin x\,dx\right|\leqslant 2$,故积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$ 收敛.

(3) 若 $n<m+1$. 由于 $n,m$ 都是非负整数,故 $n\leqslant m$. 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, 若 n=m;\\ +\infty, 若 n<m 且 a_0b_0>0;\\ -\infty, 若 n<m 且 a_0b_0<0.\end{cases}$$

于是，存在$A^*>a$及$\tau>0$，使当$x\geqslant A^*$时$\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$保持定号且$\left|\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}\right|>\tau$. 今对任何$A>a$，可取正整数$N$，使$2N\pi+\dfrac{\pi}{4}\geqslant\max\{A,A^*\}$. 令$A'=2N\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$A''=2N\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x dx\right|>\tau\int_{A'}^{A''}\sin x dx$$

$$=\frac{\tau\sqrt{2}}{2}.$$

它不能小于任意的$\varepsilon(0<\varepsilon<\dfrac{\tau\sqrt{2}}{2})$，故

$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x dx$ 发散.

最后，我们得出：$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x dx$ 当$n>m+1$时绝对收敛；当$n=m+1$时条件收敛.

2384. 若$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则当$x\to+\infty$时是否必有$f(x)\to 0$?研究例子：

(a)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$； (6)$\displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$.

**解** 不一定. 例如

(a) 积分$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$收敛．事实上，它是2380题之特例：$p=0,q=2$．但是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x^2)$不存在；

(6) 先证积分$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$收敛．事实上，对任何$A>0$，存在唯一的非负整数$n$，使$\sqrt{n}\leqslant A<\sqrt{n+1}$．显然$A\to+\infty$相当于$n\to\infty$．当$\sqrt{k}\leqslant x<\sqrt{k+1}$($k$— 非负整数）时，$[x^2]=k$．于是

$$\int_0^A(-1)^{[x^2]}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}(-1)^k dx+(-1)^n(A-\sqrt{n})$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}+(-1)^n(A-\sqrt{n}).$$

由于$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$递减趋于0(当$k\to\infty$时)，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$存在有限（参看2656题前面的变号级数的莱布尼兹判别法），设为$S$．又显然

$$|(-1)^n(A-\sqrt{n})|<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

故$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A(-1)^{[x^2]}dx=S$，因此积分$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$收敛．

但显然$\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^{[x^2]}$不存在.

2385. 于$[a,b]$上有定义的,无界函数$f(x)$可否把函数$f(x)$的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

看作对应的积分和式

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\triangle x_i$$

的极限?式中$x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$及$\triangle x_i=x_{i+1}-x_i$.

**解** 不能.因为若$c(a\leqslant c\leqslant b)$是瑕点,则对于$[a,b]$的任何分法,不论其$\max|\Delta x_i|$多么小,当分法确定以后,设$c\in[x_j,x_{j+1}]$,则总可以取$\xi_j$,使$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$大于任何予先给定的值.因此,当$\max|\Delta x_i|\to 0$时,$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$不可能具有有限极限.

2386. 设:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{1}$$

收敛,函数$\varphi(x)$有界,则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{2}$$

是否必定收敛?举出适当的例子.

若积分(1)绝对收敛,问积分(2)的收敛性如何?

**解** 不.例如,积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

收敛*). 且 $\varphi(x)=\sin x$ 有界，但是积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

是发散的**).

若积分(1)绝对收敛，$\varphi(x)$ 有界，则积分(2)一定是绝对收敛的. 事实上，设 $|\varphi(x)|\leqslant L$，则由不等式

$$|f(x)\varphi(x)|\leqslant L\cdot|f(x)|$$

及 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 的收敛性即可获证.

*) 利用 2378 题的结果.

**) 利用 2368 题的结果.

2387. 证明，若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，$f(x)$ 为单调函数，则 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$*).

**证** 不妨设 $f(x)$ 单调减小. 先证当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)\geqslant 0$. 若不然，则存在点 $c\geqslant a$，使 $f(c)<0$. 由于 $f(x)$ 单调减小，故当 $x\geqslant c$ 时，$f(x)\leqslant f(c)$，从而

$$\int_c^{+\infty}f(x)dx\leqslant\int_c^{+\infty}f(c)dx=-\infty.$$

因此，积分

$$\int_c^{+\infty}f(x)dx$$

发散，这与积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛矛盾. 于是，$f(x)$ 为非负的单调函数.

下面证明 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$. 由于积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛，故对任给的$\varepsilon>0$，总存在$A>a$，使当$x>A$时，恒有

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

但是

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\right|=\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\geqslant f(x)\cdot\left(x-\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{x}{2}f(x),$$

故当$x>A$时，

$$0\leqslant xf(x)<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0 \quad \text{或} \; f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

如果$f(x)$单调增大，则可考虑$-f(x)$（它是单调减小的），同法可证得$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.

*）　原题为$f(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$，现在的结果更好．

2388. 设函数$f(x)$于区间$0<x\leqslant 1$内是单调的函数，且在点$x=0$的邻域内是无界的，证明若

$$\int_0^1 f(x)dx$$

存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

**证** 设函数 $f(x)$ 在$(0,1]$ 上是单调下降的．这时 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$. 先设 $f(x)\geqslant 0(0<x\leqslant 1$ 时).
由于积分

$$\int_0^1 f(x)dx$$

存在,故把区间$[0,1]n$ 等分后,即得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\\ &< \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\ &< \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx+\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

另一方面,又有

$$\int_0^1 f(x)dx > \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

从而就有

$$0<\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)<\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx=0$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

如果不满足$f(x)\geqslant 0$,即$f(x)$可正可负．则函数$\varphi(x)=f(x)-f(1)$ 满足$\varphi(x)\geqslant 0(0<x\leqslant 1)$,且同样是单调下降,$\lim\limits_{x\to+0}\varphi(x)=+\infty$. 故根据已证的结果,知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\varphi(x)dx,$$

$$\lim_{x\to+0}\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)dt = 0,\text{从而}\lim_{x\to+0} x^{p+1}f(x) = 0.$$

再设不存在上述 $\delta$. 于是，根据 $f(x)$ 的递减性，知当 $0<x<a$ 时恒有 $f(x)<0$. 于是，当 $0<x<\frac{a}{2}$ 时，有

$$\int_x^{2x} t^p f(t)dt \leqslant f(x)\int_x^{2x} t^p dt$$

$$= C_p^* x^{p+1} f(x) < 0,$$

其中 $C_p^* = \begin{cases} \dfrac{2^{p+1}-1}{p+1}, & \text{当 } p \neq -1 \text{ 时；} \\ \ln 2, & \text{当 } p = -1 \text{ 时.} \end{cases}$

故 $C_p^*$ 也是正的常数.

于是，$|x^{p+1}f(x)| < \frac{1}{C_p^*}\left|\int_x^{2x} t^p f(t)dt\right|$. 根据 $\int_0^a x^p f(x)dx$ 的存在性，知

$$\lim_{x\to+0}\int_x^{2x} t^p f(t)dt = 0,$$

从而 $\lim_{x\to+0} x^{p+1}f(x) = 0$. 证完.

**2390.** 证明

(a) $V.P.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = 0$;

(б) $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2} = 0$;

(в) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x dx = 0$.

证(a) 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right\}$$

$$= \lim_{\epsilon \to +0} (\ln\epsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\epsilon) = 0,$$

所以

$$V.P.\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0;$$

(б) 由于

$$\lim_{\substack{\epsilon \to +0 \\ b \to +\infty}} \left( \int_{0}^{1-\epsilon} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+\epsilon}^{b} \frac{dx}{1-x^2} \right)$$

$$= \lim_{\substack{\epsilon \to +0 \\ b \to +\infty}} \left( \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\epsilon}{\epsilon}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\epsilon}{\epsilon}\right| \right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon \to +0}\ln\left|\frac{2-\epsilon}{2+\epsilon}\right| = 0$$

所以

$$V.P.\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0;$$

(в) 由于

$$\lim_{b \to +\infty}\int_{-b}^{b} \sin x dx = \lim_{b \to +\infty} (-\cos b + \cos b)$$

$$= 0,$$

所以

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0.$$

2391. 证明:当 $x \geqslant 0$ 且 $x \neq 1$ 时

$$\text{li}x = V.P.\int_{0}^{x} \frac{d\xi}{\ln\xi}$$

存在*).

证　当 $0 \leqslant x < 1$ 时,由于 $\lim_{\xi \to +0} \frac{1}{\ln\xi} = 0$,故将 $\frac{1}{\ln x}$ 在 $x$

$=0$ 处补充定义后成为连续函数，于是积分存在．

当 $x>1$ 时．首先注意到下面这样一个结论：当 $a<c<b$ 时，

$$V.P.\int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^b\frac{dx}{x-c}\right)$$

$$=\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

其次，利用具比亚诺型余项的台劳公式，有

$$\ln x=(x-1)+[\alpha(x)-1]\frac{(x-1)^2}{2},$$

式中$\lim\limits_{x\to1}\alpha(x)=0$．由此即得

$$\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}[\alpha(x)-1]}{1+\frac{[\alpha(x)-1]}{2}(x-1)},$$

上述等式右端的第二项在 $x=1$ 的附近保持有界，且对于任意的 $x$ 值连续，因而是可积分的．第一项的"主值"如前所述，它是存在的．

于是，当 $x\geqslant0$ 且 $x\neq1$ 时，$\mathrm{li}x$ 存在．

*）　原题误为"当 $x\geqslant0$ 时，…"．

求下列积分：

2392. $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

**解**　由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-3x+2}+\int_{1+\varepsilon}^{2-\eta}\frac{dx}{x^2-3x+2}\right.$$

$$+\int_{2+\eta}^{b}\frac{dx}{x^2-3x+2}\Bigg)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}-\ln2+\ln\frac{\eta}{1-\eta}-\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right.$$

$$\left.+\ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right|-\ln\frac{\eta}{1+\eta}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}-\ln2+\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)$$

$$=-\ln2=\ln\frac{1}{2}.$$

所以

$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}=\ln\frac{1}{2}.$$

2393. $V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

**解** 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\ln x}+\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\ln x}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}[\ln|\ln(1-\varepsilon)|-\ln(\ln2)+\ln(\ln2)-\ln|\ln(1$$

$$+\varepsilon)|]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|$$

$$=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{-1}{1-\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right|=\ln1=0,$$

所以

$$V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=0.$$

2394. $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx.$

**解** 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{1+x}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}b-\operatorname{arc\,tg}(-b)+\frac{1}{2}\ln(1+b^2)-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right]$$

$$=2\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}b=\pi,$$

所以

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\pi.$$

2395. $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arc\,tg}x\,dx.$

**解** 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\operatorname{arc\,tg}x\,dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[b\operatorname{arc\,tg}b-(-b)\operatorname{arc\,tg}(-b)-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right]=0,$$

所以

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arc\,tg}x\,dx=0.$$

## §5. 面积的计算法

1° 直角坐标系中的面积　由两条连续的曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ [$y_2(x)\geqslant y_1(x)$] 与 $Ox$ 轴的两条垂线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的面

积 $S = A_1A_2B_2B_1$(图 4.14) 等于

$$S = \int_a^b \{[y_2(x) - y_1(x)]dx.$$

2° 参数形状表出的曲线所围成的面积　若 $x = x(t), y = y(t)$ $[0 \leqslant t \leqslant T]$ 为一逐段平滑的简单封闭曲线 $C$ 的参数方程式，面积 $S$ 表由此曲线所围在它左侧的面积(图 4.15)，则

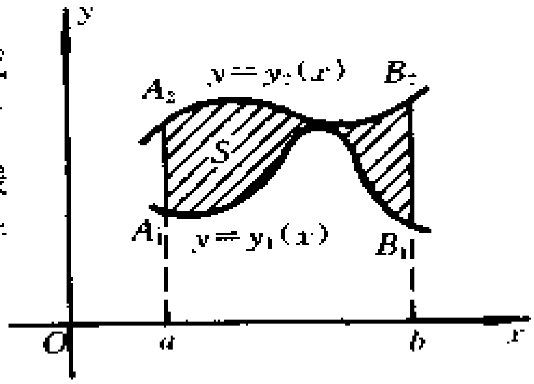


图 4.14

$$S = -\int_0^T (y(t)x'(t)dt$$
$$= \int_0^T x(t)y'(t)dt$$

或

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt.$$

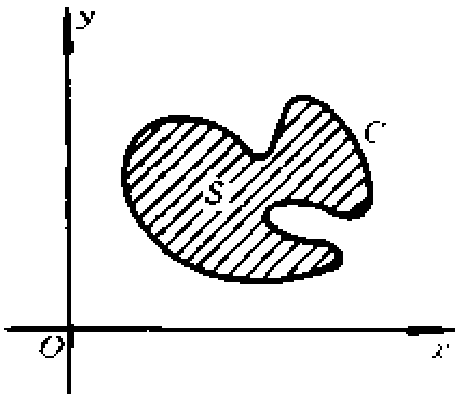


图 4.15

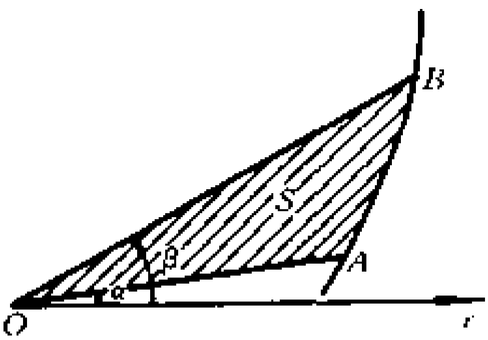


图 4.16

3° 极坐标系中的面积　由连续的曲线 $r = r(\varphi)$ 和两条半射线 $\varphi = \alpha$ 和 $\varphi = \beta$ 所围成的面积 $S = OAB$(图 4.16) 等于

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

**2396.** 证明　正抛物线拱的面积等于

$$S=\frac{2}{3}bh,$$

式中 $b$ 为底,$h$ 为拱的高(图 4.17).

**证** 设抛物线的方程为

$$y=Ax^2+Bx+C,$$

则当 $x=\pm\frac{b}{2}$ 时,得

$$y=\frac{Ab^2}{4}\pm\frac{Bb}{2}+C=0;$$

当 $x=0$ 时,得

$$y=C=h.$$

解之得

$$A=-\frac{4h}{b^2},B=0.$$

从而

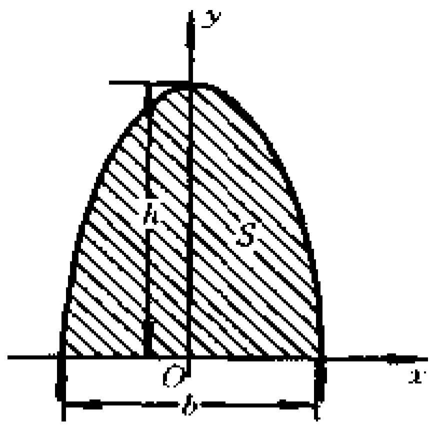


图 4.17

$$y=-\frac{4h}{b^2}x^2+h.$$

于是,所求的面积为

$$S=2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(h-\frac{4h}{b^2}x^2\right)dx$$

$$=2\left(hx-\frac{4h}{3b^2}x^3\right)\Big|_0^{\frac{b}{2}}=\frac{2}{3}bh.$$

求下列直角坐标方程所表曲线围成的面积*).

2397. $ax=y^2,ay=x^2$.

**解** 如图 4.18 所示,交点为

$$A(a,a) \text{ 及 } O(0,0).$$

---

*) 在第四章的这一节和以后各节都把一切的参数当作是正的.

所求的面积为

$$S = \int_0^a \left( \sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{2}{3a}(ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a}x^3 \right] \Bigg|_0^a$$

$$= \frac{a^2}{3}.$$

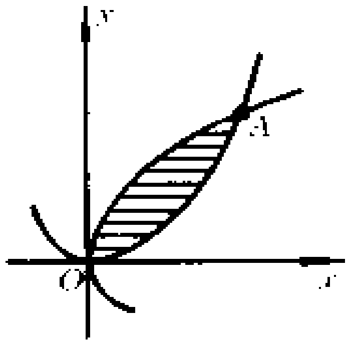


图 4.18

2398. $y = x^2, x + y = 2$.

**解** 如图 4.19 所示，交点为 $A(-2,4)$ 及 $B(1,1)$.

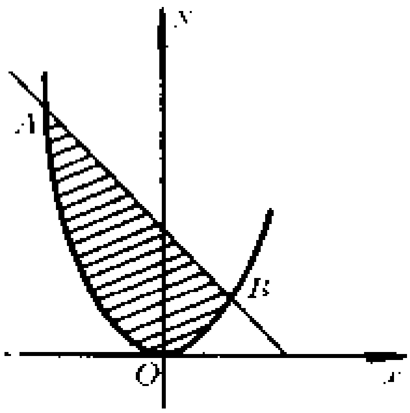


图 4.19

所求的面积为

$$S = \int_{-2}^{1} [(2 - x) - x^2] dx$$

$$= \left( 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{1}$$

$$= 4\frac{1}{2}.$$

2399. $y = 2x - x^2, x + y = 0$.

**解** 如图 4.20 所示，交点为 $A(3, -3)$ 及 $O(0,0)$.

所求的面积为

$$S = \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)] dx$$

$$= \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Bigg|_0^3 = 4\frac{1}{2}.$$

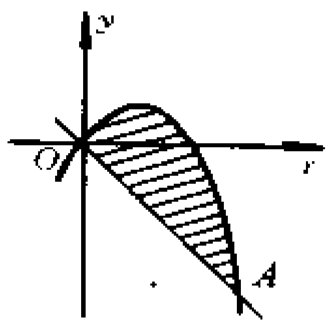


图 4.20

2400. $y = |\lg x|, y = 0, x = 0.1, x = 10$.

**解** 如图 4.21 所示，所求的面积为

$$S=-\int_{0.1}^{1}\lg x dx+\int_{1}^{10}\lg x dx$$

$$=(-x\lg x+x\lg e)\Big|_{0.1}^{1}+(x\lg x-x\lg e)\Big|_{1}^{10}$$

$$=9.9-8.1\lg e$$

$$\doteq 6.38.$$

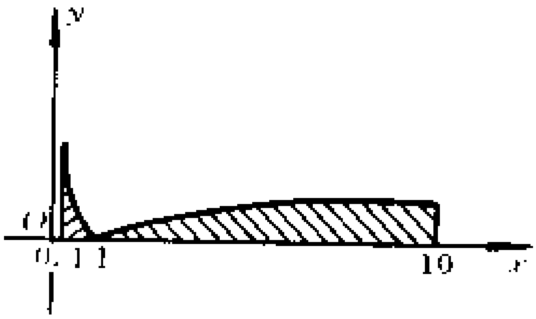


图 4.21

2401. $y=x, y=x+\sin^2 x [0\leqslant x\leqslant \pi]$.

**解** 所求的面积为

$$S=\int_0^{\pi}(x+\sin^2 x-x)dx$$

$$=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

2402. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}, y=0$.

**解** 所求的面积为

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^3}{a^2+x^2}dx=2a^3\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$=2a^3\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} b=\pi a^2.$$

2403. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**解** 所求的面积为

$$S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

**2406.** $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1(AC-B^2>0)$.

**解** 解此方程，得

$$y_1=\frac{-Bx-\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C}.$$

及

$$y_2=\frac{-Bx+\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C}.$$

当 $B^2x^2-C(Ax^2-1)\geqslant 0$，即 $|x|\leqslant\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$ 时，$y_1$ 及 $y_2$ 才有实数值.

设

$$a=\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$$

则所求的面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_{-a}^{a}(y_2-y_1)dx\\&=\frac{2}{C}\int_{-a}^{a}\sqrt{C^2-(AC-B^2)x^2}dx\\&=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx\\&=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\frac{\pi}{2}a^2=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.\end{aligned}$$

**2407.** $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$(蔓叶线)，$x=2a$.

**解** 所求的面积为

$$\begin{aligned}S&=2\int_{0}^{2a}x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx\\&=16a^2\int_{0}^{+\infty}\frac{t^4}{(t^2+1)^3}dt^{*)}\end{aligned}$$

$$= 16a^2 \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{(t^2+1)^3}\right)dt$$

$$= 16a^2 \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{3}{8}\text{arc tg}t - \frac{5t}{8(t^2+1)} + \frac{t}{4(t^2+1)^2}\right)^{**)}\Bigg|_0^b$$

$$= 3\pi a^2.$$

*） 设 $t = \sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$.

**） 利用 1921 题的递推公式.

2408. $x = a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$（曳物线），

$y = 0$.

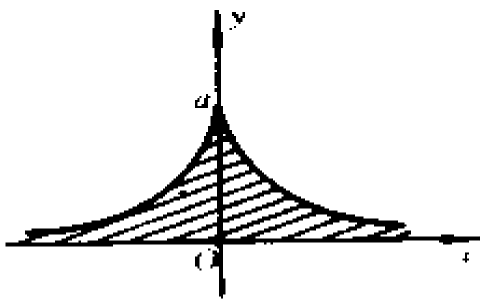


图 4.24

**解** 如图 4.24 所示，所求的面积为

$$S = 2\int_0^a \left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}\right)dy$$

$$= 2a\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a \ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy - 2\left(\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc sin}\frac{y}{a}\right)\Bigg|_0^a$$

$$= 2a\lim_{\varepsilon\to+0}\left(y\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right.$$

$$+ a\arcsin\frac{y}{a}\Big)\Big|_{\varepsilon}^{a} - \frac{\pi a^2}{2}$$

$$= \pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

**2409.** $y^2 = \dfrac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}(x > 0; n > -2)$.

**解** 所求的面积为

$$S = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}}dx$$

$$= 2\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{2}{n+2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}\ ^{*)}$$

$$= 2\cdot\frac{2}{n+2}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}t\Big|_0^b = \frac{2\pi}{n+2}.$$

*) 设 $t = x^{\frac{n+2}{2}}$.

**2410.** $y = e^{-x}\sin x, y = 0(x \geqslant 0)$.

**解** 令 $\sin x = 0$，得 $x = k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 当 $x \geqslant 0$ 时，由于 $\sin x$ 在 $(\pi, 2\pi)$，$(3\pi, 4\pi)$，$\cdots$，$((2k+1)\pi, 2k\pi)$，$\cdots$ 中的值为负，而在 $(0, \pi)$，$(2\pi, 3\pi)$，$\cdots$，$(2k\pi, (2k+1)\pi)$，$\cdots$ 中的值为正，故所求的面积为

$$S = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x\, dx$$

$$+ \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x}\sin x\, dx - \cdots$$

$$+ (-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\, dx + \cdots$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\sin x\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{-e^{-x}(\sin x+\cos x)}{2}\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2}[e^{-(k+1)\pi}\cos(k+1)\pi - e^{-k\pi}\cos k\pi]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\cdot(-1)^{k+1}[(-1)^{k+1}e^{-(k+1)\pi} - (-1)^{k}e^{-k\pi}]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi}]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1 + 2e^{-\pi}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\pi} + e^{-(n+1)\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1 + 2e^{-\pi}\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} + e^{-(n+1)\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2} \doteq 0.545.$$

**2411.** 抛物线 $y^2 = 2x$ 分圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的面积为两部分，这两部分的比如何？

**解** 抛物线 $y^2 = 2px$ 和圆 $x^2 + y^2 = 8$ 在第一象限内的交点为 $A(2,2)$.

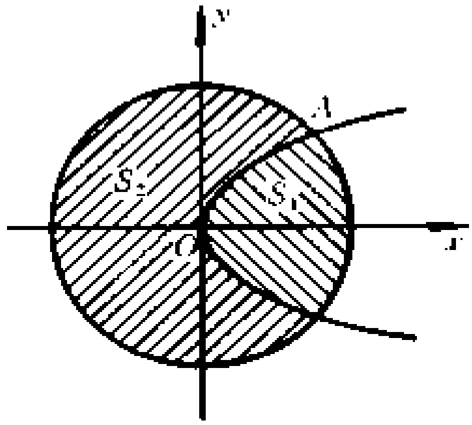

图 4.25

设这两部分的面积分别为 $S_1$ 及 $S_2$（图 4.25），则有

$$S_1 = 2\int_0^2\left(\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= 2\left(\frac{y}{2}\ \sqrt{8 - y^2} + \frac{8}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^2$$

$$= 2\pi + \frac{4}{3},$$

及

$$S_2 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

于是，它们之比为

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi + \frac{4}{3}}{6\pi - \frac{4}{3}} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$

**2412.** 把双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 上的点 $M(x, y)$ 的坐标表成为双曲线扇形 $S = OM'M$ 面积的函数. 这个扇形是由双曲线的弧 $M'M$ 与二射线 $OM$ 及 $OM'$ 所围成，其中 $M'(x, -y)$ 是对于 $Ox$ 轴与 $M$ 对称的点.

**解** 如图 4.26 所示，则有

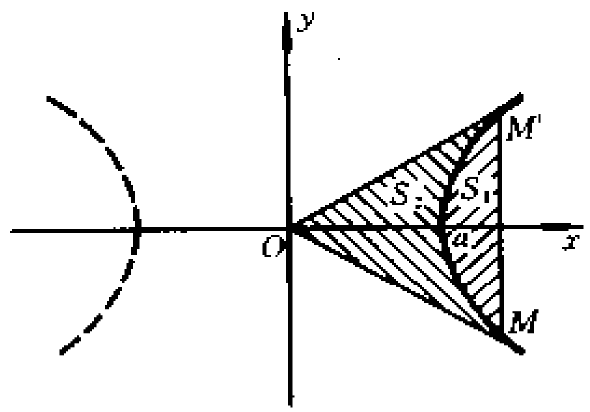


图 4.26

$$\frac{S_1}{2} = \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right]\Big|_a^x$$

$$= \frac{1}{2}xy - \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+y}{a}$$

及

$$S_2 = 2\left(\frac{xy}{2} - \frac{S_1}{2}\right) = a^2\ln\frac{x+y}{a}.$$

若记 $S_2 = S$，则由上式得

$$x + y = ae^{\frac{S}{a^2}}. \tag{1}$$

以(1)式代入 $x^2 - y^2 = a^2$ 中，易得

$$x - y = ae^{-\frac{S}{a^2}}. \tag{2}$$

由(1)式及(2)式，解得

$$x = a \cdot \frac{e^{\frac{S}{a^2}} + e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a\operatorname{ch}\frac{S}{a^2}$$

及

$$y = a \cdot \frac{e^{\frac{S}{a^2}} - e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a\operatorname{sh}\frac{S}{a^2}.$$

求由下列参数方程式所表曲线围成的面积：

**2413.** $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 2\pi]$（摆线）及 $y = 0$.

**解** 所求的面积为

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

由此可见，所求摆线一拱的面积等于原来母圆面积的三倍.

2414. $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$.

**解** 当 $t = 0$ 及 2 时，$x = 0, y = 0$；

当 $0 < t < 2$ 时，

$x > 0$,

$y > 0$;

当 $t < 0$ 时，

$x < 0$,

$y > 0$;

当 $t > 2$ 时，

$x < 0$,

$y < 0$.

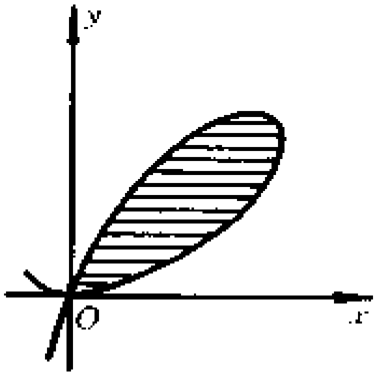

图 4.27

如图 4.27 所示，所求的面积为

$$S = -\int_0^2 (2t^2 - t^3) \cdot 2(1 - t)dt$$

$$= -2\int_0^2 (t^4 - 3t^3 + 2t^2)dt$$

$$= \frac{8}{15}.$$

2415. $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 2\pi]$（圆的渐伸线）及 $x = a, y \leqslant 0$.

**解** 所求面积为

$$S = -\int_0^{2\pi} a(\sin t - t\cos t) \cdot at \cos t \, dt$$

$$-\int_{\overline{AB}} ydx$$

$$= a^2\left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^2\sin 2t + \frac{1}{2}t\cos 2t\right.$$

$$\left.- \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} - \int_{\overline{AB}} ydx$$

$$= \frac{a^2}{3}(4\pi^3 + 3\pi) - \int_{\overline{AB}} ydx,$$

其中$\int_{\overline{AB}} ydx$ 表沿着从点 $A(a, -2\pi a)$ 到点 $B(a, 0)$ 的直线$\overline{AB}$ 上的积分. 由于在$\overline{AB}$ 上 $x \equiv a$,故 $dx = 0$,从而$\int_{\overline{AB}} ydx = 0$. 于是,得

$$S = \frac{a^2}{3}(4\pi^3 + 3\pi).$$

**2416.** $x = a(2\cos t - \cos 2t), y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

**解** 所求面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy_t' - yx_t')dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(2\cos t - \cos 2t)\cdot a(2\cos t$$

$$- 2\cos 2t) - a(2\sin t - \sin 2t)$$

$$\cdot a(-2\sin t + 2\sin 2t)]dt$$

$$= 3a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t)dt$$

$$= 3a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)dt = 6\pi a^2$$

**2417.** $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t(c^2 = a^2 - b^2)$(椭圆的渐屈线).

**解** 如图 4.28 所示. 所求的面积为

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2}{b}\sin^3 t$$

$$\cdot \frac{3c^2}{a}\cos^2 t\sin t dt$$

$$= \frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t$$

$$(1 - \sin^2 t)dt$$

$$= \frac{3\pi c^4}{8ab}.$$

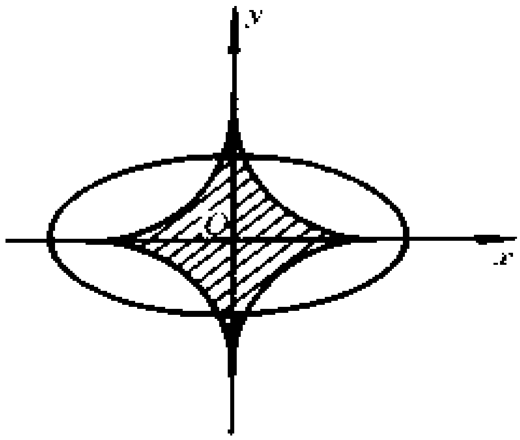


图 4.28

求由下列极坐标方程式所表曲线围成的面积 $S$：

2418. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$

(双纽线).

**解** 如图 4.29 所示，所求的面积为


图 4.29

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi$$

$$= a^2.$$

2419. $r = a(1 + \cos\varphi)$(心脏形线).

**解** 如图 4.30 所示. 所求的面积为

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{p^2 d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}$$

$$= p^2\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

设

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t,$$

并记

$$a^2 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

则有

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \int \frac{2(t^2+1)dt}{(1-\varepsilon)^2(t^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-\varepsilon)^2}\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$+ \frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{2}{a(1-\varepsilon)^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}$$

$$+ \frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\left\{\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}\right\}^{*)} + C.$$

当 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ 时，$0 \leqslant t < +\infty$，从而得一广义积分. 于是，经计算得

$$S = \left\{\frac{\pi}{a(1-\varepsilon)^2} + \frac{(1-a^2)\pi}{2a^3(1-\varepsilon)^2}\right\} \cdot p^2$$

$$= \frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*） 利用 1921 题的递推公式.

2423. $r=a\cos\varphi, r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)\left(M(\frac{a}{2},0)\in S\right)$.

**解** 如图 4.32 所示，

$|OA|=a$,

$\alpha=-\frac{\pi}{4}$,

阴影部分即为所求的面积.

曲线 $L_1: r=a\cos\varphi$,

$L_2: r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$.

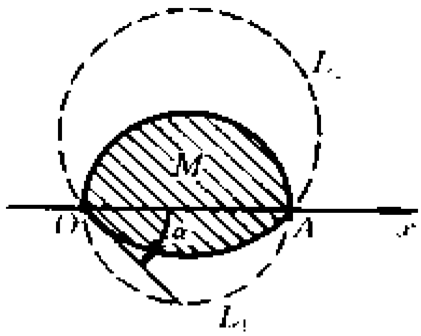


图 4.32

所求的面积为

$$S=\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}a^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2d\varphi$$

$$=\frac{a^2(\pi-1)}{4}.$$

2424⁺. 求由曲线 $\varphi=r\operatorname{arctg}r$ 及二射线 $\varphi=0$ 及 $\varphi\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所围成之扇形的面积.

**解** 当 $\varphi$ 由 0 变到 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$，$r$ 从 0 变到 $\sqrt{3}$，而

$$d\varphi=\left(\frac{r}{1+r^2}+\operatorname{arctg}r\right)dr.$$

所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}r^2d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{r^3}{1+r^2}+r^2\operatorname{arc\,tg}r\right)dr$$

$$= \left(\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{6}\ln(1+r^2) + \frac{1}{6}r^3\text{arc tg}r\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

2425. 求封闭曲线

$$r = \frac{2at}{1+t^2}, \varphi = \frac{\pi t}{1+t}$$

所包围的面积.

**解** 当曲线封闭时,$t$ 由 0 变化到 $+\infty$. 所求的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} r^2 d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2}dt$$

$$= 2\pi a^2 \lim_{b\to+\infty}\left\{\int_0^b \frac{dt}{4(1+t)^2} - \frac{1}{4}\int_0^b \frac{dt}{1+t^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^b \frac{tdt}{(1+t^2)^2}\right\}$$

$$= 2\pi a^2 \lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{4}\text{arc tg}t\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right\}\Big|_0^b$$

$$= \pi a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

变为极坐标,以求下列曲线所围成的面积:

2426. $x^3 + y^3 = 3axy$(笛卡尔叶形线).

**解** $r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$,

于是

$$r = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

当 $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$时,$r \geq 0$,且当 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时,$r =$

0. 所以，从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，叶形线位于第一象限部分所围成的面积，即为所要求的面积(图 4.33)

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}{}^{*)}$$

$$=\frac{9a^2}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{3(1+t^3)}\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{3a^2}{2}.$$

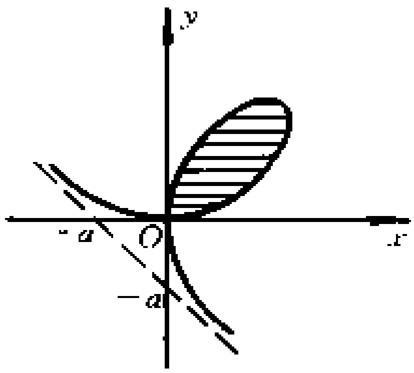

图 4.33

*) 设 $\mathrm{tg}\varphi=t$.

2427. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

**解** $r^4(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)$

$=a^2r^2$,

于是

$$r=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2-\sin^2 2\varphi}}.$$

如图 4.34 所示，所求的面积为

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2a^2}{2-\sin^2 2\varphi}d\varphi$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2-\sin^2 t}dt$$

$$=\frac{2a^2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sin t}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sin t}\right)dt$$

$$=\sqrt{2}a^2\left\{2\mathrm{arc\ tg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}-1\right)\right.$$

$$\left.+2\mathrm{arc\ tg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}+1\right)\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}a^2\{\text{arc tg}(\sqrt{2}-1)+\text{arc tg}(\sqrt{2}+1)\}$$
$$= 2\sqrt{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi a^2.$$

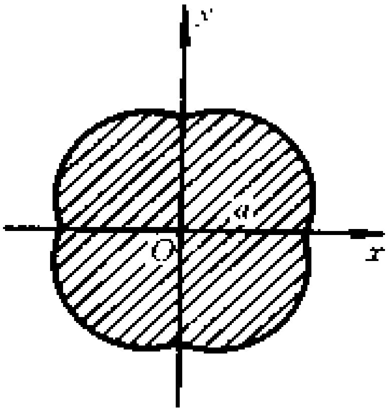


图 4.34

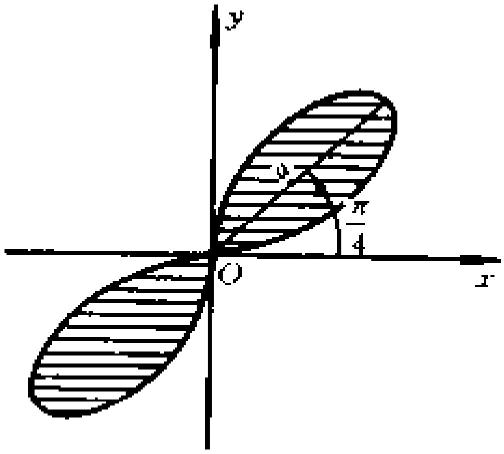


图 4.35

2428. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$(双纽线).

**解** $r^2 = a^2\sin 2\varphi$(图 4.35).

所求的面积为

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin 2\varphi = a^2.$$

化方程式为参数式的形状,以求下列曲线所围成的面积:

2429. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$(内摆线).

**解** 设

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t,$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$,它对应于四分之一的面积.所求的面积为其四倍,即

$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-3a^2\sin^4 t\cos^2 t)dt$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

2430. $x^4 + y^4 = ax^2 y$.

**解** 设

$$y = tx,$$

则曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{at}{1+t^4}, \\ y = \dfrac{at^2}{1+t^4}. \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

利用对称性知，所求的面积为

$$S = -2\int_0^{+\infty} \frac{at^2}{1+t^4} \cdot \frac{a(1-3t^4)}{(1+t^4)^2}dt$$

$$= -2a^2\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt\right.$$

$$\left. - 3\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^3}dt\right).$$

因为

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m}$$

$$= \frac{x^{n-3}}{(n+1-4m)b\cdot(a+bx^4)^{m-1}}$$

$$- \frac{(n-3)a}{b(n+1-4m)}\int \frac{x^{n-4}}{(a+bx^4)^m}dx^{*)},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^3}dt$$

$$= -\frac{t^3}{5(1+t^4)^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{3}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt$$

$$= \frac{3}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt,$$

于是

$$S = \frac{8}{5}a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt.$$

又因

$$\int\frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{4a(m-1)(a+bx^4)^{m-1}}$$

$$+ \frac{4m-n-5}{4a(m-1)}\int\frac{x^n dx}{(a+bx^4)^{m-1}},^{**)}$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt$$

$$= \frac{t^3}{8(1+t^4)^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{5}{8}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$= \frac{5}{8}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$= \frac{5}{8}\left[\frac{t^3}{4(1+t^4)}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{1+t^4}\right]$$

$$= \frac{5}{32}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt,$$

于是

$$S = \frac{1}{4}a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt.$$

利用

$$\int\frac{x^2}{a+bx^4}dx$$

$$= \frac{1}{4b \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{x^2 - \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}\, x + \sqrt{\frac{a}{b}}}{x^2 + \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}\, x + \sqrt{\frac{a}{b}}} \right.$$

$$\left. + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}\, x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x^2} \right\}^{***)} \qquad (ab > 0),$$

即得

$$\int \frac{t^2}{1+t^4} dt$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}\, t + 1}{t^2 + \sqrt{2}\, t + 1} \right.$$

$$\left. + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\, t}{1 - t^2} \right\} + C.$$

考虑到上述式子右端的函数 $\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\, t}{1-t^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 中的 $t = 1$ 点间断，并且

$$\lim_{t \to 1+0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\, t}{1 - t^2} = -\frac{\pi}{2},$$

及

$$\lim_{t \to 1-0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\, t}{1 - t^2} = \frac{\pi}{2},$$

于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}\, t + 1}{t^2 + \sqrt{2}\, t + 1} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\, t}{1 - t^2} \right\} \Bigg|_0^1$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right.$$

$$\left.+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}\right\}\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{2}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4},$$

最后得所求的面积为

$$S=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}a^2.$$

*） 参阅“函数表与积分表”(И. M. 雷日克，И. C. 格拉德什坦）第 64 页“(2. 133)2”.

**） 参阅同书第 64 页“(2. 133)1”.

***） 参阅同书第 64 页“(2. 132)3”.

## §6. 弧长的计算法

1° 在直角坐标系中的弧长 平滑(连续可微分的）曲线

$$y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$$

上一段弧的长度等于

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

2° 参数方程所表曲线的弧长 若曲线 $C$ 用参数方程式给出

$$x=x(t),y=y(t)(t_0\leqslant t\leqslant T),$$

式中 $x(t),y(t)$ 为在闭区间$[t_0,T]$内可微分的连续函数，则曲线 $C$ 的弧长等于

$$s=\int_{t_0}^T\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

$$+\frac{p}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{p}{2}}\right)\Bigg\}\Bigg|_0^{x_0}$$

$$=2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}$$

$$+p\ln\left(\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}\right).$$

2433. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 从点 $A(0,a)$ 至点 $B(b,h)$.

**解** 所求的弧长为

$$s=\int_0^b\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}dx=\int_0^b\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx$$

$$=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b=a\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{h^2-a^2}^{*)}.$$

*) 由于 $h=a\operatorname{ch}\frac{b}{a}$，故 $\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a}-1}$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{h^2-a^2}$$

2434. $y=e^x(0\leqslant x\leqslant x_0)$.

**解** 所求的弧长为

$$s=\int_0^{x_0}\sqrt{1+e^{2x}}dx$$

$$=\left(\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right)\Bigg|_0^{x_0}$$

$$=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x_0}}-1}{\sqrt{1+e^{2x_0}}+1}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}$$

$$-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}.$$

2435. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y(1\leqslant y\leqslant e)$.

**解** 所求的弧长为

$$s=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}dy$$

$$=\int_1^e\frac{1+y^2}{2y}dy=\frac{e^2+1}{4}.$$

2436. $y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}(0\leqslant x\leqslant b<a)$.

**解** $y'=\frac{2ax}{a^2-x^2}$, $\sqrt{1+y'^2}=\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

所求的弧长为

$$s=\int_0^b\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}dx=a\ln\frac{a+b}{a-b}-b.$$

2437. $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}\right)$.

**解** 所求的弧长为

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}dx$$

$$=\int_0^a\frac{dx}{\cos x}=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right).$$

2438. $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}(0<b\leqslant y\leqslant a)$.

**解** $\frac{dx}{dy}=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\frac{a}{y}$.

所求的弧长为

$$s=\int_b^a \frac{a}{y}dy=a\ln\frac{a}{b}.$$

2439. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}a\right)^{*)}$.

**解** 如图 4.36 所示.

设 $y=tx$,得

$$\begin{cases}x=\dfrac{2at^2}{1+t^2},\\ y=\dfrac{2at^3}{1+t^2}.\end{cases}$$

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}a$ 时,$0\leqslant t\leqslant\sqrt{5}$(一半弧长).

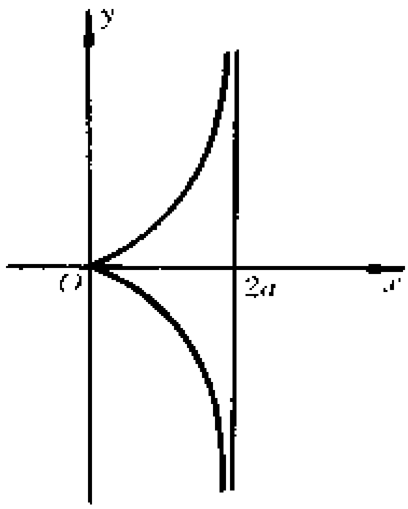


图 4.36

$$x_t'=\frac{4at}{(t^2+1)^2},$$

$$y_t'=\frac{2at^4+6at^2}{(t^2+1)^2},$$

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}.$$

所求的弧长为

$$s=\int_0^{\sqrt{5}}2\frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}dt$$

$$=32a\cdot\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{\sin\theta d\theta}{\cos^2\theta(1+3\sin^2\theta)}^{**)}$$

$$=\frac{32a}{3}\int_1^{\frac{2}{3}}\frac{dz}{z^2\left(z^2-\frac{4}{3}\right)}^{***)}$$

$$= \frac{32a}{3}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\ln\frac{z-\frac{2}{\sqrt{3}}}{z+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right\}\Bigg|_1^{\frac{2}{3}}$$

$$= 4a\left\{1+3\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right\}.$$

*） 原题误为 $y^2=\frac{x^2}{2a-x}$，现按原答案予以改正.

**） 设 $t=2\mathrm{tg}\theta$.

***） 设 $z=\cos\theta$.

**2440.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（内摆线）.

**解** $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$，$\sqrt{1+y'^2}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$.

所求的弧长为

$$s=4\int_0^a\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}dx=6a.$$

**2441.** $x=\frac{c^2}{a}\cos^3t$，$y=\frac{c^2}{b}\sin^3t$，$c^2=a^2-b^2$（椭圆的渐屈线）.

**解** $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}$

$$=\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2t+a^2\sin^2t}.$$

所求的弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2t+a^2\sin^2t}\,dt$$

$$=\frac{12c^2}{3ab(a^2-b^2)}\{b^2+(a^2-b^2)\sin^2t\}^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{4(a^3-b^3)}{ab}.$$

2442$^+$. $x = a\cos^4 t, y = a\sin^4 t$.

**解** $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}$

$= 4a\sin t\cos t\ \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}$.

所求的弧长为

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a\sin t\cos t\ \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}dt$$

$$= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\left(\sin^2 t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}d\left(\sin^2 t - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2a\left[\frac{\sin^2 t - \frac{1}{2}}{2}\ \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}\right.$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\sin^2 t - \frac{1}{2}\right.$$

$$\left.\left.+ \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4 t + \sin^4 t)}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1 + \sqrt{2})\right]a.$$

2443. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

**解** 所求的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8a.$$

2444. $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$(圆的渐伸线).

**解** $x_t' = at\cos t, y_t' = at\sin t$,

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = at.$$

所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi} at\,dt=2\pi^2 a.$$

2445+. $x=a(\operatorname{sh}t-t), y=a(\operatorname{ch}t-1)(0\leqslant t\leqslant T)$.

**解** $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{ch}t}$.

所求的弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^T\sqrt{2}a\sqrt{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{ch}t}\,dt\\&=\sqrt{2}a\int_1^{\operatorname{ch}T}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+1}}d\theta^{*)}\\&=2\sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\operatorname{ch}T}}\frac{\sin^2z}{\cos^3z}dz^{**)}\\&=2\sqrt{2}a\left\{\frac{\sin z}{2\cos^2z}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)\right\}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\operatorname{ch}T}}\\&=\sqrt{2}a(\sqrt{\operatorname{ch}T}\cdot\sqrt{1+\operatorname{ch}T}-\sqrt{2})\\&\quad-\sqrt{2}a[\ln(\sqrt{\operatorname{ch}T}+\sqrt{1+\operatorname{ch}T})\\&\quad-\ln(1+\sqrt{2})]\\&=2a\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\cdot\sqrt{\operatorname{ch}T}-1\right)\\&\quad-\sqrt{2}a\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}+\sqrt{\operatorname{ch}T}}{\sqrt{2}+1}^{***)}\end{aligned}$$

*) 设 $\theta=\operatorname{ch}t$.

**) 设 $\theta=\operatorname{tg}^2z$.

***) $\sqrt{1+\operatorname{ch}T}=\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}$.

2446. $r=a\varphi$(阿基米得螺线)$(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

**解** 所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}d\varphi$$

$$=a\left\{\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1})\right\}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=a\left\{\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right\}.$$

2447. $r=ae^{m\varphi}(m>0)$ 当 $0<r<a$.

**解** $0<r<a,-\infty<\varphi<0$.

所求的弧长为

$$s=\int_{-\infty}^0\sqrt{a^2e^{2m\varphi}+a^2m^2e^{2m\varphi}}d\varphi$$

$$=a\sqrt{m^2+1}\int_{-\infty}^0 e^{m\varphi}d\varphi$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{m\varphi}d\varphi=\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

2448. $r=a(1+\cos\varphi)$.

**解** $\sqrt{r^2+r'^2}=2a\cos\frac{\varphi}{2}$.

所求的弧长为

$$s=2\int_0^\pi 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a.$$

2449. $r=\frac{p}{1+\cos\varphi}\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

**解** $r'=\frac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$,

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{2p\cos\frac{\varphi}{2}}{(1+\cos\varphi)^2}.$$

所求的弧长为

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2p\cos\frac{\varphi}{2}}{(1+\cos\varphi)^2}d\varphi=\frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^3\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$=\frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec\frac{\varphi}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$=p\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right.$$

$$\left.+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}\,d\left(\sec\frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

$$=2p\left\{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)+\frac{\sec\frac{\varphi}{2}}{2}\sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\ln\left(\sec\frac{\varphi}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right\}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=p\{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\}.$$

**2450.** $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

**解** $\sqrt{r^2+r'^2}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\,(0\leqslant\varphi\leqslant3\pi)$(图 4.37).

所求的弧长为

$$s=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi$$

$$=\frac{3\pi a}{2}.$$

我们甚至可以证明

1° 弧 $\overset{\frown}{AB}$ 为弧$\overset{\frown}{OABC}$ 的三分之一;

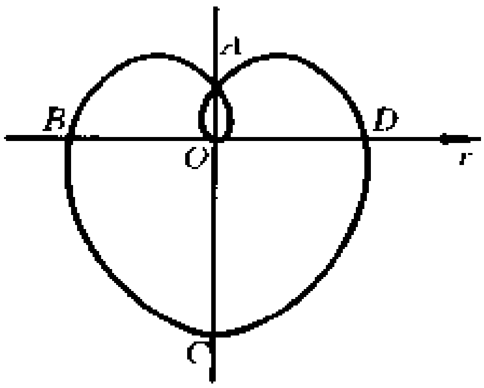


图 4.37

$2^\circ$ $\overset{\frown}{OA}$，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$ 之间依次是等差的，其公差为$\frac{3a}{8}\sqrt{3}$.

不仅如此，我们还可证明更一般的情况：

曲线 $r=a\sin^n\left(\frac{\theta}{n}\right)$（$n$ 为正整数）之全长为

$$s=\begin{cases}\dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}4ka, & \text{当 } n=2k \text{ 时,}\\[2ex] \dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\pi a, & \text{当 } n=2k+1 \text{ 时.}\end{cases}$$

2451. $r=a\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

**解** $r'=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{r^2+r'^2}&=\frac{a}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{4\operatorname{sh}^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}+1}\\&=\frac{a}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\operatorname{sh}^2\varphi+1}\\&=\frac{a\operatorname{ch}\varphi}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{a\operatorname{ch}\varphi}{1+\operatorname{ch}\varphi}\\&=a\left(1-\frac{1}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)\\&=a\left[1-\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right].\end{aligned}$$

所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}a\left[1-\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right]d\varphi=a\left(\varphi-\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}dt.$$

对于正弦曲线，其一波($x$ 由 0 到 $2\pi b$)之长为

$$\begin{aligned}
s_2 &= \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}\cos^2 \frac{x}{b}}dx \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + c^2\cos^2 t}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - c^2\sin^2 t}dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}dt.
\end{aligned}$$

所以 $s_1 = s_2$，本题得证.

**2454.** 抛物线 $4ay = x^2$ 沿 $Ox$ 轴滚动. 证明抛物线的焦点划成悬链线.

**解** 如图 4.38 所示，设抛物线切 $Ox$ 轴于点 $A(s,0)$，$O'$ 为抛物线的顶点，$P'$ 为焦点，$O'Y'$ 为对称轴，$O'X' \perp O'Y'$. 过 $A$ 作 $AB \perp O'X'$.

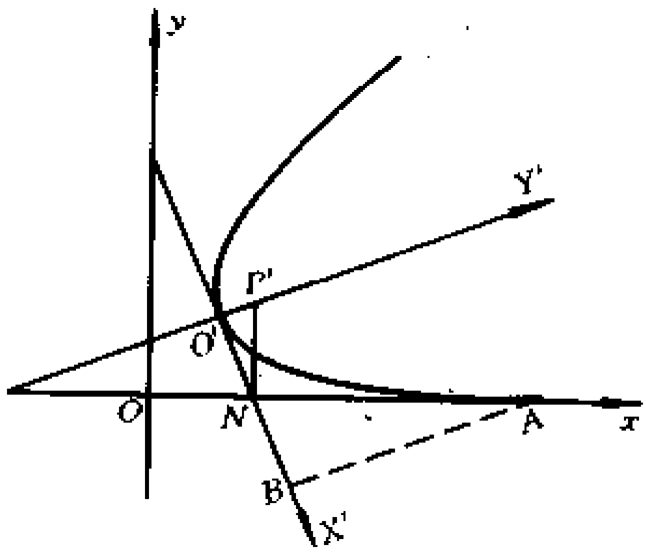


图 4.38

引入参数 $O'N=t$，则由抛物线的性质易知：$P'N\perp Ox$，$O'B=2O'N=2t$. 从而有

$$AB=\frac{(2t)^2}{4a}=\frac{t^2}{a},\ AN=t\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}}$$

$$s=\int_0^{2t}\sqrt{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}dx$$

$$=t\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}+a\ln\left[\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right],$$

$$P'N=a\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

于是，焦点 $P'$ 的坐标 $x,y$ 由参数 $t$ 表出：

$$\begin{cases}x=s-AN=a\ln\left[\dfrac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\dfrac{t}{a}\right)^2}\right], & (1)\\ y=P'N=a\sqrt{1+\left(\dfrac{t}{a}\right)^2}. & (2)\end{cases}$$

由(1)式得

$$e^{\frac{x}{a}}=\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2},$$

$$e^{-\frac{x}{a}}=-\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

上面两式相加，得

$$e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}=2\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

再以(2)式代入上式，最后得

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

这说明抛物线的焦点划成悬链线.

2455. 求环线

$$y = \pm\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}$$

所包围的面积与周长等于这曲线的围线长的圆面积之比.

**解** 当 $x = 0$ 及 $x = \frac{1}{3}$ 时, $y = 0$. 此环线的面积为

$$S_1 = 2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}\,dx = \frac{8}{135\sqrt{3}}.$$

此环线的周长为

$$\begin{aligned} s &= 2\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

按题设有 $\frac{4}{3\sqrt{3}} = 2\pi R$, 所以 $R = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi}$. 圆面积

$$S_2 = \pi R^2 = \frac{4}{27\pi}.$$

于是,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \doteq 0.73.$$

## §7. 体积的计算法

1° 由已知横切面计算物体体积 若物体体积 $V$ 存在及 $S = S(x)$

$(a \leqslant x \leqslant b)$为用平面切下的物体的横断面积,而此横断面为经过 $x$ 点垂直于 $Ox$ 轴者,则

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2° 旋转体的体积　面积

$$a \leqslant x \leqslant b; 0 \leqslant y \leqslant y(x),$$

式中 $y(x)$ 为单值连续函数,绕 $Ox$ 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

更普遍的情形:面积

$$a \leqslant x \leqslant b; y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

式中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负的连续函数,绕 $Ox$ 轴旋转所成的环形的体积等于

$$V = \pi\int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]dx.$$

**2456.** 求顶楼的体积,其底是边长等于 $a$ 及 $b$ 的矩形,其顶的棱边等于 $c$,而高等于 $h$.

**解**　如图 4.39 所示的顶楼,取 $x$ 轴向下,则有

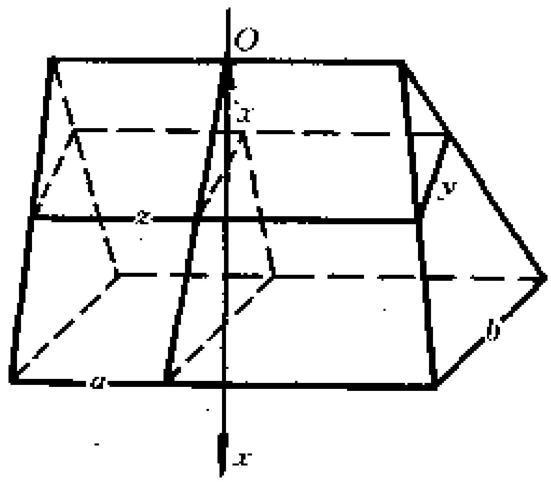


图 4.39

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{h} \quad 或 \quad y=\frac{b}{h}x,$$

$$\frac{z-c}{a-c}=\frac{x}{h} \quad 或 \quad z=\frac{a-c}{h}x+c.$$

于是，所求顶楼的体积为

$$V=\int_0^h yzdx=\int_0^h \frac{b}{h}x\left(\frac{a-c}{h}x+c\right)dx$$

$$=\frac{b}{h}\cdot\frac{a-c}{h}\cdot\frac{1}{3}h^3+\frac{bc}{h}\cdot\frac{1}{2}h^2$$

$$=\frac{bh}{6}(2a+c).$$

2457. 求截楔形的体积，其平行的上下底为边长分别等于 $A$，$B$ 和 $a$，$b$ 的矩形，而高等于 $h$.

**解** 如图 4.40 所示，

$$OO'=\frac{A}{2},$$

$$QQ'=\frac{a}{2},$$

$$OQ=h.$$

设 $OP=x$，则

$$PP'=\frac{a}{2}+\frac{h-x}{h}\left(\frac{A-a}{2}\right).$$

同样可得

$$LP'=\frac{b}{2}+\frac{h-x}{h}\left(\frac{B-b}{2}\right).$$

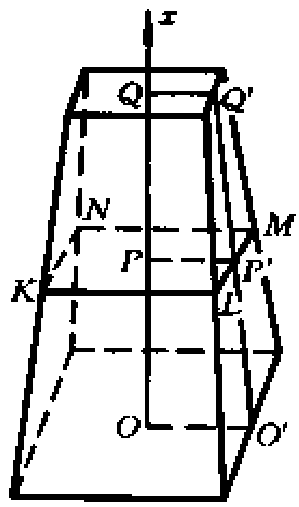

图 4.40

从而

$$面积\,KLMN=ab+(A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2$$

$$+ [a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)=f(x).$$

所求截楔形的体积为

$$V=\int_0^h f(x)dx=\frac{h}{6}[(2A+a)B+(2a+A)b].$$

**2458.** 求截锥体的体积，其上下底为半轴长分别等于 $A,B$ 和 $a,b$ 的椭圆，而高等于 $h$.

**解** 同2457题，任一平行于上下底且距离下底为 $x$ 的截面为一椭圆，其半轴分别为

$$a'=a+\left(1-\frac{x}{h}\right)(A-a)$$

及

$$b'=b+\left(1-\frac{x}{h}\right)(B-b),$$

从而此截面的面积为

$$\begin{aligned}S(x)&=\pi a'b'\\&=\pi\left\{ab+(A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\right.\\&\quad\left.+[a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)\right\}.\end{aligned}$$

所求的体积为

$$V=\int_0^h S(x)dx=\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b].$$

**2459.** 求旋转抛物体的体积，其底为 $S$，而高等于 $H$.

**解** 不失一般性，假设抛物线方程为

$$y^2=2px,$$

绕 $Ox$ 轴旋转，如图4.41 所示.

记 $OA=H$,

$OB = x$，按假设有

$$S = \pi \cdot \overline{AC}^2 = \pi(2pH) = 2\pi pH,$$

距原点为 $x$ 的截面面积为

$$S(x) = \pi y^2 = 2\pi px.$$

于是，所求的体积为

$$V = \int_0^H S(x)dx = \pi pH^2 = \frac{SH}{2}.$$

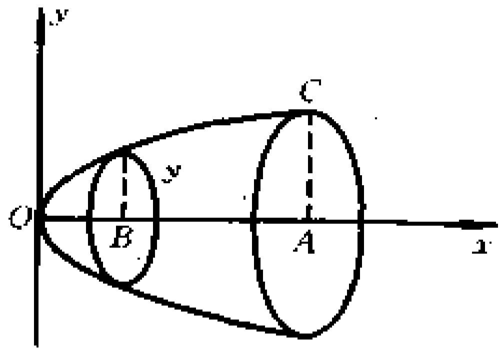


图 4.41

2460. 设立体之垂直于 $Ox$ 轴的横截面的面积 $S = S(x)$，依下面的二次式规律变化：

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中 $A, B$ 及 $C$ 为常数.

证明此物体之体积等于

$$V = \frac{H}{6}\left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right],$$

其中 $H = b - a$ （辛普森公式）.

**证** $V = \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx$

$$= \frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b - a)$$

$$= \frac{b-a}{6}[2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(a + b) + 6c]$$

$$= \frac{H}{6}[(Aa^2 + Ba + C) + (Ab^2 + Bb + C) + A(a^2 + 2ab + b^2) + 2B(a + b) + 4C]$$

$$= \frac{H}{6}\left[S(a) + S(b) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

2461. 物体是点 $M(x,y,z)$ 的集合，其中 $0 \leqslant z \leqslant 1$，而且若 $z$ 为有理数时，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$；若 $z$ 为无理数时，$-1 \leqslant x \leqslant 0$，$-1 \leqslant y \leqslant 0$. 证明虽然对应的积分为

$$\int_0^1 S(z)dz = 1.$$

但此物体的体积不存在.

**证** 显然，对任何 $0 \leqslant z \leqslant 1$，不论 $z$ 是有理数还是无理数，都有 $S(z) = 1$. 从而

$$\int_0^1 S(z)dz = \int_0^1 dz = 1.$$

下证此物体 $(V)$ 的体积不存在. 显然，无完全含于 $(V)$ 内的多面体 $(X)$ 存在，从而这种 $(X)$ 的体积的上确界为零，即 $(V)$ 的内体积 $V_* = \sup\{X\} = 0$. 另一方面，$(V)$ 的外体积 $V^* = \inf\{Y\}$，其中的下确界是对所有完全包含着 $(V)$ 的多面体 $(Y)$ 的体积 $Y$ 来取的. 由于 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 中的有理数和无理数都在 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 中是稠密的，故，显然，上述任何完全包含着 $(V)$ 的多面体 $(Y)$ 都必完全包含着点集 $(Y_0) = \{(x,y,z) | 0 \leqslant z \leqslant 1; 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$，以及 $-1 \leqslant x \leqslant 0, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$. 而 $(Y_0)$ 又完全包含着 $(V)$，并且 $(Y_0)$ 的体积 $Y_0 = 2$. 由此可知 $V^* = \inf\{Y\} = 2$. 于是 $V_* \neq V^*$. 故 $(V)$ 的体积不存在.

求下列曲面所围成的体积：

2462. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = \frac{c}{a}x, z = 0.$

**解**　如图 4.42 所示，用垂直 $Oy$ 轴的平面截割，得一直角三角形 $PQR$.

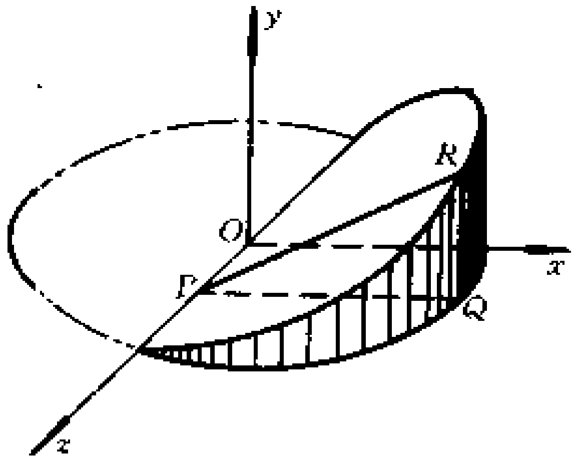


图 4.42

设 $OP = y$，则高 $QR = \frac{c}{a}x$，从而它的面积为

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a}x^2 = \frac{ac}{2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

于是，所求体积为

$$V = 2\int_0^b \frac{ac}{2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = \frac{2}{3}abc.$$

2463. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$（椭球）.

**解**　用垂直于 $Ox$ 轴的平面截椭球得截痕为一椭圆，它在 $yoz$ 平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

由此显见其半轴分别为

$$V = 8\int_0^a (a^2 - z^2)dz = \frac{16}{3}a^3.$$

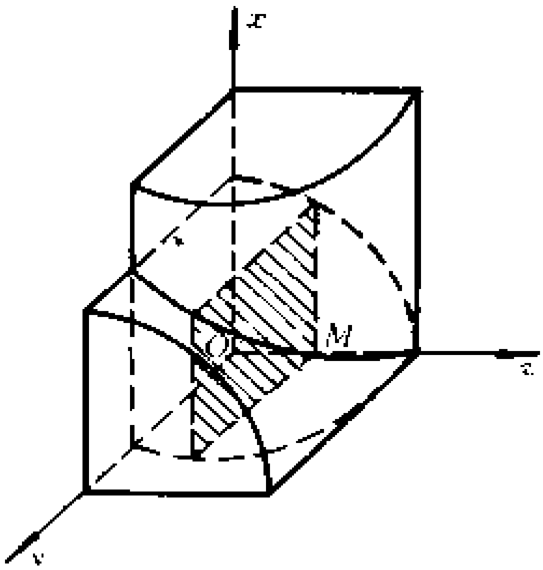

图 4.43

2466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$

**解** 如图 4.44 所示，过点 $M(x,0,0)$ 垂直于 $Ox$ 轴作一平面，在所给立体上截出一曲边梯形，其曲边由方程

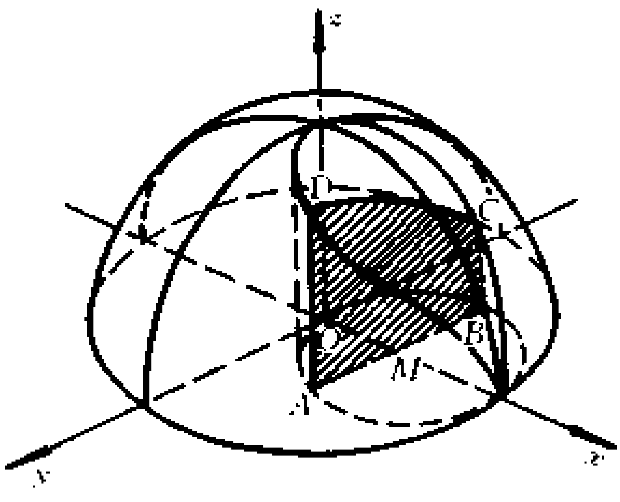

图 4.44

$$z=\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}$$

给出(上半面),

其变化范围为:

$$-\sqrt{ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}\text{(如图中 }ABCD\text{)}.$$

从而其截面积为

$$S(x)=2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}dy$$

$$=a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

于是,所求的体积为

$$V=2\int_0^a S(x)dx$$

$$=2\int_0^a\left[a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right]dx$$

$$=4\left\{\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{5}a^3+\left[\left(\frac{\pi a^3}{4}-\frac{1}{2}a^3\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{1}{12}\pi a^3-\frac{13}{90}a^3\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

**2467.** $z^2=b(a-x),x^2+y^2=ax.$

**解** 先求体积的四分之一部分,截面积为

$$S(x)=\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{b(a-x)}dy$$

$$=\sqrt{ax-x^2}\cdot\sqrt{b(a-x)}.$$

从而

$$\frac{1}{4}V = \int_0^a S(x)dx = \int_0^a \sqrt{ax - x^2} \cdot \sqrt{b(a-x)}dx$$

$$= \sqrt{b}\int_0^a \sqrt{x}(a-x)dx$$

$$= \frac{4}{15}a^2\sqrt{ab}.$$

于是,所求的体积为

$$V = \frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}.$$

2468. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1(0 < z < a)$.

**解** 固定 $z$,则截面为一椭圆,其面积为

$$P(z) = \pi az.$$

于是,所求的体积为

$$V = \int_0^a P(z)dz = \pi a\int_0^a zdz = \frac{\pi a^3}{2}.$$

2469⁺. $x + y + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

**解** 固定 $z$,则截面为一直角三角形,其面积为

$$P(z) = \frac{1}{2}(1 - z^2)^2.$$

故所求体积

$$V = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z^2)^2 dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - 2z^2 + z^4)dz = \frac{4}{15}.$$

注意,曲面 $x + y + z^2 = 1$ 关于平面 $z = 0$ 对称,故它与三个平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 围成的图形有两个,一个位于 $Oxy$ 平面之上,一个位于 $Oxy$ 平面之

下，彼此是对称的(关于 $Oxy$ 平面)，从而它们的体积相等. 我们以上求的是位于 $Oxy$ 平面之上的那一个图形的体积.

2470. $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2$.

**解** 不妨设 $a>0$. 此为一有心椭球面. 固定 $z$，得在平面 $xoy$ 上的投影为

$$x^2+xy+y^2+zx+zy+(z^2-a^2)=0,$$

此截面的面积为

$$S(z)=-\frac{\pi\Delta}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{}^{*)}=-\frac{8\pi\Delta}{3\sqrt{3}},$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{z}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{z}{2}\\ \frac{z}{2} & \frac{z}{2} & z^2-a^2\end{vmatrix}=\frac{2z^2-3a^2}{4},$$

所以

$$S(z)=\frac{2(3a^2-2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$z$ 的变化范围为适合下述不等式的集合：

$$2z^2-3a^2\leqslant 0,$$

即

$$|z|\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

于是，所求的体积为

$$V = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}|a|}^{\sqrt{\frac{3}{2}}|a|} \frac{2(3a^2 - 2z^2)\pi}{3\sqrt{3}} dz = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}a^3.$$

*） 此公式详见 Γ. M 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第一分册第 330 目 7.

2471. 证明：将面积

$$a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant y(x),$$

（式中 $y(x)$ 为连续函数）绕 $Oy$ 轴旋转所成的旋转体体积等于

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

**证** $\Delta V_y = \pi[(x + \Delta x)^2 - x^2]y(x)$

$$\doteq 2\pi xy(x)\Delta x.$$

于是，所求的体积为

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

求下列曲线旋转所成曲面包围的体积：

2472. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ 绕 $Ox$ 轴（半三次抛物线）.

**解** 所求的体积为

$$V_x = \pi b^2\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}} dx = \frac{3}{7}\pi ab^2.$$

2473. $y = 2x - x^2, y = 0$：(a) 绕 $Ox$ 轴；(6) 绕 $Oy$ 轴.

**解** 令 $y = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = 2$.

于是，所求的体积为

(a) $V_x = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$；

(6) $V_y = 2\pi\int_0^2 x(2x - x^2)dx = \frac{8\pi}{3}$.

2474. $y=\sin x, y=0 (0 \leqslant x \leqslant \pi)$;(a) 绕 $Ox$ 轴;(б) 绕 $Oy$ 轴.

**解** 所求的体积为

$$\text{(a)}\ V_x = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2};$$

$$\text{(б)}\ V_y = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x dx = 2\pi^2.$$

2475. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2, y=b\left|\frac{x}{a}\right|$;(a) 绕 $Ox$ 轴;(б) 绕 $Oy$ 轴.

**解** 交点为 $(a,b)$ 及 $(-a,b)$.

所求的体积为

$$\text{(a)}\quad V_x = 2\pi\int_0^{a}\left(b^2\frac{x^2}{a^2} - b^2\frac{x^4}{a^4}\right)dx = \frac{4\pi}{15}ab^2;$$

$$\text{(б)}\quad V_y = \pi\int_0^{b}\left(\frac{a^2y}{b} - \frac{a^2y^2}{b^2}\right)dx = \frac{\pi a^2 b}{6}.$$

2476. $y=e^{-x}, y=0 (0 \leqslant x < +\infty)$;(a) 绕 $Ox$ 轴;(б) 绕 $Oy$ 轴.

**解** 所求的体积为

$$\text{(a)}\quad V_x = \pi\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{(б)}\quad V_y = \pi\int_0^{1}(-\ln y)^2 dy = 2\pi.$$

2477. $x^2+(y-b)^2=a^2 (0<a \leqslant b)$ 绕 $Ox$ 轴.

**解** $y_1 = b+\sqrt{a^2-x^2}, y_2 = b-\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a \leqslant x \leqslant a)$.

所求的体积为

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}(y_1^2 - y_2^2)dx$$

$$= 8b\pi\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = 2\pi^2a^2b.$$

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ 绕 $Ox$ 轴.

**解** 原方程即 $y^2 - xy + x^2 - a^2 = 0$,从而

$$y = \frac{x \pm \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2},$$

函数的定义域为$\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}a, \frac{2}{\sqrt{3}}a\right]$. 与 $Ox$ 轴的交点分别为 $x = -a$ 与 $x = a$.

于是,所求的体积为

$$V_x = 2\left\{\pi\int_0^a \frac{1}{4}\left(x + \sqrt{4a^2 - 3x^2}\right)^2 dx\right.$$

$$+ \pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}\left[\frac{1}{4}\left(x + \sqrt{4a^2 - 3x^2}\right)^2\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{4}\left(x - \sqrt{4a^2 - 3x^2}\right)^2\right]dx\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^a(4a^2 - 2x^2 + 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2})dx$$

$$+ 2\pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} x\sqrt{4a^2 - 3x^2}dx$$

$$= \pi\left[2a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{9}(4a^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\right.$$

$$\left. - \frac{2}{9}(4a^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}\right] = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

2479. $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}(0 \leqslant x < +\infty)$ 绕 $Ox$ 轴.

**解** 函数定义域为$[2n\pi, (2n + 1)\pi]$, $(n = 0,1,2,$

…). 故所求的体积为

$$V_x = \pi\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-2x}\sin x dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{5}e^{-2x}(-2\sin x - \cos x)\Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$

$$= \frac{\pi}{5}(e^{-2\pi}+1)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-4n\pi}$$

$$= \frac{\pi}{5}\cdot\frac{e^{-2\pi}+1}{1-e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}.$$

2480. $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $y = 0$;

(a) 绕 $Ox$ 轴;(б) 绕 $Oy$ 轴;(в) 绕直线 $y = 2a$.

**解** 所求的体积为

(a) $V_x = \pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3$;

(б) $V_y = 2\pi\int_0^{2\pi} a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt$

$= 6\pi^3 a^3$;

(в) 作平移:$y = \bar{y} + 2a, x = \bar{x}$,则曲线方程为

$\bar{x} = a(t-\sin t), \bar{y} = -a(1+\cos t)$,及

$\bar{y} = -2a$.

于是,所求的体积为

$$V_{\bar{x}} = \pi\int_0^{2\pi}[4a^2 - a^2(1+\cos t)^2]a(1-\cos t)dt$$

$$= 7\pi^2 a^3.$$

2481. $x = a\sin^3 t, y = b\cos^3 t(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

(a) 绕 $Ox$ 轴; (б) 绕 $Oy$ 轴.

**解** 所求的体积为

$$(a)\quad V_x = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b^2\cos^6 t)(3a\sin^2 t\cos t)dt$$

$$= 6\pi ab^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 tdt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 tdt\right)$$

$$= 6\pi ab^2\left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!}\right)^{*)} = \frac{32}{105}\pi ab^2;$$

(6)　利用对称性，只须将上述答案中 $a$，$b$ 对调即得

$$V_y = \frac{32}{105}\pi a^2 b.$$

*）利用 2282 题的结果.

2482. 证明把面积

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)$$

（$\varphi$ 与 $r$ 为极坐标）绕极轴旋转所成的体积等于

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

**证**　证法一：

微面积 $dS = rd\varphi dr$ 绕极轴旋转所得微环形体积

$$dV = 2\pi r\sin\varphi dS = 2\pi r^2\sin\varphi d\varphi dr.$$

于是，所求的体积

$$V = 2\pi\int_\alpha^\beta \sin\varphi d\varphi\int_\alpha^{r(\varphi)} r^2 dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

证法二：

应用直角坐标系下的古尔金第二定理*）来证明．对于微小面积元，它的重心可以看成在点 $\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi, \frac{2}{3}r\sin\varphi\right)$ 处（图 4.45）.

$$+\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi+\frac{\pi^2a^3}{2}$$

$$=\left(4\pi a^3+\frac{\pi a^3}{2}\right)\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\pi+\frac{\pi^2a^3}{2}$$

$$=\frac{13}{4}\pi^2a^3.$$

**注** (1) 在 $V$ 的表达式中 $\frac{2}{3}r\cos\varphi$ 的系数 $\frac{2}{3}$ 是把微小面积集中在其重心 $\left(\frac{2}{3}r,\varphi\right)$ 处得出的.

(2) $\int_0^{\pi}\cos^{2k+1}\varphi d\varphi=0$,

$$\int_0^{\pi}\cos^{2k}\varphi d\varphi=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\pi.$$

方法二:

心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$ 的面积为 $\frac{3\pi a^2}{2}$*),而其重心为 $\varphi_0=0, r_0=\frac{5}{6}a$**). 根据古尔金第二定理可得所求的体积为

$$V=2\pi\left(\frac{5a}{6}+\frac{a}{4}\right)\frac{3\pi a^2}{2}=\frac{13}{4}\pi^2a^3.$$

*) 利用 2419 题的结果.

**) 利用 2512 题的结果.

**2484.** $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$:

(a) 绕 $Ox$ 轴;(б) 绕 $Oy$ 轴;(в) 绕直线 $y=x$.

**解** (a) 曲线的极坐标方程为

$$r^2=a^2(2\cos^2\varphi-1).$$

$$V_x=2\cdot\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[a^2(2\cos^2\varphi-1)\right]^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi.$$

由于

$$\int(2\cos^2\varphi-1)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi$$

$$=\int[(\sqrt{2}\cos\varphi)^2-1]^{\frac{3}{2}}d(\sqrt{2}\cos\varphi)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})\right]+C.$$

所以

$$V_x=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^3\left(\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right).$$

(6) 利用对称性知,所求的体积为

$$V_y=\frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^3\cos\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi d\varphi.$$

令 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$,则 $\sqrt{\cos 2\varphi}=\cos x$,

$\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x dx$，并且 $x$ 的变化范围为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

于是，得

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x dx$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

（в） 利用对称性知所求的体积为

$$V = \frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi d\varphi.$$

若用本题(б)的变换，即得

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x dx$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

2485. 求绕极轴把面积

$$a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$$

旋转而成的旋转体体积.

**解** $r=a$ 与 $r=a\sqrt{2\sin2\varphi}$,在第一象限部分的交点的极角分别为 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 及 $\beta=\frac{5\pi}{12}$. 利用对称性知,所求的体积应为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}[(a\sqrt{2\sin2\varphi})^3-a^3]\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}(4\sqrt{2}\sqrt{\sin2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi$$

$$-\sin\varphi)d\varphi.$$

为求上述积分,令

$$I_1=\int\sqrt{\sin2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi,$$

$$I_2=\int\sqrt{\sin2\varphi}\cos^2\varphi\cos\varphi d\varphi,$$

则 $I_2-I_1=\frac{1}{3}\cos\varphi(\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}I_1$

即

$$I_2-\frac{5}{3}I_1=\frac{1}{3}\cos\varphi\cdot(\sin2\varphi)^{\frac{3}{2}}. \qquad (1)$$

又

$$I_2+I_1=\int\sqrt{\sin2\varphi}\cos\varphi d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\sqrt{\operatorname{ctg}\varphi}d\varphi.$$

令 $\operatorname{tg}\varphi=t$,就可将上述积分化成二项式的微分的积分. 积分之,得

$$I_2+I_1=\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin2\varphi}+\frac{1}{2}\ln(\sin\varphi+\cos\varphi$$

$$-\sqrt{\sin 2\varphi}) + \frac{1}{4}[\ln(\sin\varphi + \cos\varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}) + \arcsin(\sin\varphi - \cos\varphi)]. \tag{2}$$

(2) − (1)，得

$$I_1 = \frac{3}{8}\left\{\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi} + \frac{1}{2}\ln(\sin\varphi + \cos\varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}) + \frac{1}{4}[\ln(\sin\varphi + \cos\varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}) + \arcsin(\sin\varphi - \cos\varphi)] - \frac{1}{3}\cos\varphi\cdot(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\right\} + C.$$

从而，得

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{8} + \frac{3}{64}\pi.$$

因此，所求的体积为

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}\left[4\sqrt{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{3\pi}{64}\right) + \cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\right] = \frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}.$$

## §8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑的曲线 $AB$ 绕 $Ox$ 轴旋转所成曲面的面积等于

$$P = 2\pi\int_A^B y ds,$$

式中 $ds$ 为弧的微分.

求旋转下列曲线所成曲面的面积:

2486. $y=x\sqrt{\frac{x}{a}}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 $Ox$ 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}$.

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^a x\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\int_0^a x\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\int_0^a\left(x+\frac{2a}{9}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2a}{9}\right)-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}d\left(x+\frac{2a}{9}\right)-\frac{3\pi}{a}\cdot\frac{2a}{9}\int_0^a\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{4ax}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a$$

$$-\frac{2\pi}{3}\left\{\frac{x+\frac{2a}{9}}{2}\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}-\frac{\frac{4a^2}{81}}{2}\ln\left|x+\frac{2a}{9}-\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\right|\right\}\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{13\sqrt{13}}{27}\pi a^2-\frac{11\sqrt{13}}{81}\pi a^2+\frac{4\pi a^2}{243}\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}$$

$$=\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$$

2487. $y=a\cos\frac{\pi x}{2b}$ $(|x|\leqslant b)$ 绕 $Ox$ 轴.

**解** $y'=-\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}$，

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}.$$

于是，所求的表面积为

$$\begin{aligned}P_x&=2\pi\int_{-b}^{b}y\sqrt{1+y'^2}dx\\&=2\pi\int_{-b}^{b}\frac{a}{2b}\cos\frac{\pi x}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}dx\\&=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi a\sin\frac{\pi x}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\right.\\&\quad\left.+\frac{4b^2}{2}\ln\left|\pi a\sin\frac{\pi x}{2b}+\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\right|\right]\Bigg|_0^b\\&=2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{4b^2+\pi^2a^2}}{2b}.\end{aligned}$$

2488. $y=\mathrm{tg}x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$绕 $Ox$ 轴.

**解** $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\sec^4x}=\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}$.

于是，所求的表面积为

$$\begin{aligned}P_x&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}x\cdot\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}dx\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^4x+1}\,d\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)\\&=\pi\left[\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}-\ln(\cos^2x+\sqrt{\cos^4x+1})\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right].\end{aligned}$$

2489. $y^2=2px(0\leqslant x\leqslant x_0)$;(a) 绕 $Ox$ 轴;(6) 绕 $Oy$ 轴.

**解** (a) $\sqrt{1+y_x'^2}=\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}$.

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\cdot\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2\right].$$

(6) $\sqrt{1+x'^2_y}=\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$.

于是,所求的表面积为

$$P_y=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}x\sqrt{1+x'^2_y}dy$$

$$=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}\frac{y^2}{2p}\cdot\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}dy$$

$$=\frac{2\pi}{p^2}\int_0^{\sqrt{2px_0}}y^2\sqrt{p^2+y^2}dy$$

$$=\frac{2\pi}{p^2}\left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8}\sqrt{p^2+y^2}\right.$$

$$\left.-\frac{p^4}{8}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2px_0}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}\right.$$

$$\left.-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right].$$

2490. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b\leqslant a)$;(a)绕 $Ox$ 轴;(6)绕 $Oy$ 轴.

**解** (a) $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2, yy'=-\frac{b^2}{a^2}x,$

$$y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{y^2+(yy')^2}$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}.$$

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx$$

$$=\frac{2\pi b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$$

$$=2\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right),$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$是椭圆之离心率.

(6) 将 $x, y$ 轴对调,即将 $x$ 轴作为短轴. 于是在所得出的 $y\sqrt{1+y'^2}$中仅需将 $a$ 与 $b$ 的位置对调一下即可,即

$$y\sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}x^2}$$

$$=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}.$$

于是,所求表面积为

$$P_y=2\pi\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}dx$$

$$=2\pi a\frac{1}{b}\left[\frac{x}{2}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{b^3}{2c}\ln\left(\frac{c}{b}x+\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\right)\right]\right|_{-b}^{b}$$

2493. $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(|x|\leqslant b)$;(a)绕 $Ox$ 轴;

(б) 绕 $Oy$ 轴.

**解** (a) $\sqrt{y'^2+1}=\sqrt{\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}+1}=\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi a\int_{-b}^{b}\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx$$

$$=2\pi a\int_0^b\left(1+\operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx$$

$$=\pi a\left(2b+a\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

(б) $P_y=2\pi\displaystyle\int_0^b x\sqrt{1+y'^2}dx$

$$=2\pi\int_0^b x\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx$$

$$=2\pi a\left(a+b\operatorname{sh}\frac{b}{a}-a\operatorname{ch}\frac{b}{a}\right).$$

2494. $\pm x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$绕 $Ox$ 轴.

**解** $x'_y=\mp\dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$,$\sqrt{1+x'^2_y}=\dfrac{a}{y}$

$(0\leqslant y\leqslant a)$.

于是,所求的表面积为

$$P_x=2\cdot 2\pi\int_0^a y\frac{a}{y}dy=4\pi a^2.$$

2495. $x=a(t-\sin t)$,$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(a) 绕 $Ox$ 轴;(б) 绕 $Oy$ 轴;(в) 绕直线 $y=2a$;

**解** 先求 $ds$:

$$ds=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

于是，所求的表面积为

(a) $P_x=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u du=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

(б) $P_y=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$

$$=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=16\pi^2a^2.$$

(в) 作平移 $x=\bar{x}, y=\bar{y}+2a$ 则

$$\bar{y}=-a(1+\cos t).$$

于是，所求的表面积为

$$P_{\bar{x}}=\left|2\pi\int_0^{2\pi}[-a(1+\cos t)]2a\sin\frac{t}{2}dt\right|^{*)}$$

$$=\frac{32}{3}\pi a^2.$$

*) 在此取绝对值，是由于被积函数始终不为正之故.

2496. $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 绕直线 $y=x$.

**解** 先求 $ds$：

$$ds=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}dt$$

$$=\begin{cases}3a\sin t\cos t dt, 当\dfrac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ -3a\sin t\cos t dt, 当\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

利用对称性，并作旋转，即得所求的表面积为

$$P=2\left(2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{yx}{\sqrt{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{y-x}{\sqrt{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt\right)$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3t-a\cos^3t)\cdot 3a\sin t\cos t dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(a\sin^3t-a\cos^3t)\cdot 3a\sin t\cos t dt\right)$$

$$=\frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{1}{5}\sin^5t+\frac{1}{5}\cos^5t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{1}{5}\sin^5t+\frac{1}{5}\cos^5t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\pi a^2(4\sqrt{2}-1).$$

2497. $r=a(1+\cos\varphi)$绕极轴.

**解** $ds=\sqrt{r^2+r_\varphi'^2}d\varphi=2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$,

$$y=r\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$$

$$=4a\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

于是，所求的表面积为

$$P=2\pi\int_0^{\pi}8a^2\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

2498. $r^2=a^2\cos 2\varphi$: (a) 绕极轴；(б) 绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{2}$；

(в) 绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

**解** (a) $y=a\sqrt{\cos2\varphi}\sin\varphi, ds=\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}d\varphi.$

于是,所求的表面积为

$$P=2\cdot2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\varphi d\varphi=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

(б) $x=a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right).$

于是,所求的表面积为

$$P=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}d\varphi$$

$$=2\pi a^2\sqrt{2}.$$

(в) $x=a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi, y=a\sqrt{\cos2\varphi}\sin\varphi,$

$$ds=\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}d\varphi.$$

注意到在$-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$内恒有$x-y\geqslant0$,于是,所求的表面积为

$$P=2\cdot2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x-y}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi-\sin\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{a}}(\sin\varphi+\cos\varphi)\bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=4\pi a^2.$$

**2499.** 由抛物线$ay=a^2-x^2$及$Ox$轴所包围的图形绕$Ox$轴旋转而构成一旋转体.求其表面积与等体积球的表面积之比.

**解** 首先求此旋转体的表面积.

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a},$$

从而

$$\begin{aligned}P_x&=2\cdot 2\pi\int_0^a\left(a-\frac{x^2}{a}\right)\cdot\frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a}dx\\&=8\pi\int_0^a\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}dx-\frac{8\pi}{a^2}\int_0^a x^2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}dx\\&=8\pi\left\{\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}+\frac{a^2}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right\}\Bigg|_0^a\\&\quad-\frac{8\pi}{a^2}\left\{\frac{x\left(2x^2+\frac{a^2}{4}\right)}{8}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right.\\&\quad\left.-\frac{a^4}{128}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right\}^{*)}\Bigg|_0^a\\&=\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right];\end{aligned}$$

其次,求旋转体的体积.

$$V_x=\pi\int_{-a}^a\left(a-\frac{x^2}{a}\right)^2dx=\frac{16\pi a^3}{15}.$$

设与其等体积球的半径为 $R$,则

$$\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{16\pi a^3}{15}.$$

所以

$$R=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}a.$$

于是，此球的表面积为

$$P=4\pi R^2=4\pi\sqrt[3]{\frac{16}{25}}a^2.$$

最后得到

$$\frac{P_x}{P}=\frac{\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right]}{\frac{8\pi a^2}{5}\sqrt[3]{10}}$$

$$=\frac{5[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]}{128\cdot\sqrt[3]{10}}$$

$$\doteq 1.013.$$

*） 利用 1820 题的结果.

2500. 由直线 $x=\frac{p}{2}$ 与抛物线 $y^2=2px$ 所包围的图形绕直线 $y=p$ 而旋转，求这旋转体的体积和表面积.

**解** $$V_{y=p}=\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p+\sqrt{2px})^2dx$$

$$-\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p-\sqrt{2px})^2dx$$

$$=4\pi p\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi p^3.$$

旋转体的侧面积为

$$S_{侧}=\int_{(l)}2\pi(p+\sqrt{2px})ds$$

$$+\int_{(l)}2\pi(p-\sqrt{2px})ds$$

$$=4\pi p\int_{(l)}ds=4\pi p\int_0^p\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy$$

$$=4\pi\int_0^p\sqrt{y^2+p^2}dy$$

$$=4\pi\left(\frac{y}{2}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p^2}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right)\Big|_0^p$$

$$=2\pi p^2[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})],$$

而底面积为

$$S_{底}=\pi(2p)^2=4\pi p^2,$$

于是,所求的表面积为

$$P=S_{侧}+S_{底}$$

$$=2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})].$$

## §9. 矩的计算法.重心的坐标

1° 矩　若在 $Oxy$ 平面上,密度为 $\rho=\rho(y)$ 的质量 $M$ 充满了某有界连续统 $\Omega$(曲线,平面的区域),而 $\omega=\omega(y)$ 为 $\Omega$ 中纵标不超过 $y$ 的部分的对应的度量(弧长,面积),则数

$$M_k=\lim_{\max|\Delta y_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(y_i)y_i^k\Delta\omega(y_i)$$

$$=\int_\Omega \rho y^k d\omega(y)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

称为质量 $M$ 对于 $Ox$ 轴的 $k$ 次矩.

特殊情形,当 $k=0$ 时得质量 $M$,当 $k=1$ 时得静力矩,当 $k=2$ 时得转动惯量.

同样地可定义出质量对于坐标平面的矩.

若 $\rho=1$,则对应的矩称为几何矩(线矩,面积矩,体积矩等等).

2° 重心　均匀平面图形 $S$ 的重心的坐标 $(x_0,y_0)$ 根据下面的公式来定义

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S},y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中 $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ 为面积 $S$ 对于 $Oy$ 轴和 $Ox$ 轴的几何静力矩.

**2501.** 求半径为 $a$ 的半圆弧对于过此弧两端点直径的静力矩和转动惯量.

**解** 取此直径所在的直线作为 $Ox$ 轴，圆心作为原点，则圆的方程为

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

从而

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

及

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx = \frac{a}{y}dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx.$$

于是，所求的静力矩和转动惯量*) 为

$$M_1 = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = 2a^2$$

及

$$M_2 = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$= 2a\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{\pi a^3}{2}.$$

**2502.** 求底为 $b$，高为 $h$ 的均匀三角形薄板对于其底边的静力矩和转动惯量($\rho = 1$).

**解** 取坐标系如图 4.46 所示.

$$M_1^{(x)} = \frac{1}{2}\int_0^b y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^c y_1^2 dx + \frac{1}{2}\int_c^b y_2^2 dx.$$

由于

---

*) 这里假定 $\rho = 1$，今后有类似情况，不再说明.

$$y_1 = y_1(x) = \frac{h}{c}x,$$

$$y_2 = y_2(x)$$

$$= \frac{h}{c-b}(x-b),$$

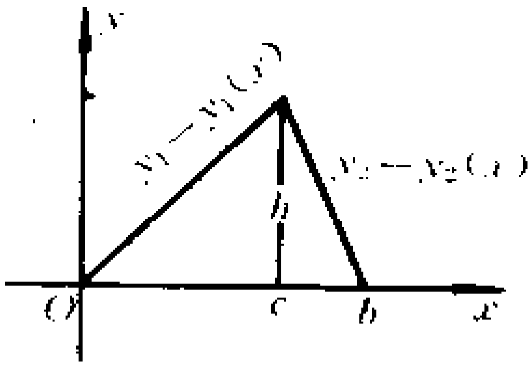

图 4.46

于是，所求的静力矩为

$$M_1^{(x)} = \frac{1}{2}\int_0^c \frac{h^2}{c^2}x^2 dx + \frac{1}{2}\int_c^b \frac{h^2}{(c-b)^2}(x-b)^2 dx = \frac{bh^2}{6}.$$

又由于

$$x_1 = x_1(y) = \frac{c}{h}y,$$

$$x_2 = x_2(y) = b + \frac{c-b}{h}y,$$

于是，所求的转动惯量为

$$M_2^{(x)} = \int_0^h y^2(x_2 - x_1)dy$$

$$= \int_0^h y^2\left(b - \frac{b}{h}y\right)dy = \frac{bh^3}{12}.$$

**2503.** 求半轴长为 $a$ 和 $b$ 的均匀椭圆形薄板对于其主轴的转动惯量($\rho = 1$).

**解**　不妨设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

则上、下半椭圆方程为

$$x_1 = -\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

$$x_2 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

$$M_1 = \int_0^h x \cdot P(x)dx,$$

其中

$$P(x) = \pi y^2 = \pi\left[\frac{r}{h}(h - x)\right]^2.$$

于是,所求的静力矩和转动惯量分别为

$$M_1 = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x(h - x)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^2}{12};$$

$$M_2 = \int_0^h x^2 \cdot P(x)dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2(h - x)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^3}{30}.$$

2505. 证明古尔金第一定理:弧 $C$ 绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转面的面积,等于这个弧的长度与这弧的重心所划出的圆周之长的乘积.

证　重心$(\xi,\eta)$ 具有这样的性质,即如把曲线的全部"质量"都集中到它上面,则此质量对于任何一个轴的静力矩,都与曲线对此轴的静力矩相同.即

$$\xi s = M_y = \int_0^s x ds,$$

$$\eta s = M_x = \int_0^s y ds,$$

式中 $s$ 表示弧长.

于是

$$2\pi\eta \cdot s = 2\pi\int_0^s y ds.$$

上式的右端是弧 $C$ 旋转而成的曲面面积,左端 $2\pi\eta$ 表示弧$C$绕$Ox$轴旋转时其重心所划出的圆周之长.从而定理得证.

2506. 证明古尔金第二定理：面积 $S$ 绕不与它相交的轴旋转而成的旋转体，其体积等于面积 $S$ 与这面积的重心所划出的圆周之长的相乘积.

**证** 由于

$$\eta \cdot S = M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx,$$

所以

$$2\pi\eta \cdot S = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

上式右端即为旋转体的体积，从而定理得证.

2507. 求圆弧：$x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi(|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ 重心的坐标.

**解** 显见

$$\eta = 0,$$

圆弧长

$$s = 2a\alpha.$$

由于

$$M_y = \int_0^s x ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} a^2\cos\varphi d\varphi = 2a^2\sin\alpha,$$

所以

$$\xi = \frac{2a^2\sin\alpha}{2a\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha}.$$

即重心为 $\left(\frac{a\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$.

2508. 求抛物线：$ax = y^2, ay = x^2 (a > 0)$ 所围成面积的重心的坐标.

**解** 利用古尔金第二定理来解此题. 首先，此面积为

$$S = \frac{a^2}{3}{}^{*)},$$

体积为

$$V = \pi\int_0^a \left( ax - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = \frac{3\pi a^3}{10}.$$

于是

$$2\pi\eta \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{3\pi a^3}{10},$$

所以

$$\eta = \frac{9a}{20}.$$

利用对称性知

$$\xi = \eta = \frac{9a}{20}.$$

即所求的重心为$\left( \frac{9a}{20}, \frac{9a}{20} \right)$.

*) 利用 2397 题的结果.

2509. 求面积

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b)$$

的重心的坐标.

**解** 首先，我们已知第一象限椭圆的面积等于$\frac{\pi ab}{4}$.

其次，我们再求椭圆绕 $Ox$ 轴旋转所得的旋转体体积. 因为

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

所以

$$V = \pi\int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

按古尔金第二定理，我们有

$$2\pi\eta\frac{\pi ab}{4}=\frac{2}{3}\pi ab^2,$$

所以

$$\eta=\frac{4b}{3\pi}.$$

同理可求得

$$\xi=\frac{4a}{3\pi}.$$

事实上，只须在结果中将 $a$ 和 $b$ 对调即得. 于是，所求的重心为 $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$.

2510. 求半径为 $a$ 的均匀半球的重心坐标.

**解** 取圆心作为原点，则球的方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

设重心为 $(\xi,\eta,\zeta)$，显见 $\xi=\eta=0$. 而

$$V_{半球}=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

将圆

$$y^2+z^2=a^2$$

绕 $Oz$ 轴旋转，即得球.

又

$$M_1^{(x)}=\int_{(V)}zdV=\pi\int_0^a zy^2dz$$
$$=\pi\int_0^a z(a^2-z^2)dz=\frac{\pi a^4}{4}.$$

最后得到

$$\zeta = \frac{M_1^{(z)}}{V} = \frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}} = \frac{3a}{8}.$$

于是，所求重心为$\left(0,0,\frac{3a}{8}\right)$.

2511. 求对数螺线

$$r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0)$$

上由点$O(-\infty,0)$到点$P(\varphi,r)$的弧$OP$的重心$C(\varphi_0,r_0)$之坐标. 当$P$点移动时，$C$点画出怎样的曲线?

**解** 重心的直角坐标为

$$\xi = \frac{\int_{(l)} x ds}{\int_{(l)} ds}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\varphi} r\cos\varphi \cdot \sqrt{a^2(1+m^2)} e^{m\varphi} d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{a^2(1+m^2)} e^{m\varphi} d\varphi}$$

$$= \frac{a\int_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\varphi}\cos\varphi d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi} e^{m\varphi} d\varphi}$$

$$= \frac{mae^{m\varphi}(\sin\varphi + 2m\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

同法可得

$$\eta = \frac{\int_{(l)} y ds}{\int_{(l)} ds} = \frac{mae^{m\varphi}(2m\sin\varphi - \cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

于是，重心的极坐标为

$$r_0 = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \frac{ma}{4m^2+1}\sqrt{4m^2+1}e^{m\varphi}$$

$$= \frac{mr}{\sqrt{4m^2+1}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2m\operatorname{tg}\varphi - 1}{\operatorname{tg}\varphi + 2m} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{2m}\operatorname{tg}\varphi}$$

即　$\varphi_0 = \varphi - \alpha$，其中 $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2m}$.

当 $P$ 点移动时，$C(\varphi_0, r_0)$ 画出的曲线为

$$r_0 = \frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m\varphi} = \frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m(\varphi_0+\alpha)}.$$

这也是一条对数螺线.

2512. 求曲线 $r = a(1+\cos\varphi)$ 所围面积的重心坐标.

**解**　计算时，将小扇形的重量集中在其重心 $\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi, \frac{2}{3}r\sin\varphi\right)$ 处. 由对称性知 $\eta = 0$，而

$$\xi = \frac{\int_{(l)} xy\,dx}{\int_{(l)} y\,dx}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\int_0^{\pi} r\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}r^2 d\varphi}{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2 d\varphi}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\int_0^{\pi} a^3(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi}{\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi}$$

$$= \frac{2a}{3}\frac{\int_0^{\pi}(1+3\cos\varphi+3\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\cos\varphi d\varphi}{\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi}$$

$$= \frac{5a}{6}.$$

于是，重心的极坐标为 $\varphi_0 = 0, r_0 = \frac{5a}{6}$.

2513. 求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的第一拱与 $Ox$ 轴所围成面积的重心的坐标.

**解** 由对称性知 $\xi = \pi a$. 由于面积 $S = 3\pi a^2$*）及面积 $S$ 绕 $Ox$ 轴旋转而成的曲面包围的体积 $V_x = 5\pi^2 a^3$**）***），利用古尔金第二定理，即得重心$(\xi,\eta)$适合下列关系式

$$2\pi\eta \cdot S = V_x$$

或

$$\eta = \frac{V_x}{2\pi S} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5a}{6}.$$

于是，重心为$\left(\pi a, \frac{5a}{6}\right)$.

*） 利用 2413 题的结果.

**） 利用 2480 题$(a)$的结果.

***） 参看 2506 题.

2514. 求面积 $0 \leqslant x \leqslant a; y^2 \leqslant 2px$ 绕 $Ox$ 轴旋转所成旋转体的重心的坐标.

**解** 由对称性知 $\eta = 0$. 又

$$\xi = \frac{\int_0^a x\pi y^2 dx}{\int_0^a \pi y^2 dx} = \frac{\int_0^a 2px^2 dx}{\int_0^a 2px dx}$$

$$= \frac{2}{3}a.$$

于是，所求的重心为$\left(\frac{2}{3}a,0\right)$.

2515. 求半球 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 的重心的坐标.

**解**　由对称性知

$$\xi=\eta=0.$$

$$\zeta=\frac{\int_0^a 2\cdot 2\pi x\sqrt{1+x'^2_z}dz^{*)}}{\int_0^a 2\pi x\sqrt{1+x'^2_z}dz}$$

$$=\frac{\int_0^a 2\pi z\sqrt{a^2-z^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}dz}{\int_0^a 2\pi\sqrt{a^2-z^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}dz}$$

$$=\frac{2\pi a\int_0^a zdz}{2\pi a\int_0^a dz}=\frac{2\pi a\cdot\frac{1}{2}a^2}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

于是，所求的重心为$\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

*)　在此是将 $x^2+z^2=a^2$ 绕 $Oz$ 轴旋转而得半球面.

## §10. 力学和物理学中的问题

作成适当的积分和并找出它们的极限，来解下列问题：

2516. 轴的长度 $l=10$ 米，若该轴的线性密度按定律 $\delta=6+0.3x$ 千克/米而变更，其中 $x$ 为距轴两端点中之一

端的距离，求轴的质量．

**解** 将轴 $n$ 等分，每份的长 $\Delta x=\frac{10}{n}$. 把每小段近似地看成是均匀的，并以右端点的密度作为小段的密度．这样，便得到轴的质量 $M$ 的近似值，即

$$M\approx\sum_{i=1}^{n}\left(6+0.3\times\frac{10}{n}i\right)\frac{10}{n}.$$

显然，$n$ 愈大愈近似，于是，得轴的质量

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(6+0.3\times\frac{10}{n}\right)\frac{10}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[60+\frac{15\times(n+1)}{n}\right]=75\text{(千克)}.$$

2517. 把质量为 $m$ 的物体从地球(其半径为 $R$)表面升高到高度为 $h$ 的地位，需要化费多大的功？若物体远离至无穷远去，则功等于什么？

**解** 由牛顿万有引力定律

$$f=k\frac{mM}{r^2},$$

其中 $M$ 为地球的质量，$r$ 为物体离开地球中心的距离，$k$ 为比例常数．将 $h$ 分成 $n$ 等份，在每份上把引力近似地看作是不变的，在第 $i$ 份上取

$$r_i=\sqrt{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{h}{n}i+R\right]}，\text{则力}$$

$$f_i=k\frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\cdot\left[\frac{h}{n}i+R\right]}.$$

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}i\cdot\frac{10}{n} = \lim_{n\to\infty}50\,\frac{n+1}{n}$$
$$= 50(\text{千克厘米}) = 0.5(\text{千克米}).$$

2519. 直径为 20 厘米，长为 80 厘米的圆柱被压强为 10 千克／厘米$^2$ 的蒸汽充满着．假定气体的温度不变，要使气体的体积减小一半，须要花费多大的功？

**解**　由波义耳 — 马利奥特定律有

$$pv = C,$$

其中 $p$ 表示气体的压强，$v$ 表示体积，$C$ 为常量．由条件知，常量

$$C = 10\cdot\pi\cdot100\cdot80 = 800\pi(\text{千克米}).$$

设初始时气体体积为 $v_0$，将区间 $\left[\frac{v_0}{2}, v_0\right]$ 分成 $n$ 个小区间，分点依次为

$$\frac{v_0}{2},\frac{v_0}{2}q,\frac{v_0}{2}q^2,\cdots\frac{v_0}{2}q^i,\cdots\frac{v_0}{2}q^n = v_0,$$

其中 $q = \sqrt[n]{\dfrac{v_0}{\frac{v_0}{2}}} = \sqrt[n]{2}$．由于气体体积从 $\frac{v_0}{2}q^{i+1}$ 减小至 $\frac{v_0}{2}q^i$ 须要花费功的近似值为

$$C\left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{v_0}{2}q^{i+1} - \frac{v_0}{2}q^i\right),$$

于是，所要求的功

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}C\left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{v_0}{2}q^{i+1} - \frac{v_0}{2}q^i\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}Cn(\sqrt[n]{2} - 1) = C\ln2^{*)}$$

$$= 800\pi \cdot \ln 2 \doteq 1742(\text{千克米}).$$

*） 利用 541 题的结果．

2520. 求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为半圆形，半径为 $a$ 且其直径位于水的表面上．

**解** 为求出水对半圆形的压力，只要计算出作用于四分之一圆上的压力，然后再把它两倍起来．现将四分之一圆等分成 $n$ 个圆心角为 $\Delta\theta$ 的小扇形(图 4.48)．作用于该小扇形上的压力的近似值为

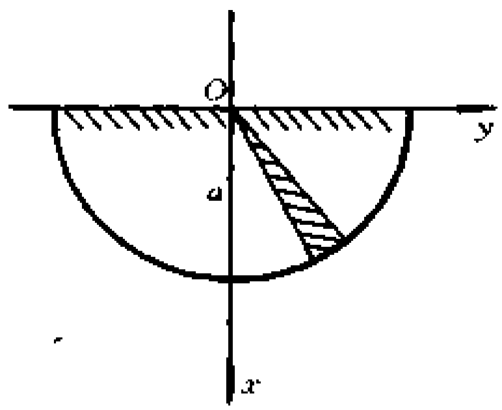

图 4.48

$$\frac{1}{2}a^2\Delta\theta \cdot \frac{2}{3}a\sin\theta_i,$$

其中 $\Delta\theta = \frac{\pi}{2n}, \theta_i = \frac{i\pi}{2n}$.

于是，作用于半圆上的压力

$$P = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}a\sin\frac{i\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n}$$

$$= \frac{2a^3}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{2a^3}{3}.^{*)}$$

*） 利用 2187 题的结果．

2521. 求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为梯形，其下底 $a = 10$ 米，上底 $b = 6$ 米，高 $h = 5$ 米，下底沉没于水面下的距离为 $c = 20$ 米．

**解** 取坐标系如图 4.49 所示．$AB$ 所满足的方程为

$$y=\frac{4}{5}x-6.$$

将区间〔15,20〕$n$ 等分，每份长 $\Delta x=\frac{5}{n}$. 对应于 $\Delta x$ 的小条上所受的压力的近似值为

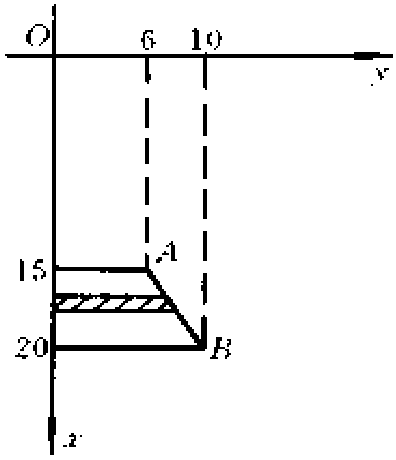


图 4.49

$$\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n}.$$

于是，所要求的压力

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n}$$

$$=708\frac{1}{3}\text{（吨）}^{*)}$$

*） 仿照 2185 题和 2518 题的作法．

作出微分方程式以解下列问题：

**2522.** 点运动的速度是按下面的规律而变化：

$$v=v_0+at.$$

问在闭间隔〔0,$T$〕内这点经过的路程怎样？

**解** 设路程为 $s$，则由导数的力学意义知

$$\frac{ds}{dt}=v=v_0+at,$$

即 $at$ 时间内经历的路程

$$ds=(v_0+at)dt,$$

于是，

$$s = \int_0^T (v_0 + at)dt$$
$$= v_0 T + \frac{1}{2}aT^2.$$

2523. 半径为 $R$ 而密度为 $\delta$ 的均匀球体以角速度 $\omega$ 绕其直径而旋转．求此球的动能．

**解** 已知半径为 $R$ 质量为 $M$ 的盘绕垂直盘心的轴的转动惯量为$\frac{1}{2}MR^2$. 不妨设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，则考察以 $dz$ 为厚度的垂直于 $z$ 轴的圆盘，其转动惯量为

$$dJ_z = \frac{1}{2}\pi(R^2 - z^2)\delta \cdot (R^2 - z^2)dz$$
$$= \frac{1}{2}\pi\delta(R^2 - z^2)^2 dz.$$

从而球体的转动惯量

$$J_z = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\pi\delta(R^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi\delta R^5.$$

于是，球的动能

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{4}{15}\pi\delta\omega^2 R^5.$$

**注** 原题误为球壳，现根据原答案予以改正．

2524. 具不变的线性密度 $\mu_0$的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 $a$ 质量为 $m$ 的质点?

**解** 取坐标系如图4.50所示，$|AO| = a$. 设引力在坐标轴上的射影为 $F_x$、$F_{y_0}$ 由于

$$dF_y = k\frac{m\mu_0 dx}{(a^2 + x^2)}\cos\varphi$$

$$= -\frac{km\mu_0 a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

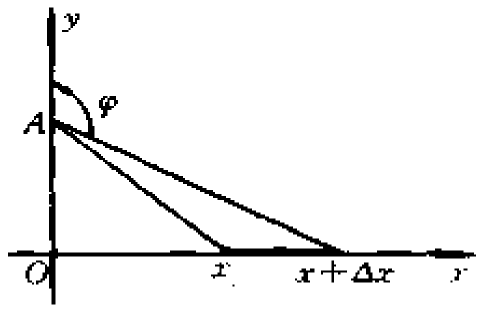


图 4.50

于是，

$$F_y = -2km\mu_0 a\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -2km\mu_0 a\cdot\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{2km\mu_0}{a}.$$

由对称性知，$F_x = 0$. 事实上，我们有

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{km\mu_0\sin\varphi}{a^2+x^2}dx$$

$$= km\mu_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = 0.$$

其中 $k$ 为引力常数. 由上述分析知，引力指向 $y$ 轴的负向.

**2525.** 计算半径为 $a$ 及固定的表面密度为 $\delta_0$ 的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 $m$ 的质点 $P$，此质点位于通过薄板中心 $Q$ 且垂直于薄板平面的垂直线上，最短距离

$PQ$ 等于 $b$.

**解** 取坐标系如图4.51所示．显然，引力指向 $y$ 轴的正向．对于以 $x$ 为半径的圆环，其质量为 $dm = \delta_0 \cdot 2\pi x dx$，对质点 $P$ 的引力

$$dF_y = 2km\delta_0\pi \frac{\cos\theta}{b^2 + x^2}dx$$

$$= 2km\delta_0\pi \frac{bx}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

于是，所要求的引力

$$F_y = 2km\delta_0\pi\int_0^a \frac{bx}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$= 2km\delta_0\pi\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

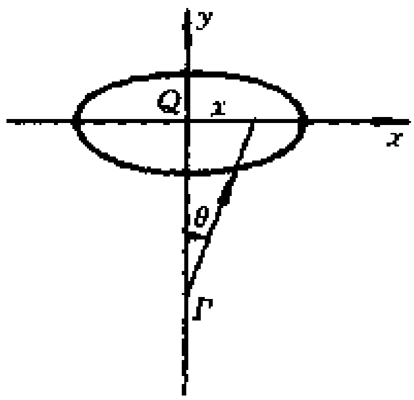


图 4.51

2526. 根据托里拆利定律，液体从容器中流出的速度等于

$$v = c\sqrt{2gh},$$

式中 $g$ 为重力加速度，$h$ 为液体表面在开孔上之高，$c = 0.6$ 为实验系数．

直径为 $D = 1$ 米及高为 $H = 2$ 米的直立圆柱形

大桶，充满之后从其底上直径为 $d=1$ 厘米的圆孔流出，须要多长时间，完全流空？

**解** 取坐标系如图 4.52 所示．对于 $dt$ 时间，从圆孔流出的液体体积 $dv=0.15\pi\sqrt{2gx}dt$，而桶内液体体积的减少量为

$dv=-\pi(50)^2dx$，其中 $x$ 随时间 $t$ 的增大而减小．流出的量应等于桶内减少的量，于是

$-0.15\pi\sqrt{2gx}dt=\pi(50)^2dx.$

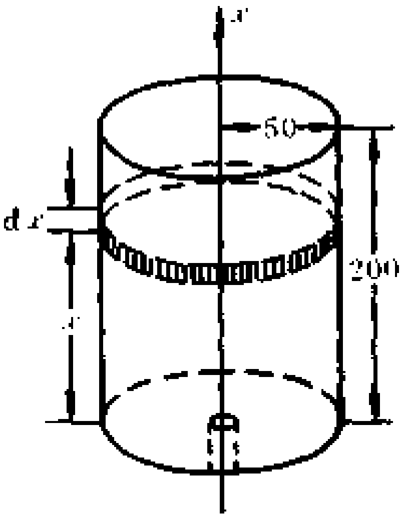


图 4.52

积分，得

$$\int_0^t dt=-\int_{200}^x \frac{2500}{0.15}\frac{dx}{\sqrt{2gx}},$$

即

$$t=-33333\frac{1}{\sqrt{2g}}(\sqrt{x}-\sqrt{200}),$$

其中 $g=980$ 厘米 / 秒$^2$．当 $x=0$ 时，$t$ 表示水流完所需的时间．因而所要求的时间

$$t=\frac{33333\sqrt{200}}{\sqrt{2\times 980}}=10648(\text{秒}).$$

2527. 旋转体的容器应当是什么形状，才能使液体流出时，液体表面的下降是均匀的？

**解** 取坐标系如图 4.53 所示．不妨设流出孔的半径

为单位厘米．

仿上题分析，得

$$\pi x^2 dy = -\pi v dt$$

$$= -\pi c\sqrt{2gy}dt,$$

即

$$dy = -c\sqrt{2g}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x^2}dt.$$

其中 $c$ 为实验系数，$g$ 为重力加速度．

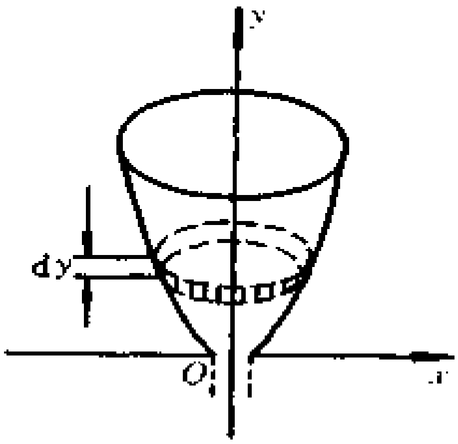

图 4.53

由题意知

$$\frac{dy}{dt} = -c\sqrt{2g}\frac{\sqrt{y}}{x^2}$$

应等于常数 $k$，即

$$-c\sqrt{2g}\frac{\sqrt{y}}{x^2} = k,$$

于是

$$y = Cx^4,$$

其中 $C$ 为常数．所以，容器应当是把曲线 $y = Cx^4$ 绕铅直轴 $Oy$ 旋转而得的曲面所构成的．

**2528.** 镭在每一时刻的分解速度与其现存的量成比例，设在开始的时刻 $t = 0$ 有镭 $Q_0$ 克，经过时间 $T = 1600$ 年它的量减少了一半．求镭分解的规律．

**解** 设 $Q$ 为镭现存的量，按题设有

$$\frac{dQ}{dt} = kQ,$$

其中 $k$ 为比例系数．即

$$\frac{dQ}{Q}=kdt,$$

两端积分

$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}}\frac{dQ}{Q}=\int_0^{1600}kdt,$$

从而

$$k=-\frac{\ln 2}{1600}.$$

于是

$$\int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{Q}=-\frac{\ln 2}{1600}\int_0^t dt,$$

$$\ln\frac{Q}{Q_0}=\ln 2^{-\frac{t}{1600}},$$

所以，镭的分解规律为

$$Q=Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{1600}}.$$

2529⁺. 变换物质 $A$ 为物质 $B$ 的二阶化学反应之速度与此二物质的浓度相乘之积成正比．问经过 $t=1$ 小时在容器中所含有的物质 $B$ 之百分率如何？设 $t=0$ 分时有 20% 的物质 $B$，而当 $t=15$ 分它变成 80%.

**解** 设 $x$ 为生成物 $B$ 的浓度，按题设有

$$\frac{dx}{dt}=kx(1-x),$$

其中 $k$ 为比例常数．即

$$\frac{dx}{x(1-x)}=kdt.$$

两端积分

$$= \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 (H - h)\gamma}{\pi r^2 E}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{(H - h)}{E}\gamma,$$

即

$$dl = \frac{1}{3}\,\frac{(H - h)}{E}\gamma dh.$$

于是圆锥形重棒总的伸长量为

$$l = \int_0^H \frac{1}{3}\,\frac{(H - h)\gamma}{E} dh$$

$$= \frac{\gamma H^2}{6E}.$$

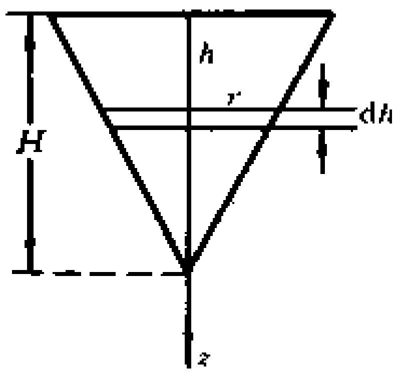


图 4.54

## § 11. 定积分的近似计算法

1° 矩形公式 若函数 $y = y(x)$ 于有穷的闭区间 $[a, b]$ 上连续且可微分充分多次数，并且 $h = \frac{b - a}{n}$，$x_i = a + ih\ (i = 0, 1, \cdots, n)$，$y_i = y(x_i)$，则

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) + R_n,$$

式中

$$R_n + \frac{(b - a)^2}{2n} y'(\xi)\ (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

2° 梯形公式 用相同的记号有

$$\int_a^b y(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi')(a \leqslant \xi' \leqslant b).$$

3° 抛物线公式（辛普森公式）命 $n = 2k$，得

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2k-2})] + R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\zeta'')(a \leqslant \zeta'' \leqslant b).$$

2531. 利用矩形公式（$n = 12$），近似地计算

$$\int_0^{2\pi} x\sin x dx$$

并把结果同精确答数比较.

**解** $h = \frac{\pi}{6}$.

$x_0 = 0, y_0 = 0;$

$x_1 = \frac{\pi}{6},\ y_1 = \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} = 0.2618;$

$x_2 = \frac{\pi}{3},\ y_2 = \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = 0.9069;$

$x_3 = \frac{\pi}{2},\ y_3 = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 1.5708;$

$x_4 = \frac{2\pi}{3},\ y_4 = \frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} = 1.8138;$

$x_5 = \frac{5\pi}{6},\ y_5 = \frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{6} = 1.3090;$

$x_6 = \pi,\ y_6 = \pi\sin\pi = 0;$

$x_7 = \frac{7\pi}{6},\ y_7 = \frac{7\pi}{6}\sin\frac{7\pi}{6} = -1.8326;$

$$x_8 = \frac{4\pi}{3},\ y_8 = \frac{4\pi}{3}\sin\frac{4\pi}{3} = -3.6276;$$

$$x_9 = \frac{3\pi}{2},\ y_9 = \frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2} = -4.7124;$$

$$x_{10} = \frac{5\pi}{3},\ y_{10} = \frac{5\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{3} = -4.5345;$$

$$x_{11} = \frac{11\pi}{6},\ y_{11} = \frac{11\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{6} = -2.8798.$$

按矩形公式，得

$$\int_0^{2\pi} x\sin x dx$$

$$= \frac{\pi}{6}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11})$$

$$\doteq -6.1390.$$

实际上，

$$\int_0^{2\pi} x\sin x dx$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos x dx$$

$$\doteq -6.2832.$$

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差：

**2532.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n = 8).$

**解** $h = \frac{1}{8} = 0.125.$

$x_0 = 0, y_0 = 1;$

$x_8 = 1,\ y_8 = 0.5;$ $\qquad \frac{y_0 + y_8}{2} = 0.75,$

$x_1 = \frac{1}{8} = 0.125,\ y_1 = 0.88889;$

$x_2 = 0.25,\qquad y_2 = 0.8;$

$x_3 = 0.375,\qquad y_3 = 0.72727;$

$x_4 = 0.5,\qquad y_4 = 0.66667;$

$x_5 = 0.625,\qquad y_5 = 0.61538;$

$x_6 = 0.75,\qquad y_6 = 0.57143;$

$x_7 = 0.875,\qquad \underline{y_7 = 0.53333}(+$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 4.80297.$$

按梯形公式，得

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = h\left(\frac{y_0+y_8}{2} + \sum_{i=1}^{7} y_i\right)$$

$$= 0.125(0.75 + 4.80297)$$

$$\doteq 0.69412,$$

误差为

$$|R_n| = \left|\frac{1}{12\times 8^2}\cdot\frac{2}{(1+\xi)^3}\right| \quad (0\leqslant \xi\leqslant 1).$$

于是，

$$|R_n| \leqslant \frac{2}{12\times 8^2} < 0.0027 = 2.7\times 10^{-3}$$

实际上，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 \doteq 0.69315.$$

2533. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}\quad (n=12).$

**解** $h = \frac{1}{12} = 0.08333.$

$x_0 = 0,\ y_0 = 1;$

$x_{12} = 1,\ y_{12} = \frac{1}{2} = 0.5;\qquad \frac{y_0+y_{12}}{2} = 0.75,$

$$x_1=\frac{1}{12},\quad y_1=0.99942;$$

$$x_2=\frac{1}{6},\quad y_2=0.99539;$$

$$x_3=\frac{1}{4},\quad y_3=0.98462;$$

$$x_4=\frac{1}{3},\quad y_4=0.96429;$$

$$x_5=\frac{5}{12},\quad y_5=0.93254;$$

$$x_6=\frac{1}{2},\quad y_6=0.88889;$$

$$x_7=\frac{7}{12},\quad y_7=0.83438;$$

$$x_8=\frac{2}{3},\quad y_8=0.77143;$$

$$x_9=\frac{3}{4},\quad y_9=0.70330;$$

$$x_{10}=\frac{5}{6},\quad y_{10}=0.63343;$$

$$x_{11}=\frac{11}{12},\quad \underline{y_{11}=0.56489}(+$$

$$\sum_{i=1}^{11}y_i=9.27258.$$

按梯形公式,得

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}&=h\left(\frac{y_0+y_{12}}{2}+\sum_{i=1}^{11}y_i\right)\\&=0.0833(0.75+9.27258)\\&\doteq 0.83518,\end{aligned}$$

误差为

$$|R_n| = \left|\frac{1}{12 \times 12^2} \cdot \frac{12\xi^4 - 6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right| \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1).$$

利用求极值的方法，估计得 $\left|\frac{12\xi^4 - 6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right|$ 在$[0,1]$上不超过 2. 于是，

$$|R_n| \leqslant \frac{2}{12 \times 12^2} < 0.00116 = 1.16 \times 10^{-3}.$$

实际上，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$= 0.83565.$$

*) 利用 1881 题的结果。

**2534.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x dx} \quad (n = 6).$

**解** $h = \frac{\pi}{12} = 0.2618,$

$x_0 = 0,\ y_0 = 1;$

$x_6 = \frac{\pi}{2},\ y_6 = 0.8660;$ $\qquad \frac{y_0 + y_6}{2} = 0.9330,$

$x_1 = \frac{\pi}{12},\ y_1 = 0.9916;$

$x_2 = \frac{\pi}{6},\ y_2 = 0.9682;$

$x_3 = \frac{\pi}{4},\ y_3 = 0.9354;$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}, \ y_4 = 0.9014;$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{12}, \ \underline{y_5 = 0.8756 \quad} (+$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 4.6722.$$

按梯形公式,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}dx = h\left(\frac{y_0 + y_6}{2} + \sum_{i=1}^{5} y_i\right)$$

$$= 0.2618(0.9330 + 4.6724)$$

$$\doteq 1.4674.$$

误差为

$$|R_n| = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12 \times 6^2} |y''(\xi)|,$$

式中 $y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}$, $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{\pi}{2}$. 利用 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant y \leqslant 1$ 及 $y^2 = 1 - \frac{1}{4}\sin^2 x$,依次求导可得 $|y''| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{6}$. 于是,

$$|R_n| \leqslant \frac{\pi^3}{8 \times 12 \times 6^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} < 2.59 \times 10^{-3}.$$

利用辛普森公式计算下列积分:

**2535.** $\int_1^9 \sqrt{x}dx \quad (n = 4).$

**解** $h = 2.$

$$x_0 = 1, \ y_0 = 1;$$

$$x_1 = 3, \ y_1 = \sqrt{3} = 1.732;$$

$x_2 = 5,\ y_2 = \sqrt{5} = 2.236;$

$x_3 = 7,\ y_3 = \sqrt{7} = 2.646;$

$x_4 = 9,\ y_4 = 3;$

按辛普森公式，得

$$\int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2]$$

$$= \frac{2}{3}[4 + 4(1.732 + 2.646) + 2(2.236)]$$

$$\doteq 17.323.$$

实际上，

$$\int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{52}{3} \doteq 17.333.$$

2536. $\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x}\,dx \quad (n = 6).$

**解** $h = \frac{\pi}{6}.$

$x_0 = 0,\ y_0 = 2;$

$x_1 = \frac{\pi}{6},\ y_1 = \sqrt{3 + \cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3.866}$
$= 1.966;$

$x_2 = \frac{\pi}{3},\ y_2 = \sqrt{3 + \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3.5} = 1.871;$

$x_3 = \frac{\pi}{2},\ y_3 = \sqrt{3 + \cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} = 1.732;$

$x_4 = \frac{2\pi}{3},\ y_4 = \sqrt{3 + \cos\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2.5} = 1.581;$

$$x_5 = \frac{5\pi}{6},\ y_5 = \sqrt{3 + \cos\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2.134}$$
$$= 1.461;$$

$$x_6 = \pi,\ y_6 = \sqrt{3 + \cos\pi} = \sqrt{2} = 1.414.$$

按辛普森公式,得

$$\int_0^\pi \sqrt{3 + \cos x}\,dx$$
$$= \frac{\pi}{18}[(2 + 1.414) + 4(1.966 + 1.736 + 1.461)$$
$$+ 2(1.871 + 1.581)]$$
$$= 5.4053.$$

2537+. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \quad (n = 10).$

**解** $h = \frac{\pi}{20}.$

$$x_0 = 0,\ y_0 = 1;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{20},\ y_1 = \frac{20}{\pi}\sin\frac{\pi}{20} = 0.99589;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{10},\ y_2 = \frac{10}{\pi}\sin\frac{\pi}{10} = 0.98363;$$

$$x_3 = \frac{3\pi}{20},\ y_3 = \frac{20}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{20} = 0.96340;$$

$$x_4 = \frac{\pi}{5},\ y_4 = \frac{5}{\pi}\sin\frac{\pi}{5} = 0.93549;$$

$$x_5 = \frac{\pi}{4},\ y_5 = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4} = 0.90032;$$

$$x_6 = \frac{3\pi}{10},\ y_6 = \frac{10}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{10} = 0.85839;$$

$$x_7 = \frac{7\pi}{20},\ y_7 = \frac{20}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{20} = 0.81033;$$

$$x_5 = \frac{5}{6}, y_5 = 1.3748;$$

$$x_6 = 1, \ y_6 = 1.4427.$$

按辛普森公式，得

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\ln(1+x)} = \frac{h}{3}[(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]$$

$$= \frac{1}{18}[(1 + 1.4427) + 4(1.0812 + 1.2332 + 1.3748) + 2(1.1587 + 1.3051)]$$

$$\doteq 1.2293.$$

2539. 取 $n = 10$，计算加达郎常数

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} dx.$$

**解** $h = \frac{1}{10}$.

$x_0 = 0, y_0 = 1;$

$x_1 = 0.1, y_1 = 0.99669;$

$x_2 = 0.2, y_2 = 0.98698;$

$x_3 = 0.3, y_3 = 0.97152;$

$x_4 = 0.4, y_4 = 0.95127;$

$x_5 = 0.5, y_5 = 0.92730;$

$x_6 = 0.6, y_6 = 0.90070;$

$x_7 = 0.7, y_7 = 0.87247;$

$x_8 = 0.8, y_8 = 0.84343;$

$x_9 = 0.9, y_9 = 0.81424;$

$$x_{10} = 1, \quad y_{10} = 0.78540.$$

按辛普森公式，得

$$G = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)]$$

$$= \frac{1}{30}(1.78540 + 18.32888 + 7.36476)$$

$$= 0.91597.$$

2540. 利用公式

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

计算数 $\pi$ 精确到 $10^{-5}$.

**解** 利用辛普森公式计算其误差

$$R_n(x) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)(a \leqslant \xi \leqslant b).$$

现在 $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$，事实上，它是 $y = \operatorname{arc\,tg} x$ 的导数，因而

$$f^{(4)}(x) = (\operatorname{arc\,tg} x)^{(5)}.$$

利用第二章 1218 题的结果得知

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \sin\left(5\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right).$$

在区间$[0,1]$上，

$$|f^{(4)}(x)| \leqslant 24,$$

所以

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{24}{180n^4}.$$

欲误差小于 0.00001，只需

$$\frac{24}{180n^4} < \frac{1}{100000},$$

即只需取 $n = 12$，就有 $|R_n| \leqslant 6.5 \times 10^{-6}$.

其次，我们还必须加进近似于函数值的误差，设法使这个新的误差小于 $3.6 \times 10^{-6}$，这样，就能保证总误差小于 $10^{-5}$. 为了这个目的，只要计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 的值到六位小数精确到 $0.5 \times 10^{-6}$ 就够了.

现取 $n = 12$，则有

$x_0 = 0, y_0 = 1$;

$x_1 = \frac{1}{12}, y_1 = 0.993103$;

$x_2 = \frac{1}{6}, y_2 = 0.972973$;

$x_3 = \frac{1}{4}, y_3 = 0.941176$;

$x_4 = \frac{1}{3}, y_4 = 0.900000$;

$x_5 = \frac{5}{12}, y_5 = 0.852071$;

$x_6 = \frac{1}{2}, y_6 = 0.800000$;

$x_7 = \frac{7}{12}, y_7 = 0.746114$;

$x_8 = \frac{2}{3}, y_8 = 0.692308$;

$x_9 = \frac{3}{4}, y_9 = 0.640000$;

$x_{10} = \frac{5}{6}, y_{10} = 0.590164$;

$$x_{11}=\frac{11}{12},y_{11}=0.543396;$$

$$x_{12}=1,\quad y_{12}=0.500000.$$

最后得到

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\\&=\frac{1}{36}[(y_0+y_{12})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9\\&\quad+y_{11})+2(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})]\\&=0.785398,\end{aligned}$$

所以

$$\pi\doteq0.785398\times4=3.14159,$$

精确到 0.00001.

2541. 计算

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

精确到 0.001.

**解** 采用辛普森公式计算，则其误差

$$R_n(x)=-\frac{1}{180n^4}2e^{\xi^2}(8\xi^4+24\xi^2+6)$$
$$(0<\xi<1),$$

故有 $|R_n(x)|<\frac{1}{180n^4}\cdot2e\cdot38.$

要 $|R_n(x)|<10^{-3}$，只须 $\frac{2\cdot38\cdot e^1}{180n^4}<10^{-3}$，即只须取 $n=6$.

现取 $n=6$，则有

$$x_0=0,y_0=1;$$

$$x_1 = \frac{1}{6}, y_1 = e^{\frac{1}{36}} = 1.0282;$$

$$x_2 = \frac{1}{3}, y_2 = e^{\frac{1}{9}} = 1.1175;$$

$$x_3 = \frac{1}{2}, y_3 = e^{\frac{1}{4}} = 1.2840;$$

$$x_4 = \frac{2}{3}, y_4 = e^{\frac{4}{9}} = 1.5596;$$

$$x_5 = \frac{5}{6}, y_5 = e^{\frac{25}{36}} = 2.0026;$$

$$x_6 = 1, \quad y_6 = e = 2.7183.$$

于是,

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{1}{18}[(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] \doteq 1.463.$$

2542. 计算

$$\int_0^1 (e^x - 1)\ln\frac{1}{x}dx \text{ 精确到 } 10^{-4}.$$

**解** 对于函数 $f(x) = e^x$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上采用台劳展式以及相应的拉格朗日余项公式来估算误差:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \Delta_{n+1},$$

其中

$$\Delta_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

于是

$$|\Delta_{n+1}| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}x^{n+1},$$

从而原来的积分数值为

$$I = \int_0^1 (e^x - 1)\ln\frac{1}{x}dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k \ln\frac{1}{x}dx + R_{n+1},$$

其中

$$|R_{n+1}| = \left|\int_0^1 \Delta_{n+1}\ln\frac{1}{x}dx\right|$$

$$\leqslant \frac{e}{(n+1)!}\int_0^1 x^{n+1}\ln\frac{1}{x}dx.$$

记 $I_k = \int_0^1 x^k \ln\frac{1}{x}(k \geqslant 1)$,则有

$$I_k = \frac{1}{k+1}\int_0^1 \ln\frac{1}{x}d(x^{k+1})$$

$$= \frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln\frac{1}{x}\bigg|_0^1 + \frac{1}{k+1}\int_0^1 x^k dx$$

$$= \frac{1}{(k+1)^2}.$$

如果取 $n = 5$,则有

$$|R_6| \leqslant \frac{e}{6!}I_6 = \frac{e}{6!}\cdot\frac{1}{7^2} = \frac{e}{7\times 7!}$$

$$= \frac{e}{35280} < \frac{3}{35280} < \frac{1}{1.1\times 10^4} < 10^{-4}.$$

记 $I = J + R_6$,则有

$$J = \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k!}I_k = \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{(k+1)!(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{4!4} + \frac{1}{5!5} + \frac{1}{6!6}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{4320}$$

$$= 0.31787^{+} = 0.3179 + \Delta',$$

其中 $|\Delta'| \leqslant 0.00004 = 4 \times 10^{-5}$ 且 $\Delta' < 0$.

注意到由 $\Delta_{n+1} > 0$ 即可推知 $R_{n+1} > 0$. 于是

$$I = J + R_6 = 0.3179 + (R_6 + \Delta')$$

$$= 0.3179 + (R_6 - |\Delta'|) = 0.3179 + \Delta,$$

且有 $I \doteq 0.3179$，而此时其相应的误差已有

$$|\Delta| = |R_6 - |\Delta'|| \leqslant \begin{cases} R_6, \text{若 } |\Delta'| \leqslant R_6, \\ |\Delta'|, \text{若 } |\Delta'| > R_6 \end{cases}$$

$$\leqslant \max(R_6, |\Delta'|) < 10^{-4}.$$

**注** 本题不能直接利用辛普森公式来计算所给的定积分的近似值，因为被积函数 $(e^x - 1)\ln\frac{1}{x}$ 的四阶导函数在 $x = 0$ 的右近旁是无界的，从而不能估计出误差. 所以，上面我们用台劳公式来作近似计算. 这样，计算以及估计误差都较为简单. 当然，也可间接地利用辛普森公式来计算所给定积分的近似值，这时需要或者改变被积函数或者把积分区间分成两个. 例如，我们可以改变被积函数如下：令

$$I = \int_0^1 (e^x - 1)\ln\frac{1}{x}dx = -\int_0^1 (e^x - 1)\ln x dx,$$

设 $f(x) = (e^x - 1)\ln x$，若补充定义

$$f(0) = \lim_{x \to +0} f(x) = 0,$$

则 $f(x)$ 是 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的连续函数. 由于

$$f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= f(x) + \frac{e^x - 1}{x} + \ln x (0 < x \leqslant 1),$$

故

$$\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}dx + \int_0^1 \ln x dx.$$

注意到

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 0,$$

$$\int_0^1 \ln x\, dx = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = -1,$$

得

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}dx - 1.$$

于是，我们把求$\int_0^1 (e^x - 1)\ln\frac{1}{x}dx$的近似值问题，归结为求$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}dx$的近似值问题. 令$g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$，并补充定义

$$g(0) = \lim_{x\to+0} g(x) = 1,$$

则$g(x)$是$0 \leqslant x \leqslant 1$上的连续函数. 由求高阶导数的莱布尼兹法则，易得

$$g^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x) - (-1)^n n!}{x^{n+1}} (0 < x \leqslant 1),$$

其中$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k k! x^{n-k} \quad (n = 1,2,\cdots).$

下面证明$g^{(n)}(0)$存在并且$g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}(n = 1,2,\cdots)$. 首先，由洛比塔法则，我们有

$$\lim_{x\to+0} g^{(n)}(x) = \lim_{x\to+0} \frac{e^x P_n(x) - (-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{e^x [P_n(x) + P'_n(x)]}{(n+1)x^n}$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{e^x x^n}{(n+1)x^n} = \frac{1}{n+1} (n = 1,2,\cdots).$$

于是,根据中值定理,得

$$g'(0) = \lim_{x\to+0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\xi\to+0} g'(\xi)$$

$$= \frac{1}{2} \quad (0 < \xi < x).$$

今假定 $g^{(n)}(0)$ 存在且 $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$. 于是,

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to+0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to+0} g^{(n+1)}(\eta) = \frac{1}{n+2} (0 < \eta < x).$$

根据数学归纳法,知 $g^{(n)}(0)$ 存在且

$$g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由此又知 $g^{(n)}(x)$ 是 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的连续函数($n = 1, 2,\cdots$). 令 $h(x) = e^x P_n(x) - (-1)^n n!$. 由于

$$h'(x) = e^x [P_n(x) + P'_n(x)] = e^x x^n > 0$$

$$(当\ 0 < x \leqslant 1\ 时),$$

故 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上是严格增大的,从而

$$h(x) > h(0) = 0 (当\ 0 < x \leqslant 1\ 时).$$

因此,当 $0 < x \leqslant 1$ 时 $g^{(n)}(x) > 0 (n = 1,2,\cdots)$,所以 $g^{(n-1)}(x)$ 是 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的严格增函数($n = 1,2,\cdots$).

特别,$g^{(4)}(x)$ 当然是 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的严格增函数. 于

令 $u=\frac{1-x}{x}(0<x<1)$，则 $\frac{1}{x}=1+u(u>0)$.

于是，当 $0<x<1$ 时，有

$$0<(e^x-1)\ln\frac{1}{x}=(e^x-1)\ln(1+u)$$
$$<(e^x-1)u=\frac{1-x}{x}(e^x-1)<\frac{e^x-1}{x}.$$

前面已证函数 $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上是严格增大的（注意，规定 $g(0)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}=1$）. 故当 $0<x<1$ 时，有

$$1<\frac{e^x-1}{x}<g(1)=e-1<2;$$

从而

$$0<\int_0^{10^{-5}}(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx<\int_0^{10^{-5}}\frac{e^x-1}{x}dx$$
$$<2\int_0^{10^{-5}}dx=0.2\times 10^{-4}.$$

求出函数 $(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$ 的四阶导函数的表达式后，易知它在闭区间 $10^{-5}\leqslant x\leqslant 1$ 上是连续的，从而是有界的，并且不难估计出其绝对值的上界. 因此，可利用辛普森公式计算积分

$$\int_{10^{-5}}^{1}(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$$

的近似值，使误差的绝对值小于 $0.8\times 10^{-4}$. 显然，若以此作为积分 $\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$ 的近似值，则其误差的

绝对值小于 $10^{-4}$. 由于计算较繁,从略.

2543. 近似地计算概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

**解** 作变换

$$x = \frac{t}{1-t},$$

则积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \frac{1}{(1-t)^2} dt.$$

由于题中对精确度未提出明确要求,故 $n$ 可任取. 例如取 $n = 2k = 18, \Delta t = \frac{1}{18}$,则有

$t_0 = 0, y_0 = 1;$

$t_1 = \frac{1}{18}, 4y_1 = 4.46894;$

$t_2 = \frac{1}{9}, 2y_2 = 2.49201;$

$t_3 = \frac{1}{6}, 4y_3 = 5.53415;$

$t_4 = \frac{2}{9}, 2y_4 = 3.04696;$

$t_5 = \frac{5}{18}, 4y_5 = 6.61414;$

$t_6 = \frac{1}{3}, 2y_6 = 3.50460;$

$t_7 = \frac{7}{18}, 4y_7 = 7.14411;$

$t_8 = \frac{4}{9}, 2y_8 = 3.41685;$

$$t_9 = \frac{1}{2}, 4y_9 = 5.88607;$$

$$t_{10} = \frac{5}{9}, 2y_{10} = 2.12232;$$

$$t_{11} = \frac{11}{18}, 4y_{11} = 2.23855;$$

$$t_{12} = \frac{2}{3}, 2y_{12} = 0.32968;$$

$$t_{13} = \frac{13}{18}, 4y_{13} = 0.06009;$$

$$t_{14} = \frac{7}{9}, 2y_{14} = 0.00010;$$

$$t_{15} = \frac{5}{6}, 4y_{15} = 0;$$

$$t_{16} = \frac{8}{9}, 2y_{16} = 0;$$

$$t_{17} = \frac{17}{18}, 4y_{17} = 0;$$

$$t_{18} = 1, y_{18} = \lim_{t\to 1} e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)^2 = 0.$$

按辛普森公式,得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \frac{1}{(1-t)^2} dt$$

$$= \frac{1}{54}(1 + 4.46894 + 2.49201 + 5.53415 + 3.04696 + 6.61414 + 3.50460 + 7.14411 + 3.41685 + 5.88607 + 2.12232 + 2.23855 + 0.32968 + 0.06009 + 0.00010)$$

$$= \frac{47.85857}{54} \doteq 0.88627.$$

2544. 近似地求出半轴为 $a=10$ 及 $b=6$ 的椭圆的周长.

**解** 设椭圆的参数方程为

$$x=10\cos t, y=6\sin t.$$

于是有 $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=10\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}dt$,

从而得椭圆的周长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}ds=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}dt.$$

现取 $n=2k=6$ 近似计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt.$$

注意到 $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$, $\sin^2\frac{5\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$,

$h=\frac{\pi}{12}$,即有

$$t_0=0, y_0=1;$$

$$t_1=\frac{\pi}{12}, 4y_1=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})}$$
$$=3.913;$$

$$t_2=\frac{\pi}{6}, 2y_2=2\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}}=1.833;$$

$$t_3=\frac{\pi}{4}, 4y_3=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}}=3.293;$$

$$t_4=\frac{\pi}{3}, 2y_4=2\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{3}{4}}=1.442;$$

$$t_5=\frac{5\pi}{12}, 4y_5=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})}$$

$$= 2.539;$$

$$t_6 = \frac{\pi}{2}, y_6 = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 0.6.$$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2 t}dt$$

$$= \frac{h}{3}[(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]$$

$$= \frac{\pi}{36}(1 + 0.6 + 3.913 + 3.298 + 2.539 + 1.833 + 1.442)$$

$$\doteq 1.276,$$

所以，椭圆周长的近似值为

$$s = 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2 t}dt = 40 \times 1.276 = 51.04.$$

**2545.** 取 $\Delta x = \frac{\pi}{3}$，按点子作出函数

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$$

的图形.

**解** 取 $n = 2k = 6$ 计算函数 $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 的值.

先计算 $y = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt$. 由于 $h = \frac{\pi}{18}$，且

$$t_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{18}, 4y_1 = 3.980;$$

$$t_2=\frac{\pi}{9},2y_2=1.960;$$

$$t_3=\frac{\pi}{6},4y_3=3.820;$$

$$t_4=\frac{2\pi}{9},2y_4=1.841;$$

$$t_5=\frac{5\pi}{18},4y_5=3.511;$$

$$t_6=\frac{\pi}{3},y_6=0.827.$$

按辛普森公式，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt&=\frac{\pi}{54}(1+0.827+3.980+3.820\\&\quad+3.511+1.960+1.841)\\&\doteq 0.99.\end{aligned}$$

再计算 $y=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt$. 由于 $h=\frac{\pi}{9}$，且

$$t_0=0,y_0=1;$$

$$t_1=\frac{\pi}{9},4y_1=3.919;$$

$$t_2=\frac{2\pi}{9},2y_2=1.841;$$

$$t_3=\frac{\pi}{3},4y_3=3.308;$$

$$t_4=\frac{4\pi}{9},2y_4=1.411;$$

$$t_5=\frac{5\pi}{9},4y_5=2.257;$$

$$t_6=\frac{2\pi}{3},y_6=0.413.$$

所以，

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

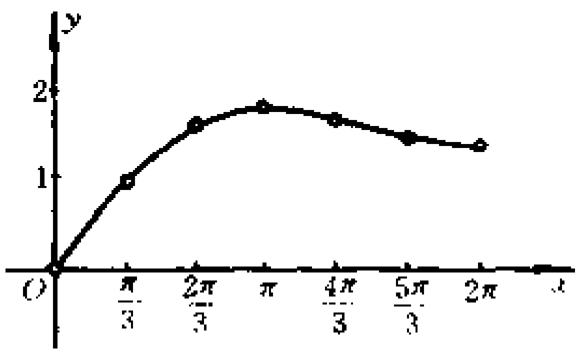


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

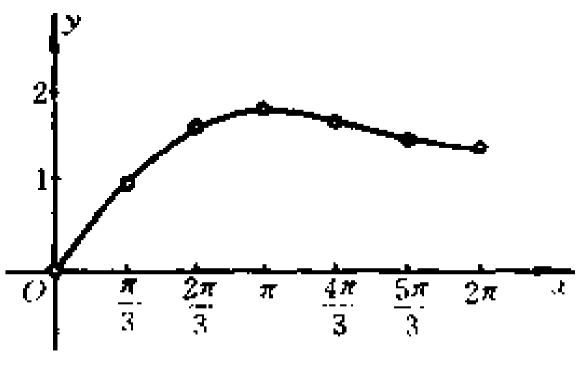


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

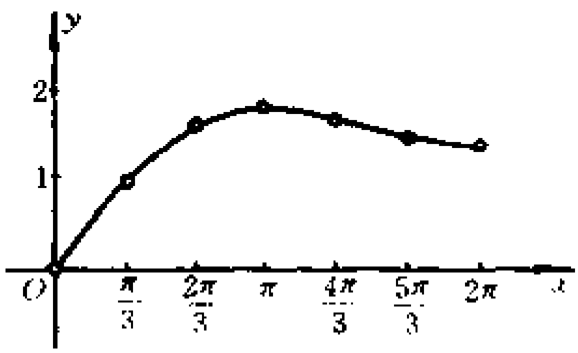


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

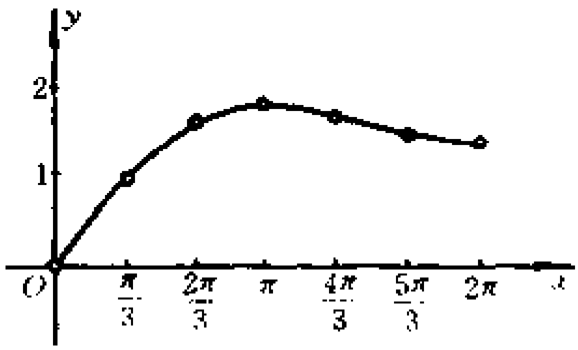


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

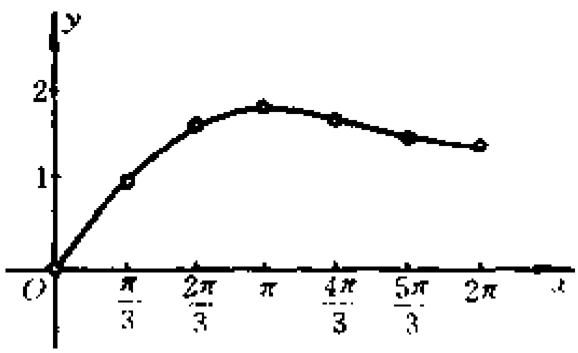


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

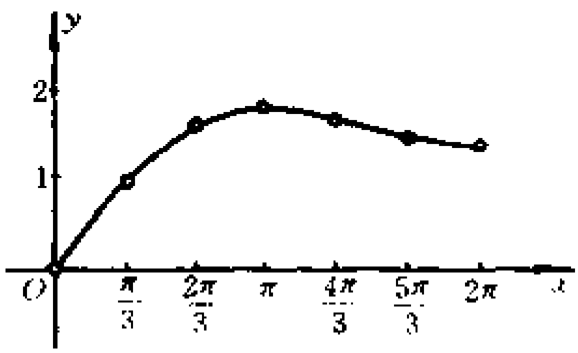


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

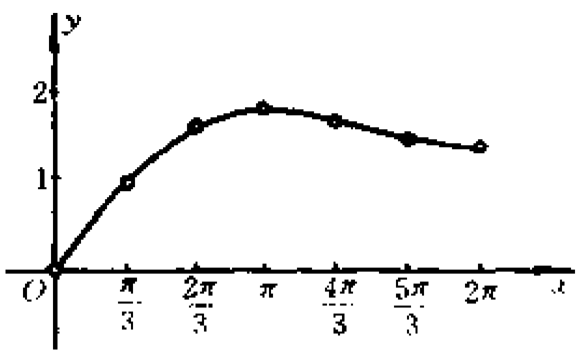


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

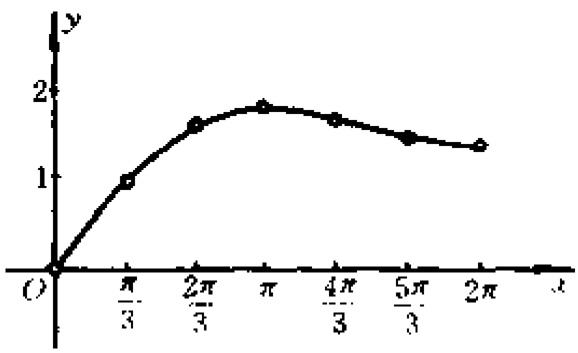


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

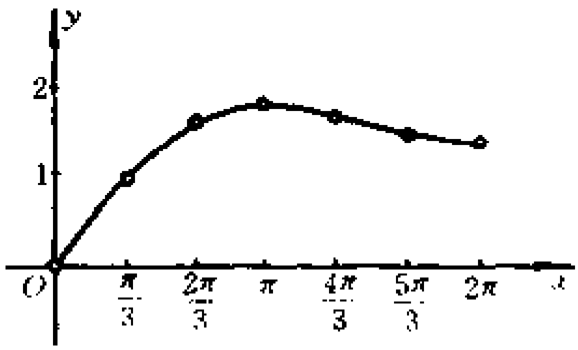


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

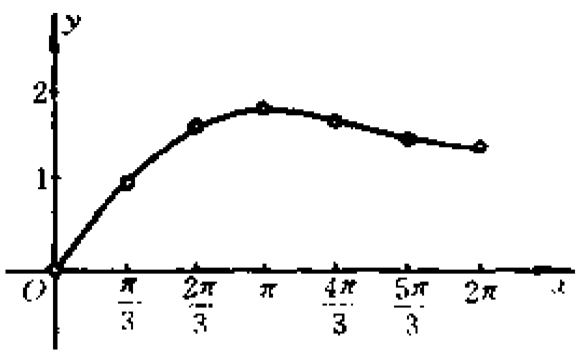


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

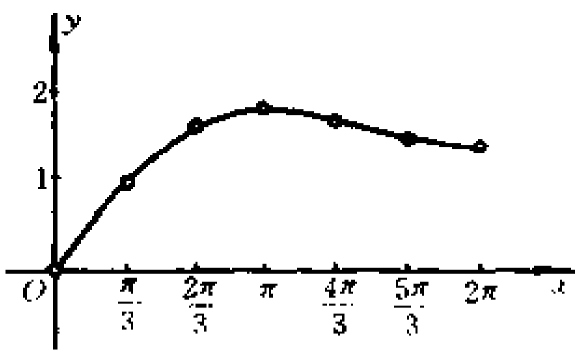


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

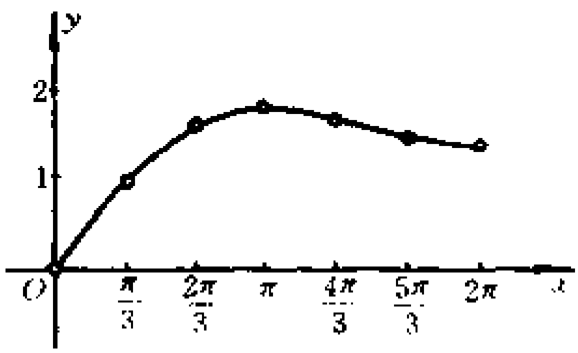


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

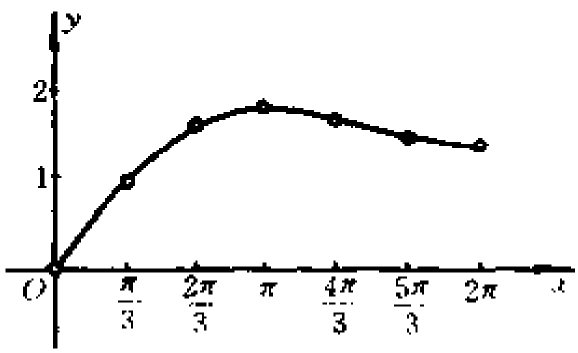


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

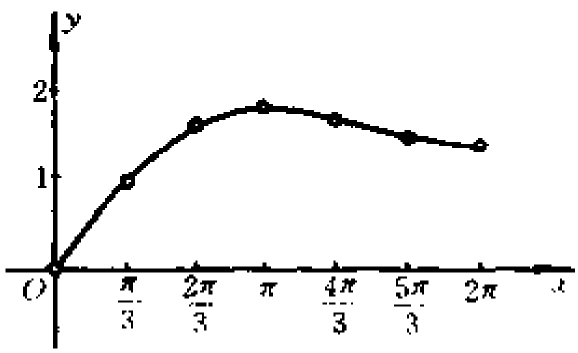


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

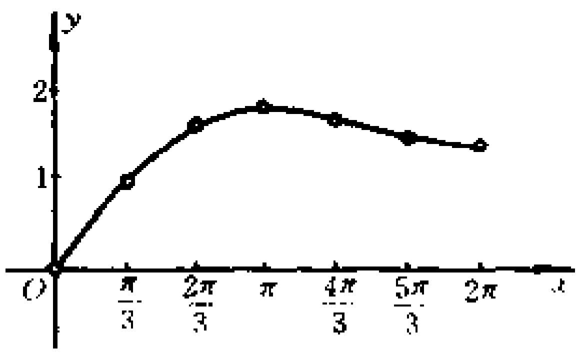


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

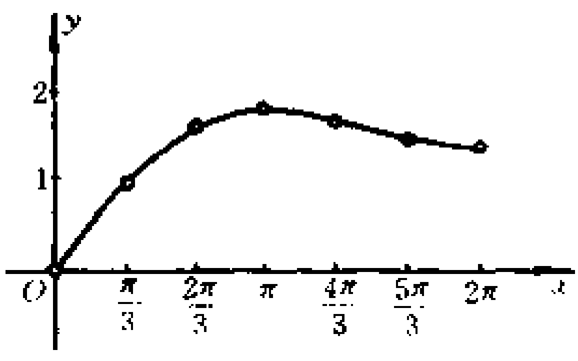


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308$$
$$+ 2.257 + 1.841 + 1.411)$$
$$\doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

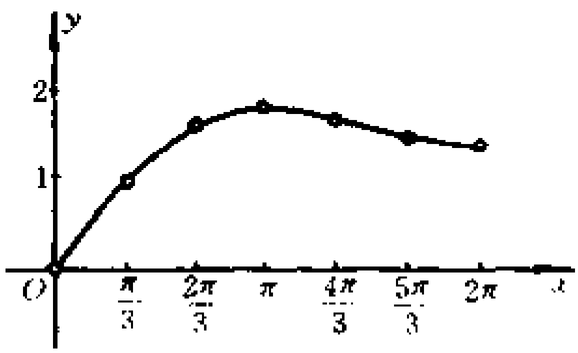


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

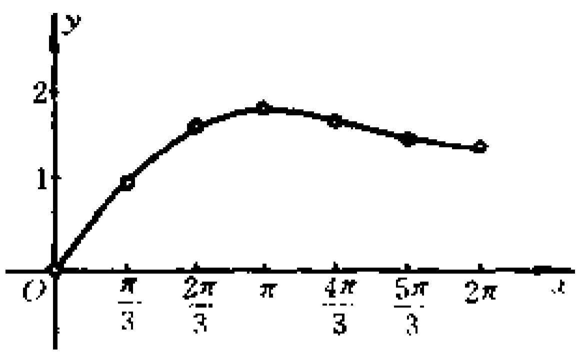


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

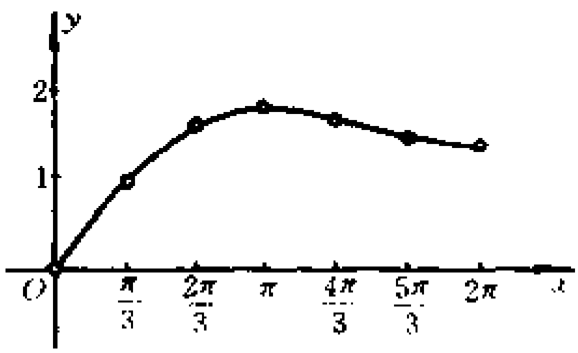


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$,类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

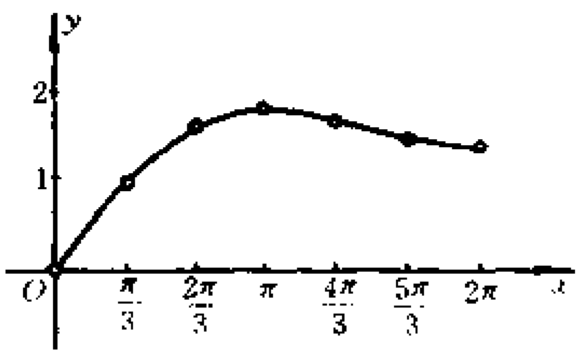


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

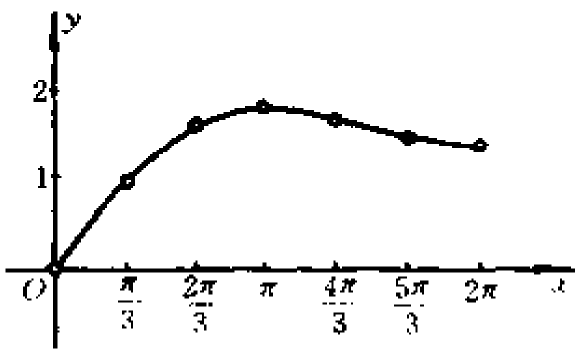


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

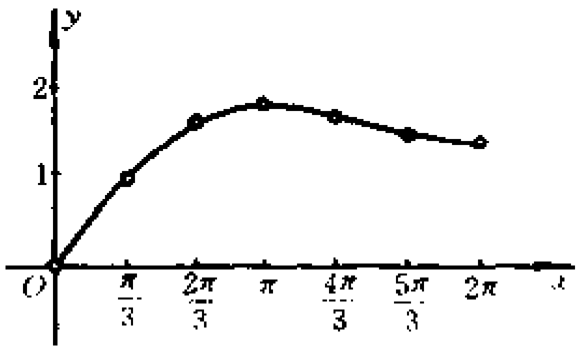


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

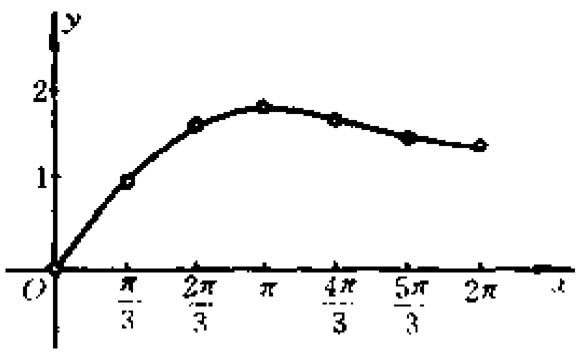


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

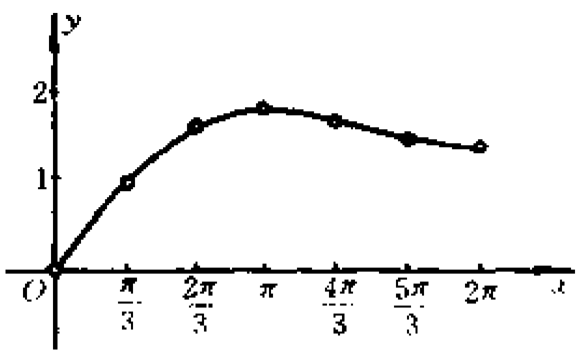


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308$$
$$+ 2.257 + 1.841 + 1.411)$$
$$\doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

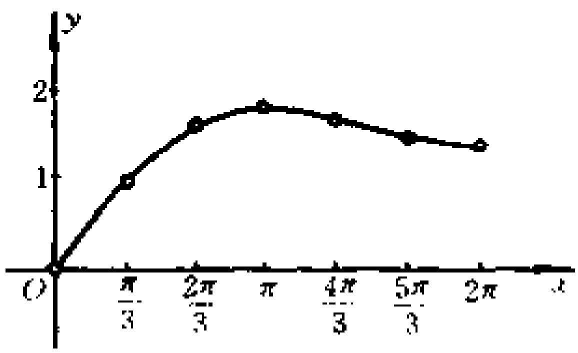


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

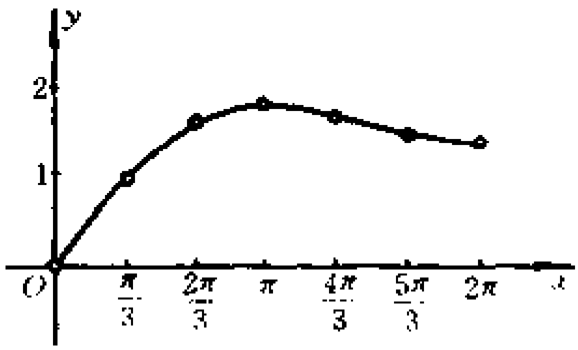


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

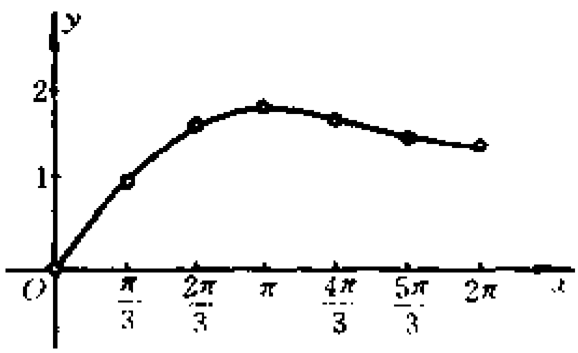


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

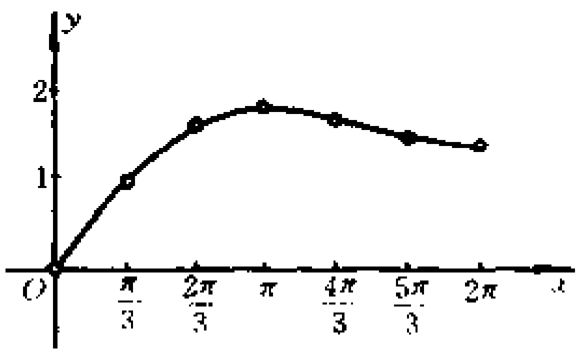


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

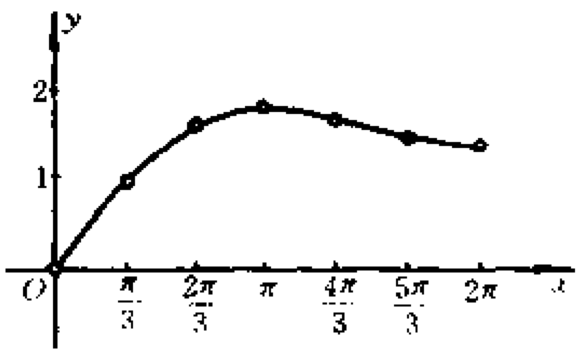


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

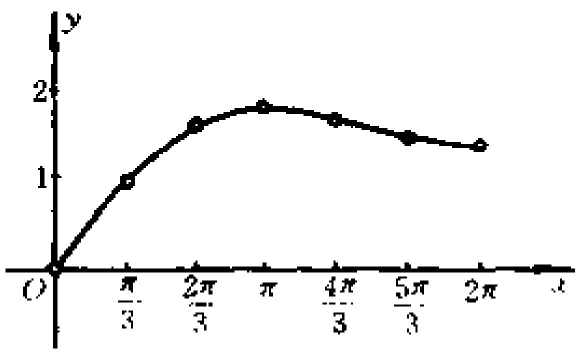


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

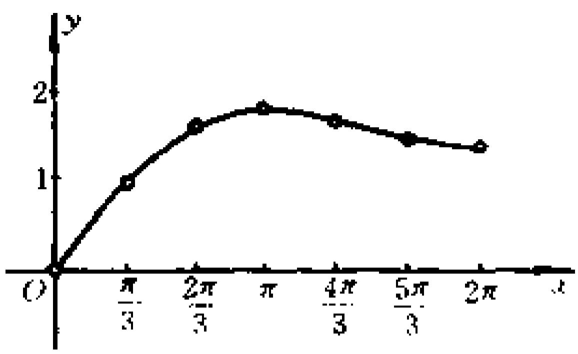


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

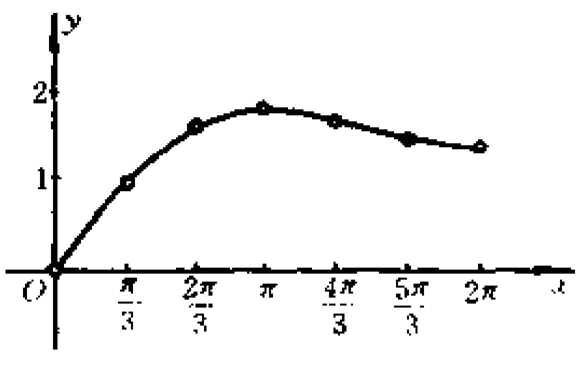


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

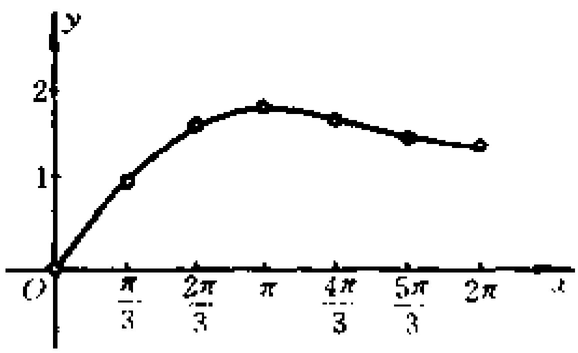


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

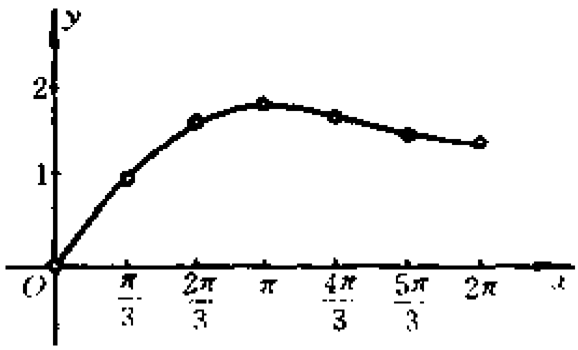


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

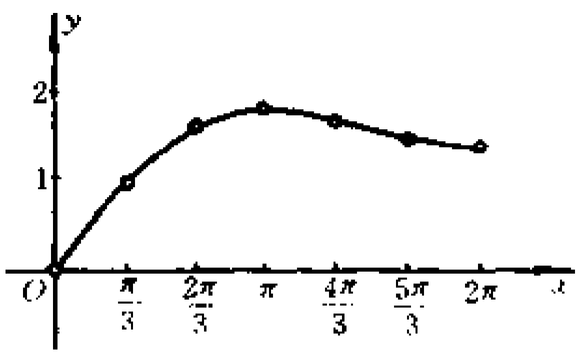


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

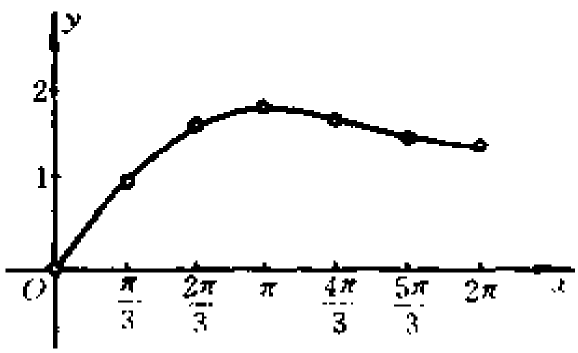


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

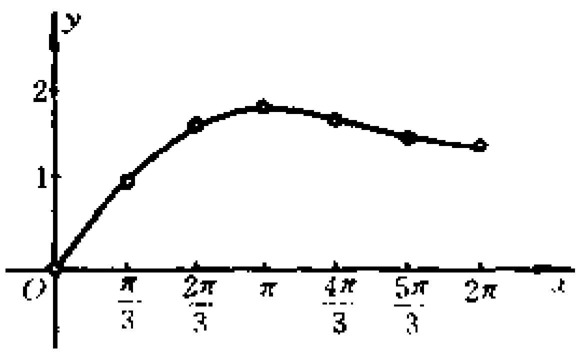


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

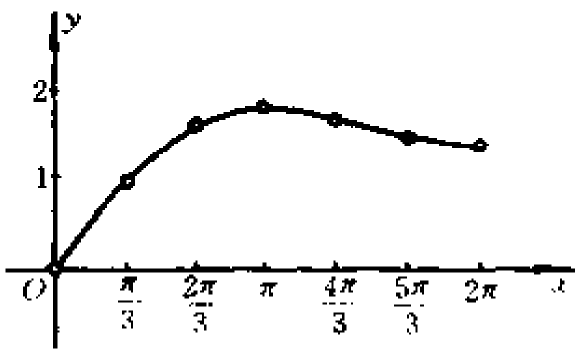


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

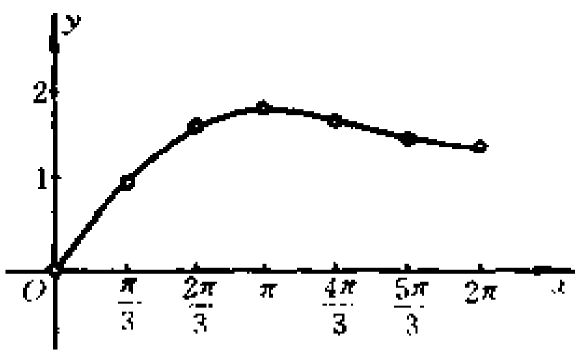


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

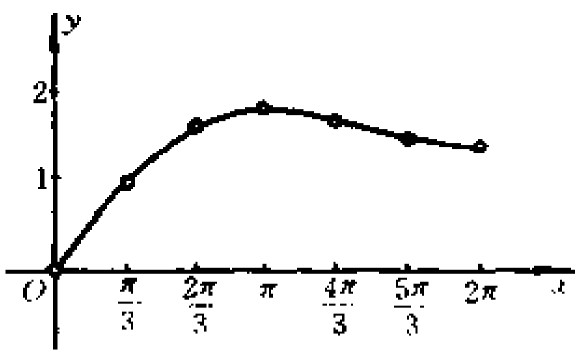


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

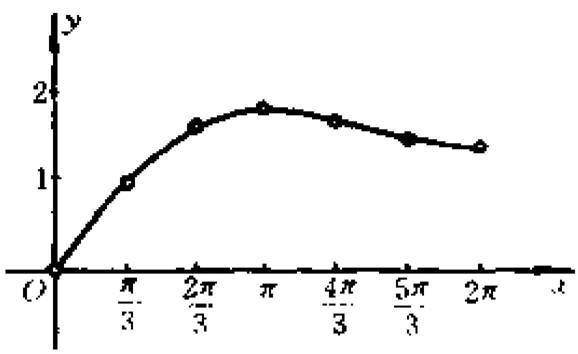


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

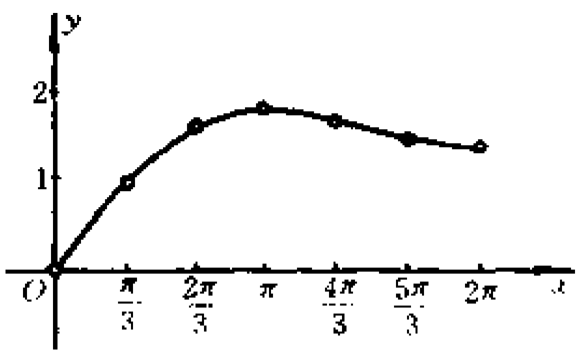


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

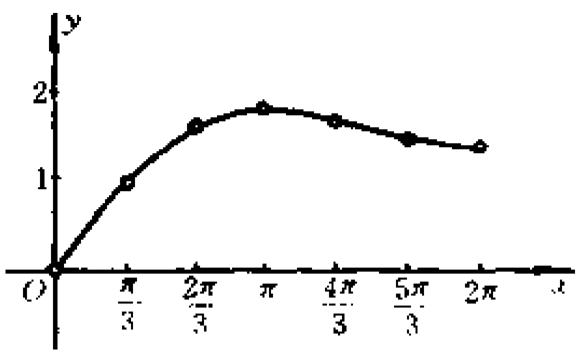


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

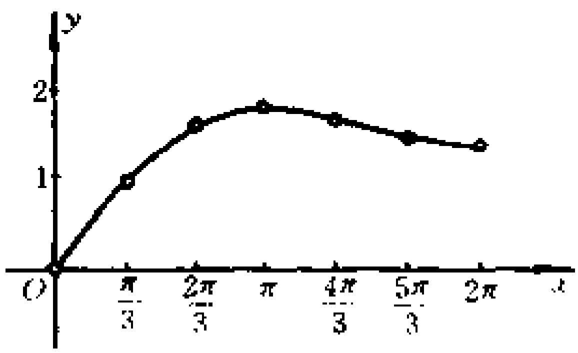


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

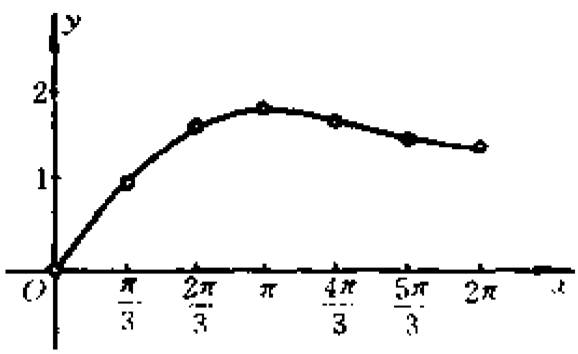


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

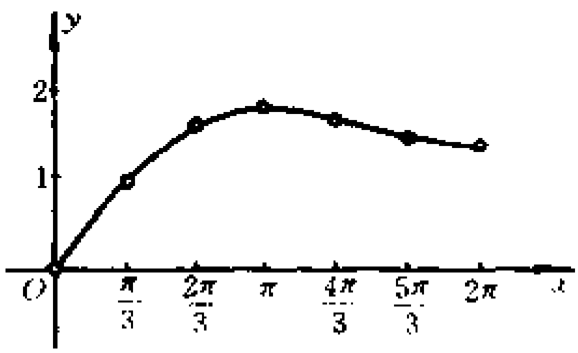


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

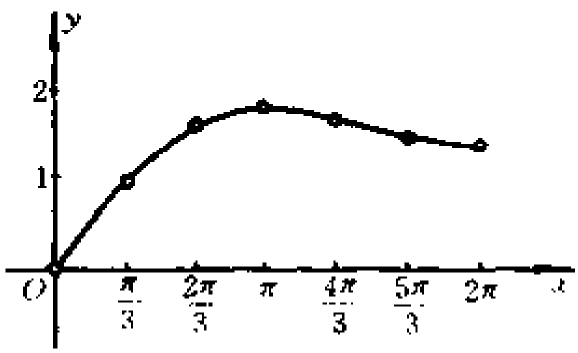


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

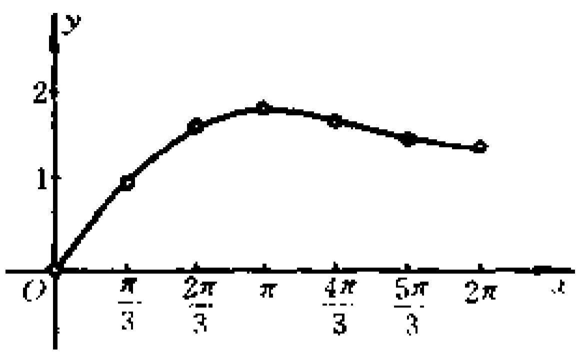


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

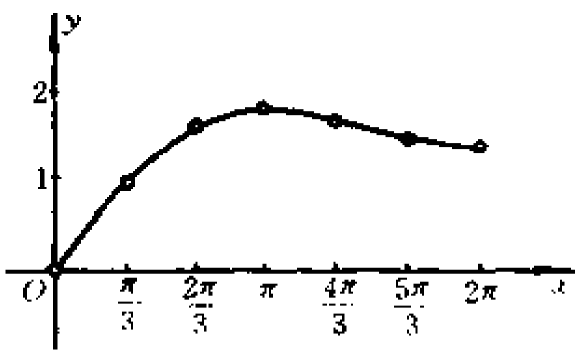


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

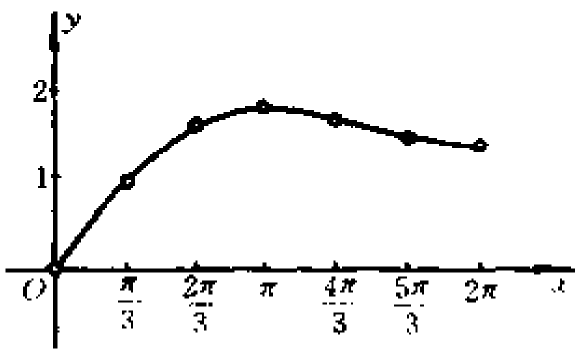


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

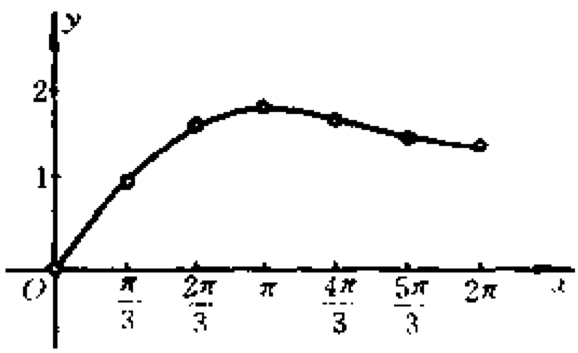


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

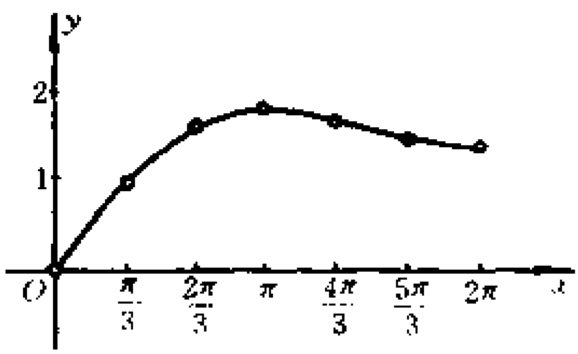


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

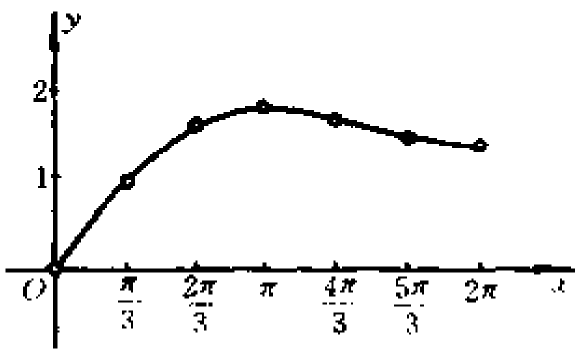


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

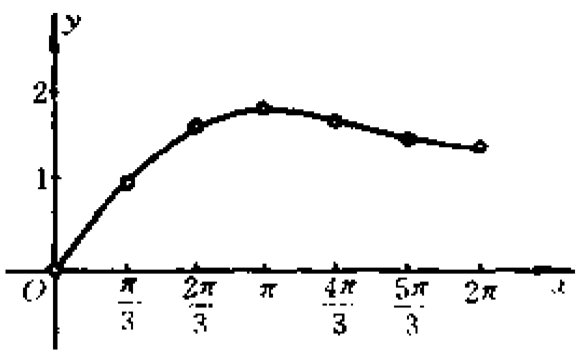


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

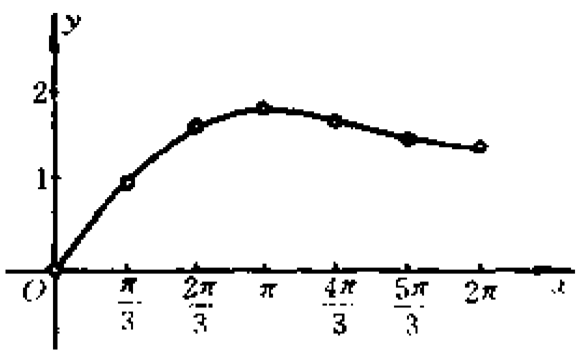


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

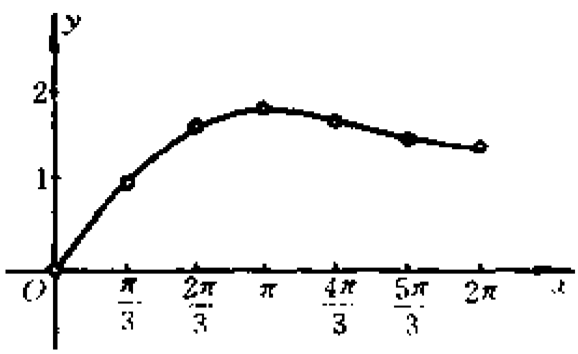


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

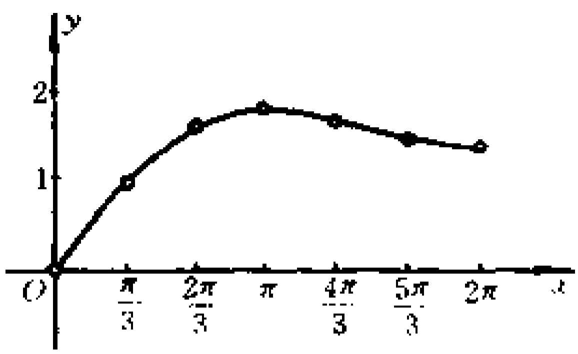


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

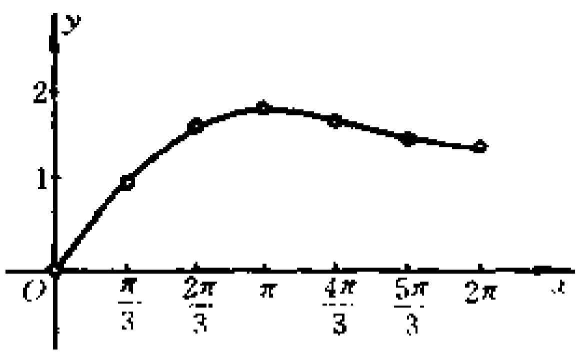


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

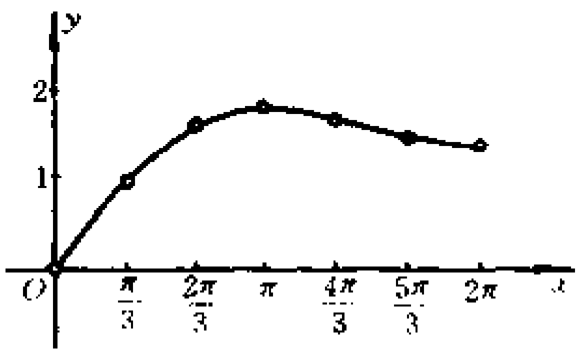


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

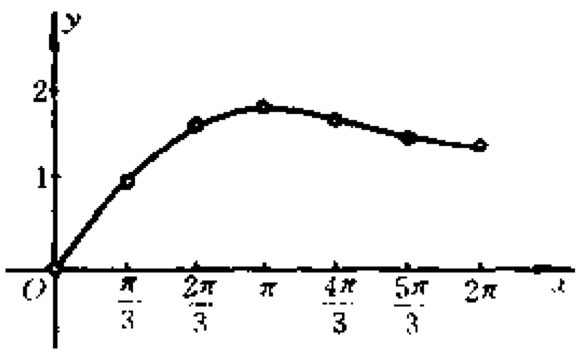


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

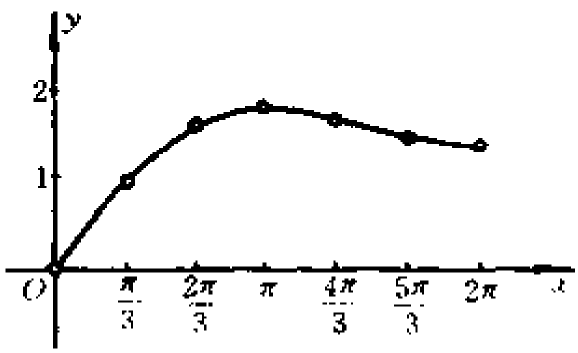


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27}(1 + 0.413 + 3.919 + 3.308$$
$$+ 2.257 + 1.841 + 1.411)$$
$$\doteq 1.65.$$

选取适当的 $n$，类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55)：

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 0.99 | 1.65 | 1.85 | 1.72 | 1.52 | 1.42 |

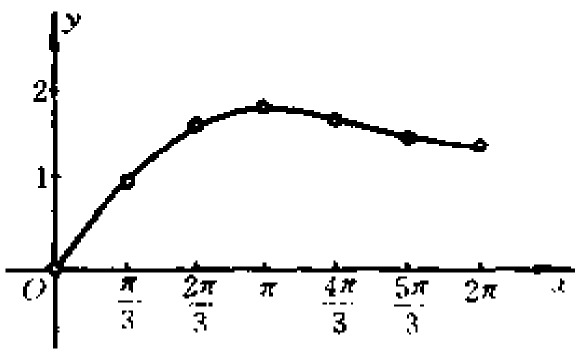


图 4.55