随机过程讲义

（内部交流）

目 录

第一章 Poisson 过程

称随机变量 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，若 $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,\ldots$.

称随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，若 $P(X>t)=e^{-\lambda t}$. 此时，X 的密度函数为 $\lambda e^{-\lambda t}$, $t>0$, 分布函数为 $1-e^{-\lambda t}$, $t>0$. 指数分布满足无记忆性，即

$$P(X>t+s)=P(X>t)P(X>s).$$

引理 1.1 设随机变量 X, Y 独立，$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 有界可测。令 $g(x)=E[f(x,Y)]$. 则 $g(X)$ 可积，且

$$E[f(X,Y)]=E[g(X)].$$

称 $\{N(t),\ t\geq 0\}$ 为计数过程，若 $N(t)$ 表示在时刻 t 之前发生事件的次数。因此，计数过程 $N(t)$ 满足：

(i) $N(t)\geq 0$;

(ii) $N(t)$ 为整数值；

(iii) 对 $0\geq s\leq t$, $N(s)\leq N(t)$;

(iv) 对 $0\leq s<t$, $N(t)-N(s)$ 表在区间 $(s,\ t]$ 发生事件的次数。

§1.1 定义

定义 1.1 称 $\{N(t),\ t\geq 0\}$ 为参数为 λ 的（齐次）*Poisson* 过程，若

(i) $N(t)$是计数过程，$N(0)=0$;

(ii) $N(t)$ 具有平稳独立增量，即对任意的 $0\leq t_0<t_1<\cdots<t_n$, $t\geq 0$, $h>0$, 有 $N(t_1)-N(t_0)$, $\ldots$, $N(t_n)-N(t_{n-1})$ 独立，且 $N(t+h)-N(t)$ 与 $N(h)$ 同分布；

(iii) 当 $h\downarrow 0$ 时，

$$P(N(h)=1)=\lambda h+o(h),\quad P(N(h)\geq 2)=o(h). \tag{1.1}$$

定理 1.2 设 $N(t)$ 是参数为 λ 的 *Poisson* 过程，则对任意的 $h>0$,

$$P(N(t+h)-N(t)=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\quad k=0,1,\ldots. \tag{1.2}$$

证明 记 $p_n(t) = P(N(t) = n) = P(N(t+s) - N(s) = n)$.

i) 先考虑 $n = 0$ 的情形。对 $h > 0$, 有

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= P(N(t+h) = 0) = P(N(t) = 0,\ N(t+h) - N(t) = 0) \\ &= P(N(t) = 0)P(N(t+h) - N(t) = 0) = p_0(t)p_0(h). \end{aligned}$$

应用

$$p_0(h) = P(N(h) = 0) = 1 - P(N(h) = 1) - P(N(h) \geq 2) = 1 - \lambda h + o(h),$$

得

$$p_0(t+h) - p_0(t) = (1 - p_0(h))p_0(t) = \lambda h p_0(t) + o(h).$$

从而 $p_0(t)$ 在 t 右可导，且右导数为 $-\lambda p_0(t)$. 而

$$\begin{aligned} \frac{p_0(t-h) - p_0(t)}{h} &= \frac{p_0(t-h) - p_0(t-h)p_0(h)}{h} \\ &= \frac{1 - p_0(h)}{h}\frac{p_0(t)}{p_0(h)}, \end{aligned}$$

令 $h \to 0$ 可得 $p_0(t)$ 在 t 的左导数也存在，且为 $-\lambda p_0(t)$. 这样

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \quad p_0(0) = 1,$$

于是 $p_0(t) = e^{-\lambda t}$.

ii) 当 $n > 0$ 时

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= P(N(t+h) = n) \\ &= P(N(t) = n,\ N(t+h) - N(t) = 0) + P(N(t) = n-1,\ N(t+h) - N(t) = 1) \\ &\quad + P(N(t+h) = n,\ N(t+h) - N(t) \geq 2) \\ &= p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + o(h) \\ &= (1 - \lambda h)p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h). \end{aligned}$$

对 $h > 0$, 有

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h},$$

从而 $p_n(t)$ 在 t 的右导数为 $-\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$. 类似的可知 $p_n(t)$ 的左导数也存在。这样

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad p_n(0) = 0, \quad n \geq 1.$$

上面方程等价于

$$(e^{\lambda t}p_n(t))' = e^{\lambda t}p_{n-1}(t).$$

容易得到

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

□

这样，Poisson 过程有如下的等价定义。

定义 1.2 称 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ 为参数为 λ 的 *Poisson* 过程，若

(i) $N(t)$ 是计数过程，且 $N(0) = 0$;

(ii) $N(t)$ 是独立增量过程；

(iii) 对任意的 $t \geq 0,\ h > 0$, 有

$$P(N(t+h) - N(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

§1.2 另一个等价定义

设 $N(t)$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程。令 $S_0 = 0,\ S_n = \inf\{t > 0,\ N(t) \geq n\}$, $T_n = S_n - S_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$.

定理 1.3 $T_n,\ n = 1, 2, \ldots$ 独立同分布且服从参数 λ 的指数分布。

证明 由

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t},$$

T_1 服从参数为 λ 的指数分布。对 $0 < t_1 < t_2$ 和充分小的 $h_1,\ h_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
&P(t_1 - h_1 < S_1 \leq t_1 + h_1,\ t_2 - h_2 < S_2 \leq t_2 + h_2)\\
=&P(N(t_1 - h_1) = 0,\ N(t_1 + h_1) - N(t_1 - h_1) = 1,\ N(t_2 - h_2) - N(t_1 + h_1) = 0,\\
&\qquad N(t_2 + h_2) - N(t_2 - h_2) = 1)\\
=&e^{-\lambda(t_1 - h_1)} \cdot \lambda 2h_1 e^{-2\lambda h_1} \cdot e^{-\lambda(t_2 - h_2 - t_1 - h_1)} \cdot \lambda 2h_2 e^{-2\lambda h_2}\\
=&4\lambda^2 h_1 h_2 e^{-\lambda(t_2 + h_2)}.
\end{aligned}$$

所以，(S_1, S_2) 的联合密度函数为

$$g(s_1, s_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda s_2}, & 0 < s_1 < s_2; \\ 0, & \text{其它。} \end{cases} \tag{1.3}$$

由$T_1 = S_1,\ T_2 = S_2 - S_1,\ (T_1, T_2)$ 的联合密度函数为

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(t_1 + t_2)}, & t_i \geq 0; \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

这样，$T_1,\ T_2$ 独立同分布。一般的情形类似可证。 □

定理 1.4 设 $T_1,\ T_2,\ldots$ 独立同分布且同服从参数为 λ 的指数分布。令 $S_0=0$, $S_n=T_1+\cdots+T_n$, $n=1,\ 2,\ldots$. 则 $N(t)=\sup\{n:\ S_n\le t\}$ 是参数为 λ 的 *Poisson* 过程。

证明 当 $h\to 0$ 时，有

$$P(N(h)\ge 2)=P(S_2\le h)=\int_0^h \lambda^2 s e^{-\lambda s}ds\le \lambda^2 h\int_0^h e^{-\lambda s}ds=o(h).$$

及

$$P(N(h)=1)=P(S_1\le h<S_2)=P(S_1\le h)+o(h)=1-e^{-\lambda h}+o(h)=\lambda h+o(h),$$

为使得定理成立，只需要再证明 $N(t)$ 具有平稳独立增量。我们只证明对任意的 $n,\ k$,

$$P(N(t+s)-N(t)=k,\ N(t)=n)=P(N(s)=k,\ N(t)=n).$$

一般情形类似可证。注意到

$$\{S(n)\le t\}=\{N(t)\ge n\}. \tag{1.4}$$

我们分下面几种情况来讨论。

(i) 设 $k=0,\ n=0$. 由指数分布的无记忆性，

$$\begin{aligned}&P(N(t+s)-N(t)=0,\ N(t)=0)=P(N(t+s)=0)=P(S_1>t+s)\\ =&P(S_1>s)P(S_1>t)=P(N(s)=0)P(N(t)=0).\end{aligned}$$

(ii) 设 $k=0,\ n\ge 1$.

$$\begin{aligned}&P(N(t+s)-N(t)=0,\ N(t)=n)=P(S_n\le t<t+s<S_{n+1})\\ =&P(S_n\le t<t+s<S_n+T_{n+1})=\int_0^t P(t+s<u+T_{n+1})dP(S_n\le u)\\ =&\int_0^t P(S_1>s)P(T_{n+1}>t-u)dP(S_n\le u)=P(N(s)=0)P(N(t)=n).\end{aligned}$$

(iii) 设 $k\ge 1,\ n=0$.

$$\begin{aligned}&P(N(t+s)-N(t)=k,\ N(t)=0)=P(t<S_1\le S_k\le t+s<S_{k+1})\\ =&P(t<S_1\le S_1+\sum_{i=2}^{k}T_i\le t+s<S_1+\sum_{i=2}^{k+1}T_i)\\ =&\int_0^s P(\sum_{i=2}^{k}T_i\le s-u<\sum_{i=2}^{k+1}T_i)dP(S_1\le t+u).\end{aligned}$$

由

$$dP(S_1 \le t+u) = -dP(S_1 > t+u) = -P(S_1 > t)dP(S_1 > u) = P(S_1 > t)dP(S_1 \le u),$$

可得

$$\begin{aligned}
&P(N(t+s)-N(t)=k,\ N(t)=0)\\
=&P(S_1 > t)\int_0^s P(\sum_{i=2}^{k} T_i \le s-u < \sum_{i=2}^{k+1} T_i)dP(S_1 \le u)\\
=&P(N(s)=k)P(N(t)=0).
\end{aligned}$$

(iv) 设 $k \ge 1$, $n \ge 1$.

$$\begin{aligned}
&P(N(t+s)-N(t)=k,\ N(t)=n) = P(S_n \le t < S_{n+1} \le S_{n+k} \le t+s < S_{n+k+1})\\
=&\int_0^t P(t-u < S_1 \le S_k \le t+s-u < S_{k+1})dP(S_n \le u)\\
=&P(N(s)=k)\int_0^t P(N(t-u)=0)dP(S_n \le u) = P(N(s)=k)P(N(t)=n).
\end{aligned}$$

□

§1.3 Poisson过程的其它性质

§1.3.1 顺序统计量

假定 Poisson 过程在时刻 t 之前恰好有一次事件发生，即 $N(t)=1$. 由于 $N(t)$ 具有独立增量，事件发生的时刻应服从 $(0,\ t]$ 上的均匀分布。事实上，

$$\begin{aligned}
&P(S_1 < s|N(t)=1) = \frac{P(S_1 < s,\ N(t)=1)}{P(N(t)=1)}\\
=&\frac{P(N(s)=1,\ N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}}\\
=&\frac{s}{t}.
\end{aligned}$$

为推广这一结果，我们引入顺序统计量的概念。

设 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是 n 个随机变量，$\{Y_{(1)},\ Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}\} = \{Y_1,\ Y_2, \ldots, Y_n\}$, 且 $Y_{(1)} \le Y_{(2)} \le \cdots \le Y_{(n)}$, 则称 $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ 为对应于 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 的顺序统计量。若 $Y_1, \ldots, Y_n$ 独立同分布，且具有密度函数 $f(x)$, 则 $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ 的密度函数为

$$f(y_1, \ldots, y_n) = n!\prod_{i=1}^{n} f(y_i), \quad y_1 < \cdots < y_n.$$

特别的，当服从 $(0,\ t)$ 上均匀分布时，密度函数为

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < y_1 < \cdots < y_n < t.$$

定理 1.5 假设在时间 $t>0$ 前已经发生了 n 次事件，即已知 $N(t)=n$, 则随机向量 $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ 的分布与区间 $[0,t]$ 上 n 个独立均匀分布的顺序统计量具有相同的分布，即它的联合密度函数为

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < t_1 < \cdots < t_n < t.$$

证明 我们只对 $n=2$ 证明。由于 S_1, …, S_n 的联合密度为

$$g(s_1, \ldots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n}, \quad s_1 < \cdots < s_n,$$

所以

$$\begin{aligned}
&P(S_1 \leq s_1,\ S_2 \leq s_2,\ N(t)=2) = P(S_1 \leq s_1,\ S_2 \leq s_2,\ S_2 \leq t < S_3\}\\
=&\int_0^{s_1}\int_{x_1}^{s_2}\int_t^{\infty} \lambda^3 e^{-\lambda x_3} dx_3 dx_2 dx_1\\
=&\lambda^2 e^{-\lambda t}(s_1 s_2 - s_1^2/2).
\end{aligned}$$

因此，

$$P(S_1 \leq s_1,\ S_2 \leq s_2 | N(t)=2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda t}(s_1 s_2 - s_1^2/2)}{\lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}/2} = \frac{2}{t^2}(s_1 s_2 - s_1^2/2).$$

□

§1.3.2 过程的稀疏

定理 1.6 设 *Poisson* 过程 $N(t)$ 表示到 t 时刻发生的事件个数。如果每个事件被记录的概率为 p, 且是否被记录是独立的，则被记录的事件个数 $N_1(t)$ 是强度为 λp 的 *Poisson* 过程。

证明 由全概率公式，

$$\begin{aligned}
&P(N_1(t)=n) = \sum_{m=0}^{\infty} P(N_1(t)=n|N(t)=m+n)P(N(t)=m+n)\\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}p^n(1-p)^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}\\
=&e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{\lambda t(1-p)}\\
=&e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

□

下面假设事件被记录的概率与发生的时间有关。具体的说，若某次事件发生在时刻 t, 则以概率 $p(t)$ 被记录，并且与其它事件是否被记录独立。记 $N_1(t)$ 为到时刻 t 被记录的事件个数，$N_2(t)=N(t)-N_1(t)$ 为未记录事件的个数。

命题 1.7 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 是相互独立的 *Poisson* 随机变量，且分别以 λtp 和 $\lambda t(1-p)$ 为参数，其中

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds.$$

证明 考虑在 [0, t] 中发生的任一事件，它发生的时间服从 [0, t] 上的均匀分布。因测它被记录的概率为

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds.$$

这样，

$$P(N_t(t) = n|N(t) = n+k) = \binom{n+k}{n} p^n(1-p)^k.$$

于是

$$\begin{aligned}&P(N_1(t) = n,\ N_2(t) = k) = P(N_1(t) = n,\ N_2(t) = k|N(t) = n+k)P(N(t) = k)\\ =&\frac{(n+k)!}{n!k!}p^n(1-p)^k\frac{(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tp)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t(1-p)}\frac{(\lambda t(1-p))^k}{k!}.\end{aligned}$$

□

例 无穷多个服务员的 Poisson 排队系统 设顾客按照强度为 λ 的 Poisson 过程到达一服务站。顾客到达后，不需等待，即可由某一服务员提供服务，且服务时间是独立的，有共同的分布 G.

设在时刻 t 服务完毕的顾客数为 $N_1(t)$, 尚在服务的顾客数为 $N_2(t)$. 若顾客在时刻 s 到达，如果服务时间小于 $t-s$, 他将会在 t 服务完毕，这个概率是

$$p(s) = G(t-s),\ s \le t.$$

从而由上面命题知 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立，且 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别服从参数为 $\lambda\int_0^t G(y)dy$ 和 $\lambda\int_0^t(1-G(y))dy$ 的 Poisson 分布。

§1.4 复合Poisson过程及应用

§1.4.1 复合Poisson过程

定义 1.3 设 $Y_n,\ n \ge 1$ 是一列独立同分布的随机变量，且与 $N(t)$ 独立。称过程 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 为复合 *Poisson* 过程。

定理 1.8 复合 *Poisson* 过程 $S(t)$ 具有如下性质：

(i) 它是平稳独立增量过程；

(ii) 若 $\mu = E[Y_i] < \infty$, 则 $E[S(t)] = \lambda t\mu$; 若 $\mathrm{Var}[Y_i] < \infty$, 则 $\mathrm{Var}(S(t)) = \lambda tE(Y_i^2)$.

(iii) 对任意 $\xi \in \mathbb{R}$, $E[e^{i\xi S(t)}] = e^{-t\psi(\xi)}$, 其中

$$\psi(\xi) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{i\xi x}) dF(x).$$

证明 先证平稳独立增量性。记 F 为 Y_i 的分布函数，F^{*k} 为 F 的 k 重卷积。对任意的 $0 \le t_0 < \cdots < t_n$ 和 x_i, 有

$$\begin{aligned}
&P(S(t_0) \le x_0,\ S(t_1) - S(t_0) \le x_1, \ldots, S(t_n) - S(t_{n-1}) \le x_n) \\
=&P(\sum_{i=1}^{N(t_0)} Y_i \le x_0, \ldots, \sum_{i=N(t_{n-1})+1}^{N(t_n)} Y_i \le x_n) \\
=&\sum_{k_0,\ldots,k_n} \prod_{j=0}^{n} F^{*k_j}(x_j) P(N(t_0) = k_0,\ N(t_1) - N(t_0) = k_1, \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n) \\
=&\sum_{k_0,\ldots,k_n} \prod_{j=0}^{n} F^{*k_j}(x_j) P(N(t_0) = k_0) P(N(t_1) - N(t_0) = k_1) \cdots P(N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n) \\
=&P(S(t_0) \le x_1) P(S(t_1 - t_0) \le x_2) \cdots P(S(t_n - t_{n-1}) \le x_n).
\end{aligned}$$

再证 (ii).

$$\begin{aligned}
E[S(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{n} Y_i | N(t) = n] P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\mu P(N(t) = n) = \mu\lambda t
\end{aligned}$$

相同方法可以得到方差表达式。

(iii) 记 $\hat{F}$ 为分布 F 的特征函数，即

$$\hat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} dF(x).$$

$$\begin{aligned}
E[e^{i\xi S(t)}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\exp(i\xi \sum_{j=1}^{n} Y_j) | N(t) = n] P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}(\xi)^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp\left(-\lambda t \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{i\xi x}) dF(x)\right)\right).
\end{aligned}$$

□

§1.4.2 复合Poisson过程在保险风险理论中的应用

古典风险过程：

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

其中 $u>0$, $c>0$, Y_n 是独立同分布的非负随机变量，$N(t)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程。记 F 为 Y_i 的分布函数，μ 为 Y_i 的期望，$M(r)=E[e^{rY_i}]$. 假设

- 存在 $0<\gamma\le\infty$, 使得当 $r<\gamma$ 时，$M(r)<\infty$, 并且 $\lim_{r\to\gamma^-}M(r)=\infty$.
- $c>\lambda\mu$.

此时，关于 r 的方程

$$\lambda M(r)=\lambda+cr$$

有唯一的正实根 R（证明留作练习）。称 R 为 Lundberg 指数（调节系数）。

风险过程 $R(t)$ 的破产时 T 定义为

$$T=\inf\{t>0,\ R(t)<0\}.$$

显然的，

$$\{T<\infty\}=\bigcup_n\{T=S_n\}.$$

下面我们给出 $P(T<\infty)$ 的一个估计。记 $A_n=\{T\le S_n\}$, $\psi_n(u)=P(A_n)$, 则 $P(T<\infty)=\lim_{n\to\infty}\psi(u)$,

$$A_n=\{u+cT_1-Y_1<0,\ \text{或}\ u+cT_1+cT_2-Y_1-Y_2,\cdots,\text{或}\ u+cT_1+\cdots+cT_n-\sum_{k=1}^{n}Y_k<0\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\psi_{n+1}(u)=P(A_{n+1})=P(T=S_1)+P(S_1<T\le S_{n+1})\\
=&P(u+cT_1-Y_1<0)+\\
&\quad P(u+cT_1-Y_1\ge 0,\ \exists 2\le k\le n+1,\ u+cT_1-Y_1+\sum_{i=2}^{k}(cT_i-Y_i)<0)\\
=&\int_0^\infty\int_{u+cs}^\infty \lambda e^{-\lambda s}dF(y)ds\\
&\quad+\int_0^\infty\int_0^{u+cs}P(\exists 2\le k\le n+1,\ u+cs-y+\sum_{i=2}^{k}(cT_i-Y_i)<0)\lambda e^{-\lambda s}dF(y)ds\\
=&\int_0^\infty\int_{u+cs}^\infty \lambda e^{-\lambda s}dF(y)ds+\int_0^\infty\int_0^{u+cs}\psi_n(u+cs-y)\lambda e^{-\lambda s}dF(y)ds.
\end{aligned}$$

因为当 $y\ge u+cs$ 时，$e^{-R(u+cs-y)}\ge 1$, 因此

$$\begin{aligned}
\psi_1(u)=&\int_0^\infty\int_{u+cs}^\infty \lambda e^{-\lambda s}dF(y)ds\le\int_0^\infty\int_{u+cs}^\infty \lambda e^{-\lambda s}e^{-R(u+cs-y)}dF(y)ds\\
\le&\int_0^\infty\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s}e^{-R(u+cs-y)}dF(y)ds=e^{-Ru}\frac{\lambda M(R)}{\lambda+cR}=e^{-Ru}.
\end{aligned}$$

假设 $\psi_n(u) \le e^{-Ru}$, 则

$$\psi_{n+1}(u) \le \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} e^{-R(u+cs-y)} dF(y) ds = e^{-Ru}$$

这就证明了对任意的 n, 都有 $\psi(u) \le e^{-Ru}$. 从而

命题 1.9

$$P(T < \infty) \le e^{-Ru}. \tag{1.5}$$

§1.5 Poisson 过程的其它扩展

§1.5.1 非齐次 Poisson 过程

定义 1.4 称 $N(t)$ 为具有强度 $\lambda(t)$ 的非齐次 *Poisson* 过程，若

(i) $N(t)$ 是计数过程，$N(0) = 0$;

(ii) $N(t)$ 具有独立增量;

(iii) 当 $h \downarrow 0$ 时，

$$P(N(t+h) - N(t) \ge 2) = o(h), \quad P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h). \tag{1.6}$$

令

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, \tag{1.7}$$

则 $N(t+s) - N(t)$ 服从参数为 $m(t+s) - m(t)$ 的 Poisson 分布。当强度 $\lambda(t)$ 有界，即存在 λ 使得 $\lambda(t) \le \lambda$ 时，可看作是齐次 Poisson 过程的随机取样。考虑强度为 λ 的 Poisson 过程，若某一事件发生在时刻 t,则以概率 $\lambda(t)/\lambda$ 被记录，得到的过程即为强度为 $\lambda(t)$ 的非齐次 Poisson 过程（见命题 1.7）。

§1.5.2 条件 Poisson 过程

定义 1.5 设正值随机变量 Λ 分布函数为 G, $N(t)$ 为计数过程。称 $N(t)$ 为条件 *Poisson* 过程，若在 $\Lambda = \lambda$ 的条件下，$N(t)$ 是以 λ 为强度的 *Poisson* 过程。

容易证明，$N(t)$ 具有平稳增量，但不是独立增量过程，且

$$P(\Lambda \le x | N(t) = n) = \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} (\lambda t)^n dG(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n dG(\lambda)}.$$

§1.5.3 Poisson 随机测度

定义 1.6 设 ν 是空间 $(S,\mathcal{B})$ 上 σ-有限的测度。称随机测度 N 为以 ν 为强度的 *Poisson* 随机测度，若

(i) 对任意的 $B\in\mathcal{B}$, $\nu(B)<\infty$, 则 $N(B)$ 是参数为 $\nu(B)$ 的 *Poisson* 随机变量；

(ii) 对互不相交的集合 $B_1,\ldots,B_n\in\mathcal{B}$, $N(B_1),\ldots,N(B_n)$ 相互独立。

对 $(S,\mathcal{B})$ 上非负可测函数 f, 定义

$$\psi_N(f)=E[\exp(-N(f))].$$

可以证明，若 $\int_S(1-e^{-f(x)})\nu(dx)<\infty$, 则

$$\Psi_N(f)=\exp\left\{-\int_S(1-e^{-f(x)})\nu(dx)\right\}.$$

第二章　离散时间马氏链

§2.1　定义与例

定义 2.1 设随机过程 $\{X_n, n=0,1,\ldots\}$ 的状态空间 I 离散（有限或可数）。如果对任意的 $n \geq 0$ 和状态 $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}$, 只要 $P(X_0=i_0,\ldots,X_{n+1}=i_{n+1})>0$, 就有

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n)=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n), \tag{2.1}$$

则称它为离散时间马氏链（*Markov* 链）。如果对任意的 m, n 及状态 $i, j \in I$, 只要 $P(X_m=i)>0$, $P(X_n=i)>0$, 就有

$$P(X_{m+1}=j|X_m=i)=P(X_{n+1}=j|X_n=i), \tag{2.2}$$

则称它为齐次的。

本章我们只考虑齐次马氏链，并且总假定构成条件的事件具有正概率。记

$$p_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i), \tag{2.3}$$

称它为单步转移概率。称 $P=(p_{ij})_{i,j\in I}$ 为转移矩阵。明显的，单步转移概率满足

(i) $p_{ij}\geq 0,\ i,j\in I$

(ii) $\sum_{j\in I}p_{ij}=1,\ i\in I$

令 $\mathcal{F}_n=\sigma\{X_m,\ m\leq n\}$, $\mathcal{F}^n=\sigma\{X_m,\ m\geq n\}$. 下面我们给出马氏性的一些等价条件。

定理 2.1 下面条件等价：

(i) 马氏性 *(2.1)* 成立；

(ii) 对任意的 $r, m, k, n_1<n_2<\cdots<n_r<m$, 以及任意状态 $i_1,\ldots,i_r, i_m, i_{m+k}$ 有

$$P(X_{m+k}=i_{m+k}|X_{n_1}=i_1,\cdots,X_{n_r}=i_r,\ X_m=i_m)=P(X_{m+k}=i_{m+k}|X_m=i_m). \tag{2.4}$$

(iii) 对任意的 m, 状态 i 和 $F\in\mathcal{F}_{m-1}$, $G\in\mathcal{F}^{m+1}$, 有

$$P(G|F,\ X_m=i)=P(G|X_m=i). \tag{2.5}$$

(iv) 对任意的 m, 状态 i 和 $F\in\mathcal{F}_{m-1}$, $G\in\mathcal{F}^{m+1}$, 有

$$P(FG|X_m=i)=P(F|X_m=i)P(G|X_m=i). \tag{2.6}$$

证明 只证明 (i)⇒(ii). 为简单起见，设 $r=1$, 一般情形完全相同。由马氏性 (i),

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n_1}=i_{n_1},\ X_m=i_m,\ X_{m+k}=i_{n+k}) \\
=&\sum_{j_s,\ s<m+k,\ s\neq n_1,\ m} P(X_0=j_0,\dots,X_{n_1}=i_1,\ X_{n_1+1}=j_{n_1+1},\dots,X_{m+k}=i_{m+k}) \\
=&\sum_{j_s,\ m<s<m+k} P(X_{m+k}=i_{m+k}|X_{m+k-1}=j_{m+k-1})\cdot P(X_{m+k-1}=j_{m+k-1}|X_{m+k-2}=j_{m+k-2}) \\
&\cdot\ \cdots\ \cdot P(X_{m+1}=j_{m+1}|X_m=i_m)\cdot P(X_{n_1}=i_{n_1},\ X_m=i_m).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&P(X_{m+k}=i_{m+k}|X_{n_1}=i_1,\dots,X_{n_r}=i_r,\ X_m=i_m) \\
=&\sum_{j_s,\ m<s<m+k} P(X_{m+k}=i_{m+k}|X_{m+k-1}=j_{m+k-1})\cdot\ \cdots\ \cdot P(X_{m+1}=j_{m+1}|X_m=i_m).
\end{aligned}
$$

同理可证上式右方等于 (2.4) 右方。 □

称

$$p_{ij}^{(k)}=P(X_{n+k}=j|X_n=i),\ k=1,\ 2,\ \dots \tag{2.7}$$

为 k 步转移概率，它表示马氏链从状态 i 出发，经 k 步到达 j 的概率。约定 $p_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$. 注意 $p_{ij}^{(1)}=p_{ij}$. 记 $P^{(k)}=(p_{ij}^{(k)})$.

由

$$
\begin{aligned}
P(X_{n+k}=j|X_n=i)=&\sum_{i_1,\dots,i_{k-1}} P(X_{n+1}=i_1,\ X_{n+k-1}=i_{k-1},\ X_{n+k}=j|X_n=i) \\
=&\frac{1}{P(X_n=i)}P(X_{n+k}=j|X_{n+k-1}=i_{k-1})\cdot\ \cdots\ \cdot P(X_{n+1}=i_1|X_n=i)\cdot P(X_n=i) \\
=&p_{i,i_1}\cdot p_{i_1,i_2}\cdot\ \cdots\ \cdot p_{i_{k-1},j},
\end{aligned}
$$

可知 $P^{(k)}=P^k$. 特别的，$P^{(m+k)}=P^{(m)}P^{(k)}$.

引理 2.2 $p_{ij}^{(k)}$ 具有性质：

(i) $0\le p_{ij}^{(k)}\le 1$;

(ii) $\sum_j p_{ij}^{(k)}=1$;

(iii) 对任意 $m,\ k$ 及状态 $i,\ j$, 有

$$p_{ij}^{(m+k)}=\sum_r p_{ir}^{(m)}p_{rj}^{(k)}. \tag{2.8}$$

(2.8) 称为 C–K (Chapman–Kolmogorov) 方程。它来源于英国 S. Chapman 对候鸟迁移规律的研究。它的直观意思是从状态 i 经 $m+k$ 步到达 j 可分为两个步骤完成，首先由 i 经 m 步转到某一中间 r, 再由 r 经 k 步到 j。对一切可能的状态求和即可得到 (2.8) 的右方。

下面命题指出，马氏链 X_n 的有限维分布族，可以由初始分布 $q_i = P(X_0 = i)$ 及转移概率 p_{ij} 完全确定。

命题 2.3 *(i)* $P(X_n = j) = \sum_i q_i p_{ij}^{(n)}$.

(ii) 对 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 及状态 i_1, $i_2, \ldots, i_k$, 有

$$P(X_{n_1} = i_1,\ X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_k} = i_k) = P(X_{n_1} = i_1) p_{i_1,i_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{i_{k-1},i_k}^{(n_k-n_{k-1})}.$$

证明 (i)

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_0 = i,\ X_n = j) = \sum_i q_i P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_i q_i p_{ij}^{(n)}.$$

(ii) 由马氏性，

$$\begin{aligned}
&P(X_{n_1} = i_1, \ldots, X_{n_k} = i_k) \\
=&P(X_{n_k} = i_k | X_{n_{k-1}=i_{k-1}}) P(X_{n_{k-1}} = i_{k-1} | X_{n_{k-2}=i_{k-2}}) \cdots P(X_{n_2} = i_2 | X_{n_1} = i_1) \\
=&P(X_{n_1} = i_1) p_{i_1,i_2}^{(n_2-n_1)} \cdots p_{i_{k-1},i_k}^{(n_k-n_{k-1})}.
\end{aligned}$$

□

定理 2.4 (存在性定理) *任给概率分布 $\{p_i\}$ 及满足 $0 \le p_{ij} \le 1$, $\sum_j p_{ij} = 1$ 的矩阵 (p_{ij}), 则存在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 以及其上的马氏链 $\{X_n, n \ge 0\}$, 使得它的初始分布为 $\{p_i\}$，转移矩阵为 (p_{ij}).*

§2.2 状态分类

§2.2.1 状态空间的分解

设 X_n 是以 I 为状态空间的马氏链，$B \subset I$. 令

$$\tau_B = \inf\{n \ge 0,\ X_n \in B\},$$

称为 B 的首中时。记 $\tau_j = \tau_{\{j\}}$.

定义 2.2 *设 $i, j \in I$. 称 i 可达 j, 记为 $i \to j$, 若 $P_i(\tau_j < \infty) > 0$. 称 i 与 j 互通，记为 $i \leftrightarrow j$, 若 $i \to j$ 且 $j \to i$.*

注意到

$$\{\tau_j = n\} \subset \{X_n = j\} \subset \{\tau_j \le n\} \subset \{\tau_j < \infty\}.$$

若存在 n 使 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 则 $P_i(\tau_j < \infty) \ge p_{ij}^{(n)} > 0$. 反过来，若 $P_i(\tau_j < \infty) > 0$, 则存在 n 使 $P_i(\tau_j = n) > 0$, 从而 $p_{ij}^{(n)} \ge P_i(\tau_j = n) > 0$. 这样，我们证明了 $i \to j$ 当且仅当存在 n 使 $p_{ij}^{(n)} > 0$.

命题 2.5 互通关系是 I 上等价关系，即

(i) $i \leftrightarrow j$;

(ii) $i \leftrightarrow j$ 当且仅当 $j \leftrightarrow i$;

(iii) 若 $i \leftrightarrow j$, $j \leftrightarrow k$, 则 $i \leftrightarrow k$.

证明 只须证明传递性。设 $i \to j$, $j \to k$, 则存在 m, n, 使得 $p_{ij}^{(m)} > 0$, $p_{jk}^{(n)} > 0$. 于是由 C–K 方程，

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_r p_{ir}^{(m)} p_{rk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0.$$

□

按照互通关系，I 可分解为 $I = \bigcup_\lambda C_\lambda$, 其中 C_λ 中任两状态互通，且当 $\lambda \neq \mu$ 时，$C_\lambda \bigcap C_\mu = \emptyset$.

称 X_n 为不可约马氏链，若 I 中任两状态互通，即上面分解中只有一个等价类。称 $C \subset I$ 为闭集，若对任意 $i \in I$, $P_i(\tau_{C^c} = \infty) = 1$. 若 $\{j\}$ 为闭集，则称 j 为吸收态。

命题 2.6 *(i)* C 是闭集等价于对任意的 $i \in C$, $j \in C^c$, 有 $p_{ij} = 0$.

(ii) j 吸收等价于 $p_{jj} = 1$.

证明 必要性显然。设对 $i \in C$, $j \in C^c$, $p_{ij} = 0$. 则

$$P_i(\tau_{C^c} = 1) = \sum_{j \in C^c} p_{ij} = 0,$$

$$P_i(\tau_{C^c} = 2) = P_i(X_1 \in C,\ X_2 \in C^c) = \sum_{j \in C^c} \sum_{k \in C} p_{ik} p_{kj} = 0.$$

归纳即得 $P_i(\tau_{C^c} \leq n) = 0$. □

§2.2.2 状态的常返

令 $\tau_i(0) = 0$,

$$\tau_i(1) = \inf\{m \geq 1,\ X_m = i\},$$

在 $\{\tau_i(1) < \infty\}$ 上，令

$$\tau_i(2) = \inf\{m > \tau_i(1),\ X_m = i\},$$

归纳的，在 $\{\tau_i(1) < \infty, \ldots, \tau_i(n) < \infty\}$ 上，令

$$\tau_i(n+1) = \inf\{m > \tau_i(n),\ X_m = i\}.$$

应用马氏性，

$$\begin{aligned}&P_i(\tau_i(1)=m,\ \tau_i(2)-\tau_i(1)=n)\\=&P_i(X_s\neq i,\ 1\leq s<m,\ X_m=i,\ X_u\neq i,\ m+1\leq u<m+n,\ X_{m+n}=i)\\=&P_i(X_s\neq i,\ 1\leq s<m,\ X_m=i)P_i(X_u\neq i,\ m+1\leq u<m+n,\ X_{m+n}=i)\\=&P_i(\tau_i(1)=m)P_i(\tau_i(1)=n).\end{aligned}$$

上式中对 m 和 n 求和，有

$$P_i(\tau_i(1)<\infty,\ \tau_i(2)<\infty)=P_i(\tau_i(1)<\infty)^2.$$

这样，

$$\begin{aligned}&P_i(\tau_i(1)=m,\ \tau_i(2)-\tau_i(1)=n|\tau_i(1)<\infty,\ \tau_i(2)<\infty)\\=&P_i(\tau_i(1)=m|\tau_i(1)<\infty)P_i(\tau_i(1)=n|\tau_i(1)<\infty),\end{aligned}$$

即，在概率 $P(\cdot|\tau_i(1)<\infty,\ \tau_i(2)<\infty)$ 下，$\tau_i(1)$ 与 $\tau_i(2)-\tau_i(1)$ 独立同分布。一般的，我们有

命题 2.7 在概率 $P_i(\cdot|\tau_i(1)<\infty,\dots,\tau_i(k)<\infty)$ 下，随机变量 $\tau_i(1),\tau_i(2)-\tau_i(1),\dots,\tau_i(k)-\tau_i(k-1)$ 独立同分布。

类似于上面的方法，可以证明下面的结果。

推论 2.8 对任意的 m,k 及状态 $i_1,\dots,i_m$, 有

$$P_i(\tau_i(1)=k,\ X_{\tau_i(1)+l}=i_l,\ 1\leq l\leq m)=P_i(\tau_i(1)=k)P_i(X_l=i_l,\ 1\leq l\leq m).$$

定义 2.3 设 $i\in I$. 如果 $P_i(\tau_i(1)<\infty)=1$, 则称状态 i 是常返的，反之称为非常返的（暂留得）。如果 $E_i\tau_i(1)<\infty$, 则称 i 为正常返的，反之称为零常返的。

对 $n\geq 1$, 记

$$f_{ij}^{(n)}=P_i(\tau_j(1)=n)=P_i(X_s\neq j,\ 1\leq k<n,\ X_n=j). \tag{2.9}$$

约定 $f_{ij}^{(0)}=0$. 这样，

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)} \tag{2.10}$$

表示从 i 出发，经有限步到达 j的概率。记

$$m_i=E_i\tau_i(1)=\sum_{n=0}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}. \tag{2.11}$$

显然，i 常返等价于 $f_{ii}=1$, i 正常返等价于 $m_i<\infty$.

定理 2.9 **(初次进入的分解公式)**

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \tag{2.12}$$

证明 由 $\{X_n = j\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j,\ X_k = j,\ X_n = j\}$,

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j,\ \tau_j(1) = k | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j,\ X_k = j,\ X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j,\ X_k = j | X_0 = i) \\
&\quad P(X_n = j | X_0 = i,\ X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j,\ X_k = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}
\end{aligned}$$

□

推论 2.10 状态 i 可达 j 的充分必要条件是 $f_{ij} > 0$.

证明 由 $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$ 立得。 □

记 $f_{ij}^{(n)}$ 和 $p_{ij}^{(n)}$ 的生成函数分别为

$$F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n, \quad 0 \leq s < 1.$$

由 (2.12),

$$\begin{aligned}
P_{ij}(s) &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} s^k p_{jj}^{n-k} s^{n-k} \\
=&\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} s^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{jj}^{(n-k)} s^{n-k} = \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s).
\end{aligned}$$

当 $i = j$ 时，有

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}. \tag{2.13}$$

而当 $i \neq j$ 时,

$$P_{ij}(s) = \frac{F_{ij}(s)}{1 - F_{jj}(s)}. \tag{2.14}$$

定理 2.11 状态 i 常返等价于 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$; i 非常返等价于 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

证明 在 (2.13) 中令 $s \to 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}}.$$

□

推论 2.12 设 j非常返。则 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

证明 由 j 非常返知 $f_{jj} < 1$. 在 (2.14) 中令 $s \to 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \delta_{ij} + \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} < \infty,$$

从而 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. □

令

$$N_j = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}},$$

它表示 X_n 到达 j 的次数。由 $E[N_j] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ 可知 i 常返等价于到达 i 的平均次数是无穷。

推论 2.13 有限状态马氏链必有常返状态。

证明 设 $I = \{1,\ 2, \ldots, m\}$. 若 I 中所有状态非常返，则对任意的 $i,\ j \in I$, 有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. 对 j 求和,

$$1 = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

记 $g_{ij} = P_i(N_j = \infty) = P_i(X_n = j \text{ i.o.})$ 为到达 j 无穷多次的概率。

引理 2.14 $g_{ij} = f_{ij} g_{jj}$.

证明

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_s \neq j,\ 1 \le k < n,\ X_n = j,\ X_{n+u} = j \text{ i.o.}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_s \neq j,\ 1 \le k < n,\ X_j = j) P_j(X_s = j \text{ i.o.}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} g_{jj} = f_{ij} g_{ij}. \end{aligned}$$

□

定理 2.15

$$g_{ij}=\begin{cases} f_{ij}, & j\ \text{常返} \\ 0, & j\ \text{非常返} \end{cases}$$

证明 对 $m\geq 1$, 令 $g_{ij}(m)=P_i(N_j\geq m)=P_i(X_n=j$ 至少取到m 次). 类似于上面的证明,

$$g_{ij}(m+1)=f_{ij}g_{jj}(m)=\cdots=f_{ij}(f_{jj})^m.$$

令 $m\to\infty$ 即得。 □

推论 2.16 *若 i 常返，则 $g_{ii}=1$; 若 i 非常返，则 $g_{ii}=0$.*

这样，i 常返当且仅当马氏链 X_n 从 i 出发，以概率 1 回到 i 无穷多次。

定理 2.17 *设 $i\neq j$, i 常返，$i\to j$, 则*

(i) j 常返；

(ii) $i\leftrightarrow j$;

(iii) $f_{ij}=f_{ji}=1$.

证明 (ii) 由 i 常返知 $g_{ii}=P_i(X_n=i\ \text{i.o.})=1$. 对任意的 $m>0$, 有 $P_i(X_{m+n}\neq i,\ n\geq 1)=0$. 由 $i\to j$, 存在 m 使得 $f_{ij}^{(m)}>0$. 这样，

$$\begin{aligned}0&=P_i(X_{n+m}\neq i,\ n\geq 1)\geq P_i(\tau_j(1)=m,\ X_{n+m}\neq i,\ n\geq 1)\\&=f_{ij}^{(m)}P_j(\tau_i(1)=\infty)=f_{ij}^{(m)}(1-f_{ji}),\end{aligned}$$

故 $f_{ji}=1$, 从而 $j\to i$.

(i) 设 $p_{ji}^{(n)}>0$, $p_{ij}^{(k)}>0$. 由 C–K 方程，

$$p_{jj}^{n+k+l}=\sum_{r,\ s}p_{jr}^{(n)}p_{rs}^{(l)}p_{sj}^{(k)}\geq(p_{ji}^{(n)}p_{ij}^{(k)})p_{ii}^{(l)}.$$

于是

$$\sum_{l=1}^{\infty}p_{jj}^{(l)}\geq\sum_{l=1}^{\infty}p_{jj}^{(n+k+l)}\geq(p_{ji}^{(n)}p_{ij}^{(k)}\sum_{l=1}^{\infty}p_{ii}^{(l)}=\infty.$$

这就证明了 j 常返。

(iii) 由 (ii) 的证明及 j 常返可得。 □

推论 2.18 *互通的状态具有相同的常返性。*

以后我们将会看到，互通的状态如果是常返，则同为正常返或者同为零常返。

§2.2.3 状态的周期性

定义 2.4 $\{n:\ n \geq 1,\ p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的最大公约数 d_i 称为 i 的周期。若 $d_i > 1$, 称 i 为周期的；若 $d_i = 1$, 则称 i 为非周期的。若 i 正常返且非周期，则称为 i 为遍历状态。

命题 2.19 若 $i \leftrightarrow j$, 则 i 与 j 具有相同的周期或者同为非周期的。

证明 设 i 周期为 d, j 周期为 t. 由 $i \leftrightarrow j$, 故存在 s, t, 使得 $p_{ij}^{(s)} > 0$, $p_{ji}^{(t)} > 0$. 若 $p_{jj}^{(n)} > 0$, 则

$$p_{ii}^{(n+r+s)} \geq p_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(r)} > 0.$$

这样，$n+r+s$ 能被 d 整除，但 $p_{ii}^{(r+s)} \geq p_{ji}^{(r)} p_{ij}^{(s)} > 0$, 所以 $r+s$ 能被 d 整除。于是 n 能被 d 整除，从而 t 能被 d 整除。

同理，d 能被 t 整除。因此，$d = t$. □

定理 2.20 状态空间 I 可分解为

$$I = T \bigcup C_1 \bigcup C_2 \bigcup \cdots,$$

其中 T 是所有非常返状态组成的集合，每个 C_i 均为常返闭集，其中状态互通且有相同的周期。

§2.3 不变测度和平稳分布

定义 2.5 称随机过程 $\{Y_n,\ n \geq 0\}$ 为平稳过程，若对任意 $m \geq 0$, $k > 0$, 有

$$(Y_0, \ldots, Y_m) \stackrel{d}{=} (Y_k, \ldots, Y_{m+k}).$$

设马氏链 X_n 状态空间为 I, 转移矩阵为 P. 对给定的测度 $\nu = \{\nu_j,\ j \in I\}$, 定义一个新的测度

$$\nu P = \{(\nu P)_j = \sum_{i \in I} \nu_i p_{ij},\ j \in I\}.$$

定义 2.6 称测度 ν 为不变测度，若 $\nu = \nu P$; 若 ν 还是一个概率分布，则称 ν 为一个平稳分布。

设 π 是概率分布。当马氏链 X_n 以 π 为初始分布时，记它的分布为 P_π. 此时，

$$P_\pi(\cdot) = \sum_i P(\cdot | X_0 = i)\pi_i.$$

命题 2.21 设 π 是平稳分布。在概率 P_π 下，马氏链 X_n 是一个平稳过程。

证明 由 $\pi = \pi P$ 可知 $\pi = \pi P^n$. 于是

$$P_\pi(X_n = i_0, \ldots, X_{n+k} = i_k) = \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{k-1} i_k} = P_\pi(X_0 = i_0, \ldots, X_k = i_k).$$

□

下面我们研究不变测度（平稳分布）的存在性和唯一性。首先引入另一个分解公式。令 $h_{ij}^{(1)} = p_{ij}$,

$$h_{ij}^{(n)} = P_i(X_s \neq i,\ 1 \leq s \leq n-1,\ X_n = j),\ 2 \leq n < \infty.$$

当 $i = j$ 时，$f_{ii}^{(n)} = g_{ii}^{(n)}$.

引理 2.22 对任意状态 i, j 及 $n \geq 1$, 有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{ii}^{(k)} h_{ij}^{(n-k)}.$$

证明 当 $i = j$ 时，此即初次进入的分解公式。设 $i \neq j$. 对 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&p_{ij}^{(n)} = P_i(X_n = j) \\
=&P_i(X_s \neq i,\ 1 \leq s \leq n,\ X_n = j) + \sum_{k=1}^{n-1} P_i(X_k = i,\ X_s \neq i,\ k+1 \leq s \leq n-1,\ X_n = j) \\
=&h_{ij}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{ii}^{(k)} h_{ij}^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{ii}^{(k)} h_{ij}^{(n-k)}.
\end{aligned}$$

□

命题 2.23 设 i 常返。对 $j \in I$, 定义

$$\nu_j = E_i[\sum_{n=1}^{\tau_i(1)} 1_{\{X_n = j\}}] = \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j,\ \tau_i(1) \leq n) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{ij}^{(n)}.$$

则 ν 是不变测度。若 i 正常返，即 $m_i = E_i[\tau_i(1)] < \infty$, 则

$$\pi_j = \frac{\nu_j}{m_i} = \frac{E_i[\sum_{1 \leq n \leq \tau_i(1)} 1_{\{X_n = j\}}]}{E_i[\tau_i(1)]}$$

是平稳分布。

证明 显然 $\nu_i = 1$. 于是

$$\sum_j \nu_j p_{jk} = \nu_i p_{ik} + \sum_{j \neq i} \sum_{n=1}^{\infty} h_{ij}^{(n)} p_{jk} = h_{ik}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} h_{ik}^{(n+1)} = \nu_k,$$

即 ν 是不变测度。若 i 正常返，由单调收敛定理，

$$\sum_j \nu_j = \sum_j E_i[\sum_{n=0}^{\tau_i(1)-1} 1_{\{X_n=j\}}] = E_i[\sum_{n=0}^{\tau_i(1)-1}\sum_j 1_{\{X_n=j\}}] = E_i[\tau_i(1)] < \infty.$$

这就证明了 π 是平稳分布。 $\square$

命题 2.24 设 X_n 不可约，常返。则存在不变测度 ν, 满足 $0<\nu_j<\infty$, $j\in I$. 并且，在差一个常数倍意义下，不变测度唯一。进一步的，若马氏链不可约，正常返，则具有唯一的平稳分布 π，且

$$\pi_j = 1/E_j[\tau_j(1)] = 1/m_j.$$

证明 设 ν 如命题 2.23 中构造。对任意 $j\in I$, 由不可约性知存在 m, n 使得 $p_{ji}^{(m)}>0$, $p_{ij}^{(n)}>0$. 于是

$$\nu_i = 1 = \sum_k \nu_k p_{ki}^{(m)} \geq \nu_j p_{ji}^{(m)},$$

故 $\nu_j<\infty$. 又

$$\nu_j = \sum_k \nu_k p_{kj}^{(n)} \geq \nu_i p_{ij}^{(n)} > 0.$$

设 μ 是另一个不变测度，满足 $0<\mu_j<\infty$, $j\in I$, 且 $\mu_i=1$. 下面证明 $\nu=\mu$. 首先验证 $\mu_j\geq\nu_j$.

记 ${}^{(i)}P$ 为将矩阵 P 第 i 列置 0, 其它列不变得到的新矩阵。注意到

$$\mu_j = \delta_{ij} + \sum_k \mu_k {}^{(i)}p_{kj},$$

$$\left(({}^{(i)}P)^n\right)_{kj} = P_k(X_n=j,\ \tau_i(1)>n),\ k\neq j,$$

及

$$\nu_j = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n=j,\ \tau_i(1)>n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(({}^{(i)}P)^n\right)_{ij}.$$

令 $\delta_i=\{\delta_{ij},\ j\in I\}$, 则

$$\mu = \delta_i + \mu^{(i)}P = \delta_i + (\delta_i+\mu^{(i)}P)^{(i)}P = \delta_i + \delta_i{}^{(i)}P + \mu({}^{(i)}P)^2$$
$$= \cdots = \sum_{n=0}^{N}\delta_i({}^{(i)}P)^n + \mu({}^{(i)}P)^{N+1}.$$

令 $N\to\infty$, 有

$$\mu \geq \sum_{n=0}^{\infty}\delta_i({}^{(i)}P)^n,$$

从而

$$\mu_j \geq \sum_{n=0}^{\infty}\left(({}^{(i)}P)^n\right)_{ij} = \nu_j.$$

为证明 $\mu_j=\nu_j$, 令 $\Delta_j=\mu_j-\nu_j$. 注意到 $\Delta=\Delta P$ 及 $\Delta_i=\mu_i-\nu_i=0$. 若有某个 k 使得 $\Delta_k>0$, 从前面的讨论可以知道对任意的 $j\in I$, $\Delta_j>0$, 与 $\Delta_i=0$ 矛盾。故 $\mu=\nu$.

若此马氏链正常返，则具有唯一的平稳分布 π. 注意到 $\pi_i=1/m_i$, 而任意状态 j 都可以作为最初的参考状态 i, 故 $\pi_j=1/m_j$, $j\in I$. □

命题 2.25 设马氏链 X_n 不可约，且存在平稳分布 π. 则此马氏链正常返。

证明 若 X_n 非常返，则对任意 $i,j\in I$, 有 $p_{ij}^{(n)}\to 0$ $(n\to\infty)$. 由控制收敛定理，

$$\pi_j=\sum_i \pi_i p_{ij}^{(n)}\to 0,$$

这与 $\sum_j \pi_j=1$ 矛盾。从而 X_n 不可约，常返。于是存在唯一的不变测度（差常数倍意义下）。这样，存在常数 $c>0$ 使得

$$\nu_j=E_i[\sum_{n=0}^{\tau_i(1)} 1_{\{X_n=j\}}]=c\pi_j.$$

于是

$$\infty>\sum_j \nu_j=E_i[\tau_i(1)].$$

这就证明了此马氏链正常返。 □

§2.4 极限定理

§2.4.1 极限分布

下面我们来研究极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 是否存在，若存在，是否与 i 有关。若状态 j 的周期 $d_j>1$, 则 $p_{jj}^{(dn+k)}=0$, $1\le k<d$, 于是若此极限存在，必为 0. 因此，假设 j 非周期是比较自然的要求。

引理 2.26 设 X_n 不可约，非周期。则对任意的 $i,j\in I$, 存在 $n_0=n_0(i,j)$, 使得当 $n\ge n_0$ 时，就有 $p_{ij}^{(n)}>0$.

证明 证明留作练习。 □

定理 2.27 设 X_n 不可约，非周期，且存在平稳分布 π. 则对任意 $i,j\in I$, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j.$$

证明 设马氏链 Y_n 与 X_n 独立，具有相同的转移矩阵 P, 且以 π 为初始分布。令 $\xi_n=(X_n,Y_n)$, 则 ξ_n 是以 $I\times I$ 为状态空间，以

$$P(\xi_{n+1}=(k,l)|\xi_n=(i,j))=p_{ik}p_{jl}$$

为转移矩阵的马氏链，且

$$P(\xi_n=(k,l)|\xi_0=(i,j))=p_{ik}^{(n)}p_{jl}^{(n)}.$$

由上面的引理，当 n 充分大时，$p_{ik}^{(n)}p_{jl}^{(n)}>0$. 于是，$\xi_n$ 不可约，非周期。

记 $\pi_{(k,l)}=\pi_k\pi_l$, 则

$$\sum_{i,j}\pi_{(i,j)}P(\xi_{n+1}=(k,l)|\xi_n=(i,j))=\pi_k\pi_l=\pi_{(k,l)}.$$

从而 $\{\pi_{(k,l)}\}$ 是 ξ_n 的平稳分布，于是 ξ_n 正常返。

固定 $i_0\in I$. 令

$$\tau=\pi_{(i_0,i_0)}=\inf\{n\geq 0,\ \xi_n=(i_0,i_0)\}.$$

则 $P(\tau<\infty)=1$.

下面假设 X_n 从 i 出发，即 $P(\xi_0=(k,l))=\delta_{ki}\pi_l$. 由推论 2.8,

$$\begin{aligned}
P(X_n=j,\ \tau\leq n)&=\sum_k\sum_{m=0}^n P(\xi_n=(j,k),\ \tau=m)\\
&=\sum_k\sum_{m=0}^n P(\tau=m)P_{(i_0,i_0)}(\xi_{n-m}=(j,k))\\
&=\sum_k\sum_{m=0}^n P(\tau=m)p_{i_0j}^{(n-m)}p_{i_0k}^{(n-m)}=\sum_{m=0}^n P(\tau=m)p_{i_0j}^{(n-m)}.
\end{aligned}$$

类似的，

$$P(Y_n=j,\ \tau\leq n)=\sum_k\sum_{m=0}^n P(\xi_n=(k,j),\ \tau=m)=\sum_{m=0}^n P(\tau=m)p_{i_0j}^{(n-m)}.$$

这样，我们证明了

$$P(X_n=j,\ \tau\leq n)=P(Y_n,\ \tau\leq n).$$

于是，

$$\begin{aligned}
&|p_{ij}^{(n)}-\pi_j|=|P(X_n=j)-P(Y_n=j)|\\
=&|P(X_n=j,\ \tau\leq n)-P(Y_n=j,\ \tau\leq n)+P(X_n=j,\ \tau>n)-P(Y_n=j,\ \tau>n)|\\
=&|E[(1_{\{X_n=j\}}-1_{\{Y_n=j\}})1_{\{\tau>n\}}]|\leq P(\tau>n)\to 0,\ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

□

命题 2.28 假设

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\pi_j,\qquad \sum_j\pi_j=1.$$

则 π 是 X_n 的平稳分布。

证明 由

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

及 Fatou 引理知，

$$\pi_j \geq \sum_k \pi_k p_{kj}, \quad \forall j \in I.$$

上式两边对 j 求和，有

$$1 = \sum_j \pi_j \geq \sum_j \sum_k \pi_k p_{kj} = \sum_k \pi_k \sum_j p_{kj} = 1.$$

于是所有的不等式均取等号。这就证明了 π 是平稳分布。 □

下面命题的证明类似于定理 2.27, 我们略去它的证明。

命题 2.29 设 X_n 不可约，非周期，且零常返或者非常返，则对任意 $i, j \in I$, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

一般的，我们有下面的结论。

定理 2.30 *(i)* 若 j 非常返或者零常返，则对任意 $i \in I$, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

(ii) 若 j 正常返且非周期，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{m_j}.$$

(iii) 若 j 正常返且周期 $d > 1$, 极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在。

证明 (i) (ii) 由下面的引理及

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)},$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{m_j}$$

可得。 □

引理 2.31 若 $a_v \geq 0$, $b_v \geq 0$, 满足

(i) $\sum_{v=0}^{\infty} < \infty$ 或 $\sum_{v=0}^{\infty} a_v = \infty$, 但 a_v 有界；

(ii) $\lim_{v\to\infty} b_v = b < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{v=0}^{n}a_v b_{n-v}}{\sum_{v=0}^{n}a_v}=b.$$

证明 证明留作练习。 □

推论 2.32 若马氏链有一个零常返状态，则必有无穷多个零常返状态。特别的，不可约有限状态马氏链必是正常返的。

证明 设 i 零常返，则 $C=\{j,\ i\to j\}$ 为不可约闭集，其所有状态零常返。若 C 有限，则

$$1=\sum_{j\in C}p_{ij}^{(n)}\to 0,$$

矛盾。故 C 无限。 □

§2.4.2 比率定理

命题 2.33

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N}p_{ij}^{(n)}}{\sum_{i=0}^{N}p_{jj}^{(n)}}=f_{ij}.$$

证明 在 $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}$ 两边对 n 求和，有

$$\sum_{n=1}^{N}p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{N}p_{jj}^{(k)}\sum_{n=k}^{N}f_{ij}^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{N}p_{jj}^{(k)}\sum_{n=1}^{N-k}f_{ij}^{(n)}.$$

在引理 2.31 中令 $a_k=p_{jj}^{(k)}$, $b_k=\sum_{n=1}^{k}f_{ij}^{(n)}$ 即得。 □

推论 2.34 若 i 非常返，则 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=(1-f_{ii})^{-1}$.

定理 2.35 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}<\infty$ 当且仅当 $g_{ij}=0$. 相应的，$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}=\infty$ 当且仅当 $g_{ij}>0$.

证明 若 $g_{ij}>0$, 则由 $g_{ij}=f_{ij}g_{jj}$ 知 $g_{jj}>0$. 于是 j 常返，$f_{ij}\geq g_{ij}>0$. 根据上面定理知结论成立。

若 $g_{ij}=0$, 由 $g_{ij}=f_{ij}g_{jj}=0$ 知 $f_{ij}=0$ 或 $g_{jj}=0$. 如果 $g_{jj}=0$, 则 j 非常返，$\sum_{n=0}^{\infty}p_{jj}<\infty$. 应用上面定理即得。 □

推论 2.36 在常返类中 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}$ 发散，在非常返类中 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}$ 收敛。

记 $h_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}h_{ij}^{(n)}$.

引理 2.37 *若 $j \to i$, 则 $h_{ij} < \infty$.*

证明 当 $i = j$ 时，$h_{ii} = f_{ii} \le 1$. 设 $i \ne j$. 由 $j \to i$, 存在 $m \ge 1$, 使 $f_{ji}^{(m)} > 0$. 于是，

$$h_{ij}^{(n)} f_{ji}^{(m)} \le P_i(X_v \ne i,\ 1 \le v < n+m,\ X_{n+m} = i) = f_{ii}^{(n+m)}.$$

因此，

$$h_{ij} f_{ji}^{(m)} \le \sum_{n=1}^{\infty} h_{ij}^{(n)} f_{ji}^{(m)} \le \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n+m)} \le 1,$$

故

$$h_{ij} \le \frac{1}{f_{ji}^{(m)}} < \infty.$$

□

定理 2.38 *若状态 i 与 j 互通，则*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{N} p_{jj}^{(n)}} = \frac{f_{ij}}{h_{ij}}.$$

且此极限值非零且有限。

证明 由 $i \to j$, 故 $f_{ij} > 0$, $0 < h_{ij} < \infty$. 从而 f_{ij}/h_{ij} 非零且有限。类似于命题 2.33 的证明，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)}}{\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}} = h_{ij}.$$

□

推论 2.39 *设 i, j, k 同属于一个常返类，则*

$$h_{ij} h_{jk} = h_{ik}.$$

§2.5 一些例子

例 2.1 (简单随机游动) 设 X_n 是独立同分布随机变量序列，且

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad P(X_n = 1) = p,\ P(X_n = -1) = q,\ p + q = 1.$$

当 $p = 0$ 或 $q = 0$ 时，显然有 S_n 所有状态非常返。下面设 $0 < p < 1$. 由强大数定律，

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = E[X_1]) = 1.$$

若 $p > q$, 则 $E[X_1] = p - q > 0$. 这样，

$$P(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1.$$

从而 S_n 以概率 1 到达 0 有限次，即 0 常返。此时所有状态互通，均为非常返。若 $p<q$, 类似可得。当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时，

$$p_{00}^{(2n+1)}=0,\quad p_{00}^{(2n)}=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由 Stirling 公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+1/2},\quad n\to\infty$$

可得，

$$\binom{2n}{n}\sim(\pi n)^{-1/2}4^n,\quad n\to\infty.$$

这样，

$$p_{00}^{(2n)}\sim(\pi n)^{-1/2},$$

从而 $\sum_{k=1}^{\infty}p_{00}^{(k)}=\infty$, 0 常返。

令 $\nu_j=1$. 显然 ν 是 S_n 的不变测度。又 $\sum_j\nu_j=\infty$, 故 S_n 不是正常返的。令 $\mu_j=(p/q)^j$, 容易验证 μ 也是此链的不变测度，并且它不是 ν 的常数倍。从而 S_n 的不变测度不具有唯一性。

例 2.2 (简单分枝过程) 设 $Z_{n,j}$, $n\ge1$, $j\ge1$ 是独立同分布非负整数值随机变量序列，具有共同的分布 $\{p_k\}$. 定义分枝过程

$$Z_0=1,\ Z_1=Z_{1,1},\ Z_2=Z_{2,1}+\cdots Z_{2,Z_1},\ \ldots,\ Z_n=Z_{n,1}+\cdots+Z_{n,Z_{n-1}}.$$

我们假设 $p_1\ne1$. 显然状态 0 是吸收的，故常返。若 $p_0=0$, 则 $Z_{n,j}\ge1$, 从而 Z_n 是单增的。这样，对 $k\ge1$,

$$f_{kk}=P(Z_{n+1}=k|Z_n=k)=P(Z_{n+1,j}=1,\ j=1,\ldots,k)=p_1^k<1,$$

即 k 非常返。若 $p_0=1$, 则 $f_{kk}=0$, 故非常返。若 $0<p_0<1$, 则

$$P(Z_{n+1}=0|Z_n=k)=P(Z_{n+1,j}=0,\ 1\le j\le k)=p_0^k>0,$$

即 $k\to0$. 但 0 吸收，故 k 非常返。

对任意 N, 由 $1,\ldots,N$ 非常返，Z_n 以概率 1 到达这 N 个状态有限次。故当 n 充分大时 $Z_n=0$ 或 $Z_n>N$. 这样，

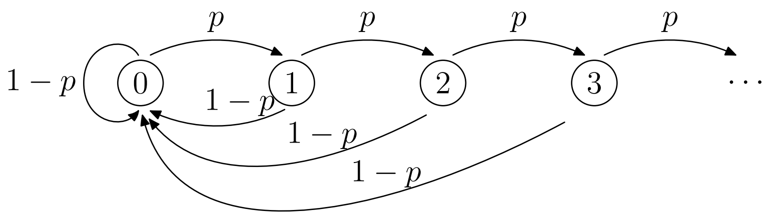
$$P(\lim_{n\to\infty}Z_n=0\text{ 或 }\infty)=1.$$

练习 求 $P(\lim_{n\to\infty}Z_n=0)$.

例 2.3 设马氏链状态空间为 $I=\{0,\ 1,\ldots\}$, 转移矩阵为

$$p_{00}=1-p,\ p_{i,i+1}=p,\ p_{i0}=1-p,\ i\in I,$$

其中 $0<p<1$. 转移概率如图：



对任意两状态 $i,\ j \in E$, 不妨设 $i < j$. 则 $p_{ij}^{(j-i)} \geq p^{j-i} > 0$, $p_{ji}^{(i+1)} \geq (1-p)p^i > 0$, 故 i 与 j 互通。从而此马氏链不可分，状态空间仅有一个闭子集 E. 由 $p_{00} = 1-p > 0$, 0 非周期。又 $f_{00}^{(n)} = (1-p)p^{n-1}$, $n \geq 1$, 故

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)p^{n-1} = 1,$$

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)np^{n-1} = \frac{1}{1-p} < \infty.$$

故 0 为正常返状态。从而 E 中所有状态都遍历。设 $\{\pi_j\}$ 为此马氏链唯一的平稳分布。则 $\pi_0 = 1/\mu_0 = 1-p$. 又对任意的 $j \geq 1$,

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij} = p\pi_{j-1},$$

从而 $\pi_j = p^j \pi_0 = (1-p)p^j$.

例 2.4 设坛子里装有 $2N$ 个球，它们是红色或白色的，每次随机从坛子里拿出一个球，把它改变颜色后放回去。设 X_n 为第 n 次后坛中的红球数，则 X_n 状态空间 $I = \{1,\ 2, \ldots, 2N\}$, 转移概率为

$$p_{ii} = 0,\ p_{i,i+1} = \frac{2N-i}{2N},\ p_{i,i-1} = \frac{i}{2N},\ i = 0, \ldots, 2N.$$

显然 X_n 不可约且正常返。下面我们求它的平稳分布。令

$$\begin{gathered}\pi_0 = \frac{\pi_1}{2N}, \\ \pi_k = \pi_{k-1}\frac{2N-k+1}{2N} + \pi_{k+1}\frac{k+1}{2N},\ 1 \leq k \leq 2N-1, \\ \pi_{2N} = \frac{\pi_{2N-1}}{2N}.\end{gathered}$$

解得

$$\pi_k = \binom{2N}{k}\pi_0.$$

由 $\sum_k \pi_k = 1$ 可知 $\pi_0 = 1/(2^{2N})$. 于是此链的平稳分布为

$$\pi_k = \binom{2N}{k}2^{-2N}, \quad k = 0, \ldots, 2N.$$

例 2.5 (生灭链) 设马氏链 X_n 状态空间 $I=\{0,\ 1,\ldots\}$, 转移概率为

$$p_{ii}=r_i,\quad p_{i,i+1}=b_i,\quad p_{i,i-1}=a_i,$$

其中 $a_0=0$, $a_i+b_i+r_i=1$. 我们假设 $X_0=1$, $a_i>0$ $(i\geq 1)$, $b_i>0$ $(i\geq 0)$. 此时 X_n 不可约。

(i) X_n 常返当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_k}{b_1b_2\cdots b_k}=\infty.$$

记

$$\tau_i=\inf\{n,\ X_n=i\}.$$

对固定的状态 k, 记

$$u(i)=P_i(\tau_0<\tau_k),\quad 0<i<k,$$

则

$$u(i)=b_iu(i+1)+a_iu(i-1)+r_iu(i),\quad 0<i<k.$$

应用 $r_i=1-a_i-b_i$,

$$u(i+1)-u(i)=\frac{a_i}{b_i}[u(i)-u(i-1)]=\cdots=\frac{a_1\cdots a_i}{b_1\cdots b_i}[u(1)-u(0)].$$

令 $\beta_0=1$, $\beta_i=\frac{a_1\cdots a_i}{b_1\cdots b_i}$, $u(0)=1$, 则

$$u(i)-u(i+1)=\beta_i(1-u(1)),\quad 0\leq i<k.$$

于是

$$1=(1-u(1))\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i,$$

$$u(i)=\sum_{j=i}^{k-1}[u(j)-u(j+1)]=\sum_{j=i}^{k-1}\beta_i\Big/\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j.$$

由 $\{\tau_0<\tau_k\}\uparrow\{\tau_0<\infty\}$, 当 $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k<\infty$ 时,

$$P_1(\tau_0<\infty)=\lim_{k\to\infty}P_1(\tau_0<\tau_k)=\lim_{k\to\infty}\left[1-\left(\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j\right)^{-1}\right]=1.$$

又 $P_1(\tau_0<\infty)=f_{10}$, 故

$$f_{00}=p_{00}+p_{01}f_{10}=r_0+b_0=1.$$

从而 0 常返。

反过来，若 0 常返，由 $f_{10}=1$ 知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k=\infty.$$

(ii) 令

$$\gamma_0=0,\ \gamma_k=\frac{b_0b_1\cdots b_{k-1}}{a_1a_2\cdots a_k},\ k\geq 1.$$

则 X_n 正常返当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k<\infty$.

由 X_n 不可约，故正常返等价于平稳分布存在。设

$$\pi_0=\pi_0r_0+\pi_1a_1,$$
$$\pi_k=\pi_{k-1}b_{k-1}+\pi_kr_k+\pi_{k+1}a_{k+1},\ k\geq 1.$$

因 $a_k+r_k+b_k=1$, 故

$$a_1\pi_1-b_0\pi_0=0,$$
$$a_{k+1}\pi_{k+1}-b_k\pi_k=a_k\pi_k-b_{k-1}\pi_{k-1},\ k\geq 1.$$

于是

$$\pi_k=\frac{b_{k-1}\pi_{k-1}}{a_k}=\cdots=\frac{b_0\cdots b_{k-1}}{a_1\cdots a_k}\pi_0=\gamma_k\pi_0.$$

这样，

$$\sum_k\pi_k=\pi_0\sum_k\gamma_k.$$

这就证明了 π_k 是平稳分布当且仅当 $\sum_k\gamma_k<\infty$.

例 2.6 设马氏链 X_n 状态空间 $I=\{0,\ 1,\ldots\}$, 转移概率为

$$p_{00}=q_0,\ p_{i,i+1}=p_i,\ p_{i,i-1}=q_i,$$

其中 $0<p_i<1$, $p_i+q_i=1$. 显然 X_n 不可约，故只需研究 0 是否常返。

容易看出

$$f_{00}^{(n)}=P_0(X_1=1,\ X_2=2,\ldots,X_{n-1}=n-1,\ X_n=0)=p_0p_1\cdots p_{n-2}q_{n-1}.$$

记

$$u_n=\prod_{i=0}^{n}p_i,\quad n\geq 0,$$

则

$$f_{00}^{(n)}=u_{n-2}-u_{n-1},\quad n\geq 2.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{N+1}=q_0+u_0-u_N=1-u_N.$$

这样，0 常返当且仅当 $u_N\to 0\ (N\to\infty)$. 应用下面的引理，这也等价于 $\sum_i(1-p_i)=\infty$.

引理 2.40 设 $0 < p_i < 1$, 则 $u_N = \prod_{i=0}^N p_i \to 0$ 当且仅当 $\sum_i q_i = \sum_i (1-p_i) = \infty$; $\prod_{i=0}^\infty p_i > 0$ 当且仅当 $\sum_i q_i = \sum_i (1-p_i) < \infty$..

证明 注意到 $\prod_i p_i > 0$ 当且仅当 $\sum_i -\log(1-q_i) < \infty$, 当且仅当 $\sum_i q_i < \infty$. □

设 μ 是 X_n 的不变测度，则

$$\mu_0 = \sum_{k=0}^\infty \mu_k q_k, \quad \mu_i = \mu_{i-1} p_{i-1},\ i \geq 1.$$

于是

$$\mu_i = \mu_0 \sum_{j=0}^{i-1} p_j.$$

不失一般性，设 $\mu_0 = 1$, 则

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{k=0}^\infty \mu_k q_k = q_0 + \sum_{k=1}^\infty \prod_{j=0}^{k-1} p_j q_k = q_0 + \sum_{k=1}^\infty (\prod_{j=0}^{k-1} p_j - \prod_{j=0}^{k} p_j) \\ = q_0 + \lim_{N\to\infty} (p_0 + \prod_{j=0}^N p_j) = 1 + \lim_{N\to\infty} \prod_{j=0}^N p_j. \end{aligned}$$

若 X_n 非常返，即 $\prod_{j=0}^\infty p_j > 0$, 与上式矛盾。这说明此时 X_n 不存在不变测度。

若 X_n 常返，容易验证

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_i = \prod_{j=0}^{i-1} p_j,\ i \geq 1,$$

是 X_n 的不变测度。

第三章　连续时间马氏链

§3.1　定义

§3.1.1　马氏性与等价条件

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 考虑其上的随机过程 $\{X_t,\ t \in [0,\ \infty)\}$, 其状态空间 I 离散。本章我们总假定时间参数 t 取值于 $[0, \infty)$.

定义 3.1 *称 X_t 为连续参数马氏链，若对任意的 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $i_1,\ i_2, \ldots i_n \in I$, 只要$P(X_{t_1} = i_1,\ X_{t_2} = i_2, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) > 0$, 就有*

$$P(X_{t_n} = i_n | X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) = P(X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}). \tag{3.1}$$

令 $\mathcal{F}^t = \sigma\{X_s,\ s \geq t\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s,\ s \leq t\}$.

定理 3.1 *马氏性 (3.1) 成立的等价条件为;*

(i) *(3.1)成立。*

(ii) *对任意的 $A \in \mathcal{F}^t$, $B \in \mathcal{F}_t$, 只要 $P(B,\ X_t = i) > 0$, 就有*

$$P(A|B,\ X_t = i) = P(A|X_t = i).$$

(iii) *对任意的 $A \in \mathcal{F}^t$, $B \in \mathcal{F}_t$, 只要 $P(X_t = i) > 0$, 就有*

$$P(AB|X_t = i) = P(A|X_t = i)P(B|X_t = i).$$

(iv) *对 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 有*

$$P(X_{t_n} = i|X_{t_1},\ X_{t_2}, \ldots, X_{t_{n-1}}) = P(X_{t_n} = i|X_{t_{n-1}}).$$

(v) *对任意的 $\xi \in \mathcal{F}^t$, 设 $E|\xi| < \infty$, 则有*

$$E[\xi|\mathcal{F}_t] = E[\xi|X_t].$$

证明 (1) (ii) 与 (iii) 的等价性由下式

$$\begin{aligned} P(AB|X_t = i) &= \frac{P(B, X_t = i)}{P(X_t = i)} \frac{P(A, B, X_t = i)}{P(B, X_t = i)} \\ &= P(A|B,\ X_t = i)P(B|X_t = i) \end{aligned}$$

即得。

(2) 下面证明 (i) 和 (iv) 的等价性。先证明 (iv)⇒(i). 由条件期望的定义，容易知道

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1},\ldots,X_{t_{n-1}})\\
=&\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})1_{\{X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\}}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

事实上，记

$$Y=\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})1_{\{X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\}},$$

则对任意的 $i_1,\ldots,i_{n-1}$, 令 $A=\{X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_{n-1}=i_{n-1}}\}$, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_A P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1},\ldots,X_{t_{n-1}})dP=\int_A 1_{\{X_{t_n}=i_n\}}dP\\
=&P(X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_n}=i_n)=\int_A P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})dP=\int_A Y dP.
\end{aligned}
$$

进一步的，上式对任意的 $A\in\sigma(X_{t_1},\ldots,X_{t_{n-1}})$ 成立，即 $P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1}\ldots,X_{t_{n-1}})=Y$.

这样，若 (i) 成立，则

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1},\ldots,X_{t_{n-1}})\\
=&\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})1_{\{X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\}}\\
=&\sum_{i_{n-1}} P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1})1_{\{X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\}}=P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}).
\end{aligned}
$$

反过来，若 (iv) 成立，则由

$$\int_A P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1}\ldots,X_{t_{n-1}})dP=\int_A P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}})dP$$

即得 (i).

(3) 接下来证 (iv)⇒(v). 先证对任意的 $u\geq t$, $B\subset I$, 有

$$P(X_u\in B|\mathcal{F}_t)=P(X_u\in B|X_t),$$

即对任意的 $A\in\mathcal{F}_t$,

$$P(X_u\in B,\ A)=\int_A P(X_u=i|X_t)dP.$$

由 (iv), 上式对任意的 $A=\{X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_n}=i_n\}$, $t_1<\cdots<t_n\leq t$ 成立，由 λ-π 方法易知对任意 $A\in\mathcal{F}_t$ 也成立。

进一步的，应用归纳法可以证明对任意的 $t \le u_1 < u_2 < \cdots < u_m$ 及 $B_1, \ldots, B_m \subset I$, 有

$$P(X_{u_1} \in B_1, \ldots, X_{u_m} \in B_m | \mathcal{F}_t) = P(X_{u_1} \in B_1, \ldots, X_{u_m} \in B_m | X_t).$$

最后应用 $\mathcal{L}$-系方法可以证明 (v).

(4) (v)⇒(ii). 设 $A \in \mathcal{F}^t$, $B \in \mathcal{F}_t$. 由 (v), $P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|X_t)$. 因此

$$\begin{aligned} P(A,\ B,\ X_t = i) &= \int_{B \bigcap \{X_t = i\}} P(A|\mathcal{F}_t) dP \\ &= \int_{B \bigcap \{X_t = i\}} P(A|X_t) dP = P(A|X_t = i) P(B, X_t = i). \end{aligned}$$

(5) (ii)⇒(i) 显然。证毕。 □

§3.1.2 转移概率

若 $P(X_s = i) > 0$, 记 $p_{ij}(s, s+t) = P(X_{s+t} = j | X_s = i)$. 若 $p_{ij}(s, s+t)$ 只依赖于 t, 则称相应的马氏链为齐次马氏链。此时，记 $p_{ij}(t) = p_{ij}(s, s+t)$. 本章我们只考虑奇次马氏链。记 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 为马氏链的转移矩阵。

命题 3.2 转移函数满足

- $0 \le p_{ij}(t) \le 1$;
- $\sum_j p_{ij}(t) = 1$;
- $p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t)$;
- $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

定理 3.3 设 $(P(t))$ 满足上述命题中的四个条件，$q_i \ge 0$, $\sum_i q_i = 1$. 则存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 及其上的齐次马氏链 X_t 满足

$$P(X_0 = i) = q_i,\ P(X_{s+t} = j | X_s = i) = p_{ij}(t).$$

证明 构造相容的分布函数族

$$F_{t_1, t_2, \cdots, t_n}(i_1, i_2, \cdots, i_n) = \sum_i q_i p_{i i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

不妨设$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. 当 $m < n$ 时，

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_m}(i_1, i_2, \ldots, i_m) = \sum_{i_{m+1}, \ldots, i_n} F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(i_1, i_2, \ldots, i_n),$$

所以存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 以及 $X_t(\omega)$, 满足

$$P(X_{t_1}=i_1,\dots,X_{t_n}=i_n)=F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(i_1,i_2,\dots,i_n).$$

此时 $P(X_0=i)=\sum_i q_i p_{ii_1}(0)=q_{i_1}$, 且

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_n}=i_n|X_{t_1}=i_1,\dots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})\\
=&\frac{\sum_i q_i p_{ii_1}(t_1)\cdots p_{i_{n-2}i_{n-1}}(t_{n-1}-t_{n-2})p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})}{\sum_i q_i p_{ii_1}(t_1)\cdots p_{i_{n-2}i_{n-1}}(t_{n-1}-t_{n-2})}\\
=&p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})=\frac{\sum_i q_i p_{ii_{n-1}}(t_{n-1})p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})}{\sum_i q_i p_{ii_{n-1}}(t_{n-1})}=P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

定理 3.4 设 X_t 是齐次马氏链，转移概率为 $P(t)$, 则

$$P(X_{t_1}=i_1,\dots,X_{t_n}=i_n)=\sum_i q_i p_{ii_1}(t_1)p_{i_1i_2}(t_2-t_1)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1}).$$

§3.2 标准转移矩阵的分析性质

定义 3.2 若 $\lim_{t\to 0+}p_{ij}(t)=\delta_{ij}$, 则称 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 为标准转移矩阵。这等价于 $\lim_{t\to 0+}p_{ii}(t)=1$.

定理 3.5 设 $(p_{ij}(t))$ 标准。则

(i) 对任意的 $i\in I$ 和 $t\geq 0$, $p_{ii}(t)>0$.

(ii) 对任意的 $i,\ j\in I$ 和 $t>0$, 若 $|h|<t$, 则

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leq 1-p_{ii}(|h|). \tag{3.3}$$

这样，$p_{ij}(t)$ 在 $t\geq 0$ 上一致连续且对一切 j 也一致成立。

(iii) 对任意的 $i,\ j\in I$, 或者对一切 $t>0$, $p_{ij}(t)=0$; 或者对一切 $t>0$, $p_{ij}(t)>0$.

证明 (i) 由 $(p_{ij}(t))$ 标准，对任意的 $i\in I$ 和 $t>0$, 有正整数 n 使得 $p_{ii}(t/n)>0$. 这样，由 C–K 方程，$p_{ii}(t)\geq(p_{ii}(t/n))^n>0$.

(ii) 对任意的 $h>0$, 由

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)=&\sum_k p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)\\
=&\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)(1-p_{ii}(h)).
\end{aligned}$$

这样，

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\le &\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)\le\sum_{k\neq i}p_{ik}(h)\\
=&1-p_{ii}(h),
\end{aligned}
$$

$$p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\ge -p_{ij}(t)(1-p_{ii}(h))\ge -(1-p_{ii}(h)),$$

从而

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\le 1-p_{ii}(h).$$

类似的，当 $h<0$ 且 $|h|<t$ 时，有

$$|p_{ij}(t)-p_{ij}(t+h)|\le 1-p_{ij}(|h|).$$

上面两式右方与 j 和 t 无关，因此 $p_{ij}(t)$ 一致连续且关于 j 一致。

(iii) 证明略。 □

定理 3.6 设 $(p_{ij}(t))$ 标准，则

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=q_i$$

存在，但可能等于 $+\infty$.

证明 令 $f(t)=-\log p_{ii}(t)$, 则 $f(t)$ 非负有限。由 $p_{ii}(s+t)\ge p_{ii}(s)p_{ii}(t)$ 知

$$f(s+t)\le f(s)+f(t).$$

于是对 $t>0$, $h>0$, 取 n 使得 $t=nh+\varepsilon$, $0\le\varepsilon<h$, 则有

$$\frac{f(t)}{t}\le\frac{nf(h)}{t}+\frac{f(\epsilon)}{t}=\frac{nh}{t}\frac{f(h)}{h}+\frac{f(\epsilon)}{t}.$$

当 $h\to 0$ 时，$\frac{nh}{t}\to 1$, $f(\epsilon)=-\log p_{ii}(\epsilon)\to 0$, 于是

$$\frac{f(t)}{t}\le\liminf_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h}.$$

这样，

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h}\le\sup_t\frac{f(t)}{t}\le\liminf_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h}.$$

从而极限

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h}=q_i$$

存在，其中 $q_i=\sup_{t>0}\frac{f(t)}{t}$. 因此，当 $h\to 0+$ 时，

$$\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=\frac{1-e^{-f(t)}}{t}=(1+o(1))\frac{f(t)}{t}\to q_i.$$

□

定理 3.7 设 $(p_{ij}(t))$ 标准，则对 $i \neq j$,

$$\lim_{t\to 0+} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij}$$

存在且有限。

证明 取 $0 < \epsilon < 1/3$, 由标准性知存在 $\delta > 0$ 使当 $t \leq \delta$ 时，$p_{ii}(t) > 1-\epsilon$, $p_{jj}(t) > 1-\epsilon$.

先证明对任意的 t, $h > 0$, 只要 $h \leq t \leq \delta$, 就有

$$p_{ij}(h) \leq \frac{p_{ij}(t)}{n} \cdot \frac{1}{1-3\varepsilon}, \tag{3.4}$$

其中 $n = \left[\frac{t}{h}\right]$. 为此，记

$$\begin{aligned} {}_jp_{ik}(h) &= p_{ik}(h), \\ {}_jp_{ik}((l+1)h) &= \sum_{r\neq j} {}_jp_{ir}(lh)p_{rk}(h). \end{aligned}$$

即 ${}_jp_{ik}(mh)$ 表示在时刻 mh 处在状态 k, 但在时刻 $h, 2h, \ldots, (m-1)h$ 不处于 j 的概率。这样，

$$p_{ik}(mh) = \sum_{l=1}^{m-1} {}_jp_{ij}(lh)p_{jk}((m-l)h) + {}_jp_{ik}(mh). \tag{3.5}$$

对 $\delta \geq t \geq h$, $n = \left[\frac{t}{h}\right]$, 有

$$\begin{aligned} &\varepsilon > 1 - p_{ii}(t) = \sum_{k\neq i} p_{ik}(t) \geq p_{ij}(t) \\ &\geq \sum_{m=1}^{n} {}_jp_{ij}(mh)p_{jj}(t-mh) \geq (1-\varepsilon)\sum_{m=1}^{n} {}_jp_{ij}(mh). \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{m=1}^{n} {}_jp_{ij}(mh) \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{3.6}$$

其次，由

$$p_{ii}(mh) = {}_jp_{ii}(mh) + \sum_{l=1}^{m-1} {}_jp_{ij}(lh)p_{ji}((m-1)h)$$

及 (3.6), 得

$${}_jp_{ii}(mh) \geq p_{ii}(mh) - \sum_{l=1}^{m-1} {}_jp_{ij}(lh) \geq 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{3.7}$$

从而由 (3.6), (3.7),

$$p_{ij}(t) \geq \sum_{m=1}^{n} {}_jp_{ij}((m-1)h)p_{ij}(h)p_{jj}(t-mh)$$

$$\geq n(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})p_{ij}(h)(1-\varepsilon)\geq n(1-3\varepsilon)p_{ij}(h).$$

这就证明了 (3.4).

这样,

$$\frac{p_{ij}(h)}{h}\leq\frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{p_{ij}(t)}{nh}.$$

当 $h\to 0+$ 时，$nh\to t$, 而 $p_{ij}(t)$ 关于 t 连续，故

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(h)}{h}\leq\frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{p_{ij}(t)}{t}.$$

令 $t\to 0+$, 有

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(h)}{h}\leq\frac{1}{1-3\varepsilon}\liminf_{t\to 0+}\frac{p_{ij}(t)}{t}.$$

由 ε 的任意性可知极限

$$q_{ij}=\lim_{t\to 0+}\frac{p_{ij}(t)}{t}$$

存在且有限。 □

推论 3.8 设 $(p_{ij}(t))$ 标准，则

$$\sum_{j\neq i}q_{ij}\leq q_i.$$

证明 因

$$\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t}=\frac{1-p_{ii}(t)}{t},$$

令 $t\to 0+$, 由 Fatou 引理,

$$q_i=\liminf_{t\to 0+}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t}\geq\sum_{j\neq i}q_{ij}.$$

□

§3.3 Q 矩阵及其概率意义

在概率论中我们经常需要研究下面这种类型的集合

$$B=\{\omega,\ \bigcap_{t\in\Lambda}(X_t(\omega)\in\Gamma)\}.$$

当 Λ 不可数时，通常 B 是不可测的。这就需要我们引入可分性的概念。

定义 3.3 称取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的函数 $y(t)$, $t\in T$ 关于 T 的可数稠密子集 S 可分，若对任意 $t\in T$, 有 S 中子列 $\{r_n\}$, 使得 $r_n\to t$ 且 $y(r_n)\to y(t)$. 称 S 为此函数的可分集。

定义 3.4 称随机过程 $\{X_t\}_{t\in T}$ 可分，若存在零概率集 N 和 T 的可数稠密子集 S, 使对一切 $\omega\notin N$, 样本函数 $X_t(\omega)$ 关于 S 可分。称 S 为可分集，N 为例外集。

定义 3.5 称 $\{X_t(\omega)\}_{t\in T}$ 是完全可分的，若它关于 T 的任一可数稠密子集可分。

定理 3.9 任意随机过程必存在可分修正。

定理 3.10 若可分过程 $\{X_t\}$ 随机连续，即 $\lim_{t\to t_0} X_t \overset{P}{=} X_{t_0}$, 则此过程是完全可分的。

证明 首先，对任意的 $\{t_i\}\subset T$, $t_i\to t_0$, 有 $X_{t_i}\xrightarrow{P} X_{t_0}$. 所以存在子列 t_i' 使得 $X_{t_i'}\xrightarrow{a.s.} X_{t_0}$.

由可分性，存在 T 的可数稠集 S 及零概率集 N, 使得当 $\omega\notin N$ 时，对任意的 $t\in T$, 有 $s_n\in S$, $s_n\to t$, 且 $X_{s_n}(\omega)\to X_t(\omega)$.

设 R 是 T 的任意可数稠集。此时存在一个零概率集 N_1 使得，当 $\omega\notin N_1$ 时，对任意的 $s\in S$, 存在 $r_n\in R$, $r_n\to s$ 且 $X_{r_n}(\omega)\to X_s(\omega)$. 这样，当 $\omega\notin N\bigcup N_1$ 时，对上面的 s_n, 有 r_{mn}, 使得当 $m\to\infty$ 时，$r_{mn}\to s_n$, 且 $X_{r_{mn}}(\omega)\to X_{s_n}(\omega)$. 容易看出，存在 $\{r_{mn}\}$ 的子列 r_n', 满足 $r_n'\to t$, 且 $X_{r_n'}(\omega)\to X_t(\omega)$. 这就证明了 X_t 关于 R 可分。 □

引理 3.11 设 $(p_{ij}(t))$ 标准的，则 X_t 随机连续。

证明 当 $h<0$ 时，

$$P(X_{t+h}=X_t)=\sum_j P(X_t=j|X_{t+h}=j)P(X_{t+h}=j)=\sum_j P(X_{t+h}=j)p_{jj}(-h).$$

由 Fatou 引理，

$$\liminf_{h\to 0-} P(X_{t+h}=X_t)\geq\sum_j P(X_t=j)=1.$$

故

$$\lim_{h\to 0-} P(X_{t+h}=X_t)=1.$$

而当 $h>0$ 时，类似的，应用控制收敛定理可得

$$\lim_{h\to 0+} P(X_{t+h}=X_t)=1.$$

这样，

$$\lim_{h\to 0} P(X_{t+h}\neq X_t)=0.$$

从而对任意的 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{h\to 0} P(|X_{t+h}-X_t|>\varepsilon)\leq\lim_{h\to 0} P(X_{t+h}\neq X_t)=0.$$

□

定理 3.12 对任意的 $i \in I$, 有

$$P^i(X_s = i,\ 0 \le s \le t) = e^{-q_i t}.$$

证明 取可分集

$$\left\{\frac{kt}{2^n},\ k = 0, 1, \ldots, 2^n;\ n = 0, 1, \ldots\right\},$$

由完全可分性，

$$P^i(X_u = i,\ 0 \le u \le t) = P^i(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X_{\frac{kt}{2^n}} = i,\ 0 \le k \le 2^n\})$$
$$= \lim_{n\to\infty} P^i(X_{tk/2^n} = i,\ 0 \le k \le 2^n) = \lim_{n\to\infty}\left[p_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right]^{2^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{\ln p_{ii}(\frac{t}{2^n})}{\frac{t}{2^n}}\frac{t}{2^n}2^n\right\} = e^{-q_i t}.$$

□

由上面定理，若 $q_i = 0$, 则从状态 i 出发，以概率 1 停留在 i; 若 $q_i = \infty$, 则从 i 出发立刻离开 i; 若 $0 < q_i < \infty$, 则从 i 出发，在 i 停留一段时间之后离开 i.

令

$$\tau = \inf\{t:\ X_t \ne X_0\}.$$

则 τ 表示马氏链停留在初始状态的时间。由马氏链可分，故 τ 是 $\mathcal{F}_\infty$ 可测的，这里 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_s,\ s \ge 0)$.

对任意的 $t \ge 0$, 有

$$\{X_u = i,\ 0 \le u \le t\} \supset \{\tau > t\} \supset \{X_u = i,\ 0 \le u \le t + \frac{1}{n}\}.$$

所以

$$e^{-q_i t} \ge P^i(\tau > t) \ge e^{-q_i(t+1/n)}.$$

令$n \to \infty$, 在 τ 的分布函数的连续点上有

$$P^i(\tau > t) = e^{-q_i t}.$$

因 $e^{-q_i t}$ 连续，故上式对一切 $t \ge 0$ 成立。特别的，

$$E^i[\tau] = q_i^{-1}.$$

因此，q_i^{-1} 是在状态 i 的期望停留时间。

我们不加证明的给出下面定理。

定理 3.13 若马氏链 X_t 的一切 $q_i < \infty$, 则它必存在一个修正，该修正的全部样本函数在 $I\bigcup\{\infty\}$ 中右连续。

下面我们总假定 X_t 的样本函数是右连续的。这样，对任意 $j \in I$,

$$\{X_\tau = j\} \bigcap \{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\infty.$$

定理 3.14 设 $q_i < \infty$, $j \neq i$. 则对任意 $t \geq 0$, 有

$$P^i(\tau \leq t,\ X_\tau = j) = (1 - e^{-q_i t})\frac{q_{ij}}{q_i}. \tag{3.8}$$

证明 对 $n \geq 1$, 令

$$\tau = \begin{cases} \frac{kt}{2^n}, & 若 \frac{(k-1)t}{2^n} < \tau \leq \frac{kt}{2^n},\ k = 0, 1, \ldots, \\ \infty, & 若 \tau = \infty. \end{cases}$$

易见 $\tau_n \in \mathcal{F}_\infty$, 且当 $n \to \infty$ 时，$\tau_n \downarrow \tau$. 由 $P^i(\tau < \infty) = 1$ 及 X_t 右连续，故 $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = X_\tau$, P^j-a.s.. 因此，

$$\{\tau < t,\ X_\tau = j\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{\tau_n \leq t,\ X_{\tau_n} = j\}$$
$$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\tau_n \leq t,\ X_{\tau_n} = j\} \subset \{\tau \leq t,\ X_\tau = j\}.$$

注意到 $P^i(\tau = t) = 0$, 故

$$\lim_{n\to\infty} P^i(\tau_n \leq t,\ X_{\tau_n} = j) = P^i(\tau \leq t,\ X_\tau = j).$$

这样，

$$P^i(\tau_n \leq t,\ X_{\tau_n} = j) = \sum_{l=1}^{2^n} P^i(\frac{(l-1)t}{2^n} < \tau \leq \frac{lt}{2^n},\ X_{\frac{lt}{2^n}} = j)$$
$$= \sum_{l=1}^{2^n} P^i(\tau > \frac{(l-1)t}{2^n},\ X_{\frac{lt}{2^n}} = j) = \sum_{l=1}^{2^n} P^i(X_s = i,\ 0 \leq s \leq \frac{(l-1)t}{2^n},\ X_{\frac{lt}{2^n}} = j)$$
$$= \sum_{l=1}^{2^n} e^{-q_i\frac{(l-1)t}{2^n}} p_{ij}(\frac{t}{2^n}) = \frac{1 - e^{-q_i t}}{1 - e^{-q_i\frac{t}{2^n}}} p_{ij}(\frac{t}{2^n})$$
$$\to (1 - e^{-q_i t})\frac{q_{ij}}{q_i}\ (n \to \infty).$$

□

这样，令 $t \to \infty$, 可以得到

$$P^i(X_\tau = j) = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

上式的直观意思是说，马氏链 X_t 在首次离开初始状态 i 之后，以概率 $\frac{q_{ij}}{q_i}$ 跳到状态 j. 若

$$q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty,$$

则

$$P^i(X_\tau \in (I - \{i\})) = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} = 1,$$

即以 P^i 概率 1, τ 是跳跃点。

§3.4 向前与向后微分方程组

记 $q_{ii} = -q_i$, $Q = (q_{ij})$.

定义 3.6 若 $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty$, 则称相应的 Q 矩阵是保守的。

推论 3.15 有限马氏链是保守的。

证明 在

$$\sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}$$

两边直接令 $t \to 0+$ 即可。 □

由于 $\frac{p_{ij}(t)}{1-p_{ii}(t)} = \frac{q_{ij}t+o(t)}{q_i t+o(t)} \to \frac{q_{ij}}{q_i}$, 表示在 t 时刻离开 i 的条件下，下一个转移到 j 的条件概率，因此假设 $\frac{\sum_{j \neq i} q_{ij}}{q_i} = 1$ 是一个合理的条件，也是实际问题中常遇到的情况。

定义 3.7 $R = (r_{ij})$ 称为跳跃矩阵，其中

$$r_{ij} = \begin{cases} (1 - \delta_{ij})\frac{q_{ij}}{q_i}, & q_i > 0; \\ \delta_{ij}, & q_i = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

引理 3.16 若 $f(x)$ 为 (a, b) 上连续函数，且 $f'_+(x)$ 连续，则 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导。

定理 3.17 设 $(p_{ij}(t))$ 标准，且一切 $q_i < \infty$. 则 Q 保守当且仅当向后方程组 $P'(t) = QP(t)$ 成立。

证明 由 C–K 方程，

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = -\frac{1 - p_{ii}(h)}{h} p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t).$$

由 Fatou 引理，

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} \geq \sum_k q_{ik} p_{ij}(t).$$

对任意的 $N > i$, 有

$$\limsup_{h \to 0+} \sum_{k \neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) \leq \limsup_{h \to 0+} \sum_{k \neq i,\ k < N} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \limsup_{h \to 0+} \sum_{k \geq N} \frac{p_{ik}(h)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{k\neq i,\ k<N} q_{ik}p_{kj}(t) + \limsup_{h\to 0+}\frac{1-p_{ii}(h)}{h} - \liminf_{h\to 0+}\sum_{k\neq i,\ k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}\\
&\le \sum_{k\neq i,\ k<N} q_{ik}p_{kj}(t) + q_i - \sum_{k\neq i,\ k<N} q_{ik}.
\end{aligned}
$$

令 $N\to\infty$, 由 Q 的保守性可知

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} \le \sum_k q_{ik}p_{kj}(t).$$

这样，

$$\lim_{h\to 0+}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \sum_k q_{ik}p_{kj}(t).$$

由保守性，上式右方关于 t 一致收敛，故为 t 的连续函数。由上面引理可知向后方程组成立。

下面设向后方程组成立。由定理 3.6 的证明，

$$q_i = \sup_{t>0}\frac{f(t)}{t},$$

其中 $f(t) = -\log p_{ii}(t)$. 这样，

$$p_{ii}(t)\ge e^{-q_i t}\ge 1-q_i t. \tag{3.10}$$

对 $t>s\ge 0$, 有

$$p_{ij}(t)\ge p_{ii}(t-s)p_{ij}(s)\ge e^{-q_i(t-s)}p_{ij}(s).$$

故 $e^{q_i t}p_{ij}(t)$ 是关于 t 的增函数。应用 Fubini 定理（定理 3.18），对

$$\sum_j e^{q_i t}p_{ij}(t) = e^{q_i t}$$

逐项求导可得，

$$\sum_j p'_{ij}(t) = 0, \quad \text{a.s.}.$$

在向后方程组

$$p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik}p_{kj}(t)$$

两边对 j 求和，有

$$0 = \sum_j p'_{ij}(t) = \sum_k q_{ik} \quad \text{a.s.}.$$

这样就得到了 Q 的保守性，并且上式对所有的 t 都成立。 □

定理 3.18 若 $f_n(t)$ 单增，且 $f(t)=\sum_n f_n(t)$ 有限，则

$$f'(t) = \sum_n f'_n(t) \quad a.s..$$

定理 3.19 设 Q 保守，$q=\sup_i q_i<\infty$，则向前方程组 $P'(t)=P(t)Q$ 成立。

证明

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=p_{ij}(t)\frac{p_{jj}(h)-1}{h}+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h} \tag{3.11}$$

由于

$$0\leq\frac{p_{kj}(h)}{h}\leq\sum_{l\neq k}\frac{p_{kl}(h)}{h}=\frac{1-p_{kk}(h)}{h}\leq q_k\leq q<\infty,$$

应用控制收敛定理，在 (3.11) 中令 $h\to 0+$ 即得。 □

实际上，条件 $q=\sup_i q_i<\infty$ 能够推出 Q 的保守性。

推论 3.20 有限状态马氏链向前向后方程组均成立。

这样，若马氏链状态有限，则

$$P'(t)=QP(t),\quad P(0)=E,$$

其中 E 是单位矩阵。容易知道，

$$P(t)=e^{Qt}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}Q^m.$$

例 3.1 设马氏链的状态空间 $I=\{0,\ 1,\ 2,\ldots\}$，转移矩阵 $(p_{ij}(t))$ 标准，密度矩阵 Q 满足

$$\begin{cases}q_i=b, & i\geq 0,\\ q_{i,i+1}=b, & i\geq 0,\\ q_{ij}=0, & j\neq i,\ j\neq i+1,\ i\geq 0,\ j\geq 0,\end{cases}$$

其中 $b>0$ 为常数。

此马氏链的 Kolmogorov 向前方程组为

$$\begin{cases}p'_{i0}(t)=-bp_{i0}(t), & i\geq 0\\ p'_{ij}(t)=bp_{i,j-1}(t)-bp_{ij}(t), & i\geq 0,\ j\geq 1\\ p_{ij}(0)=\delta_{ij}, & i,\ j\geq 0\end{cases}$$

于是 $p_{00}(t)=e^{-bt}$, $p_{i0}(t)=0$, $i\geq 1$. 对 $j\geq 1$, 令

$$r_{ij}(t)=e^{bt}p_{ij}(t).$$

则

$$r'_{ij}(t)=be^{bt}p_{ij}(t)+e^{bt}p'_{ij}(t)=br_{i,j-1}(t).$$

于是对 $j<i$,

$$r_{ij}^{(j)}(t)=b^j r_{i0}(t)=0,\ r_{ij}^{(k)}(0)=0,\ 0\le k\le j,$$

故 $r_{ij}(t)=0$, 即 $p_{ij}(t)=0$. 这样 $r'_{ii}(t)=0$, $r_{ii}(0)=1$, 从而 $r_{ii}(t)=1$, $p_{ii}(t)=e^{-bt}$. 对 $j>i$, 有

$$\begin{aligned}r_{ij}^{(j-i)}(t)&=b^{j-i}r_{ii}(t)=b^{j-i},\\ r_{ij}^{(k)}(0)&=b^k r_{i,j-k}(0)=0,\ 0\le k\le j-i+1,\ r_{ij}^{(j-i)}(0)=b^{j-i},\end{aligned}$$

从而 $r_{ij}(t)=\frac{(bt)^{j-i}}{(j-i)!}$, 即 $p_{ij}(t)=e^{-bt}\frac{(bt)^{j-i}}{(j-i)!}$. 这样,

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}0, & j<i\\ e^{-bt}\frac{(bt)^{j-i}}{(j-i)!}, & j\ge i.\end{cases}$$

容易看出，此马氏链是参数为 b 的 Poisson 过程。

例 3.2 设马氏链状态空间 $I=\{0,\ 1\}$, 密度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-p & p\\ q & -q\end{pmatrix},$$

其中 $p>0,q>0$.

此马氏链的向后方程组为

$$P'(t)=QP(t),\qquad P(0)=I.$$

由 $\det(\lambda I-Q)=\lambda(\lambda+p+q)$ 知 Q 的特征根为 0 和 $-p-q$, 它们的特征向量分别是 $(1,1)^T$ 和 $(p,-q)^T$. 令

$$T=\begin{pmatrix}1 & p\\ 1 & -q\end{pmatrix}.$$

则 $T^{-1}QT=\mathrm{diag}(0,-p-q)$. 于是

$$\begin{aligned}P(t)=e^{tQ}&=Te^{t\mathrm{diag}(0,-p-q)}T^{-1}=T\mathrm{diag}(1,e^{-(p+q)t})T^{-1}\\ &=\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}q+pe^{-(p+q)t} & p-pe^{-(p+q)t}\\ q-qe^{-(p+q)t} & p+qe^{-(p+q)t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

§3.5 一类马氏链的构造

设

(i) Z_n 为离散参数马氏链，转移概率为 u_{ij}, 且 $u_{ii}=0$;

(ii) T_n, $n\ge 0$ 独立同分布，且与 Z_n 独立，在概率 $P^i=P(\cdot|Z_0=i)$ 下，T_n 服从参数为 q_i 的指数分布，其中 $0<q_i<\infty$, $q=\sup_i q_i<\infty$.

定理 3.21 令 $\tau_n=\sum_{k\le n}T_n$, $q_{ii}=-q_i$, $q_{ij}=q_iu_{ij}$, $i\neq j$,

$$X_t=\sum_{n=0}^{\infty}Z_n1_{[\tau_n,\ \tau_{n+1})}(t).$$

则在概率 P 下，X_t 是以 Q 为密度矩阵的连续参数马氏链。

引理 3.22 设 Y_n 独立同分布，且服从参数为 $\lambda(n)$ 的指数分布，则 $\sum_n Y_n<\infty$ $a.s.$ 当且仅当 $\sum_n\lambda(n)^{-1}<\infty$.

证明 若 $\sum_n\lambda(n)^{-1}<\infty$, 则

$$E[\sum_n Y_n]=\sum_n E[Y_n]=\sum_n\lambda(n)^{-1}<\infty,$$

故 $\sum_n Y_n<\infty$ a.s..

反过来，由

$$0<E[e^{-s\sum_n Y_n}]=\prod_n E[e^{-sY_n}]=\prod_n\frac{\lambda(n)}{s+\lambda(n)},$$

可知

$$\sum_n(1-\frac{\lambda(n)}{s+\lambda(n)})=\sum_n\frac{s}{s+\lambda(n)}<\infty.$$

显然 $\lambda(n)\to\infty$, 不妨设 $\frac{\lambda(n)}{1+\lambda(n)}\ge\frac{1}{2}$. 于是

$$\sum_n\lambda(n)^{-1}\le 2\sum_n\frac{1}{1+\lambda(n)}<\infty.$$

□

这样，$P(\tau_\infty=\infty)=1$. 令 $N_t=\sup\{n,\ \tau_n\le t\}$, 则在概率 P^i 下，N_t 是参数为 q_i 的 Poisson 过程。令 $p_{ij}(t)=P^i(X_t=j)$. 下面我们证明 X_t 的马氏性，即

$$P^i(X_{t_1}=i_1,\ldots,X_{t_n}=i_n)=p_{ii_1}(t_1)p_{i_1i_2}(t_2-t_1)\cdot p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1}).$$

我们只对 $n=2$ 证明。这由下面的式子得到：

$$\begin{aligned}
&P^i(X_s=j,\ X_t=k)=\sum_{n,m}P^i(X_s=j,\ X_t=k,\ \tau_n\le s<\tau_{n+1}\le\tau_{n+m}\le t<\tau_{n+m+1})\\
=&\sum_{n,m}P^i(\tau_n\le s<\tau_{n+1}\le\tau_{n+m}\le t<\tau_{n+m+1})P^i(X_n=j,\ X_{n+m}=k)\\
=&\sum_{n,m}P^i(N_s=n,\ N_t=n+m)P^i(Z_n=j)P^j(Z_m=k)\\
=&\sum_{n,m}P^i(N_s=n)P^i(N_{t-s}=m)P^i(Z_n=j)P^j(Z_m=k)
\end{aligned}$$

$=P^i(X_s=j)P^j(X_{t-s}=k)=p_{ij}(s)p_{jk}(t-s).$

从上式中我们可以知道

$$p_{ij}(t)=P^i(X_t=j)=\sum_n \frac{(q_it)^n}{n!}e^{-q_it}u_{ij}^{(n)}.$$

两边对 t 求导，并令 $t=0$ 可得

$$p'_{ij}(0)=q_iu_{ij}-q_iu_{ij}^{(0)}=q_{ij},$$

即马氏链 X_t 以 Q 为密度矩阵。

§3.6 强马氏性

定义 3.8 称马氏链 X_t 具有强马氏性，若

(i) X_t 是可测过程；

(ii) 对任意停时 τ, 在 $\{\tau<\infty\}$ 上成立

$$P^i(X(t+\tau)=j|\mathcal{F}_\tau)=P_{X_\tau,j}(t)\quad P^i\text{-}a.s..$$

定理 3.23 右连续齐次马氏链具有强马氏性。