

极限计算测试

时间：30 分钟

总分：100 分

1(20分): 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{2^k}}{\cos \frac{k}{n^2}}.$

2(20分): 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \frac{\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k} \right)^3} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) \sin \left(\ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right) \right] \right\}.$

3(20分): 已知 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$, 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{3}{4} \right).$

4(20分): 设 $\Omega: \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{n}}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{n}}, 0 \leq z \leq \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{n}} \right\},$

计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \iiint_{\Omega} \frac{e^{-x^2} \tan y \ln(1+z)}{z} dV.$

5(20分): 已知 $g(x)$ 在 (a, b) ($a, b \in \mathbb{R}$) 内严格单调且有 $0 < g(x) < 1$, $\exists C \in \mathbb{R}$ 满足:

$f_n(x) = \sum_{k=1}^n g^k(x) - C$ 在区间 (a, b) 内的零点为 x_n , 试计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$