概率论与数理统计作业习题解答（浙大第四版）

第一章　概率的基本概念

习题解析

第 1、2 题 随机试验、样本空间、随机事件

1．写出下列随机试验的样本空间：

（1）记录一个小班一次数学考试的平均分数（设以百分制记分）。

（2）生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数。

（3）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果。

（4）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标。

解　（1）高该小班有 n 个人，每个人数学考试的分数的可能取值为 0，1，2，…，100，n 个人分数这和的可能取值为 0，1，2，…，100n，平均分数的可能取值为 $\frac{0}{\mathrm{n}},\frac{1}{n},...,\frac{100n}{n}$，则样本空间为

$$S=\left\{\frac{k}{n}\middle|k=0,1,2,\cdots,100n\right\}$$

（2）样本空间 S={10，11，…}，S 中含有可数无限多个样本点。

（3）设 1 表示正品，0 有示次品，则样本空间为

S={（0，0），（1，0，0），（0，1，0，0），（0，1，0，1），（0，1，1，0），（1，1，0，0），（1，0，1，0），（1，0，1，1），（0，1，1，1），（1，1，0，1），（1，1，1，0），（1，1，1，1）}

例如（1，1，0，0）表示第一次与第二次检查到正品，而第三次与第四次检查到次品。

（4）设任取一点的坐标为（x，y），则样本空间为

$$S=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$$

2．设 A，B，C 为三个事件，用 A，B，C 的运算关系表示下列事件。

（1）A 发生，B 与 C 不发生；

（2）A 与 B 都发生，而 C 不发生；

（3）A，B，C 中至少有一个发生；

（4）A，B，C 都发生；

（5）A，B，C 都不发生；

（6）A，B，C 中不多于一个发生；

（7）A，B，C 中不多于两个发生；

（8）A，B，C 中至少有两个发生。

解　此题关键词：“与，”“而”，“都”表示事件的“交”；“至少”表示事件的“并”；“不多于”表示“交”和“并”的联合运算。

（1）$A\overline{B}\overline{C}$。

（2）AB$\overline{C}$ 或 AB—C。

（3）A$\bigcup$B$\bigcup$C。

（4）ABC。

（5）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$。

（6）A，B，C 中不多于一个发生为仅有一个发生或都不发生，即 A$\overline{B}\overline{C}$ $\cup$ $\overline{A}B\overline{C}$ $\cup$ $\overline{A}\overline{B}C$ $\cup$ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，A，B，C 中不多于一个发生，也表明$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$中至少有两个发生，即$\overline{A}\overline{B}\bigcup\overline{B}\overline{C}\bigcup\overline{A}\overline{C}\bigcup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$。

（7）A，B，C 中不多于两个发生，为仅有两个发生或仅有一个发生，或都不发生，即表示为

$$AB\overline{C}\bigcup A\overline{B}C\bigcup\overline{A}BC\bigcup A\overline{B}\overline{C}\bigcup\overline{A}B\overline{C}\bigcup\overline{A}\overline{B}C\bigcup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

而 ABC 表示三个事件都发生，其对立事件为不多于两个事件发生，因此又可以表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}=A\bigcup B\bigcup C$。

（8）A，B，C 中至少有两个发生为 A，B，C 中仅有两个发生或都发生，即为

$$AB\overline{C}\bigcup A\overline{B}C\bigcup\overline{A}BC\bigcup ABC$$

也可以表示为 AB$\bigcup$BC$\bigcup$AC。

第 3.（1）、6、8、9、10 题　概率的定义、概率的性质、古典概型

3.（1）设 A，B，C 是三件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=\dfrac{1}{8},$求 A，B，C 至少有一个生的概率。

解　利用概率的加法公式

$$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(A)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

其中由$P(AB)=P(BC)=0,$而$ABC\subset AB$得$P(ABC)=0$。

6．在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码。求

（1）最小号码为 5 的概率；

（2）最大号码为 5 的概率。

解　利用组合法计数基本事件数。从 10 人中任取 3 人组合数为C_{10}^{3}，即样本空间 S=$\left\{C_{10}^{3}=120\text{个基本事件}\right\}$。

（1）令事件 A={最小号码为 5}。最小号码为 5，意味着其余号码是从 6，7，8，9，10 的 5 个号码中取出的，有 C_5^2 种取法，故 A=$\left\{C_5^2=10\text{个基本事件}\right\}$，所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{10!}{3!7!}}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

（2）令事件 B={最大号码为 5}，最大号码为 5，其余两个号码是从 1，2，3，4 的 4 个号码中取出的，有 C_4^2 种取法，即 B=$\left\{C_4^2\text{个基本事件}\right\}$，则

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{3!7!}}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

——

8．在 1 500 个产品中有 400 个次品，1 100 个正品。从中任取 200 个。求
（1）恰有 90 个次品的概率；
（2）至少有 2 个次品的概率。

解　（1）利用组合法计数基本事件数。令事件 A={恰有 90 个次品}，则

$$P(A)=\frac{C_{400}^{90}C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$$

（2）利用概率的性质。令事件 B={至少有 2 个次品}，$A_i=$ {恰有 i 个次品}，则

$$B=A_2\cup A_3\cup A_{200},AiAi=\varnothing(i\neq j)$$

所求概率为

$$P(B)=P(A_2\cup A_3\cup\cdots\cup,A_{200})=\sum_{i=2}^{200}P(A_i)$$

显然，这种解法太麻烦，用对立事件求解就很简单。令事件 $\overline{B}$ ={恰有 0 个次品或恰有 1 个次品}，即 $\overline{B}=A_0\cup A_1$，而

$$P(\overline{B})=P(A_0\cup A_1)=P(A_0)+P(A_1)=\frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}+\frac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

故

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}-\frac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$$

——

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

解 令事件 A={4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双}。用 3 种方法求 P（A）。

①A 的对立事件$\overline{A}$={4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双}，从 5 又鞋中任取 4 只，即从 10 只鞋中任取 4 只，所有可能组合数为C_{10}^4，样本空间 S={C_{10}^4个基本事件}，现考虑有利于$\overline{A}$的基本事件数。从 5 双鞋中任取 4 双，再从每双中任取一只，有$C_5^4 2^4$种取法，即$\overline{A}$={$C_5^4 2^4$个基本事件}，则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^4 2^4}{C_{10}^4}=1-\frac{5\times 2^4}{210}=\frac{13}{21}$$

②4 只鞋是不放回的一只接一只的取出，所有可能的排列数为A_{10}^4，即样本空间 S={A_{10}^4个基本事件}。现考虑有利于$\overline{A}$的基本事件，从 10 只鞋中任取一只，与它配成双的一只不取，从其余 8 只鞋中任取一只，与它配成双的一只不取，依此类推，则$\overline{A}$={10×8×6×4 个基本事件}。于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times 8\times 6\times 4}{A_{10}^4}=1-\frac{10\times 8\times 6\times 4}{10\times 9\times 8\times 7}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

③利用组合法计数基本事件数。考虑有利于事件 A 的基本事件数，任取的 4 只鞋配成一双的取法有$C_5^1C_2^2C_4^2 2^2$种，能配成两双的取法有$C_5^2C_2^2$种，于是 A={（$C_5^1C_2^2C_4^2 2^2+C_5^2C_2^2$）个基本事件}，则

$$P(A)=\frac{C_5^1C_2^2C_4^2 2^2+C_5^2C_2^2}{C_{10}^4}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}$$

此题的第 1 种方法和第 2 种方法是利用概率性质：

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

首先求$P(\overline{A})$，然后求$P(A)$。第 3 种方法是直接求$P(A)$。读者还可以用更多方法求$P(A)$。

10．在 11 张卡片上分别写上 Probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率。

解 令事件 A={排列结果为 ability}，利用排列法计数基本事件数。不放回的从中一次抽 1 张的连抽 7 张，要排成单词，因此用排列法。样本空间={A_{11}^7个基本事件}。排列结果

为 ability，实际收入字母 b 的卡片有两张，写字母 i 的卡片有两张，取 b 有 C_2^1 种取法，

取 i 有 C_2^1 种取法，其余字母都只有 1 种取法，故 $A=\{C_2^1C_2^1 个基本事件\}$，于是

$$P(A)=\frac{C_2^1C_2^1}{A_{11}^7}=\frac{4}{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5}=0\cdot0000024$$

这是个小概率事件。

第 14.（2）、15、19、18 题　　条件概率、概率的加法公式和乘法公式

14.（2）已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}, 求P(A\cup B)$。

解　利用概率加法公式和概率乘法公式。

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

解此题的关键是求 $P(B)和P(AB)$。由概率乘法公式，得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

又 $P(AB)=P(B)P(A|B)$，解得

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}$$

于是所求概率为

$$P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

此题的关键是利用 $P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$，求出 $P(AB)$ 和 $P(B)$，再求 $P(A\cup B)$ 就迎刃而解了。

15．掷两颗骰子，已知两颗骰子点数和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率（用两种方法）。

解　令事件 A={两颗骰子点数之和为 7}，B={有一颗为 1 点}。此题是求条件概率 $P(B|A)$。两种方法如下：

①考虑整个样本空间。随机试验：掷两颗骰子，每颗骰子可能出现的点数都是 6 个，即样本空间 S={ 6^2 个基本事件}。事件 AB={两颗骰子点数之间和为 7，且有一颗为 1 点}，两颗骰子点数之和为 7 的可能结果为 6 个，即

A={（1，6），（2，5），（3，4），（6，1），（5，2），（4，3）}
而 AB={（1，6），（6，1）}。由条件概率公式，得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2/36}{6/36}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

②已知事件 A 发生后，将 A 作为样本空间，其中有两个结果（1，6）和（6，1）只有一颗骰子出现 1 点，则在缩减的样本空间中求事件 B 发生的条件概率为

$$P(B|A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

18．某人忘记了电话号码的最后一个数，因而他随意地拨号。求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率。若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解　利用概率性质(有限可加性)和概率乘法公式。

令事件 $Ai=$ {第 i 次拨通电话}，“到第 i 次拨通电话”这个事件为 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{i-1}}A_i$（i=1，2，3）。事件 B={不超过三次而拨通电话}，则

$$B=A_1\cup\overline{A_1}A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$$

该事件表示第一次拨通电话，或者第一次未拨通，第二拨通电话（到第二次拨通电话），或者第一、二次未拨通，第三次拨通电话（到第三次拨通电话）。右端是互不相容事件的并事件，所以用有限可加性计算，得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1\cup\overline{A_1}A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})\\&=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

拨号是从 0，1，2，…，9 的 10 个数字中任取一个，有 10 种取法，第一次拨通的概率是 $\frac{1}{10}$；第一次未拨通的概率为 $\frac{9}{10}$，第二次拨号时，是从其余 9 个数字中任取一个，所以拨通的概率为 $\frac{1}{9}$，到第二次拨通的概率为 $\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$，依此类推，到第 n 次拨通电话的概率都是 $\frac{1}{10}$，与顺序无关。

已知最后一个数字是奇数时，令事件 C={拨号不超过三次而接通电话}。拨号是从 1，3，5，7，9 的五个数字中任取一个，有 5 种取法，第一次拨通的概率为 $\frac{1}{5}$，到第二次拨通的概率为 $\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$，到第三次拨通的概率为 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$，与上述分析方法和用的概率公式相同，所以

$$P(C)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$

第 21、22、35、38 题　　全概率公式、贝叶斯公式、事件的独立性

21．已知男人中有5%是色盲患者，女人中有0.25%是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解　令事件 A={随机地选一人是女性}，对立事件$\overline{A}$={随机地选一人是男性}。因为人群中男女人数相等，所以$P(A)=P(\overline{A})=\dfrac{1}{2}$，且 A，$\overline{A}$是样本空间的一个划分。事件 C={随机地挑选一人恰好是色盲}。已知

$$P(C|A)=\frac{0.25}{100},P(C|\overline{A})=\frac{5}{100}$$

由全概率公式，得

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(\overline{A})P(C|\overline{A})$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{0.25}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}=0.02625$$

由贝叶斯公式，得

$$P(\overline{A}|C)=\frac{P(\overline{A}C)}{P(C)}=\frac{P(\overline{A})P(C|\overline{A})}{P(C)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{100}}{0.02625}=0.9524$$

22．一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次及格的概率为 P，若第一次及格则第二次及格的概率也为 P；若第一次不及格则第二次及格的概率为$P/2$。（1）若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率。（2）若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率。

解　令事件 Ai={一学生第 i 次考试及格}（i=1，2），已知

$$P(A_1)=P,P(\overline{A_1})=1-P,P(A_2|A_1)P(A_2|\overline{A_1})=\frac{P}{2}$$

（1）由概率加法公式，得

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2|A_1)$$

利用对立事件求概率

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2) \\
&= 1 - P(A_1)P(A_2 | A_1) \\
&= 1 - P(\overline{A}_1)[1 - P(A_2 | \overline{A}_1)] \\
&= 1 - (1-P)(1 - \frac{P}{2}) = \frac{3}{2}P - \frac{1}{2}P^2
\end{aligned}
$$

显然用后者求解简单。

（2）利用条件概率公式。

$$
\begin{aligned}
&P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_1)P(A_2 | A_1)}{P(A_2)} \\
&= \frac{P^2}{P^2 + P(1-P)/2} = \frac{2P}{P+1}
\end{aligned}
$$

---

35. 如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性，在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出。如果两个这样的开关联联接，它们每个具有 0.96 的可靠性（即在情况 C 发生时闭合的概率），问这时系统的可靠性（即电路闭合的概率），是多少？如果需要有一个可靠性至少为 0.9999 的系统,则至少需要用多少只开关并联?设各开关闭合与否是相互独立的。

解　利用事件的独立性。

①令事件 A_i ={第 i 只开关闭合}。已知 $P(A_1) = P(A_2) = 0.96$ 。令事件 B={电路闭合}。

两只开关并联联接，则 $B = A_1 \cup A_2$ ，即至少有一只开关闭合，电路就闭合。而 A_1与A_2 相互独立，所以电路闭合的概率为

$$
\begin{aligned}
&P(B) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\
&= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\
&= 0.96 + 0.96 - (0.96)^2 = 0.9984
\end{aligned}
$$

这种解题思路是读者容易想到的. 另一种解法是利用对立事件, 计算此较简单.

$$
\begin{aligned}
&P(B) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1}\overline{A_2}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \\
&= 1 - 0.04^2 = 0.9984
\end{aligned}
$$

②设需要 n 只开关并联, 才保证系统可靠性为 0.9999。令事件 A_i ={第 i 只开关闭合}（i=1，2，…，n）。令事件 C={电路闭合}，则 $C = A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n$ 。如果用概率加法公式表示 $P = (C)$ 将是相当麻烦的，不妨表示为

$$
\begin{aligned}
P(C) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i \prec j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i \prec j \prec k \le n} P(A_i A_j A_K) + \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \\
&= 0.96n - C_n^2 (0.96)^2 + C_n^3 (0.96)^3 + \cdots + (-1)^{n-1} (0.96)^n
\end{aligned}
$$

已知$P(C) = 0.9999$，解 n 实际上是很难办到的。

如果用对立事件表示$P(C)$，显然比较简单，即

$$
\begin{aligned}
P(C) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) \\
&= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_n) \\
&= 1 - (0.04)^n
\end{aligned}
$$

已知$1 - 0.04^n \ge 0.9999$，即$1 - 0.04^n \le 0.0001$，两边取以 e 为底的对数，得

$n 1_n (0.04) \le 1_n (0.0001)$，则

$$
n \ge \frac{1_n (0.0001)}{1_n (0.04)} = \frac{-9.2103}{-3.2189} \approx 2.86
$$

故至少需要 3 只开关并联联接。

此题表明对立事件及德·莫根律对解决实际问题有多么重要。

36．三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为$1/5, 1/3, 1/4$。问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少？

解　①令事件Ai={第 i 人能译出密码}（i=1，2，3），且$P(A_1) = \frac{1}{5}$，$P(A_2) = \frac{1}{3}$，$P(A_3) = \frac{1}{4}$，B={三人中至少有一人能译出密码}与事件“密码被译出”是相等事件。又$A_1, A_2 A_3$相互独立。

利用概率的加法公式和事件的独立性。

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = 0.6
\end{aligned}
$$

②利用对立事件和事件的独立性。

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \\
&= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3) \\
&= 1 - (1 - \frac{1}{5}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{5} = 0.6
\end{aligned}
$$

38．袋中装 m 只正品硬币、n 只次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽）。在袋中任取一只，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽。问这只硬币是正品的概率为多少？

解 令事件 A={任取一只硬币是正品}，对立事件 $\overline{A}$ ={任取一只硬币是次品}，且 $P(A)=\frac{m}{m+n}, P(\overline{A})=\frac{n}{m+n}$，B={把硬币投掷 r 次，每次都得到国徽面}，令事件 B_i ={把硬币投掷 i 次，有 i 次得到国徽}（i=1，2，…，r）。如果硬币是正品，则投掷一次出现任何一面的概率都是 $\frac{1}{2}$；如果硬币是次品，则投掷一次出现国徽面的概率是 1。于是

$$P(B_1)=P(A)P(B_1|A)+P(\overline{A})P(B_1|\overline{A})$$
$$=\frac{m}{m+n}\times\frac{1}{2}+\frac{n}{m+n}\times 1$$
$$P(B_2)=P(A)P(B_2|A)+P(\overline{A})P(B_2|\overline{A})$$
$$=\frac{m}{m+n}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{n}{m+n}\times 1\times 1$$
$$\vdots$$
$$P(B_i)=\frac{m}{m+n}\times\frac{1}{2^i}+\frac{n}{m+n}\times 1^i$$

则

$$P(B)=P(B_r)=\frac{m}{m+n}\times\frac{1}{2^r}+\frac{n}{m+n}\times 1^r$$
$$=\frac{m}{m+n}\times\frac{1}{2^r}+\frac{n}{m+n}$$

所求概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$
$$=\frac{\frac{m}{m+n}\times\frac{1}{2^r}}{\frac{m}{m+n}\times\frac{1}{2^r}+\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+2^r n}$$

第二章 随机变量及其分布

习题解析

第 2.（1）、3、6、7、12、17 题 离散型随机变量的分布律

2.（1）一袋中装有 5 只球，编号为 1，2，3，4，5。在袋中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，现实性出随机变量 X 的分布律。

解 随机变量 X 的所有可能取值为 3，4，5，求取各个值的概率用古典概型。

$$P\{X=3\}=\frac{C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{\frac{5!}{3!2!}}=\frac{1}{10}$$

$$P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{\frac{3!}{2!1!}}{\frac{5!}{3!2!}}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{5!}{3!2!}}=\frac{3}{5}$$

则随机变量 X 的分布律为

X	3	4	5
P_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

如果用概率函数表示，则为

$$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^2}{C_5^3} \qquad (k=3,4,5)$$

3．设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，作不放回抽样。以 X 表示取出的次品的只数。（1）求 X 的分布律；（2）画出分布律的图型。

解　随机变量 X 的所有可能值为 0，1，2，求取各个值的概率用古典概型。

（1）X 取各个值的概率分别为

$$P\{X=0\}=\frac{C_2^0C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{\frac{13!}{3!10!}}{\frac{15!}{3!12!}}=\frac{22}{35}$$

$$P\{X=1\}=\frac{C_2^1C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{2\times\frac{13!}{2!11!}}{\frac{15!}{3!12!}}=\frac{12}{35}$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_2^2C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{13}{\frac{15!}{3!12!}}=\frac{1}{35}$$

则 X 的分布律为

X	0	1	2
P_k	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

因为 $\sum P_{k=1}$，所以只要求出 $P\{X=0\},P\{X=1\}$ 则 $P\{X=2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$。

X 的分布律用概率函数表示为

$$P\{X=k\}=\frac{C_2^k C_{13}^{3-k}}{C_{15}^3} \qquad (k=0,1,2)$$

——

6.一大楼装有 5 个同类型的供水设备。调查表明在任一时刻 t 每个设备被使用的概率为 0.1，问在同一时刻

（1）恰有 2 个设备被使用的概率是多少？

（2）至少有 3 个设备被使用的概率是多少？

（3）至多有 3 个设备被使用的概率是多少？

（4）至多有 1 个设备被使用的概率是多少？

解　5 个同类型的供水设备，在任一时刻是否被使用相互独立，而在同一时刻被使用的个数 X 服从二项分布 b（5，0，1），故用二项分布求解 X 取各个值，或在某个范围内取值的概率。

（1）因为 X 服从二项分布 b（5，0，1），分布律为

$$P\{X=k\}=C_k(0.1)^k(0.9)^{5-k} \qquad \text{（k=0，1，2，3，4，5）}$$

于是

$$P\{X=2\}=C_5^2(0.1)^2(0.9)^{5-2}=10\times0.01\times0.729=0.0729$$

（2）

$$\begin{aligned}P\{X\geq3\}&=\sum_{k=3}^{5}C_5^k(0.1)^k(0.9)^{5-k}\\&=C_5^3(0.1)^3(0.9)^{5-3}+C_5^4(0.1)^4(0.9)^{5-4}+C_5^5(0.5)^5(0.9)^{5-5}\\&=10\times0.001\times0.81+5\times0.0001\times0.9+0.00001\\&=0.00856\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}P\{X\leq3\}&=\sum_{k=0}^{3}C_5^k(0.1)^k(0.9)^{5-k}\\&=C_5^0(0.1)^0(0.9)^5+C_5^1(0.1)(0.9)^4+C_5^2(0.1)^2(0.9)^3+C_5^3(0.1)^3(0.9)^2\\&=0.59049+032805+0.0729+0.0081\\&=0.99954\end{aligned}$$

或用对立事件求解。

$$
\begin{aligned}
&P\{X \le 3\} = 1 - P\{X \succ 3\} = 1 - P\{X \ge 4\} \\
&= 1 - \sum_{k=4}^{5} C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k} \\
&= 1 - [C_5^4 (0.1)^4 (0.9)^5 + C_5^5 (0.1)^5 (0.9)^0] \\
&= 1 - [5 \times 0.1^4 \times 0.9 + 0.1^5] \\
&= 1 - [0.00045 + 0.0001] \\
&= 0.99954
\end{aligned}
$$

后者计算比前者简单。

（4） $P\{X \ge 1\} = \sum_{k=1}^{5} C_5^k (0.1)^k (0.9)^{5-k}$，显然计算过程比较麻烦，但用对立事件求解相当简单。

$$
\begin{aligned}
&P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X < 1\} = 1 - P\{X = 0\} \\
&= 1 - C_5^0 (0.1)^0 (0.9)^5 = 1 - 0.9^5 \\
&= 1 - 0.59049 = 0.40951
\end{aligned}
$$

7．设事件 A 在每一次试验中发生的概率为 0.3，当 A 发生不少于 3 次时，指示灯发出信号。（1）进行了 5 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率；（2）进行了 7 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率。

解　（1）事件 A 次重复独立试验中发生的次数 X 服从二项分布 b（n，0.3），分布律为

$P\{X = k\} C_n^k (0.3)^k (0.7)^{n-k}$　(k=0,1,2,⋯,n)

当事件$\{X \ge 3\}$发生时，指示灯发出信号。当 n=5 时，则

$$
\begin{aligned}
&P\{X \ge 3\} = \sum_{k=3}^{5} C_5^k (0.3)^k (0.7)^{5-k} \\
&= C_5^3 (0.3)^3 (0.7)^2 + C_5^4 (0.3)^4 (0.7) + C_5^5 (0.3)^5 \\
&= 10 \times 0.027 \times 0.49 + 5 \times 0.0081 \times 0.7 + 0.00243 \\
&= 0.16308
\end{aligned}
$$

（2）事件 A 在 7 次重复独立试验中发生的次数 Y 服从二项分布 b（7，0，3），则

$$
\begin{aligned}
&P\{Y \ge 3\} = 1 - P\{Y \prec 3\} = 1 - P\{Y \le 2\} \\
&= 1 - [C_7^0 (0.3)^0 (0.7)^7 + C_7^1 (0.3)(0.7)^6 + C_7^2 (0.3)^2 (0.7)^5] \\
&= 1 - [0.7^7 + 7 \times 0.3 \times 0.7^6 + 21 \times 0.3^2 \times 0.7^5] \\
&= 0.353
\end{aligned}
$$

12．一电话交换台每分钟收到呼唤的次数服从参数为 4 的泊松分布。求（1）某一分钟恰有 8 次呼唤的概率；（2）某一分钟的呼唤次数大于 3 的概率。

解　一电话交换台某一分钟收到呼唤的次数 X 服从泊松分布$\pi(4)$，其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{e^{-4}4^k}{k!}$$ （k=0，1，2，…）

（1）$P\{X=8\}=\frac{e^{-4}4^8}{8!}=\frac{1200.33371}{40320}=0.02977$

（2）$P\{X>3\}=P\{X\ge 4\}=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{e^{-4}4^k}{k!}=1-\sum_{k=0}^{3}\frac{e^{-4}4^k}{k!}=0.5665$

17.（1）设 X 服从（0-1）分布，其分布律为 $P\{X=k\}=P^k(1-P)^{1-K}, k=0$，1，求 X 的分布函数，并作出其图形；

（2）求第 1 题中的随机变量的分布函数。

解　（1）X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{k\le x}P^k(1-P)^{1-K}$$

$$=\begin{cases}0, & x\prec 0\\ 1-P & 0\le x\prec 1\\ 1, & x\ge\end{cases}$$

（2）第 1 题中随机变量 X 的分布律为

X	3	4	5
P_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

X 的分布函数为 $F(x)=P\{X\le x\}$，求法如下。

当 $x\prec 3$ 时，则

$$F(x)=P\{X\le x\}=0$$

当 $3\le x\prec 4$ 时，则

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}=0.1$$

当 $4\le x\prec 5$ 时，则

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}=0.1+0.3=0.4$$

当 $x\ge 5$ 时，则

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}=1$$

综合表示为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\prec 3\\ \dfrac{1}{10}, & 3\le x\prec 4\\ \dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{4}{10}, & 4\le x\prec 5\\ \dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{5}=1, & x\ge 5\end{cases}$$

第 19、21、27、34、35、36 题 随机变量的分布函数、连续型随机变量的概率密度

19．以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一个顾客到达的等待时间（以分计），X 的分布函数是

$$Fx(x)=\begin{cases}1-e^{-0.4x}, & x\succ 0\\ 0, & x\prec 0\end{cases}$$

求下述概率：

（1）P{至多 3 分钟}；（2）P{至少 4 分钟}；（3）P{3 分钟至 4 分钟之间}；（4）P{至多 3 分钟或至少 4 分钟}；（5）P{恰好 2.5 分钟}。

解　（1）$P\{X\le 3\}=P_x(3)=1-e^{-0.4\times 3}=1-e^{-1.2}=0.6988$

（2）$P\{X\ge 4\}=1-P\{X\prec 4\}=1-F_X(4)=e^{-0.4\times 4}=0.2019$

（3）

$$\begin{aligned}&P\{3\le X\le 4\}=P\{X\le 4\}-P\{X<3\}\\&=F_X(4)-F_X(3)=1-e^{-0.4\times 4}-(1-e^{-0.4\times 3})\\&=0.0993\end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned}&P\{X\le 3\}+P\{X\ge 4\}=1-e^{-0.4\times 3}+(1-e^{-0.4\times 4})\\&=0.6988+0.2019=0.9007\end{aligned}$$

（5）$P\{X=0.25\}=0$。

21．设随机变量 X 的概率密度为

（1）$f(x)=\begin{cases}2(1-1/x^2), & 1\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 2-x, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

求 X 的分布函数 $F(x)$，并画出（2）中的 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形。

解 （1）当 $x<1$ 时，F（x）=0；当 $1\le x<2$ 时，则

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1} 0dt+\int_{1}^{x} 2(1-\frac{1}{t^2})dt$$
$$=2\int_{1}^{x}(1-\frac{1}{t^2})dt=2(t+\frac{1}{t})\Big|_1^x$$
$$=2x+\frac{2}{x}-4$$

当 $x\ge 2$ 时，F（x）=1。综合表示为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 2x+\frac{2}{x}-4, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

（2）当 $x<0$ 时，F（x）=0；当 $0\le x<1$ 时，则

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} tdt=\frac{1}{2}x^2$$

当 $1\le x<2$ 时，则

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{1} tdt+\int_{1}^{x}(2-t)dt$$
$$=\int_{0}^{1} tdt+\int_{1}^{x}(2-t)dt=\frac{1}{2}+(2t-\frac{1}{2}t^2)\Big|_1^x$$
$$=\frac{1}{2}+2x-\frac{1}{2}x^2-2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$$

当 $x\ge 2$ 时，F（x）=1。综合表示为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\le x<1\\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1 & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

27．某地区 18 岁女青年的血压（收缩压，以 mmHg 计）服从 N（110，12^2）。在该地区任选一 18 岁的女青年，测量她的血压 X。

（1）求 $P\{X\le 105\}, P\{100<X\le 120\}$；

（2）确定最小的 x，使 $P\{X > x\} \le 0.05$ 。

解　设女青年的血压为 X，则 $X \sim N(110,12^2)$ ，由此得

$$\frac{X-110}{12} \sim N(0,1)$$

（1）①

$$\begin{aligned}&P\{X \le 105\} = P\{\frac{X-110}{12} \le \frac{105-110}{12}\}\\&=\Phi(-\frac{5}{12}) = 1-\Phi(\frac{5}{12})\\&=1-\Phi(0.4167)\\&=1-0.6628=0.3372\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}&P\{100 < X \le 120\} = P\{\frac{100-110}{12} < \frac{X-110}{12} \le \frac{120-110}{12}\}\\&=P(-\frac{5}{6} < \frac{X-110}{12} \le \frac{5}{6})\\&=\Phi(\frac{5}{6})-\Phi(-\frac{5}{6}) = 2\Phi(\frac{5}{6})-1\\&=2\Phi(0.833)-1=2\times0.7967-1=0.5934\end{aligned}$$

（2）$P\{X > x\} \le 0.05$ ，用对立事件得

$$\begin{aligned}&1-P\{X \le x\} \le 0.05, P\{X \le x\} \ge 0.95\\&P\{\frac{X-110}{12} \le \frac{x-110}{12}\} \ge 0.95\end{aligned}$$

查表得 $\frac{x-110}{12} \ge 1.645$ ，解出 $x \ge 129.74$ ，则 x 的最小值为 129.74。

第 33、题 随机变量的函数分布

33．设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
P_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y = X^2$ 的分布律。

解　$Y = X^2$ 的所有可能取值为 0，1，4，9，取各个值的概率分别为

$P\{Y=0\}=P\{X^2=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{5}$

$P\{Y=1\}=P\{X^2=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30}$

$P\{Y=4\}=P\{X^2=4\}=P\{X=-2\}+P\{X=1\}$

$=P\{X=-2\}=\frac{1}{5}$

$P\{Y=9\}=P\{X^2=9\}=P\{X=-3\}+P\{X=3\}$

$=P\{X=3\}=\frac{11}{30}$

于是 Y 的分布律为

Y	0	1	4	9
P_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

此题 Y 与 X 不一一对应，X 取值为-1，1 对应 Y 取值为 1，这时 $P\{Y=1\}$ 等于 $P\{X=-1\}$与$P\{X=1\}$之和。

用表格表示 Y 在的分布律时，通常 Y 取值从小到大排序，看起来比较整齐。

---

34. 设随机变量 X 在（0，1）上服人均匀分布。

（1）求 $Y=e^X$ 的概率密度；

（2）求 $Y=-21nX$ 的概率密度。

解　X 的概率密度为

$$f_X(x)\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

首先求 Y 的分布函数，然后求 Y 的概率密度。（1）设 $F_Y(y)$ 为 Y 的分布函数，$F_Y(y)$ 为 Y 的概率密度。

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)$ =0；当 $1\le y<e$ 时，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\{e^X\le y\}=P\{X\le 1ny\}=\int_0^{1ny}dx=1ny$$

当 $y\ge e$ 时，$F_Y(y)$ =1。综合表示为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \ln y, & 1\le y<e\\ 1, & y\ge e\end{cases}$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1\le y<e\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（2）当 $y\prec 0$ 时，$F_Y(y)$ =0；当 $y\ge 0$ 时，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-21nX\le y\}$$

$$=P\{X\ge e^{\frac{y}{2}}\}$$

$$=\int_{e^{\frac{y}{2}}}^{1}dx=1-e^{\frac{y}{2}}$$

综合表示为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-\frac{y}{2}} & y\ge 0\end{cases}$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

由此可见，Y 服从参数为 $\dfrac{1}{2}$ 的指数分布。

直接求 Y 的概率密度 $F_Y(y)$。

（1）因为 $Y=e^X$ 对应的函数 $y=e^x$ 是严格单调增加函数，可以应用教材中的定理求解。

$y=e^x$ 的反函数为 $x=1ny$，又 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y}$，当 $1<y<e$ 时，则

$$f_Y(y)=f_X(1ny)\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{y}$$

综合表示为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<e\\ 0, & 其它\end{cases}$$

随机变量 Y 的取值范围根据 X 的取值范围（$0<x<1$）和函数 $y=e^x$ 来确定。当 $a<y<\beta$，

则$a=\min\{e^0,e\}=1,\beta=\max\{e^0,e\}=e$。

（2）因为$Y=-21nX$ 对应的函数$y=-21nx$是严格单调减少函数，其反函数$x=e^{-\frac{y}{2}}$，又

$\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$，则

$$f_Y(y)=\begin{cases}\left|-\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right|\frac{1}{y},=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

——

35．设 X～N（0，1）。（1）求$Y=e^X$的概率密度；（2）求$Y=2X^2+1$的概率密度；（3）$Y=\left|X\right|$的概率密度。

解　X 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

首先求 Y 的分布函数$F_Y(y)$，然后求 Y 的概率密度$f_Y(y)$。

（1）当$y\le 0$时，$F_Y(y)=0$；当$y\succ 0$时，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^x\le y\}$$
$$=P\{X\le 1ny\}=\int_{-\infty}^{1ny}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(1ny)^2}{2}} & y>0 \\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

（2）当$y\le 1$时，$F_Y(y)$=0；当$y\succ 1$时，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\le y\}$$
$$=P\{X^2\le\frac{y-1}{2}\}=P\{\left|X\right|\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\}$$
$$=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}$$

（3）当 $y\prec 0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 0$ 时，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\left|X\right|\le y\}$$
$$=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

直接求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

（1）$Y=e^X$ 对应的函数 $y=e^x$ 是严格单调增加函数，其反函数为 $x=1ny$，又 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$，则

Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{(1ny)^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

（2）$Y=2X^2+1$ 对应的函数 $y=2x^2+1$ 是非单调函数，分成两个单调区间，当 $x\prec 0$ 时，

则 $x=-\sqrt{\frac{y-1}{2}}$，当 $x\ge 0$ 时，$x=-\sqrt{\frac{y-1}{2}}$。于是当 $y>1$ 时，有

$$f_Y(y)=[f_X(-\sqrt{\frac{y-1}{2}})+f_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}})]\left|\frac{dx}{dy}\right|$$
$$=[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y-1}{4}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y-1}{4}}]\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{y-1}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}$$

当 $y\le 1$ 时，$f_Y(y)$=0。综合表示为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}$$

(3) $Y=\left|X\right|$对应的函数$y=\left|x\right|$是非单调函数,分成两个单调区间,其反函数$x=\pm y$,又

$\dfrac{dx}{dy}=\pm 1$，当$y\le 0$时，$f_Y(y)=0$；当$y\succ 0$时，则

$$f_Y(y)=\frac{2}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\left|\pm 1\right|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

综合表示为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

36.（1）设随机变量 X 的概率密谋为$f(x)$，$-\infty\prec x\prec\infty$。求$Y=X^3$的概率密度。

（2）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$Y=X^2$的概率密度。

解　设 Y 的分布函数为$F_Y(y)$，概率密度为$f_Y(y)$。

首先求$F_Y(y)$，然后求$f_Y(y)$。

（1）

$$\begin{aligned}&F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^3\le y\}\\&=P\{-\infty\prec X\le\sqrt[3]{y}\}\qquad(-\infty<y<+\infty)\\&=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}}f(x)dx\end{aligned}$$

则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{dF(y)}{dy}=f(\sqrt[3]{y})\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\quad(y\ne 0)$$

（2）当$y<0$时，$F_Y(y)$=0；当$y\ge 0$时，则

$$\begin{aligned}&F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{0<X\le\sqrt{y}\}\\&=\int_0^{\sqrt{y}}e^{x}dx=(-e^{-x})\Big|_0^{\sqrt{y}}=1-e^{-\sqrt{y}}\end{aligned}$$

综合表示为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-\sqrt{y}} & y\geq 0\end{cases}$$

于是 Y 的概率密度为

$$F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

直接求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

（1）$Y=X^3$ 对应的函数 $y=x^3$ 是严格单调增加函数，其反函数 $x=\sqrt[3]{y}$，又 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$，

则

$$f_Y(y)=f(\sqrt[3]{y})\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\quad (y\neq 0)$$

（2）$Y=X^3$ 对应的函数 $y=x^2$ 是非单调函数，便当 $x>0$ 时，$y=x^2$ 是严格单调增加函数，

其反函数 $x\sqrt{y}$，又 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，当 $y\leq 0$ 时，$f_Y(y)$=0；当 $y>0$ 时，则

$$f_Y(y)=f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}$$

综合表示为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

第三章　多维随机变量及其分布

习题解析

第 1、2.（1）、3、7、8、9、10、13、18、22 题 二维随机变量（X，Y）的联合分布、边缘分布、随机变量的独立性

1．在一箱子中装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中取两次，每次任取一只，考虑两种试验：（1）放回抽样；（2）不放回抽样。我们定义随机变量 X，Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, \text{若第一次取出的是正品}\\ 1, \text{若第一次取出的是次品}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, \text{若第二次取出的是正品}\\ 1, \text{若第二次取出的是次品}\end{cases}$$

试分别就（1）、（2）两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律。

解 （1）放回抽样。X 的分布律为 $P\{X=0\}=\frac{10}{12}, P\{X=1\}=\frac{2}{12}$，而两次试验的结果互不影响，所以 Y 的分布律为 $P\{Y=0\}=\frac{10}{12}, P\{Y=1\}=\frac{2}{12}$。二维随机变量（X，Y）的所有可能取值为（0，0），（0，1），（1，0），（1，1）。（X，Y）取各个值的概率用古典概型计算，得

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{10^2}{12^2}=\frac{25}{36}$$
$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{10\times 2}{12^2}=\frac{5}{36}$$
$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{2\times 10}{12^2}=\frac{5}{36}$$
$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{2\times 2}{12^2}=\frac{1}{36}$$

求二维离散型随机变量（X，Y）的颁布律就是求积事件发生的概率。如 $\{X=0,Y=0\}$ 是表示 $\{(X=0)\bigcap(Y=1)\}$，为简单起见，将符号“$\bigcap$”用“，”代替，是表示事件 $\{X=0\}$ 与 $\{Y=0\}$ 同时发生。因为是放回抽样，所以事件 $\{X=i\}与\{Y=j\}(i,j=0,1)$，是相互独立的，故也可以利用事件的独立性计算。如

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{10}{12}\times\frac{10}{12}=\frac{25}{36}$$

其他类似。于是二维随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

（2）不放回抽样。用古典概型计算，则得

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{P_{10}^2}{P_{12}^2}=\frac{10\times 9}{12\times 11}=\frac{45}{66}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{P_{10}^1P_2^1}{P_{12}^2}=\frac{10\times 2}{12\times 11}=\frac{10}{66}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{P_2^1P_{10}^1}{P_{12}^2}=\frac{2\times 10}{12\times 11}=\frac{10}{66}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{P_2^2}{P_{12}^2}=\frac{2}{12\times 11}=\frac{1}{66}$$

因为是不放回抽样，第一次试验结果影响第二度验结果发生的概率。也可以用概率的乘法公式，则得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\,|\,X=0\}=\frac{10}{12}\times\frac{9}{11}=\frac{45}{66}$$

其他类似，于是（X，Y）的分布律为

Y \ X	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

2.（1）盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球。以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数。求 X 和 Y 的联合分布律。

解　用古典概型。则（X，Y）的分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{C_3^iC_2^jC_2^{4-(i+j)}}{C_7^4}$$

$$(i=0,1,2,3;\ j=0,1,2;\ 2\le i+j\le 4)$$

其中

$P\{X=0,Y=0\}=0$

$P\{X=0,Y=1\}=0$

$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_3^0C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{1}{35}$

$P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_3^1C_2^0C_2^3}{C_7^4}=0$

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35}$

$P\{X=1,Y=2\}=\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$

$P\{X=2,Y=0\}=\frac{C_3^2C_2^0C_2^1}{C_7^4}=\frac{3}{35}$

$P\{X=2,Y=1\}=\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$

$P\{X=2,Y=2\}=\frac{C_3^2C_2^2C_2^0}{C_7^4}=\frac{3}{35}$

$P\{X=3,Y=0\}=\frac{C_3^3C_2^0C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$

$P\{X=3,Y=1\}=\frac{C_3^3C_2^1C_2^0}{C_7^4}=\frac{2}{35}$

$P\{X=3,Y=3\}=0$

二维随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

3．设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f_Y(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）确定常数 k；

（2）求 $P\{X<1,Y<3\}$；

（3）求 $P\{X<1.5\}$；

（4）求 $P\{X+Y\leq 4\}$。

解　（1）利用概率密度性质；$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$。有

$$\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy=1$$

等式左端为

$$\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy=k\int_0^2(6y-xy-\frac{1}{2}y^2)\Big|_2^4 dx=k\int_0^2(6-2x)dx$$

$$=k(6x-2\times\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2)$$

$$=8k$$

由 8k=1，得常数 k=$\frac{1}{8}$。

（2）

$$P\{X\prec 1,Y\prec 3\}=\int_0^1 dx\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1(6y-xy-\frac{1}{2}y^2)\Big|_2^3 dx=\frac{1}{8}\int_0^1(\frac{7}{2}-x)dx$$

$$=\frac{1}{8}(\frac{7}{2}x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{8}\times\frac{6}{2}=\frac{3}{8}$$

（3）

$$P\{X\prec 1.5\}=\int_0^{1.5}dx\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{1}{8}\times 6.75=\frac{27}{32}$$

（4）可知，积分域为三角域，所求概率为

$$P\{X<1,Y\leq 4\}$$

$$=\int_0^2 dx\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2(6y-xy-\frac{1}{2}y^2)\Big|_2^{4-x}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2(6-4x+\frac{1}{2}x^2)dx=\frac{1}{8}(6x-4\times\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{8}\times(12-8+\frac{8}{6})=\frac{2}{3}$$

7．设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求边缘概率概率密度。

解　当$0\le x\le 1$时，关于 X 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \int_0^x 4.8y(2-x)dy \\ &= 4.8(2-x)\int_0^x ydy \\ &= 4.8(2-x)(\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^x \\ &= 2.4x^2(2-x) \end{aligned}$$

综合表示为

$$f(x,y)=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

当$0\le y\le 1$时，关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(x)=\int_y^1 4.8y(2-x)dx = 4.8y\int_y^1(2-x)dx$$

$$=4.8y(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_y^1 = 4.8y(\frac{3}{2}-2y+\frac{1}{2}y^2)$$

$$=2.4y(3-4y+y^2)$$

综合表示为

$$f(x,y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求关于 X，Y 的边缘概率密度时，首先画出（X，Y）的概率密度$f(x,y)\neq 0$的区域，以便帮助正确确定积分上、下限。

8．设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求边缘概率密度。

解　当$x\succ 0$时，关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dx = e^{-x}$$

综合表示为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

当$y>0$时，关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}$$

综合表示为

$$f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-x}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

9．设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^{2y}, & x^2\le y\le y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）试确定常数 C；

（2）求边缘概率密度。

解　（1）利用概率密度 $f(x,y)$ 的性质确定常数 C。即

$$\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 cx^2ydy=1$$

计算等式端积分得

$$\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 cx^2ydy=c\int_{-1}^1 x^2(\frac{1}{2}y^2)\Big|_{x^2}^1 dx=\frac{c}{2}\int_{-1}^1 x^2(1-x^4)dx$$

$$=\frac{c}{2}(\frac{c}{2}\int_0^1 x^2dx-2\int_0^1 x^6dx)=c(\frac{1}{3}-\frac{1}{7})=\frac{4}{21}c$$

同 $\frac{4}{21}=1$ 得，$c=\frac{21}{4}$。

（2）当 $-1<x<1$ 时，关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{x^2}^1\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4)$$

综合表示为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{21}{2}x^2(1-x^4), & -1<x<1\\ & \text{其他}\\ 0, & \end{cases}$$

当 $0\prec y\prec 1$ 时，关于 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx=\frac{21}{4}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2dx=\frac{7}{2}y^{5/2}$$

综合表示为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{y^{5/2}}, & 0<y<1\\ & \text{其他}\\ 0, & \end{cases}$$

10．将某一医药公司 9 月份和 8 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y。据以往

积累的资料知 X 和 Y 联合分布律为

X \ Y	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.05	0.02	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

(1)求边缘分布律

(2)求 8 月份的订单数 51 时,9 月份的订单数的条件分布律.

解　(1)关于 X 的边缘分布律为

X	51	52	53	54	55
Pk	0.28	0.28	0.22	0.12	0.20

其中 $P\{X=51\}=0.06+0.05+0.05+0.01+0.01=0.18$ (按行相加),其他类似.

关于 Y 的边缘分布律为

X	51	52	53	54	55
Pk	0.28	0.28	0.22	0.09	0.13

其中 $P\{Y=51\}=0.06+0.07+0.05+0.05+0.05=0.28$ (按行相加),其他类似。

（2）求条件分布律其中 $P\{X=k|Y=51\},k=51,52,53,54,55$。

$$P\{X=51|Y=51\}=\frac{P\{X=51,Y=51\}}{P\{Y=51\}}=\frac{0.06}{0.28}=\frac{6}{28}$$

$$P\{X=52|Y=51\}=\frac{P\{X=52,Y=51\}}{P\{Y=51\}}=\frac{0.07}{0.28}=\frac{7}{28}$$

$$P\{X=53|Y=51\}=\frac{P\{X=53,Y=51\}}{P\{Y=51\}}=\frac{0.05}{0.28}=\frac{5}{28}$$

$$P\{X=54|Y=51\}=\frac{P\{X=54,Y=51\}}{P\{Y=51\}}=\frac{0.06}{0.28}=\frac{6}{28}$$

$$P\{X=55|Y=51\}=\frac{P\{X=55,Y=51\}}{P\{Y=51\}}=\frac{0.05}{0.28}=\frac{5}{28}$$

条件分布律为

X	51	52	53	54	55
$P\{X=k|Y=51\}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$

13．在第 9 题中（1）求条件概率概率密度 $f_{x|y}(x|y)$，特别，写出当$Y=\dfrac{1}{2}$时 X 的条件概率密度。（2）求条件概率密度 $f_{y|x}(y|x)$，特别，分别写出当 $X=\dfrac{1}{3},X=\dfrac{1}{2}$时 Y 的条件概率密度。（3）求条件概率 $P\{Y\ge\dfrac{1}{4}\Big|X=\dfrac{1}{2}\},P\{Y\ge\dfrac{3}{4}\Big|X=\dfrac{1}{2}\}$。

解　关于 X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{2}x^2(1-x^4), & -1<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^{5/2}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）当$0<y\le 1$时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{7}{2}y^{5/2}}=\dfrac{2}{3}x^2y^{-3/2}, & -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由此得

$$f_{X|Y}(x\Big|\frac{1}{2})=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^2(\dfrac{1}{2})^{-3/2}=3\sqrt{2}x^2, & -\sqrt{\dfrac{1}{2}}<x<\sqrt{\dfrac{1}{2}}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）当$-1\prec x\prec 1$时，则

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)}=\dfrac{2y}{1-x^4}, & x^2\prec y\prec 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由此得

$$f_{Y|X}(y\Big|\frac{1}{3})=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-(\frac{1}{3})^4}=\dfrac{81}{40}y, & \dfrac{1}{9}<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y\left|\frac{1}{2}\right.)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-(\frac{1}{2})^4}=\dfrac{32}{15}y, & \dfrac{1}{4}<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（3）

$$P\{Y\geq\frac{1}{4}\left|X=\frac{1}{2}\right.\}=\int_{\frac{1}{4}}^{1}f_{Y|X}(y\left|\frac{1}{2}\right.)dy$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{32}{15}ydy=(\frac{32}{15}\times\frac{1}{2}y^2)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}$$

$$=\frac{16}{15}-\frac{16}{15}\times(\frac{1}{4})^2=1$$

$$P\{Y\geq\frac{3}{4}\left|X=\frac{1}{2}\right.\}=\int_{\frac{3}{4}}^{1}f_{Y|X}(y\left|\frac{1}{2}\right.)dy$$

$$=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{32}{15}ydy=(\frac{32}{15}\times\frac{1}{2}y^2)\Big|_{\frac{3}{4}}^{1}$$

$$=\frac{16}{15}-\frac{16}{15}\times(\frac{3}{4})^2=\frac{7}{15}$$

18．设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在(0，1)上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & \text{y}\leq 0\end{cases}$$

(1)求 X 和 Y 的联合概率密度；

(2)设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率。

解　X 概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）因为 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，所以 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & 0<x<1,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的充要条件为 $4X^2-4Y\geq 0$，即 $X^2-Y\geq 0$，所求概率为

$$P\{X^2-Y\geq 0\}=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-y/2}=\int_0^1(-e^{-y/2})\Big|_0^{x^2}dx$$
$$=\int_0^1(1-e^{-x^2/2})dx=\int_0^{x^2}1dx-\int_0^1 e^{-x^2/2}dx$$
$$=1-\int_0^1 e^{-x^2/2}dx$$
其中
$$\int_0^1 -e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]$$
$$=\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)=0.3413\sqrt{2\pi}=0.8555$$
则得
$$P\{X^2-Y\geq 0\}=1-0.8555=0.1445$$
此题求积分 $\int_0^1 -e^{-x^2/2}dx$ 的技巧是将被积函数配成标准正态概率密度，即 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x2/2}$，然后查标准正态分布表得积分值。

22．设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量,其概率密度分别为
$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$
$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$
求随机变量 Z=X+Y 的概率密度。

解　由于 X 和 Y 相互独立，因此 X 和 Y 的联合概率密度为
$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\leq x\leq 1, y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$
设 $F_Z(z)$ 和 $f_Z(z)$ 分别表示 Z 的分布函数和概率密谋。

首先求 Z=X+Y 的分布函数，然后求 Z=X+Y 的概率密度，这是基础方法。

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0; 0\leq z\prec 1$ 时，则
$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z\}=\iint\limits_{x+y\leq z}e^{-y}dxdy$$
$$=\int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=\int_0^z(-e^{-y})\Big|_0^{z-x}dx$$
$$=\int_0^z[(1-e^{-(z-x)})]dx=\int_0^z 1dx-\int_0^z e^{-y}e^x dx$$
$$=z-e^{-z}(e^x-1)=z-1+e^{-z}$$

当 $z \geq 1$ 时，则

$$F_Z(z) = \iint_{x+y\leq z} e^{-y} dxdy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy$$

$$= \int_0^z [(1-e^{-(z-x)})] dx = 1 - e^{-z}(e-1)$$

综合表示为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z - 1 + e^{-z}, & 0 \leq z < 1 \\ 1 - e^{-z}(e-1), & z \geq 1 \end{cases}$$

则 Z=X+Y 的概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ e^{-z}(e-1), & z \geq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

直接求 Z=X+Y 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

当 $0 < z < 1$ 时，由 $0 \leq x \leq 1, z - x > 0 (y > 0)$，使被积函数不等于零，得 $0 \leq x \leq 1$ 和 $x < z$ 的交集为 $0 \leq x < z$，则

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = 1 - e^{-z}$$

当 $z \geq 1$ 时，$0 \leq x \leq 1$ 和 $x < z$ 的交集为 $0 \leq x \leq 1$，则

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = e^{-z}(e-1)$$

其他，$f_Z(z) = 0$。综合表示为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ e^{-z}(e-1), & z \geq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

用雅可比变换法。

令 $Z = X + Y, U = X$ 其反变换为 $Y = Z - U, X = U$，变换的雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

则（U，Z）的概率密度为

$$g(u,z) = f(u, z-u)|J|$$

$$= \begin{cases} e^{-(z-u)}, & 0 \leq u \leq 1, z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 Z=X+Y 的概率密度，等价求关于 Z 的边缘概率密度。即

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(u,z)du=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-u)}du$$

当$0<z<1$时，由$0\le u\le 1$和$u<z$，得交集$0\le u<z$，于是

$$f_Z(z)=\int_0^z e^{-(z-u)}du=1-e^{-z}$$

当$x\ge 1$时，由$0\le u\le 1$和$u<z$，得交集$0\le u<1$，于是

$$f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-u)}du=e^{-z}(e-1)$$

其他，$f_Z(z)=0$。综合表示为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{-z}(e-1), & z\ge 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

经常用到的是前两种求解方法。

第四章　随机变量的数字特征

习题解析

第 2、5、6.（1）、7、12、13、15、21、23、29、31、题 随机变量的数学期望和方差

——

2. 某产品的次品率为 0.1,检验员每检验 4 次.每次随机地取 10 件产品进行检验,如发现其中的次品数多于 1,就去调整设备.以 X 表示一天中调整设备的次数,试求 E(X)。(设诸产品是否为次品是相互独立的。)

解　每天检验 4 次，一天中调整设备次数 X 服从二项分布$b(4,p)$，p 表示每次检验需调整的概率。从一批产品中随机地取 10 件，近似放回抽样，即 10 件中次品的个数 Y 服从二项分布$b(10,0.1)$，其分布律为

$$P\{Y=k\}=C_{10}^{K}(0.1)^{10-k}\quad (k=0,1,2,\cdots,10)$$

而

$$\begin{aligned}p&=P\{Y>1\}=1-P(Y=1)\\&=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}\\&=1-(0.9)^{10}-C_{10}^{1}(0.1)\times(0.9)^{9}\\&=1-(0.9)^{10}-(0.9)^{9}\\&=1-0.736=0.264\end{aligned}$$

于是$X\sim b(4,0.264)$，其分布律为

$$P\{Y=i\}=C_4^i(0.264)^i(0.763)^{4-i}\quad (i=0,1,2,3,4)$$

所求数学期望为

$E(X)=np=4\times 0.264=1.056$

5．设在某一规定的时间间隔里，某电气设备用于最大负荷的时间 X（以分计）是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1500^2}x, & 0\le x\le 1500\\ \frac{-1}{1500^2}(x-3000), & 1500< x\le 3000\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 E（X）。

解　所求数学期望为

$$E(X)=\int_0^{1500}x\frac{1}{1500^2}xdx+\int_{1500}^{3000}x[\frac{-1}{1500^2}(x-3000)]dx$$
$$=\frac{1}{1500^2}\int_0^{1500}x^2dx-\frac{1}{1500^2}\int_{1500}^{3000}x^2dx+\frac{1}{1500^2}\int_{1500}^{3000}3000xdx$$
$$=\frac{1}{1500^2}[(\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{1500}-(\frac{1}{3}x^3)\Big|_{1500}^{3000}+(1500x^2)\Big|_{1500}^{3000}]$$
$$=\frac{1}{1500^2}[\frac{1500^3}{3}-\frac{3000^3-1500^3}{3}+1500x(3000^2-1500^2)]$$
$$=\frac{1}{1500^2}[\frac{2\times 1500^3}{3}-\frac{3000^3}{3}+1500\times 3000^2-1500^2]$$
$$=\frac{1500}{3}-\frac{3000^3}{3\times 1500^2}+\frac{3000^2}{1500}$$
$$=-500-4000+6000=1500$$

6．（1）设随机变量 X 的分布律为

X	−2	0	2
pk	0.4	0.3	0.3

求 $E(X),E(X^2),E(3X^2+5)$。

解　① $E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_kp_k=(-2)\times 0.4+0\times 0.3+2\times 0.3=-0.2$

②求 $E(X^2)$ 有两种方法。一种方法是先求 $Y=X^2$ R 分布律，然后利用 Y 的分布律求 Y 的数学期望。Y 的分布律为

X	0	4
pk	0.3	0.7

则

$$E(Y)=E(X^2)=0\times0.3+4\times0.7=2.8$$

另一种方法是直接利用 X 的分布律求 Y 的数学期望。

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{3}x_k^2p_k=(-2)^2\times0.4+0\times0.3+2^2\times0.3$$
$$=4\times0.4+4\times0.3=2.8$$

③与②类似. 一种方法是先求 $Z=3X^2+5$ 的分布律,然后求数学期望。Z 的分律为

X	5	17
pk	0.3	0.7

则

$$E(Z)=E(3X^2+5)=5\times0.3+17\times0.7=13.4$$

另一种方法是直接利用 X 的分布律求 Z 的数学期望。

$$E(Z)=E(3X^2+5)=[3\times(-2)^2+5]\times0.4+(3\times0+5)\times0.3+(3\times2^2+5)\times0.3=13.4$$

7．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$$

求（1）$Y=2X$；（2）$Y=e^{-2x}$ 的数学期望。

解　（1）首先求 $Y=2X$ 的概率密度，然后求数学期望。因为 $Y=2X$ 对应的函数 $y=2x$ 是严格单调函数，其反函数 $x=\frac{y}{2}$，又 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}$，则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=f(\frac{y}{2})\frac{1}{2}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}$$

所求数学期望为

$$E(Y)=E(2X)=\int_0^{+\infty}y\frac{1}{2}e^{-y/2}dy$$
$$=(-ye^{-y/2})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-y/2}dy$$
$$=(-2e^{-y/2})\Big|_0^{+\infty}=2$$

利用 X 的概率密度直接求数学期望。

$$E(Y)=E(2X)=\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx=2$$

（2）首先求$Y=e^{-2x}$的概率密度，然后求数学期望。

$Y=e^{-2x}$对应的函数$Y=e^{-2x}$是严格单调减少函数，其反函数为$x=-\frac{1}{2}1ny$，又$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2y}$，

则 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=f(-\frac{1}{2}1ny)\left|-\frac{1}{2y}\right|=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所求数学期望为

$$E(Y)=E(e^{-2x})=\int_0^{+\infty}y\frac{1}{2\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{1/2}dy$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}y^{3/2})\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

利用 X 的概率密度，直接求数学期望。

$$E(Y)=E(e^{-2x})=\int_0^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=(-\frac{1}{3}e^{-3x})\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{3}$$

12．某车间生产的圆盘其直径在区间（a，b）上服从均匀分布。试求圆盘面积的数学期望。

解　设圆盘直径为 X，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设圆盘面积为 Y，而$Y=\pi(\frac{X}{2})^2=\frac{\pi X^2}{4}$，则得

$$E(Y)=\int_a^b\frac{\pi x^2}{4}\bullet\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{\pi}{4(b-a)}\int_a^b x^2dx=\frac{\pi}{4(b-a)}(\frac{1}{3}x^3)\Big|_a^b$$

$$=\frac{\pi(b^2+ab+a^2)}{12}$$

13．设电压（以 V 计）$X\sim N(0,9)$。将电压施加于一检波器，其输出电压为，求输出的电压 Y 的均值。

解　　由 $X \sim N(0,9)$，得 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{18}} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

求电压 Y 的均值，即是求数学期望 $E(Y)$。

$$E(Y)=E(5X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}5x^2\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{18}}dx=\frac{10}{3\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{18}}dx$$

$$\underline{\underline{令t=\frac{x^2}{18}}}\frac{10}{3\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}18te^{-t}\sqrt{18}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

$$=\frac{90}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{90}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt=\frac{90}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{3}{2})$$

其中 $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$，代入 E（Y），得

$$E(Y)=\frac{90}{\sqrt{\pi}}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=45V$$

另一方法。由 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$，得

$$E(Y)=5E(X^2)=5(9+0)=45V$$

15．将 n 只球（$1-n$ 号）随机地放进 n 只盒子（$1-n$ 号）中去，一只盒子只装一只求。若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对。记 X 为总的配对数，求 $E(X)$。

解　　引进随机变量

$$X_i=\begin{cases}1, & 第\mathrm{i}号球放进第\mathrm{i}号盒子\\ 0, & 第\mathrm{i}号球未放进第\mathrm{i}号盒子\end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$。因为将 n 只球随机地放进 n 只盒子，看做把 n 只球进行全排列，有 $n!$ 排列数。第 i 号盒子，剩余的（n-1）只球进行全排列，有（n-1）! 种排列数。由此得 X_i 的分布律为

$$P\{X_i=1\}=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

$$P\{X_i=0\}=1-\frac{1}{n}$$

所以$E(X_i)=1\times\frac{1}{n}+0\times(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$。由数学期望性质得

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\times\frac{1}{n}=1$$

21．设长方形的高（以 m 计）$X\sim U(0,2)$，已知长方开的周长（以 m 计）为 20，求长方形面积 A 的数学期望和方差。

解　设长方形的长为 Y，有 20=2Y+2X，由 10=Y+X，得 Y=10-X，则长方形面积 A=（10-X）X，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所求数学期望为

$$E(A)=E[(10-X)X]=\int_0^2(10-x)x\frac{1}{2}dx$$
$$=5(\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^2-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2$$
$$=10-\frac{3}{4}=\frac{26}{3}=8.667$$

又

$$E(A^2)=E[((10-X)X))^2]=\int_0^2(10-x)^2x^2\frac{1}{2}dx$$

所求方差为

$$D(A)=E(A^2)-[E(A)]^2=96.533-(8.667)^2=21.42$$

23．五家商店联营，它们每两周售出的某种农产品的数量（以 kg 计）分别为X_1，X_2，X_3，X_4，X_5。已知$X_1\sim N(200,225)$，$X_2\sim N(240,240)$，$X_3\sim N(180,225)$，$X_4\sim N(260,265)$，$X_5\sim N(327,270)$，X_1，X_2，X_3，X_4，X_5相互独立。

（1）求五家商店两周的总销售量均值和方差；

（2）商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少储存多少公斤该产品？

解　（1）与第 21 题类似。利用服从正态分布的独立变量的线性组合仍然服从正态分布这一重要结论。设$\sum_{i=1}^{5}X_i$表示 5 家商店两周的总销售量，则有$\sum_{i=1}^{5}X_i$服从正态分布，且

$$E(\sum_{i=1}^{5} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 200+240+180+260+320=1200$$

$$D(\sum_{i=1}^{5} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = 225+240+225+265+270=1225$$

故 5 家商店两周的总销售量 $\sum_{i=1}^{5} X_i$ 的均值为 1200，方差为 1225。

（2）设 Y=$\sum_{i=1}^{5} X_i$，S 表示仓库存量，根据题意得

$$P\{Y \le S\} > 0.99$$

由（1）知 $Y \sim N(1200,1225)$，所以

$$P\{\frac{Y-1200}{35} \le \frac{S-1200}{35}\} > 0.99, \Phi(\frac{S-1200}{35}) > 0.99$$

查表得 $\Phi(\frac{S-1200}{35}) > 2.33$，解出 $S > 2.33 \times 35 + 1200 = 1281.55$，因此商店的仓库应至少储存 1282kg 该产品。

---

29. 设随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	−1	0	1
−1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的。

证明　第 24 题是二维连续型随机变量，此题是二维离散型随机变量，但它们都有相同的结果。

关于 X 的边缘分布律为

X	−1	0	1
$P\{X = X_i\}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

关于 Y 的边缘分布律为

Y	−1	0	1
$P\{Y = y_j\}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

因为$P\{X=0,Y=0\}=0$,而$P\{X=0\}=\frac{2}{8},P\{Y=0\}=\frac{2}{8}$,

故$P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$，所以 X 和 Y 不相互独立。

下面求 X，Y 的数字特征。

$$E(X)=(-1)\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$$

$$E(Y)=(-1)\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$$

$$D(X)=D(X^2)=(-1)^2\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

$$D(Y)=D(Y^2)=(-1)^2\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

关于 XY 的分布律为

XY	−1	0	1
P_k	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

其中

$$P\{XY=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$$
$$P\{XY=1\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$$
$$P\{XY=0\}=1-P\{XY=-1\}+P\{XY=1\}$$
$$=1-\frac{2}{8}-\frac{2}{8}=\frac{4}{8}$$

由此得

$$E(XY)=(-1)\times\frac{2}{8}+0\times\frac{4}{8}+1\times\frac{2}{8}=0$$

则 X 和 Y 的相关系数为

$$\rho XY=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$

故 X 和 Y 不相关。

31．设随机变量（X，Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求　$E(X),E(Y),COV(X,Y)$。

解　下面是直接利用二维随机量（X，Y）的概率密度求随机变量的数字特征。

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xdy=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} ydy=0$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xydy=\int_0^1 xdx\int_{-x}^{x} ydy=0$$

则 X 和 Y 的协方差为

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

第五章　大数定律及中心极限定理

习题解析

1．据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布。现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的。求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率。

解　利用独立同分布中心极限定理。设 X 表示电器元件的寿命，则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}, & x>0\\ 0, & \mathrm{x}\le 0\end{cases}$$

随机取出 16 只元件，其寿命分别用 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 表示，且它们相互独立，同服从均值为 100 的指数分布，则 16 只元件的寿命的总和近似服从正态分布。设寿命总和为 $Y=\sum_{i=1}^{16}X_i$，其中 $E(X_i)=100,D(X_i)=100^2$，由此得 $E(Y)=\sum_{i=1}^{16}E(X_i)=16\times100=1600,D(Y)=\sum_{i=1}^{16}D(X_i)=16\times100^2$。由独立同分布中心极限定理知，Y 近似服从正态分布 $N(1600,16\times100^2)$，于是

$$\begin{aligned}&P\{Y>1920\}=1-P\{Y\le1920\}\\&=1-P\{\frac{Y-1600}{\sqrt{16\times100^2}}\le\frac{1920-1600}{\sqrt{16\times100^2}}\}\\&=1-P\{\frac{Y-1600}{\sqrt{16\times100^2}}\le\frac{320}{400}\}\\&\approx1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119\end{aligned}$$

其中 $\Phi(\bullet)$ 表示标准正态分布函数。

---

4. 设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 0.5kg，均方差为 0.1kg, 问 5000 只零件的总重量超过 2510kg 概率是多少?

解　利用独立同分布中心极限定理. 设 X_i 表示第 i 只零件的重量(i=1,2, ⋯, 5000),且 $E(X_i)=0.5, D(X_i)=0.1^2$ 。设总重量为 $Y=\sum_{i=1}^{5000} X_i$ ，则有 $E(Y)=5000\times 0.5=2500, DY=5000\times 0.1^2=50$ 。由独立同分布中心极限定理知 Y 近似服从正态分布 $N(2500,50)$ ，而 $\frac{Y-2500}{\sqrt{50}}$ 近似服从标准正态分布 N（0，1）所求概率为

$$
\begin{aligned}
&P\{Y>2510\}=P\{\frac{Y-2500}{\sqrt{50}}>\frac{2510-2500}{\sqrt{50}}\}\\
&=P\{\frac{Y-2500}{\sqrt{50}}>1.4142\}\\
&\approx 1-\Phi(1.4142)\\
&=1-0.9207=0.0793
\end{aligned}
$$

第六章　样本及抽样分布

习题解析

1. 在总体 $N(52,6.3^2)$ 中随机抽一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 50.8 到 53.8 之间的概率。

解　样本均值 $\overline{X}$ 服从正态分布 $N(52,6.3^2)$ ，由此得 $\frac{\overline{X}-52}{6.3/6}\sim N(0,1)$ 。所求概率为

$$
\begin{aligned}
&P\{50.8<\overline{X}<53.8\}=P\{\frac{50.8-52}{6.3/6}<\frac{\overline{X}-52}{6.3/6}\}\\
&=\Phi(1.714)-\Phi(-1.143)\\
&=0.9564-(1-0.8729)\\
&=0.8293
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi(\bullet)$ 表示标准正态分布函数。

---

3. 在总体 $N(20,3)$ 的容量分别为 10，15 的两独立样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率。

解　设 $X_{11},X_{12},X_1{,}10$ 与 $X_{21},X_{22},\cdots,X_2{,}15$ 是从总体 $N(20,3)$ 中抽取的两个独立样本，

$\overline{X_1}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_{1i},\overline{X_2}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}X_{2i}$ 分别表示两个样本均值，因为 $\overline{X}_1$ 与 $\overline{X}_2$ 独立，所以 $(\overline{X}_1-\overline{X}_2)$ 服从正态分布 $N(0,\frac{3}{10}+\frac{3}{15})$，即 $\overline{X}_1-\overline{X}_2\sim N(0,\frac{1}{2})$。所求概率为

$$
\begin{aligned}
&P\{\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|>0.3\}=\{P\frac{\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|}{\sqrt{1/2}}>\frac{0.3}{\sqrt{1/2}}\}\\
&=1-P\{\frac{\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|}{\sqrt{1/2}}\le 0.3\sqrt{1/2}\}\\
&=2-2\Phi(0.424)\\
&=2-2\times 0.6628=0.6744
\end{aligned}
$$

6．设总体 $X\sim b(1,p),X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本。

（1）求 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布律；

（2）求 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布律；

（3）求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$。

解　（1）由 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立及与总体同分布，得 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布律为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\qquad(x_i=0,1;i=1,2,\cdots,n)$$

（2）样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自伯努得分布总体，可以理解为将伯努利试验重复独立地做 n 次，令随机变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第i次试验事件}A\text{发生}\\ 0, & \text{第i次试验事件}A\text{发生}\end{cases}$$

而 n 次试验中事件 A 发生的次数为 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 X 服从二项分布 $b(n,p)$，其分布律为

$$P\{X=x\}=C_n^x p^x(1-p)^{n-1}\qquad x=0,1,2,\cdots,n)$$

（3）

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p=p,\text{而}$$

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}p(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}$$

为了求$E(S^2)$，首先将S^2整理为

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+(\overline{X})^2)$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}(\overline{X})^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n(\overline{X})^2+n(\overline{X})^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n(\overline{X})^2]$$

则得

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)^2-nE((\overline{X})^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(p(1-p)+p^2)-n(\frac{p(1-p)}{n}+p^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}[np(1-p)+np^2-p(1-p)-np^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}(n-1)p(1-p)=p(1-p)$$

第（3）小题求解过程中，主要用到样本的独立性及与总体同分布性，即$E(X_i)=E(X)=p,D(X_i)=D(X)=p(1-p)(i=1,2,\cdots,n)$;又用到数学期望和方差的性质，即$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i),D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$。实际上，此题是验证了重要的结论：样本均值的数学期望等于总体的数学期望；样本均值的方差等于总体方差除以样本容量；样本方差的数学期望等于总体方差。即$E(\overline{X})=E(X),D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n},E(S^2)=D(X)$。

7．设总体$X\sim x^2(n),X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是来自 X 的样本，求$E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$。

解　首先求总体 X 的数学期望和方差，再利用第 6 题的重要结果。总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

X 的数字特征求解如下：

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}\int_0^{+\infty}x^{\frac{n+2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})2^{\frac{n+2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})2^{\frac{n+2}{2}}}x^{\frac{n+2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n+2}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}$$

其中积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})2^{\frac{n+2}{2}}}x^{\frac{n+2}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

中的被积函数是服从自由度为 $(n+2)$ 的 X^2 分布的概率密度，因此积分值是 1。同理得

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n+4}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}dx}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n+4}{2})2^{\frac{n+4}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(\frac{n+4}{2})2^{\frac{n+4}{2}}}x^{\frac{n+4}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n+4}{2})2^{\frac{n+4}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{n+2}{2}\bullet\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n+4}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}=n(n+2)$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=n(n+2)-n^2=2n$$

由此可见，X^2分布的数学期望等于自由度，方差等于 2 倍的自由度。于是

$$E(\overline{X})=E(X)=n$$

$$D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{2n}{10}=\frac{n}{5}$$

$$E(S^2)=D(X)=2n$$

9．设在总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取一容量为 16 的样本。这里μ,σ^2均为未知。

（1）求$P\{S^2/\sigma^2\le 2.041\}$，其中$S^2$为样本方差；

（2）求 D（S^2）。

解　（1）由$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2(n-1)$，得$\frac{15S^2}{\sigma^2}\sim X^2(15)$。所求概率为

$$P\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.041\}=P\{\frac{15S^2}{\sigma^2}\le 15\times 2.041\}$$

$$=1-P\{\frac{15S^2}{\sigma^2}>30.615\}$$

$$=1-0.01=0.99$$

根据自由度 15 和上侧分位点 30.615（表中为 30.578）查 X^2 分布表得概率为 0.01.

(2) 由 $\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim X^2$ 有

$$D(\frac{15S^2}{\sigma^2}) = 2\times 15 = 30, \frac{15S^2}{\sigma^4}D(S^2) = 30$$

由此得

$$D(S^2) = \frac{30\sigma^4}{15^2} = \frac{2}{15}\sigma^4$$

第七章　参数估计

习题解析

第 1～13 题　求参数点估计的方法和估计量评选的标准

1．随机地取 8 只活塞环，测得它们的直径为（以 mm 计）74.001　74.005　74.003　74.001　74.000　73.998　74.006　74.002 试求总体均值 φ 及方差 σ 的矩估计值,并求样本方差 S^2。

解　不论总体 X 服从任何分布，只要 X 的数学期望和方差存在，则总体均值 $E(X) = \mu$ 和方差 $D(X) = \sigma^2$ 的矩估计值分别为样本均值和样本二阶中心矩，即 $\mu = \overline{x}, \sigma^{\wedge 2} = B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$。

根据已知数据，经计算得

$$\overline{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i = 74.002$$

$$B_2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2 = 6\times 10^{-6}$$

于是 φ 和 σ^2 的矩估计值分别为 $\varphi = 74.002, \sigma^{\wedge 2} = 6\times 10^{-6}$。样本方差为

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2 = 6.86\times 10^{-6}$$

计算 $\overline{x}, B_2, s^2$ 都比较麻烦，借助计算器，在统计状态下，按相应的键就可以得到所需要的结果。

2．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一相应的样本值。求下述各总体的

密度函数或分布律中的未知参数的矩估计量和估计值。

（1） $f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>c\\ 0, & 其他\end{cases}$

其中$c>0$为已知参数，$\theta>1,\theta$不未知参数。

（2） $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

其中$\theta>1,\theta$不未知参数。

（3） $P\{X=x\}=\binom{m}{x}p^{x}(1-p)^{m-x}(x=0,1,2,\cdots),m,$ 其中$0<p<1$， p为未知参数。

解　求一个未知参数的矩估计量，首先求总体 X 的数学期望，然后令总体数学期望等于样本均值，解此方程，得未知参数的矩估计量。

（1）

$$E(X)=\int_{c}^{+\infty}x\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}dx=\theta c^{\theta}\int_{c}^{+\infty}x^{-\theta}dx$$
$$=\theta c^{\theta}(\frac{1}{1-\theta}x^{-(\theta+1)})\Big|_{c}^{+\infty}$$
$$=\theta c^{\theta}(\frac{-c^{1-\theta}}{1-\theta})=\frac{\theta c}{\theta-1}$$

对样本的一组观察值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，得样本均值为$\overline{x}$。

令$\frac{\theta c}{\theta-1}=\overline{x}$，解得$\hat{\theta}=\frac{\overline{x}}{x-c}$，则$\hat{\theta}=\frac{\overline{x}}{x-c}$为$\theta$的矩估计值，相就的$\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-c}$为$\theta$的矩估计量。其中$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$是随机变量，表示对样本的不同观察值，它取值不同，所以

$\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-c}$是随机变量。

（2）

$$E(X)=\int_{0}^{1}x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\sqrt{\theta}\int_{0}^{1}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}$$

对样本的一组观察值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，令$\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}=\overline{x}$，得$\theta$的矩估计值为$\hat{\theta}=(\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}})^2$， θ的矩估计值为$\hat{\theta}=(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}})^2$。

（3）总体 X 服从二项分布$b(m,p)$，由此得$E(X)=mp$，对样本的一组观察值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，

令 $mp=\overline{x}$，得 p 的矩估计值为 $\hat{p}=\frac{\overline{x}}{m}$，p 的矩估计量为 $\hat{p}=\frac{\overline{X}}{m}$。

4.（1）设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数。已知取得了样本值 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$ 。试求 θ 的矩估计值和最大似然估计量。

（2）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自参数为 的泊松分布总体的一个样本，试求 λ 的最大似然估计量及矩估计量。

解　（1）$E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta$ 。

样本均值 $\overline{x}=\frac{1+2+1}{3}=\frac{4}{3}$，令 $3-2\theta$，得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$。

似然函数为

$$L(\theta)=\theta^4 2\theta(1-\theta)=2\theta^5(1-\theta)$$

对数似然函数为

$$1nL(\theta)=1n2+51nl\theta+1n(1-\theta)$$

似然方程为

$$\frac{d1nL(\theta)}{d\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0$$

得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$。

（2）总体 X 服从泊松分布，其分布律为

$$P\{X=x\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\quad（x=0,1,2,\cdots）$$

而 $E(X)=\lambda$，令 $\lambda=\overline{X}$，得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\overline{X}$。

似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i\,!}=e^{-n\lambda}(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i\,!})\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

对数似然函数为

$$1nL(\lambda)=-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}1nx_i\,!+\sum_{i=1}^{n}x_i1n\lambda$$

似然方程为

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$$

得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$，$\lambda$ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\overline{X}$ 。λ 的矩估计量和最大似然估计量相等。

16．设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（以小时计）分别为

6.0　5.7　5.8　6.5　7.0　6.3　5.6　6.1　5.0

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 。求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

(1)若由以往经验知 $\sigma=0.6$(小时)；（2）若 σ 为未知。

解　（1）若 σ 为已知，求 μ 的置信区间，选取服从标准正态分布的随机变量（样本的函数）。具体步骤如下：

①随机变量 $Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 。

②给定置信水平 $1-a=0.95$ ，使

$$P\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{0.025}\}=0.95$$

查标准正态分布表得分位点为 $z_{0.025}$ =0.96。等价于

$$P\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 1.96<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 1.96\}=0.95$$

③ μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 1.96,\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 1.96)$$

④由样本数据，经计算得样本均值为 $\overline{x}=6$ ，已知 $\sigma=0.6,n=9$ ，于是 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(6-\frac{0.6}{3}\times 1.96,6+\frac{0.6}{3}\times 1.96)=(5.608,6.392)$$

实际上这是 μ 的一个确定的置信区间。

（2）若 σ 未知，求 μ 的置信区间，先取服从 t 分布的随机变量，具体步骤如下：

①随机变量（样本的函数）为 $t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ 。

②给定置信水平$1-a=0.95$，使$P\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{0.025}(8)\}=0.95$

查 t 分布表得分位点为$t_{0.025}(8)=2.3060$。等价于

$$P\{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\times 2.3060<\mu<\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\times 2.3060\}=0.95$$

③μ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\times 2.3060,\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\times 2.3060)$$

④由样本数据,经计算得样本均值为$\overline{x}=6$,样本标准差为$s=0.5745$.于是μ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(6-\frac{0.5745}{3}\times 2.3060,6+\frac{0.5745}{3}\times 2.3060)=(5.558,6.442)$$

不论标准正态分布, 还是 t 分布, 查分位点时, 都与任何未知参数无关。选取的样本的函数，含有待估的参数μ，不含其他的未知参数。

18．随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮口速度的样本标准差$s=11m/s$。设炮口速度服从正态分布。求这种炮口速度的标准差σ的置信水平为 0.95 的置信区间。

解　求标准差σ的置信区间时，首先求方差σ^2的置信区间。选取的随机变量（样本的函数）为

$$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2(n-1)$$

给定置信水平$1-a=0.95$，使

$$P\{X_{0.975}^2(8)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<X_{0.025}^2(8)\}=0.95$$

查X^2分布表得分位点为$X_{0.975}^2(8)=2.180,X_{0.025}^2(8)=17.535$。等价于

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{17.535}<\sigma<\frac{(n-1)S^2}{2.180}\}=0.95$$

于是σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\frac{(n-1)S^2}{17.535},\frac{(n-1)S^2}{2.180})$$

将$n=9,s=11$代入，得σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\frac{8\times 11^2}{17.535},\frac{8\times 11^2}{2.180})=(55.2,444.0)$$

由此得σ的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\sqrt{55.2},\sqrt{444.0})=(7.43,21.07)$$

23．设两位化验员 A，B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各作 10 次测定，其测定值的样本方差依次为$s_A^2=0.5419,s_B^2=0.6065$。设$\sigma_A^2,\sigma_B^2$分别为 A，B 所测定的测定值总体的方差，设总体均为正态的，且两样本独立。求方差比σ_A^2/σ_B^2的置信水平为 0.95 的置信区间。

解　　选取随机变量（样本的函数）服从 F 分布，即

$$F=\frac{S_A^2}{S_B^2\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

给定置信水平$1-a=0.95$，使

$$P=\{F_{0.975}(9,9)<\frac{S_A^2}{S_B^2\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}}<F_{0.975}(9,9))=0.95$$

查 F 分布表得分位点为$F_{0.025}(9,9)=4.03$。等价于

$$P\{\frac{S_A^2}{S_B^2F_{0.025}(9,9)}<\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}<\frac{S_A^2}{S_B^2F_{0.975}(9,9)}=0.95$$

其中$F_{0.975}(9,9)=\frac{1}{F_{0.975}(9,9)}$。于是$\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$的置信水平为 0. 95 的置信区间为

$$(\frac{0.5419}{4.03\times 0.6065},\frac{0.5419\times 4.03}{0.6065})=(0.222,3.601)$$

24．在一批货物的容量为 100 的样本中，经检验发现有 16 只次品，试求这批货物次品率的置信水平为 0. 95 的置信区间。

解　　大样本时，求非正态总体未知参数的置信区间，利用中心极限定理。设总体 X 服从（0-1）分布，其分布律为

$$P\{X=x\}=p(1-p)^{1-x}\quad (x=0,1)$$

其中参数 p 未知。从该总体抽取容量为 100 的样本$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$，设$\sum_{i=1}^{100}X_i$表示样本

中的次品数，$\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$ 表示样本的次品率，由棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{100}X_i$

近似服从正态分布 $N(100p,100p(1-p))$，而 $Z=\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100p}{\sqrt{100p(1-p)}}$ 近似服从标准正态分布。

给定置信水平 $1-a=0.95$，使

$$P=\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right|<z_{0.025}\}\approx 0.95$$

也可以写为

$$P=\{\left|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/100}}\right|<z_{0.025}\}\approx 0.95$$

解绝对值不等式 $\left|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/100}}\right|<z_{0.025}$，等价于解

$$(100+z_{0.025}^2)p^2-(2\times 100\overline{X}+z_{0.025}^2)p+100(\overline{X})^2<0$$

则得

$$p_1=\frac{200\overline{X}+z_{0.025}^2-\sqrt{(200\overline{X}+z_{0.025}^2)^2-400(100+z_{0.025}^2)(\overline{X})^2}}{2(100+z_{0.025}^2)}$$

$$p_2=\frac{200\overline{X}+z_{0.025}^2+\sqrt{(200\overline{X}+z_{0.025}^2)^2-400(100+z_{0.025}^2)(\overline{X})^2}}{2(100+z_{0.025}^2)}$$

于是 p 的近似置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(p_1,p_2)$$

查标准正态分布表得分位点为 $z_{0.025}=1.96$，将样本均值 $\bar{x}=\frac{16}{100}=0.16$ 代入 p_1,p_2 的表达式，得

$$p_1=\frac{200\times 0.16+1.96^2-\sqrt{(200\times 0.16+1.96^2)^2-400(100+1.96^2)\times 0.16^2}}{2\times(100+1.96^2)}$$

$$=0.102$$

$$p_2=\frac{200\times 0.16+1.96^2+\sqrt{(200\times 0.16+1.96^2)^2-400(100+1.96^2)\times 0.16^2}}{2\times(100+1.96^2)}$$

$$=0.244$$

由此得 p 的近似置信水平为 0.95 的置信区间为

$(0.102, 0.244)$

另一种方法。p 的近似置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\overline{X}-\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{100}}\times 1.96, \overline{X}+\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{100}}\times 1.96)$$

将 $\overline{x}=0.16$ 代入，得 p 的近似置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(016-\sqrt{\frac{0.16\times 0.84}{100}}\times 1.96, 016+\sqrt{\frac{0.16\times 0.84}{100}}\times 1.96)=(0.088, 0.232)$$

前种方法，p 的近似置信区间的长度 $L=0.142$；后种方法，p 的近似置信区间的长度 $L=0.144$。由此可见，前种方法比后种方法精度高。后种方法是把 $D(\overline{X})=\dfrac{p(1-p)}{n}$ 中的 p 用无偏估计量 $\overline{X}$ 代入，因此增加了误差。

第八章　假设检验

习题解析

正态总体均值的假设检验

1．某批矿砂的 5 个样品中的镍含量，经测定这（%）

3.25　3.27　3.24　3.26　3.24

没测定值总体服从正态分布,但参数均未知。问在 $a=0.01$ 下能否接受假设：这批矿吵的镍含量的均值为 3.25。

解　测定值 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\mu,\sigma^2$ 未知，关于均值 μ 的假设检验，用 t 检验法。检验过程如下：

①提出原假设和备择假设

$$H_0:\mu=3.25\quad H_1:\mu=3.25$$

②选取检验统计量

当原假设为真时，检验统计量为

$$t=\frac{\overline{X}-3.25}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

因为总体方差 σ^2 未知，故选取服从 t 分布的检验统计量。

③确定拒绝原假设的域

给定显著性水平 $a=0.01$，使

$$P\left\{|t|\geq t_{0.005}(4)\right\}=0.01$$

查 t 分布表得临界值为 $t_{0.005}(4)=4.6041$，则拒绝域为

$(-\infty,-4.6041]$或$[4.6041,+\infty)$

④计算检验统计量的观察值

根据给定的样本观察值，经计算得样本均值为 $\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=3.252$，样本标准差为

$s=\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=0.013$。则 t 的观察值为

$$t=\frac{3.252-3.25}{0.013/\sqrt{5}}=\frac{0.002\times\sqrt{5}}{0.013}=0.344$$

⑤作推断

国为$|t|=0.344<4.6041$，即 t 的观察值不落在拒绝域中，所以接受原假设，或说不拒绝原假设。可以认为这批矿砂的镍含量的均值为 3.25。

检验统计量 t 是样本的函数，当原假设为真时，不含任何未知参数。今后说确定拒绝域，就是指确定拒绝原假设的域。对于样本的一组观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n,(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 维空间的一个点，也冰是一次试验的结果。此题$|t|=0.344<4.6041$，说明根据一次试验结果 $\bar{x}=3.252$，未导致小概率事件发生，所以接受原假设。

---

3. 要求一种元件平均使用寿命不得低于 1000 小时，生产者从一批这种元件中随机抽取 25 件，测得其寿命的平均值为 950 小时。已知该种元件寿命服从标准差为$\sigma=100$ 小时的正态分布。试在显著性水平$\sigma=0.05$下确定这批元件是否合格？设总体均值为μ，μ未知。即需检验假设

$$H_0:\mu\geq 1000, H_1:\mu<1000$$

解　　元件寿命 $X\sim N(\mu,100^2)$，总体方差σ^2已知，关于总体均值μ的假设检验，用正态检查验法。

①检验假设

$H_0:\mu\geq 1000, H_1:\mu<1000$（是单边检验问题）

②选取检验统计量

当原假设为真时，检验统计量为

$$Z=\frac{\overline{X}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

因为总体方差σ^2已知，故选取服从标准正态分布的检验统计量。

③确定拒绝域

显然，$Z=\dfrac{\overline{X}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 偏小到一定程度，有可能拒绝原假设，给定显著性水平 $a=0.05$，使

$$P\{Z\leq -z_{0.05}\}=0.05 \quad (z_{0.05}>0)$$

查标准正态分布表得临界值为 $z_{0.05}=1.645$，则拒绝域为

$$(-\infty,-1.645]$$

④计算检验统计量的观察值

$$z=\frac{950-1000}{100/\sqrt{25}}=\frac{5\times(-50)}{100}=-2.5$$

⑤作推断

由于 z 的值落在拒绝域中，所以拒绝原假设。可以认为这批元件不合格。

当假设检验是单边检验时，其拒绝域方向的确定是沿着备择假设的不等号方向。

此题原假设 $H_0:\mu\geq 1000$，全部 μ 都比 H_1 中的要大。当 H_1 为真时，$\overline{X}$ 观察值 $\overline{x}$ 往往偏小，对于某一正常驻机构数 c，拒绝域为 $\overline{x}\leq c$，则

$$P\{拒绝\mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0为真\}=\underset{\mu\in \mathrm{H}_0}{P}\{\overline{X}\leq c\}$$

$$=P_{\mu\geq 1000}\{\frac{\overline{X}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{c-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

$$\leq P_{\mu\geq 1000}\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{c-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

因为 $\mu\geq 1000$，所以

$$\{\frac{\overline{X}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{c-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\}\subset\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{c-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\}$$

故上式不等式成立。要控制

$$P\{拒绝\mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0为真\}\leq a$$

只需令

$$P_{\mu\geq 1000}\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq\frac{c-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\}=a$$

由于 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，临界值 $\dfrac{c-1000}{\sigma/\sqrt{n}}=-z_a(z_a>0)$，解得 $c=1000-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_a$，即

$\overline{x} \le 1000 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a$，拒绝域为

$$z = \frac{\overline{x} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}} \le -z_a$$

给定 $a = 0.05$，则拒绝域为 $z = \frac{\overline{x} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}} \le -z_{0.05}$。由此得检验假设 $H_0 : \mu \ge 1000, H_1 : \mu < 1000$ 与检验假设 $H_0 : \mu \ge 1000, H_1 : \mu < 1000$ 的拒绝域相同。

一般地，单边假设检验为

$$H_0 : \mu \ge \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0 (\mu_0 \text{为已知常数})$$

与单边假设检验为 $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$ 类似。拒绝域为

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \le -z_a$$

单边假设检验为 $H_0 : \mu \le \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$

与单边假设检验为 $H_0 : \mu \le \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$ 类似。拒绝域为

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \le -z_a$$

4．下面列出的是某工厂随机选取的 20 只部件的装配时间（min）：9.8,10.4,10.6,9.6,9.7,9.9,10.9,11.1,9.6,10.2,10.3,9.6,9.9,11.2,10.6,9.8,10.5,10.1,10.5,9.7。

设装配时间的总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2), \mu, \sigma^2$ 均未知。是否可以认为装配时间的均值显著地大于 10（取 $a = 0.05$）？

解　设装配时间 X 服从下态分布 $N(\mu, \sigma^2), \mu, \sigma^2$ 均未知，关于 μ 的假设检验，用 t 检验法。检验假设

$$H_0 : \mu \le 10, H_1 : \mu > 10$$

与第 3 题分析类似。当原假设为真时，选取检验统计量为

$$t = \frac{\overline{X} - 10}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

给定显著性水平 $a = 0.05$，使

$$P\{t \ge t_{0.05}(19)\} = 0.05$$

查 t 分布表得临界值为 $t_{0.05}(19)=1.7291$，则得拒绝域为

$$[1.7291,+\infty)$$

根据样本观察值，经计算得样本均值为 $\bar{x}=10.2$，样本标准差为 $s=0.5099$，则 t 的观察值为

$$t=\frac{10.2-10}{0.5099/\sqrt{20}}=\frac{0.2\times\sqrt{20}}{0.5099}=1.754$$

由于 $t=1.754>1.7291$，即 t 的观察值落在拒绝域中，所以拒绝原假设，可以认为装配时间的均值显著地大于 10。

正态总体方差的假设检验

12．某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005（欧姆）。今在生产的一批导线中取样品 9 跟，测得 $s=0.007$（欧姆），设总体为正态分布，参数均未知。问在水平 $a=0.05$ 下能否认为这批导线的标准差显著地偏大？

解 关于正态总体方差的假设检验。检验假设

$$H_0:\sigma\le\sigma_0=0.005, H_1:\sigma\le\sigma_0=0.005$$

因为样本提供的信息为 $s=0.007$，强有力的支持备择假设，它的对立是原假设。用 X^2 检验法。

当原假设为真时，选取检验统计量服从 X^2 分布，即

$$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim X^2(n-1)$$

该统计时是样本的函数，不含任何未知参数。

给定显著性水平 $a=0.05$，使

$$P\{X^2\ge X_{0.05}^2(8)\}=0.05$$

查 X^2 分布表得临界值为 $X_{0.05}^2(8)=15.507$，则拒绝域为

$$[15.507,+\infty)$$

根据样本标准差 $s=0.007, n=9$，得 X^2 的观察值为

$$X^2=\frac{8\times0.007^2}{0.005^2}=15.68$$

由于 $X^2=15.68$ 落在拒绝域中，所以拒绝原假设，可以认为这批导线的标准显著偏大。

关于总体标准差的假设检验，转化为方差的假设检验，得用 X^2 分布查表，其结论相同。

此题原假设 $H_0:\sigma \le 0.005$，说明全部 σ 都比 H_1 中的要小，当 H_1 为真时 S^2 的观察值 s^2 往往偏大，对于某一常数 c，拒绝为 $s^2 \ge c$，则

$$
\begin{aligned}
&P\{拒绝H_0 \big| H_0为真\} = P_{\sigma\le 0.005}\{S^2 \ge c\} \\
&= P_{\sigma\le 0.005}\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \frac{(n-1)c}{\sigma_0^2}\} \\
&\le P_{\sigma\le 0.005}\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)c}{\sigma_0^2}\}
\end{aligned}
$$

为了使

$$P\{拒绝H_0 \big| H_0为真\} \le a$$

只需令

$$P_{\sigma\le 0.005}\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)c}{\sigma_0^2}\} = a$$

而 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 服从 X^2 分布，查 X^2 分布表得 $\frac{(n-1)c}{0.005^2} = X_a^2(n-1)$，解出 $c = \frac{0.005^2 X_a^2(n-1)}{(n-1)}$，即 $S^2 \ge \frac{0.005^2 X_a^2(n-1)}{(n-1)}$。拒绝域为

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{0.005^2} \ge X_a^2(n-1)$$

给定显著性水平 $a = 0.05$，则拒绝域为 $\frac{(n-1)s^2}{0.005^2} \ge X_{0.05}^2(n-1)$。由此可见，检验假设 $H_0:\sigma \le 0.005, H_1:\sigma > 0.005$ 与检验假设 $H_0:\sigma \le 0.005, H_1:\sigma > 0.005$ 类似，有相同的拒绝域。

---

14. 测定某种溶液中的水份，它的 10 个测定值给出 $s = 0.037\%$，设测定值决体为正态分布，σ^2 为总体方差，σ^2 未知。试在水平 $a = 0.05$ 下检验假设

$$H_0:\sigma \ge 0.04\%, H_1:\sigma < 0.04\%$$

解　检验假设 $H_0:\sigma \ge 0.04\%, H_1:\sigma < 0.04\%$ 是单边假设检验问题，并与检验假设 $H_0:\sigma \ge 0.04\%, H_1:\sigma < 0.04\%$ 类似。用 X^2 检验法。检验假设

$H_0:\sigma \geq \sigma_0 = 0.04\%, H_1:\sigma \geq \sigma_0 = 0.04\%$

当原假设为真时，选取检验统计量为

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim X^2(n-1)$$

给定显著性水平$a = 0.05$，使

$$P\{X^2 \leq X_{0.95}^2(9)\} = 0.05$$

查X^2分布表得临界值为$X_{0.95}^2(9) = 3.325$，则拒绝域为（0，3.325]。

根据$s = 0.037\%$，$n = 10$，计算检验统计量X^2的观察值为

$$X^2 = \frac{9\times(0.037\%)^2}{(0.04\%)^2} = 7.701$$

由于$X^2 = 7.701$不落在拒绝域中，所以接受原假设，可以认为$\sigma \geq 0.04\%$。

———————————————————————————————————————