Динамические модели МОБа

Теоретико-справочный материал

1. Простейшая динамическая модель МОБа с постоянными коэффициентами выглядит так:

$$X(t) = A \cdot X(t) + F \cdot X'(t) + C(t), \qquad (1)$$

где $x(t) = \left[x_j(t)\right]$ - вектор - столбец объемов производства в году t (t=0,1,2,…,T), (j=1,2,…,n);

$x'(t) = \left[x'_j(t)\right]$ - вектор – столбец абсолютных приростов производства в году t (вектор – столбец производных функций);

$C(t) = \left[C_j(t)\right]$ - вектор – столбец потребления (включая непроизводственное потребление) в году t;

$A = (a_{ij})$ - матрица коэффициентов прямых материальных затрат;

$F = (f_{ij})$ - матрица коэффициентов капиталоемкости приростов производства. Еще конкретнее, f_{ij} показывает долю общих затрат продукций $i-й$ отрасли, направленной в $j-ю$ отрасль в качестве производственных инвестиций (капитальных вложений) для обеспечения прироста продукции в этой отрасли в расчете на единицу.

2. Неоднородная система дифференциальных уравнений (1) можно свести к следующей эквивалентной системе, если использовать базовое матричное уравнение Леонтьева в динамике с последующим преобразованием:

$$X(t) = AX(t) + Y(t) \Leftrightarrow X(t) - AX(t) = Y(t) \Leftrightarrow X(t) = (E - A)^{-1}Y(t) \Leftrightarrow$$
$$X^{/}(t) = (E - A)^{-1}Y^{/}(t),$$

В результате подстановки выражения для $X^{/}(t)$ в (1) получим:

$$Y(t) = F \cdot (E - A)^{-1} \cdot Y'(t) + C(t), \qquad (2)$$

где $Y(t) = \left|Y_i(t)\right|$ - вектор – столбец конечного использования продукции отраслей в году t, (t=0,1,2,…,T при рассмотрении времени конечным дискретным множеством временны́х тактов), (i=1,2,…,n);

$Y'(t) = \left|Y'_i(t)\right|$ - вектор – столбец абсолютных приростов конечной продукции по отраслям.

На функции $X_i(t)$ и $Y_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ накладываются условия двукратной непрерывной дифференцируемости на отрезке $t \in [0; T]$.

3. Матрица A продуктивна или неразложима, матрица F невырожденная $\Rightarrow (E - A)^{-1} > (E + A)$, $F \cdot (E - A)^{-1} > F$ (поэлементно).

4. Решения системы (2) при $Y'(t) \geq 0$ в силу неотрицательности матриц $(E - A)^{-1}$ и $F \cdot (E - A)^{-1}$ гарантируют, что $Y(t) \geq 0$, $X(t) \geq 0$, $X'(t) \geq 0$.

5. Динамическая модель замкнутой производственно – экономической системы, представляющую собой линейную однородную систему дифференциальных уравнений, выглядит так (в матричной записи):

$$Y(t) = F \cdot (E - A)^{-1} \cdot Y'(t) \qquad (3)$$

Решение системы (3) характеризует предельные технологические возможности развития производства при заданных матрицах A и F, когда все ресурсы ВВП направляются на расширенное воспроизводство.

1. Общее решение системы (3) имеет следующий аналитический вид:

$$Y^*(t) = \sum_{l=1}^{n} d_l \cdot K_l \cdot e^{\lambda_l t} \qquad (4)$$

Параметры аналитического решения (4) λ_l, K_l, d_l получаются в следующей последовательности:

а) λ_l - корни характеристического уравнения n-го порядка.

$$\det\left|E - \lambda \cdot F \cdot (E - A)^{-1}\right| = 0 \qquad (5)$$

б) K_l - соответствующие λ_l собственные векторы матрицы $F \cdot (E - A)^{-1}$, $K_l = \left[K_1^{(l)}, K_2^{(l)}, \ldots, K_n^{(l)}\right]^T$, и являются решениями (бесконечными) алгебраической системы однородных уравнений:

$$\left|E - \lambda_l \cdot F \cdot (E - A)^{-1}\right| \cdot K_l = 0, \qquad (6)$$

где, 0 (“нуль”) – нулевой вектор – столбец размерности $n \times 1$;

в) d_l - постоянные, определяемые из системы уравнений:

$$\sum_{l=1}^{n} d_l \cdot K_l = Y(0) \qquad (7)$$

где, Y(0) – вектор–столбец конечного использования продукции отраслей в базисном году.

В общем случае решение (7) содержит несколько отличных от нуля компонент d_l. Поэтому, единственная траектория системы (3), выходящая из начальной точки Y(0), представляет собой комбинацию экспонент, растущих с различными темпами.

7. Пусть $\overline{F} = F \cdot (E - A)^{-1}$, $\overline{F} = (\overline{f_{ij}})$. Для матриц, относящихся к классу матриц $\overline{F}$, справедлива теорема **Перрона** (в нестрогой формулировке):

а) матрица $\overline{F}$ имеет положительное собственное число $\hat{S}$, которое превосходит модули всех остальных собственных чисел;

б) для $\hat{S}$, называемого корнем **Фробениуса – Перрона**, выполняется условие:

$$. \min_j \sum_{i=1}^{n} \overline{f_{ij}} \le \hat{S} \le \max_j \sum_{i=1}^{n} \overline{f_{ij}}$$

в) собственному числу $\hat{S}$ отвечает единственный собственный вектор $\hat{K} = (\hat{K}_1, \hat{K}_2, \ldots, \hat{K}_n)$, все координаты которого строго положительны и удовлетворяют условию: $\hat{K}_1 + \hat{K}_2 + \ldots + \hat{K}_n = 1$.

8. Так как $\lambda_l = 1/S_l$, $(l = \overline{1,n})$, $\hat{\lambda} = 1/\hat{S}$ – соответствует вектор $\hat{K}$.

9. Значение $\hat{\lambda}$ в межотраслевой динамической модели находит объяснение технологического темпа прироста ВВП, а вектор $\hat{K} = (\hat{K}_1, \hat{K}_2, \ldots, \hat{K}_n)$ - отраслевой структуры ВВП.

Пример. В соответствии с динамической моделью МОБа (3) по приведенным ниже данным (цифры условные) составить прогнозную таблицу МОБа на 2020 г., если базисный год ($t = 0$, как начальное условие) 2019 г. и $V_1 : m_1 = 1:4$, $V_2 : m_2 = 2:3$ в прогнозном году.

$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.23 \\ 0.23 & 0.35 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.72 \\ 0.72 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 430 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ

1. Вычисляем матрицы $(E - A)^{-1}$ и $\overline{F} = F \cdot (E - A)^{-1}$.

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.46 \\ 0.46 & 1.7 \end{pmatrix}, \qquad \overline{F} = \begin{pmatrix} 0.85 & 1.41 \\ 1.21 & 1.35 \end{pmatrix}.$$

2. Находим корни характеристического уравнения (5):

$$\lambda_1 = 0.41, \quad \lambda_2 = -4.37$$

3. Собственные векторы, соответствующие λ_1 и λ_2 получают вид:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0.47 \\ 0.53 \end{pmatrix}; \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Постоянные d_1 и d_2 из системы уравнений (7) получают значения:

$$d_1 = 685 \text{ и } d_2 = 82.2.$$

5. Аналитическое решение приобретает вид:

$$Y*(t)=685\cdot\begin{pmatrix}0.47\\0.53\end{pmatrix}\cdot e^{0.41t}+82.2\cdot\begin{pmatrix}1.3\\-1\end{pmatrix}\cdot e^{-4.37t}.$$

6. Глубина прогнозирования t=2 года, поэтому

$$Y*(2003)=685\cdot\begin{pmatrix}0.47\\0.53\end{pmatrix}\cdot e^{0.41\cdot 2}+82.2\cdot\begin{pmatrix}1.3\\-1\end{pmatrix}\cdot e^{-4.37\cdot 2}=\begin{pmatrix}730\\824\end{pmatrix}$$

Так как a_{ij} постоянны на прогнозный период. Составление таблицы МОБа на 2020 г. будет производиться в соответствии с алгоритмом, применяемым при решении примера по **статической модели МОБа.**

Самостоятельное задание

На основе содержащихся в приведенном примере данных требуется получить:

1) общее аналитическое решение (оно существует) однородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка;

2) построить графики для каждой переменной, записанной в виде общего аналитического решения системы (11) (см. ниже последовательность получения системы уравнений в классическом виде, в том числе, для двух переменных). Графики будут соответствовать экспоненциальным кривым. **ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ в MatLab-е**.

С этой целью (3) следует свести к классическому виду системы дифференциальных уравнений, воспользовавшись обозначениями $\overline{F}=F\cdot(E-A)^{-1}$, $\overline{F}=(\overline{f_{ij}})$. Действительно, получим:

$$Y(t)=\overline{F}\,Y'(t)\Leftrightarrow Y'(t)=(\overline{F})^{-1}Y(t), \qquad (8)$$

Существование обратной матрицы $(\overline{F})^{-1}$ гарантируется соблюдением условий согласно п.п. 3 (выше по тексту). Введем обозначения $(\overline{F})^{-1}=\widetilde{F}$, пусть, $\widetilde{F}=(\widetilde{f}_{ij})$. Тогда, опуская в дальнейшем аргумент t, из (8) получим:

$$Y'=\widetilde{F}\,Y. \qquad (9)$$

Система дифференциальных уравнений (9) в развернутой записи имеет вид (с учетом введенных обозначений):

$$\begin{aligned} y_1' &= \widetilde{f}_{11}y_1+\widetilde{f}_{12}\,y_2+\cdots+\widetilde{f}_{1n}\,y_n,\\ y_2' &= \widetilde{f}_{21}y_1+\widetilde{f}_{21}\,y_2+\cdots+\widetilde{f}_{2n}\,y_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_n' &= \widetilde{f}_{n1}\,y_1+\widetilde{f}_{n2}\,y_2+\cdots+\widetilde{f}_{nn}\,y_n. \end{aligned} \qquad (10)$$

Для выполнения самостоятельного задания система (10) будет содержать два уравнения:

$$\begin{aligned} y_1' &= \widetilde{f}_{11}y_1+\widetilde{f}_{12}\,y_2,\\ y_2' &= \widetilde{f}_{21}y_1+\widetilde{f}_{22}\,y_2. \end{aligned} \qquad (11)$$