ТЕМА. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ ДЛЯ ИНВЕСТОРА

5.1. СУЩНОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО ПОРТФЕЛЬНОГО АНАЛИЗА В ИНВЕСТИЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ.
5.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ.
5.3. ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ВЫБОРА ПОРТФЕЛЯ АКТИВОВ.
5.4. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР.

5.1.

В СОВРМЕННОЙ ТЕОРИИ ИНВЕСТИЦИЙ ОДНОЙ ИЗ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ЯВЛЯЕТСЯ ВЫБОР ПОРТФЕЛЯ, Т.Е. НАБОРА АКТИВОВ. ПРИ ЭТОМ В ОЦЕНКЕ КАК ОТДЕЛЬНЫХ АКТИВОВ, ТАК И ИХ ПОРТФЕЛЕЙ УЧИТЫВАЮТСЯ ДВА КЛЮЧЕВЫХ ФАКТОРА: ***ДОХОДНОСТЬ*** И ***РИСК.*** РИСК ПОЛУЧАЕТ КОЛИЧЕСТВЕННУЮ ОЦЕНКУ. СУЩЕСТВЕННЫМ МОМЕНТОМ ВЫСТУПАЕТ УЧЕТ ВЗАИМНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ ДОХОДНОСТЯМИ АКТИВОВ. ЭТО ПОЗВОЛЯЕТ ПРОВОДИТЬ ЭФФЕКТИВНУЮ ДИВЕРСИФИКАЦИЮ ПОРТФЕЛЯ, ПРИВОДЯЩУЮ К СУЩЕСТВЕННОМУ СНИЖЕНИЮ РИСКА ПОРТФЕЛЯ ПО СРАВНЕНИЮ С РИСКОМ ВКЛЮЧЕННЫХ В НЕГО АКТИВОВ. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЦЕССА ПОЗВОЛЯЕТ СТАВИТЬ И РЕШАТЬ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО ПО ТОМУ ИЛИ ИНОМУ КРИТЕРИЮ ВЫБОРА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ФИНАНСОВОМ АНАЛИЗЕ И ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ, ПОЛУЧИЛИ НАЗВАНИЕ ***ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ.*** ПРИМЕНЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ, ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ ПОЗВОЛИЛО СУЩЕСТВЕННО ПРОДВИНУТЬСЯ В ИССЛЕДОВАНИИ РИСКА ПРИ ПРИНЯТИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ. РАБОТЫ ЭТОГО НАПРАВЛЕНИЯ ПОЛУЧИЛИ НАЗВАНИЕ ПОРТФЕЛЬНОГО АНАЛИЗА В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ИНВЕСТИЦИЙ, ОСНОВОПОЛОЖНИКОМ КОТОРОЙ СЧИТАЕТСЯ МАТЕМАТИК ***Г. МАРКОВИЦ.***

ПРОСТЕЙШИЙ СПОСОБ ОПИСАНИЯ ПОРТФЕЛЯ СОСТОИТ В УКАЗАНИИ ЕГО СОСТАВА, Т.Е. КОЛИЧЕСТВА АКТИВОВ ТОГО ИЛИ ИНОГО ВИДА, ВХОДЯЩИХ В ПОРТФЕЛЬ. ПОД АКТИВОМ ПОНИМАЕТСЯ ЕГО ВИД ИЛИ ТИП, НАПРИМЕР, ЦЕННЫЕ БУМАГИ (АКЦИИ, ОБЛИГАЦИИ И ДР.).

ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ПРИМЕНЯЕТСЯ СТРУКТУРНЫЙ ВЕКТОР, КОТОРЫЙ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ УПОРЯДОЧЕННУЮ СОВОКУПНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ВЕСОВ КАЖДОГО АКТИВА. НАПРИМЕР, ПУСТЬ ПОРТФЕЛЬ СОСТОИТ ИЗ ДВУХ АКЦИЙ КОМПАНИИ F СТОИМОСТЬЮ 50 000 РУБ. КАЖДАЯ И ТРЕХ АКЦИЙ КОМПАНИИ G СТОИМОСТЬЮ 100 000 РУБ. КАЖДАЯ.
СУММАРНАЯ (ПОЛНАЯ) СТОИМОСТЬ ПОРТФЕЛЯ СОСТАВИТ:

$$2 \cdot 50\ 000 + 3 \cdot 100\ 000 = 400\ 000\ \textit{руб}.$$

ПОРТФЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЯЕТСЯ ВЕКТОРОМ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ВЕСОВ:

$$x = (x_1,\ x_2); \quad x_1 = \frac{100\ 000}{400\ 000} = 0{,}25;\ x_2 = \frac{300\ 000}{400\ 000} = 0{,}75.$$

$$x = (0{,}25;\ 0{,}75).$$

5.2.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ В КЛАССИЧЕСКОМ ВАРИАНТЕ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ НА ОСНОВЕ СЛЕДУЮЩИХ ДАННЫХ:

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n)$ - *класс активов*;

$m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, *где* $m_i = E(R_i)$ - *вектор средних (ожидаемых) доходностей активов*;

$C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \mathrm{cov}(R_i, R_j)$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ - *матрица ковариаци доходностей активов*;

R_i - *ожидаемая в будущем доходность актива* a_i, *как случайная величина.*

$$c_{ij} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} (r_{it} - \bar{r}_i) \cdot (r_{jt} - \bar{r}_j); \quad \bar{r}_l = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} r_{lt}, \quad l = i, \ j. \qquad \textbf{(5.1)}$$

ЦЕЛЬ ИНВЕСТОРА - ВЫБРАТЬ ОПТИМАЛЬНЫЙ, НАИЛУЧШИЙ ПО СВОИМ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ, ПОРТФЕЛЬ ИЗ АКТИВОВ КЛАССА A.

ФОРМАЛЬНО ПОРТФЕЛЬ π **ПРЕДСТАВЛЯЮТ В ВИДЕ** n - *мерного* **ВЕКТОРА:**

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

x_i **- «ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ВЕС» АКТИВА, ИЛИ ДОЛЯ НАЧАЛЬНОГО КАПИТАЛА, ИНВЕСТИРУЕМОГО В АКТИВ** a_i.

5.3.

ИНВЕСТОР ИСПОЛЬЗУЕТ ДВА КРИТЕРИЯ: СРЕДНЮЮ (ОЖИДАЕМУЮ) ДОХОДНОСТЬ ПОРТФЕЛЯ (МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ R)

$$E_\pi = E(R_\pi) = \sum_{i=1}^{m} m_i \cdot x_i, \ \ \text{в матричном виде} \ \ E = m \cdot x, \tag{5.2}$$

И РИСК ПОРТФЕЛЯ, ЛИБО КАК ДИСПЕРСИЯ

$$V_\pi = V(R_\pi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \ \ \text{в матричном виде} \ V = x \cdot C \cdot x', \tag{5.3}$$

ИЛИ КАК СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

$$\sigma_\pi = \sigma(R_\pi) = \sqrt{V_\pi}. \tag{5.4}$$

КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ПОРТФЕЛЯ РЕШАЕТСЯ ДЛЯ ДВУХ ОСНОВНЫХ МОДЕЛЕЙ.

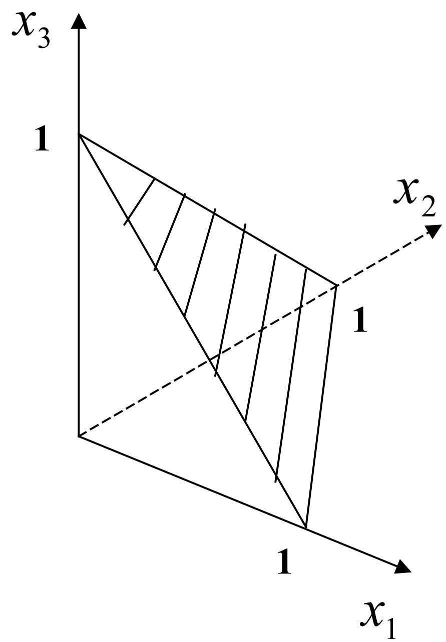
1. ***<u>МОДЕЛЬ БЛЭКА.</u>*** ДОПУСТИМЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ ЛЮБЫЕ ПОРТФЕЛИ, Т. Е. ВЕКТОРЫ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ ПОРТФЕЛИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ ЛИШЬ ОСНОВНОМУ ОГРАНИЧЕНИЮ:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{5.5}$$

<u>2. МОДЕЛЬ МАРКОВИЦА.</u> В КАЧЕСТВЕ ДОПУСТИМЫХ РАССМАТРИВАЮТСЯ ЛИШЬ ПОРТФЕЛИ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ И С УСЛОВИЕМ (5.5) .

$$x_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.6}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ ДОПУСТИМЫХ ПОРТФЕЛЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ МОДЕЛИ МАРКОВИЦА ПРЕДСТАВЛЕНА НА РИС. 5.1.



НАЛИЧИЕ ДВУХ КРИТЕРИЕВ ВЫБОРА ПОРТФЕЛЯ: МАКСИМУМ ОЖИДАЕМОЙ ДОХОДНОСТИ ПОРТФЕЛЯ (1), МИНИМУМ РИСКА ПОРТФЕЛЯ (2), ЗНАЧИТЕЛЬНО ОСЛОЖНЯЕТ ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ, ПОСКОЛЬКУ ПРИ УЛУЧШЕНИИ ОДНОГО КРИТЕРИЯ, КАК ПРАВИЛО, УХУДШАЕТСЯ ЗНАЧЕНИЕ ДРУГОГО.

ВОЗМОЖНЫ ТРИ ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ПОРТФЕЛЯ С НАЛИЧИЕМ ДВУХ КРИТЕРИЕВ.

ВЫБОР КРИТЕРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ		
I ПОДХОД	II ПОДХОД	III ПОДХОД
ОТКАЗ ОТ НАХОЖДЕНИЯ ОДНОГО «НАИЛУЧШЕГО» РЕШЕНИЯ ПО ВСЕМ КРИТЕРИЯМ, ПОСКОЛЬКУ ТАКОГО РЕШЕНИЯ МОЖЕТ НЕ СУЩЕСТВОВАТЬ. ВМЕСТО ЭТОГО ИЩУТСЯ Т.Н. *ЭФФЕКТИВНЫЕ* ИЛИ НЕУЛУЧШАЕМЫЕ РЕШЕНИЯ. В ЭТОМ СЛУЧАЕ ЛЮБОЕ ДРУГОЕ РЕШЕНИЕ, ЛУЧШЕЕ ПО ОДНОМУ КРИТЕРИЮ, БУДЕТ ОБЯЗАТЕЛЬНО ХУЖЕ ПО ДРУГОМУ.	ВЫБИРАЕТСЯ ОДИН ГЛАВНЫЙ КРИТЕРИЙ, А ДРУГОЙ СЛУЖИТ КРИТЕРИАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ. НАПРИМЕР, (1) МИНИМИЗИРУЕТСЯ РИСК ПОРТФЕЛЯ ПРИ ЗАДАННЫХ ЕГО ДОХОДНОСТИ И ДОХОДНОСТЕЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОРТФЕЛЬ АКТИВОВ. (2) МАКСИМИЗИРУЕТСЯ ДОХОДНОСТЬ ПРИ ЗАДАННОМ РИСКЕ.	СТРОИТСЯ НЕКОТОРЫЙ СУПЕРКРИТЕРИЙ С ПОМОЩЬЮ ОДНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ ОТ ИМЕЮЩИХСЯ КРИТЕРИЕВ. ЭТО ***ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ.*** ЕГО ЦЕЛЬ – ВОЗМОЖНОСТЬ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ВЫБОРА В ТЕХ СЛУЧАЯХ, КОГДА ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЕВ НЕ ПОЗВОЛЯЮТ ЭТО СДЕЛАТЬ. НАПРИМЕР, ПРИ СРАВНЕНИИ ДВУХ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ.

ВОЗМОЖНА СЛЕДУЮЩАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ТРЕТЬЕГО ПОДХОДА. ПУСТЬ ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ ВЫГЛЯДИТ ТАК:

$$U(x) = E(x) - \frac{\theta}{2} \cdot V(x), \quad \theta > 0. \qquad \textbf{(5.7)}$$

В СООТВЕТСТВИИ С (5.7) УВЕЛИЧЕНИЕ ДОХОДНОСТИ ПРИ НЕИЗМЕННОМ РИСКЕ ПРИВОДИТ К УВЕЛИЧЕНИЮ ПОЛЕЗНОСТИ, ТАК ЖЕ КАК И УМЕНЬШЕНИЕ РИСКА ПРИ НЕИЗМЕННОЙ ДОХОДНОСТИ. ЕСЛИ ЖЕ МЕНЯЮТСЯ ОБА КРИТЕРИЯ, ТО УВЕЛИЧЕНИЕ ИЛИ УМЕНЬШЕНИЕ ПОЛЕЗНОСТЕЙ ЗАВИСИТ ОТ ОТНОШЕНИЯ ИХ ИЗМЕНЕНИЙ. ПРИ ЭТОМ ПАРАМЕТР θ **ПОКАЗЫВАЕТ ВАЖНОСТЬ ДЛЯ ИНВЕСТОРА ФАКТОРА РИСКА ПО СРАВНЕНИЮ С ДОХОДНОСТЬЮ. ЧЕМ МЕНЬШЕ** θ**, ТЕМ НА БОЛЬШИЙ РИСК ГОТОВ ПОЙТИ ИНВЕСТОР ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ ДОХОДНОСТИ, И НАОБОРОТ, ЧЕМ БОЛЬШЕ** θ**, ТЕМ МЕНЬШЕ СКЛОНЕН ОН К РИСКУ. ТАКИМ ОБРАЗОМ, ЗНАЧЕНИЕ ЭТОГО ПАРАМЕТРА, ЗАДАВАЕМОГО ИНВЕСТОРОМ, ХАРАКТЕРИЗУЕТ ЕГО СКЛОННОСТЬ (ИЛИ НЕСКЛОННОСТЬ) К РИСКУ.**

5.4. ПРИМЕР. ОПРЕДЕЛИТЬ ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРТФЕЛЬ ИЗ ДВУХ ЦЕННЫХ БУМАГ A *и* B **С МИНИМАЛЬНЫМ РИСКОМ (II ПОДХОД) В РАМКАХ МОДЕЛИ МАРКОВИЦА, ЕСЛИ ОЖИДАЕМЫЕ ДОХОДНОСТИ АКТИВОВ СОСТАВЛЯЮТ**

$m_1 = E(R_1) = 11\%$, $m_2 = E(R_2) = 15\%$, *доходность портфеля в целом ожидается* $m = E(R) = 12\%$.

ДОХОДНОСТИ ЦЕННЫХ БУМАГ ЗА ПРЕДЫДУЩИЕ ПЕРИОДЫ ЗАДАНЫ В ТАБЛ. 5.1 (%).

МЕСЯЦЫ / АКТИВЫ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	8	9,4	7,2	6,8	10,2	12,4	11,2	13,6	12	11,8	12,3	13
B	7	8,8	9,2	8,9	10	11,1	12	13,1	14,7	12,2	13,1	14,5

РЕШЕНИЕ. **ПО ДАННЫМ ТАБЛИЦЫ ОПРЕДЕЛЯЕМ КОВАРИАЦИОННУЮ МАТРИЦУ**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 4{,}91 & 4{,}42 \\ 4{,}42 & 5{,}51 \end{pmatrix}.$$

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩАЯ СОБОЙ ЗАДАЧУ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, В РАМКАХ МОДЕЛИ МАРКОВИЦА ПРИОБРЕТАЕТ ВИД:

$$V(x) = 4{,}91 \cdot x_1^2 + 8{,}84 \cdot x_1 \cdot x_2 + 5{,}51 \cdot x_2^2 \to \min,$$

при условиях

$$\begin{cases} 11 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 = 12 \quad (\textit{критериальное ограничение}), \\ x_1 + x_2 = 1 \quad (\textit{основное ограничение}). \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

РЕШИМ УРЕЗАННУЮ ЗАДАЧУ (БЕЗ УЧЕТА УСЛОВИЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ). СОСТАВЛЯЕМ ФУНКЦИЮ ЛАГРАНЖА:

$$L(x_1, x_2, y, z) = 4{,}91 \cdot x_1^2 + 8{,}84 \cdot x_1 \cdot x_2 + 5{,}51 \cdot x_2^2 + y \cdot (11 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 - 12) + z \cdot (x_1 + x_2 - 1).$$

ВОСПОЛЬЗОВАВШИСЬ НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЕМ МИНИМУМА ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА ПОЛУЧИМ

$$x^* = (0{,}75\ ;\ 0{,}25). \quad V(x^*) = 4{,}78\ (\%)^2 \Rightarrow \sigma(x^*) = \sqrt{4{,}78} \approx 2{,}2\%.$$

$$\begin{cases} 9{,}82 \cdot x_1 + 8{,}84 \cdot x_2 + 11 \cdot y + z = 0, \\ 8{,}84 \cdot x_1 + 11{,}04 \cdot x_2 + 15 \cdot y + z = 0, \\ 11 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 - 12 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

ВЫВОД. **НАИЛУЧШЕЕ ВЛОЖЕНИЕ ИСХОДНОГО КАПИТАЛА В ЦЕННЫЕ БУМАГИ *А* И *В* ДОСТИГАЕТСЯ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПОТРФЕЛЯ С ДОЛЯМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ВЕКТОРУ** x^*, **ТАК КАК РИСК ОТКЛОНЕНИЯ ОТ СРЕДНЕЙ ОЖИДАЕМОЙ ДОХОДНОСТИ ПОТРФЕЛЯ МИНИМАЛЕН И РАВЕН 2,2%.**