8. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОБа

РАЗНОВИДНОСТЬЮ ПРОСТЕЙШЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МОБа ЯВЛЯЕТСЯ МОДЕЛЬ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩУЮ СОБОЙ НЕОДНОРОДНУЮ СИСТЕМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА (В МАТРИЧНОЙ ЗАПИСИ):

$$X(t) = A \cdot X(t) + F \cdot X'(t) + C(t), \qquad \text{(Д. 1)}$$

$X(t) = \left[X_j(t)\right]$ **- ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ ВАЛОВЫХ ВЫПУСКОВ ОТРАСЛЕЙ В МОМЕНТ ВРЕМЕНИ** $t \ (t \in [0, T], \quad j = \overline{1, n}.$

$X'(t) = \left[X'_j(t)\right]$ **- ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ ПРИРОСТОВ ВАЛОВЫХ ВЫПУСКОВ ОТРАСЛЕЙ В МОМЕНТ ВРЕМЕНИ** t **(ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ** $X_j(t)$.

$C(t) = \left[C_j(t)\right]$ **-ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ ПОТРЕБЛЕНИЯ ПРОДУКЦИИ ОТРАСЛЕЙ (ВКЛЮЧАЯ НЕПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ) В МОМЕНТ ВРЕМЕНИ** t.

$A = (a_{ij})$ **- МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРЯМЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЗАТРАТ.**

$F = (f_{ij})$ **- МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИРОСТНОЙ КАПИТАЛОЕМКОСТИ ПРОДУКЦИИ ОТРАСЛЕЙ.**

НЕОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (Д.1) ЭКВИВАЛЕНТНА СИСТЕМЕ

$$Y(t) = F \cdot (E - A)^{-1} \cdot Y'(t) + C(t), \qquad \text{(Д.2)}$$

$Y(t) = \left[Y_i(t)\right]$ **-ВЕКТОР-СТОБЕЦ КОНЕЧНОГО СПРОСА НА ПРОДУКЦИЮ ОТРАСЛЕЙ.**

$Y'(t) = \left[Y'_i(t)\right]$ **- ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ АБСОЛЮТНЫХ ПРИРОСТОВ КОНЕЧНОЙ ПРОДУКЦИИ ОТРАСЛЕЙ.**

МАТРИЦА A ПРОДУКТИВНА ИЛИ НЕРАЗЛОЖИМА (БОЛЕЕ ЖЕСТКОЕ ТРЕБОВАНИЕ) ;
F - НЕВЫРОЖДЕННА. $\Rightarrow (E - A)^{-1} > (E + A), \quad F \cdot (E - A)^{-1} > F$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (Д.2) ПРИ $Y'(t) \geq 0$ В СИЛУ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ МАТРИЦ $(E - A)^{-1}$ И $F \cdot (E - A)^{-1}$ ГАРАНТИРУЕТ $Y(t) \geq 0, \; X(t) \geq 0, \; X'(t) \geq 0.$

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАМКНУТОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ :

$$Y(t) = F \cdot (E - A)^{-1} \cdot Y'(t), \qquad \text{(Д. 3)}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (Д.3) ХАРКТЕРИЗУЕТ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСИ РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВА ПРИ ЗАДАННЫХ МАТРИЦАХ A И F , КОГДА ВСЕ РЕСУРСЫ ВВП НАПРАВЛЯЮТСЯ НА РАСШИРЕННОЕ ВОСПРОИЗВОДСТВО.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (Д. 3) ИМЕЕТ АНАЛИТИЧЕСКИЙ ВИД:

$$Y^*(t) = \sum_{p=1}^{n} d_p \cdot K_p \cdot e^{\lambda_p \cdot t}, \qquad \text{(Д. 4)}$$

ПАРАМЕТРЫ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ (Д. 4) $\lambda_p, \; K_p, \; d_p$ ПОЛУЧАЮТСЯ ПО АЛГОРИТМУ:

1. λ_p - КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ $n - го$ ПОРЯДКА:

$$\left| E - \lambda \cdot \overline{F} \right| = 0, \qquad \text{(Д. 5)}$$

ГДЕ $\overline{F} = F \cdot (E - A)^{-1}.$

2. K_p - СООТВЕТСТВУЮЩИЕ λ_p СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ $\overline{F}$,

$$K_p = \left\lfloor K_1^{(p)}, K_2^{(p)}, \ldots, K_n^{(p)} \right\rfloor^T.$$

КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРА K_p ЯВЛЯЮТСЯ РЕШЕНИЯМИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

$$\left(E - \lambda_p \cdot \overline{F}\right) \cdot K_p = 0. \qquad (Д.6)$$

3. d_p - ПОСТОЯННЫЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ:

$$\sum_{p=1}^{n} d_p \cdot K_p = Y(0). \qquad (Д.7)$$

$Y(0)$ -ВЕКТОР-СТОЛБЕЦ КОНЕЧНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОДУКЦИИ ОТРАСЛЕЙ В НЕКТОРЫЙ НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ.

В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЕ (Д.7) СОДЕРЖИТ НЕСКОЛЬКО ОТЛИЧНЫХ НУЛЯ КОМПОНЕНТ d_p. ПОЭТОМУ ЕДИНСТВЕННАЯ ТРАЕКТОРИЯ СИСТЕМЫ (Д. 3), ВЫХОДЯЩАЯ ИЗ НАЧАЛЬНОЙ ТОЧКИ $Y(0)$, ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ КОМБИНАЦИЮ ЭКСПОНЕНТ, РАСТУЩИХ С РАЗЛИЧНЫМИ ТЕМПАМИ.

ДЛЯ МАТРИЦЫ $\overline{F}$ СПРАВЕДЛИВА ТЕОРЕМА <u>ПЕРРОНА.</u>

ТЕОРЕМА.

а) МАТРИЦА $\overline{F}$ ИМЕЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ СОБСТВЕННОЕ ЧИСЛО $\hat{S}$, КОТОРОЕ ПРЕВОСХОДИТ ВСЕХ ОСТАЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ, ВЗЯТЫХ В ОТДЕЛЬНОСТИ;

б) ДЛЯ $\hat{S}$, НАЗЫВАЕМОГО КОРНЕМ ФРОБЕНИУСА-ПЕРРОНА, ВЫПОЛНЯЮТСЯ УСЛОВИЯ:

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} \overline{f_{ij}} \le \hat{S} \le \max_j \sum_{i=1}^{n} \overline{f_{ij}}; \qquad (Д.8)$$

в) СОБСТВЕННОМУ ЧИСЛУ $\hat{S}$ СООТВЕТСТВУЕТ ЕДИНСТВЕННЫЙ СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР $\hat{K} = (\hat{K}_1, \hat{K}_2, ..., \hat{K}_n)$, ВСЕ КООРДИНАТЫ КОТОРОГО СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ И

$$\hat{K}_1 + \hat{K}_2 + ... + \hat{K}_n = 1.$$

ТАК КАК $\lambda_p = 1/S_p, (p = \overline{1,n})$, $\hat{\lambda} = 1/\hat{S}$ - СООТВЕТСТВУЕТ ВЕКТОР $\hat{K}$.

ЗНАЧЕНИЕ $\hat{\lambda}$ В МЕЖОТРАСЛЕВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАХОДИТ ОБЪЯСНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ТЕМПА ПРИРОСТА ВВП, А ВЕКТОР $\hat{K} = (\hat{K}_1, \hat{K}_2, ..., \hat{K}_n)$ - ОТРАСЛЕВОЙ СТРУКТУРЫ ЭКОНОМИКИ.

ПРИМЕР. **СОСТАВИТЬ ОБЩЕЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ (Д.4) НА ОСНВОЕ СЛЕДУЮЩИХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ:**

$$A = \begin{bmatrix} 0,15 & 0,23 \\ 0,23 & 0,35 \end{bmatrix}, \quad \overline{F} = \begin{bmatrix} 0,85 & 1,41 \\ 1,21 & 1,35 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 430 \\ 280 \end{bmatrix}.$$

1. ВЫЧИСЛЯЕМ МАТРИЦЫ $(E - A)^{-1}$ **И** $\overline{F} = F \cdot (E - A)^{-1}$.

$$(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,3 & 0,46 \\ 0,46 & 1,7 \end{bmatrix}, \quad \overline{F} = \begin{bmatrix} 0,85 & 1,41 \\ 1,21 & 1,35 \end{bmatrix}.$$

2. НАХОДИМ КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (Д, 5).

$$\lambda_1 = 0,41; \quad \lambda_2 = -4,37.$$

3. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ λ_1 **И** λ_2 **ПОЛУЧАЮТ ВИД**

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0,47 \\ 0,53 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1.3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. ПОСТОЯННЫЕ d_1 **И** d_2 **ПОЛУЧАЮТСЯ РЕШЕНИЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (Д.7)**

$$d_1 = 685; \quad d_2 = 82,2.$$

5. ОБЩЕЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ (Д.4) ПОЛУЧАЕТ ВИД

$$Y^*(t) = 685 \cdot \begin{bmatrix} 0,47 \\ 0,53 \end{bmatrix} \cdot e^{0,41t} + 82,2 \cdot \begin{bmatrix} 1,3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{-4,37t}$$