Имитационное
и
статистическое
моделирование

Лектор:

доцент Шинкевич Елена Алексеевна

32 ч – лекции, из них 6 ч – УСРС

Форма контроля:

ЭКЗАМЕН

Лекция 1

§1. Введение

Важнейшей, универсальной целью рациональной деятельности человека является создание высокоэффективных систем, объектов, технологий процессов в экономике, технике, экологии, производстве, обществе.

Высокая эффективность предполагает достижения экстремума некоторых числовых характеристик – показателей эффективности. В связи с этим необходимо применение математических методов.

Но к реальному объекту, явлению, системе эти методы непосредственно не применимы. Необходимо, прежде всего, построить математическую модель системы, то есть приближенное описание системы с помощью математических соотношений.

Математическое моделирование (ММ) представляет собой исследование математической модели, изучение ее и перенос полученных сведений на моделируемую систему.

Математическое моделирование существует фактически с тех далеких времен, когда математический аппарат начинал применяться для решения практических задач. Однако, эти попытки часто заходили в тупик из-за сложности моделей (нелинейные уравнения; большое число переменных, параметров, уравнений; малая априорная информация и др.) и невозможности их исследования традиционными аналитическими методами.

С появлением и совершенствованием ЭВМ ситуация коренным образом изменилась. С математической моделью начали экспериментировать на ЭВМ. Появились новые понятия и подходы: вычислительный эксперимент, имитационное моделирование, статистическое моделирование.

В настоящее время *сущность ММ* состоит в замене исходной (исследуемой, управляемой, эксплуатируемой) системы ее математической моделью и дальнейшем экспериментировании с этой моделью при помощи вычислительно логических алгоритмов.

Для компьютерного моделирования характерно, что математическая модель системы представлена в виде программы для ЭВМ - компьютерной модели, позволяющей производить с ней вычислительные эксперименты.

В зависимости от математического аппарата, используемого при построении, и способа организации вычислительных экспериментов, можно выделить три взаимосвязанных **вида моделирования**:

- численное,
- статистическое
- имитационное.

При ***численном моделировании*** для построения компьютерной модели используются методы вычислительной математики, а вычислительный эксперимент заключается в численном решении некоторых математических уравнений при заданных значениях параметров и начальных условий.

Имитационное моделирование **(ИМ)** - это вид компьютерного моделирования, для которого характерно воспроизведение на ЭВМ (имитация) процесса функционирования исследуемой сложной системы.

При этом имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры, последовательности протекания во времени, что позволяет получить информацию о состоянии системы S в заданные моменты времени.

Статистическое моделирование **(СМ)** - это вид компьютерного моделирования, позволяющий получать статистические данные о процессах в моделируемой системе S.

§2. Понятие моделирования. Классификация моделей

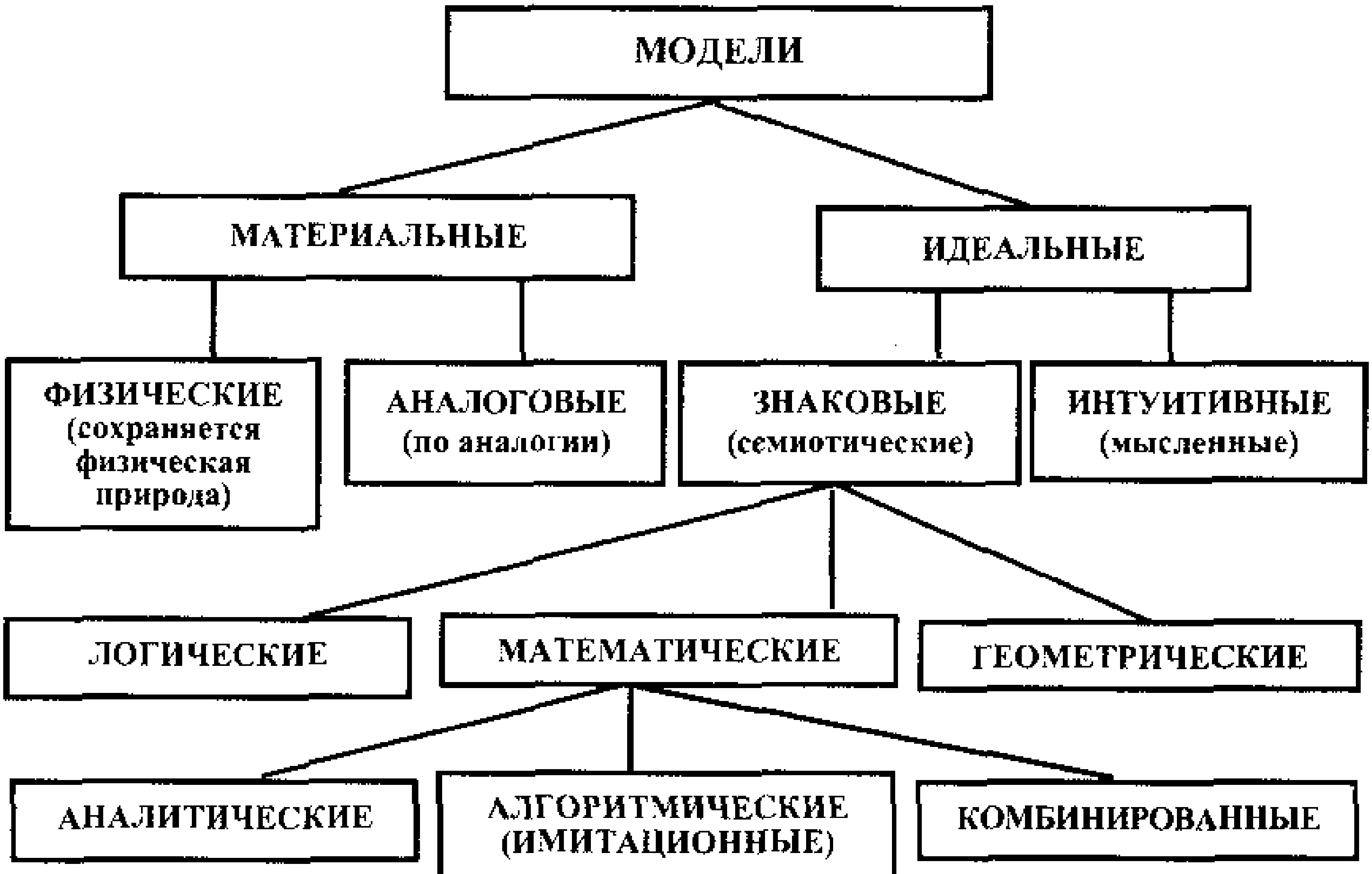
Модель — аналог, прототип, шаблон, образец, используемый вместо оригинала для решения задач (получения ответов на вопросы).

Модель строится на основании ограниченного множества известных нам данных (свойств, поведений) об оригинале.

Построение моделей и использование моделей (решение на них задач) производится с целью:

- получения неизвестных ранее данных, предсказания новых свойств и будущих поведений,
- извлечения пользы при реализации решений,
- систематизации (обобщения) известных данных.

Классификация моделей



По форме представления объектов модели можно разделить на две группы: ***материальные и идеальные***.

Материальные модели, в свою очередь, делятся на ***физические и аналоговые***. В *физических моделях* обеспечивается аналогия физической природы и модели.

В *аналоговых моделях* добиваются сходства процессов, протекающих в оригинале и модели.

Идеальные модели можно разделить на ***знаковые и интуитивные***.

Интуитивные модели используются для прогнозирования на основе анализа наблюдений прошлого периода: объема продаж, прибыли и денежного потока.

При этом не предпринимаются попытки объяснить причинные взаимосвязи, которые лежат в основе интуитивной модели.

Знаковые модели делятся на ***логические, геометрические и математические***.

Логические модели - модели, в которых представлены различные варианты выбора действий на основе умозаключений и анализа условий.

Геометрические - это графические формы и объемные конструкции. Например: рисунок, пиктограмма, чертеж, карта, план, объемное изображение и т.д.

Математические модели можно разделить на **аналитические, алгоритмические (имитационные) и комбинированные.**

Для *аналитического* моделирования характерно то, что для описания процессов функционирования системы используются системы алгебраических, дифференциальных, интегральных или конечно-разностных уравнений.

Аналитическая модель может быть исследована следующими методами:

- а) аналитическим, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик;
- б) численным, когда, не умея решать уравнения в общем виде, стремятся получить числовые результаты при конкретных начальных данных;

- в) качественным, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения).

Аналитические модели бывают ***детерминированные* и *статистические***.

Численный метод проведения аналитических расчетов с помощью датчиков случайных чисел получил название **метода статистических испытаний**, или **метода Монте-Карло**.

При ***алгоритмическом (имитационном) моделировании*** описывается процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Имитационные модели также могут быть детерминированными и стохастическими. В последнем случае в модели с помощью датчиков случайных чисел имитируется действие неопределенных и случайных факторов.

Такой метод моделирования получил название метода статистического моделирования.

В настоящее время этот метод считается наиболее эффективным методом исследования сложных систем, а часто и единственным практически доступным методом получения информации о поведении гипотетической системы на этапе ее проектирования.

Комбинированное моделирование позволяет объединить достоинства аналитического и алгоритмического моделирования.

При построении комбинированных моделей производится предварительная декомпозиция процесса функционирования модели на составляющие подпроцессы.

Для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных процессов строятся алгоритмические модели.

Моделирование – способ, процесс замещения оригинала его аналогом (моделью) с последующим изучением свойств и поведения оригинала на модели.

Процесс моделирования состоит из:

- формализации (проектирование и настройка модели, систем моделей и моделей систем),
- собственно моделирования (постановка различных задач и решение их на модели),
- интерпретации результатов моделирования.

Модель вместо исходного объекта используется в случаях, когда эксперимент опасен, дорог, происходит в неудобном масштабе пространства и времени (долговременен, слишком кратковременен, протяжен, невозможен, неповторим, ненагляден и т. д.)

Проиллюстрируем это:

- «эксперимент опасен» — при деятельности в агрессивной среде вместо человека лучше использовать его макет; примером может служить луноход;
- «дорог» — прежде чем использовать идею в реальной экономике страны, лучше опробовать её на математической или имитационной модели экономики, просчитав на ней все «за» и «против» и получив представление о возможных последствиях;
- «долговременен» — изучить коррозию — процесс, происходящий десятилетия, — выгоднее и быстрее на модели;

И т.д.

В самом простом случае технология моделирования подразумевает 3 этапа:

- формализация,
- собственно моделирование,
- интерпретация.

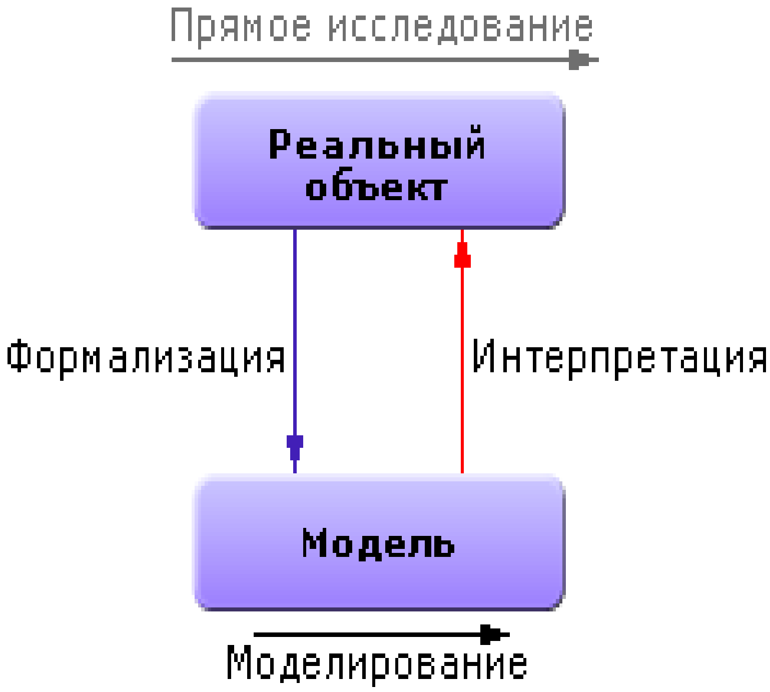
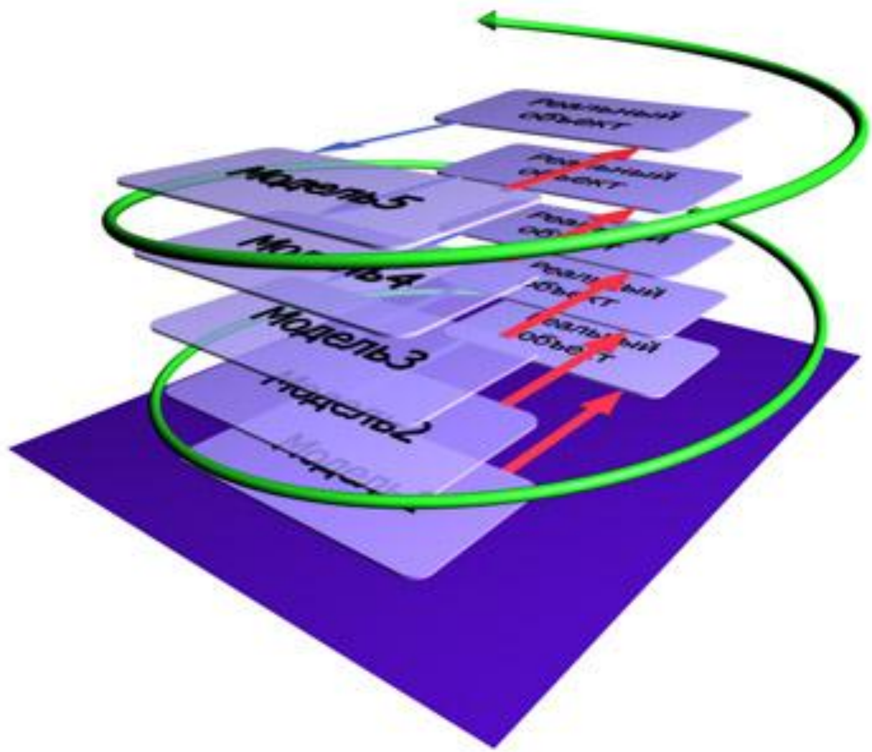


Рис. 2.1. Процесс моделирования

Если требуется уточнение, эти этапы повторяются вновь и вновь: формализация (проектирование), моделирование, интерпретация. *Спираль!*



Поскольку моделирование — способ замещения реального объекта его аналогом, то возникает вопрос: насколько аналог должен соответствовать исходному объекту?

- Вариант 1: соответствие — 100%. Очевидно, что точность решения в этом случае максимальна, а ущерб от применения модели минимален.

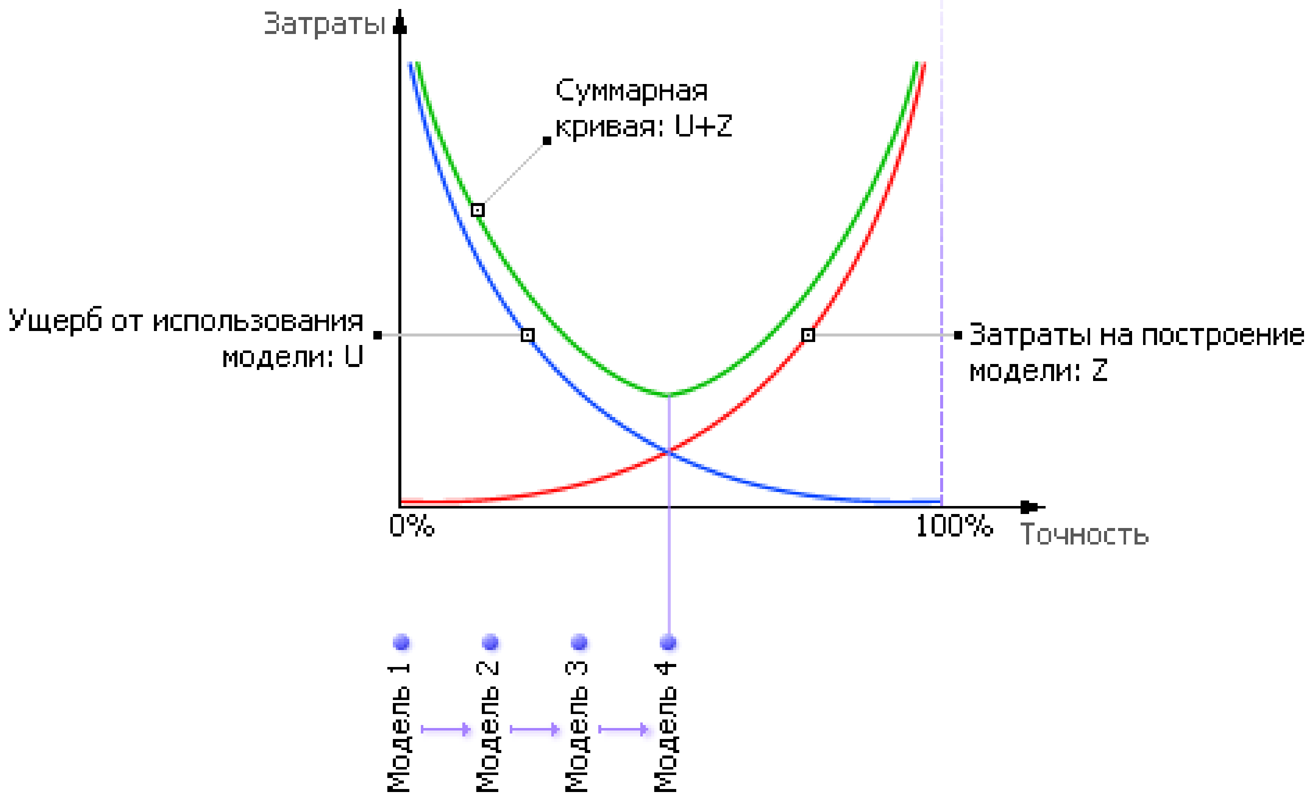
Но затраты на построение такой модели бесконечно велики, так как объект повторяется во всех своих деталях; фактически, создаётся точно такой же объект путём копирования его до атомов (что само по себе не имеет смысла).

- Вариант 2: соответствие — 0%. Модель совсем не похожа на реальный объект.

  Очевидно, что точность решения минимальна, а ущерб от применения модели максимален, бесконечен. Но затраты на построение такой модели нулевые.

Конечно, варианты 1 и 2 — это крайности. На самом деле модель создаётся из соображений компромисса между затратами на её построение и ущербом от неточности её применения.

То есть, моделируя, следует иметь в виду, что исследователь должен стремиться к оптимуму суммарных затрат, включающих ущерб от применения и затраты на изготовление модели



- **Рис. 1.2. Соотношение суммарных затрат и точности для различных вариантов детализации прикладной модели**

Указанная на **рис. 1.2** кривая является умозрительной и реально до начала моделирования построена быть не может. Поэтому на практике действуют таким образом: двигаются по шкале точности слева направо, то есть от простых моделей («Модель 1», «Модель 2»…) ко все более сложным («Модель 3», «Модель 4»…).

Процесс моделирования имеет циклический спиралевидный характер: если построенная модель не удовлетворяет требованиям точности, то её детализируют, дорабатывают на следующем цикле.

Из всего сказанного следует, что моделей может быть несколько: приближенная, более точная, ещё точнее и так далее. Модели как бы образуют ряд. Двигаясь от варианта к варианту, исследователь совершенствует модель.

Для построения и совершенствования моделей необходима их преемственность, средства отслеживания версий и так далее, то есть моделирование требует инструмента и опирается на технологию.

- **Инструмент** — типовое средство, позволяющее достичь оригинальный результат и обеспечивающее сокращение затрат на выполнение промежуточных операций (имиджи, стандартные библиотеки, мастера, линейки, резинки…).
- **Технология** — набор стандартных способов, приёмов, методов, позволяющий достичь результата гарантированного качества с помощью указанных инструментов за заранее известное время при заданных затратах, но при соблюдении пользователем объявленных требований и порядка.

Среда — совокупность рабочего пространства и инструментов на нем, поддерживающая хранение и изменение, преемственность проектов и интерпретирующая свойства объектов и систем из них.

Моделирование является инженерной наукой, технологией решения задач. Это — важно. Так как технология есть способ достижения результата с известным заранее качеством и гарантированными затратами и сроками, то моделирование, как дисциплина:

- изучает способы решения задач, то есть является инженерной наукой;
- является универсальным инструментом, гарантирующим решение любых задач, независимо от предметной области.

Смежными моделированию предметами являются: программирование, математика, исследование операций.

Программирование — потому что часто модель реализуют на искусственном носителе, а компьютер является одним из самых универсальных носителей информации и притом активным.

Программирование есть способ изложения алгоритма в языковой форме.

Алгоритм — один из способов представления (отражения) мысли, процесса, явления в искусственной вычислительной среде, которой является компьютер (фон-Неймановской архитектуры). Специфика алгоритма состоит в отражении последовательности действий.

Какова разница между алгоритмом и моделью?

Алгоритм — это процесс решения задачи путём реализации последовательности шагов, тогда как

модель — совокупность потенциальных свойств объекта.

Если к модели поставить вопрос и добавить дополнительные условия в виде исходных данных (связь с другими объектами, начальные условия, ограничения), то она может быть разрешена исследователем относительно неизвестных. Процесс решения задачи может быть представлен алгоритмом (но известны и другие способы решения).

Модель — способ нахождения ответов на вопросы. Чтобы ответить на поставленный вопрос, модель должна быть преобразована по правилам, обеспечивающим её эквивалентность, к виду, соответствующему ответу на вопрос.

А процедура, которая помогает применить такие правила к модели, называется **методом**.

Модели могут принимать различную форму, в зависимости от способа мышления исследователя, его взгляда на мир, используемой алгебры.

Использование различных математических аппаратов впоследствии приводит к различным возможностям в решении задач.

Модели могут быть:

- феноменологические и абстрактные;
- активные и пассивные;
- статические и динамические;
- дискретные и непрерывные;
- детерминированные и стохастические;
- функциональные и объектные.

Модель обладает следующими свойствами:

- 1) любая модель *субъективна,* она несет на себе печать индивидуальности исследователя;
- 2) любая модель *гомоморфна,* т.е. в ней отражаются не все, а только существенные свойства объекта-оригинала;
- 3) возможно существование *множества моделей* одного и того же объекта-оригинала, отличающихся целями исследования и степенью адекватности.

Модель считается ***адекватной*** объекту-оригиналу, если она с достаточной степенью приближения на уровне понимания моделируемого процесса исследователем отражает закономерности процесса функционирования реальной системы во внешней среде.

Моделирование может использовать программирование, если моделируемый объект легко описать с точки зрения его поведения.

Если легче описать свойства объекта, то использовать программирование затруднительно.

Компьютерное моделирование - это математическое моделирование с использованием средств вычислительной техники.

Технология компьютерного моделирования предполагает выполнение следующих действий:

- определение цели моделирования;
- построение концептуальной модели;
- разработка алгоритма модели системы, формализация модели;

- разработка программы модели системы;
- планирование модельных экспериментов;
- реализация плана эксперимента (проведение машинных экспериментов с моделью системы);
- анализ и интерпретация результатов моделирования.

Общая цель моделирования в процессе принятия решения - это определение (расчет) значений выбранного показателя эффективности для различных стратегий проведения операции (или вариантов реализации проектируемой системы).

При разработке конкретной модели цель моделирования должна уточняться с учетом используемого критерия эффективности.

Таким образом, цель моделирования определяется как целью исследуемой операции, так и планируемым способом использования результатов исследования.

Сложная система

Сложная система — составной объект, части которого можно рассматривать как системы, закономерно объединенные в единое целое в соответствии с определенными принципами или связанные между собой заданными отношениями.

Понятием сложной системы пользуются в системотехнике, системном анализе, исследовании операций и при системном подходе в различных областях науки, техники и народный хозяйства.

Сложную систему можно разбить (не обязательно единственным образом) на конечное число частей, называемое подсистемами;

каждую такую подсистему (высшего уровня) можно в свою очередь разбить на конечное число более мелких подсистем и т. д., вплоть до получения подсистем первого уровня, т. н. элементов сложной системы, которые либо объективно не подлежат разбиению на части, либо относительно их дальнейшей неделимости имеется соответствующая договоренность.

Подсистема, таким образом, с одной стороны, сама является сложной системой из нескольких элементов (подсистем низшего уровня), а с другой стороны — элементом системы старшего уровня.

Элементы сложной системы функционируют не изолированно друг от друга, а во взаимодействии: свойства одного элемента в общем случае зависят от условий, определяемых поведением других элементов;

свойства сложной системы в целом определяются не только свойствами элементов, но и характером взаимодействия между ними

Модели сложных систем обычно имеют комплексный вид, используют в своём составе сразу несколько представлений.

Статистическое моделирование - метод исследования сложных систем, основанный на описании процессов функционирования отдельных элементов в их взаимосвязи с целью получения множества частных результатов, подлежащих обработке методами математической статистики для получения конечных результатов.

В основе статистического моделирования лежит **метод статистических испытаний - метод Монте-Карло**.

Имитационная модель - универсальное средство исследования сложных систем, представляющее собой логико-алгоритмическое описание поведения отдельных элементов системы и правил их взаимодействия, отображающих последовательность событий, возникающих в моделируемой системе.

Если статистическое моделирование выполняется с использованием имитационной модели, то такое моделирование называется ***имитационным.***

Понятия «статистическое и имитационное моделирование» часто рассматривают как синонимы. Однако следует иметь в виду, что статистическое моделирование не обязательно является имитационным.

Например, вычисление определённого интеграла методом Монте-Карло путем определения подынтегральной площади на основе множества статистических испытаний, относится к статистическому моделированию, но не может называться имитационным.

Наиболее широкое применение имитационное моделирование получило при исследовании сложных систем с дискретным характером функционирования, в том числе моделей массового обслуживания.

Для описания процессов функционирования таких систем обычно используются временные диаграммы.

Временная диаграмма - графическое представление последовательности событий, происходящих в системе.

Для построения временных диаграмм необходимо достаточно четко представлять взаимосвязь событий внутри системы.

Степень детализации при составлении диаграмм зависит от свойств моделируемой системы и от целей моделирования.

Поскольку функционирование любой системы достаточно полно отображается в виде временной диаграммы, имитационное моделирование можно рассматривать как процесс реализации диаграммы функционирования исследуемой системы на основе сведений о характере функционирования отдельных элементов и их взаимосвязи.

Имитационное моделирование обеспечивает возможность испытания, оценки и проведения экспериментов с исследуемой системой без каких-либо непосредственных воздействий на нее.

Поскольку целью построения любой модели является исследование характеристик моделируемой системы, в имитационную модель должны быть включены средства сбора и обработки статистической информации по всем интересующим характеристикам, основанные на методах математической статистики.

§3. Статистическое моделирование

При компьютерном моделировании случайных процессов и систем возникает необходимость в моделировании различных случайных элементов : случайных величин, случайных векторов, процессов, полей, множеств.

Моделирование на ЭВМ случайного элемента подчиняется следующим двум основным принципам.

- Сходство между случайным элементом-оригиналом H и его моделью H’ состоит в совпадении вероятностных законов распределения или их числовых характеристик;

Всякий случайный элемент f определяется («конструируется») как некоторая функция от простейших случайных элементов, называемых базовыми случайными величинами (БСВ) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$H' = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \qquad (1)$$

Таким образом, задача моделирования произвольного случайного элемента Н’ разбивается на следующие подзадачи.

- Моделирование на ЭВМ независимых БСВ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$;
- Осуществление функционального преобразования (1) с помощью соответствующей функции f.

Для моделирования одного и того же случайного элемента H может быть предложено несколько вариантов функциональных преобразований (1). Предпочтение отдаётся варианту f(·), использующему меньшее число **n БСВ** для моделирования одной реализации H’ случайного элемента H, то есть требующему меньших вычислительных затрат.

Такому варианту соответствует **максимальное значение коэффициента использования БСВ *k***:

$$k = \frac{1}{n}, 0 < k < 1.$$

3.1. Моделирование случайных величин

Базовой случайной величиной (БСВ) называется непрерывная СВ α, равномерно распределённая на полуинтервале [0,1).

Равномерный на [0,1) закон обозначается R(0,1).

БСВ имеет следующие функциональные и числовые характеристики

- функция распределения :

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ x, 0 < x < 1, \\ 1, x \geq 1. \end{cases}$$

- плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 1, \\ 0, \text{иначе}. \end{cases}$$

- математическое ожидание (среднее значение):

$$M(X) = \frac{1}{2}.$$

- дисперсия:

$$D(X) = \frac{1}{12}.$$

Датчики БСВ

Функционирование элементов системы, подверженных случайным воздействиям, задается генераторами (датчиками) случайных чисел: *аппаратными* или *программными.* Генераторы случайных чисел в ЭВМ обычно реализуются программными методами, вырабатывающими псевдослучайные последовательности.

Псевдослучайными последовательностями называются вполне *детерминированные* числа, обладающие:

- *статистическими свойствами случайных чисел,* определяемых путем их проверки специальными тестами,
- *периодичностью,* то есть повторяемостью через определенные промежутки времени.

Количество случайных величин, вырабатываемых между двумя одинаковыми значениями, называется ***длиной периода генератора*** случайных величин.

При моделировании используются интервалы последовательностей псевдослучайных чисел, в которых нет ни одного числа, встречающегося более одного раза.

Для формирования случайных чисел с заданными законами распределений в качестве исходных используют случайные числа, выработанные программными генераторами равномерно распределенных случайных чисел в интервале (0,1), встроенные практически во все языки программирования.

Специализированные программные средства, предназначенные для вероятностного моделирования, обычно имеют специальные встроенные процедуры генерирования случайных величин с разными законами распределений.

Формирование равномерно распределённых случайных величин

Для формирования равномерно распределённых случайных чисел в интервале (0; 1) могут использоваться следующие методы:

- метод квадратов;
- метод произведений;
- мультипликативный конгруэнтный метод;
- методы, представляющие модификации перечисленных методов.

Метод квадратов является одним из простейших методов и служит хорошей иллюстрацией принципа алгоритмического формирования равномерно распределённых случайных величин.

Алгоритм формирования равномерно распределённых случайных величин по методу квадратов заключается в выполнении следующих этапов:

- выбирается некоторое исходное n-разрядное целое число, которое должно удовлетворять определённым условиям для получения качественного генератора случайных величин с максимально возможной длиной периода;
- выбранное n-разрядное число возводится в квадрат, в результате чего получается целое число с вдвое большей разрядностью;

- из полученного 2n-разрядного числа выделяются n средних разрядов, которые рассматриваются как дробная часть случайного числа, равномерно распределённого в интервале (0; 1);
- выделенные на предыдущем этапе *n* средних разрядов рассматриваются как новое исходное n-разрядное целое число;
- повторяются этапы 2-4.

Пример

Для простоты будем оперировать десятичными числами, а не двоичными, как это реализуется в программных генераторах.

Пусть выбрано некоторое исходное четырехразрядное целое число, равное 7153. Результаты применения описанного алгоритма представлены в виде следующей таблицы:

Исх.число	Квадрат	Случайное число
7153	51 **1654** 09	0,1654
1654	02 **7357** 16	0,7357
7357	54 **1254** 49	0,1254
1254	01 **5725** 16	0,5725
5725	32 **7756** 25	0,7756
7756	60 **1555** 36	0,1555

fix(x) – число с отброшенной дробной частью

Максимальная длина периода генератора, то есть максимальное количество неповторяющихся случайных чисел, **определяется количеством разрядов в дробной части**. В нашем примере максимально возможная длина периода равна 9999 (от 0,0001 до 0,9999). Однако в действительности длина периода меньше максимально возможной и зависит от исходного целого числа. Неудачно выбранное значение исходного числа может привести к двум неприятностям: маленькой длине периода или даже к вырождению генератора, когда значения случайной величины начинают повторяться.

Метод произведений аналогичен методу квадратов. Отличие состоит в том, что перемножаются два n-разрядных целых числа, одно из которых, называемое *ядром* или *множителем,* не меняется, а второе, называемое *множимым,* формируется из *n* последних (правых) разрядов полученного 2n-разрядного числа, представляющего собой произведение ядра и множимого. Естественно, что вначале, как и в методе квадратов, необходимо грамотно выбрать исходные значения ядра и множителя.

Пример

- Пусть ядро = 5167; множимое = 3729

Множимое	**Произведение**	**Случайное число**
3729	19 26 77 43	0,2677
7743	40 0080 81	0,0080
8081	41 7545 27	0,7545
4527	23 3910 09	0,3910
1009	05 2135 01	0,2135
3501		

- Здесь, в отличие от предыдущего примера, в качестве следующего значения множителя выбираются не средние разряды полученного произведения, а последние n разрядов произведения.

- ***Конгруэнтные методы*** генерирования случайных чисел получили наиболее широкое распространение для формирования на ЭВМ псевдослучайных последовательностей.

Два целых числа a и b называются ***конгруэнтными* (сравнимыми)** по модулю *m,* где *m* - целое число, если разность *(a-b)* делится на *m* без остатка, а числа *a* и *b* дают одинаковые остатки от деления на *m.*

Например, 2568 и 148 (по модулю 10), 1746 и 511 (по модулю 5), 6493 и 2221 (по модулю 2) и т.д.

Конгруэнтные методы описываются в виде рекуррентного соотношения следующего вида:

$$X_{i+1} = \lambda X_i + \mu (\mathrm{mod}\, m) \quad (i = 0,1,2,\ldots),$$

где X_i, λ, μ, m - неотрицательные целые числа; X_0 - начальное значение псевдослучайной последовательности; λ - множитель; μ - аддитивная константа; m - модуль.

Каждое новое значение X_{i+1} псевдослучайной последовательности представляет собой целочисленный остаток от деления на модуль m суммы произведения предыдущего значения X_i, на множитель λ и аддитивной константы μ.

Последовательность псевдослучайных чисел в интервале (0; 1) формируется путем деления полученных целочисленных значений X_i на модуль *m:*

$x_i = X_i/m$, (i = 1, 2,...).

Описанный метод генерирования псевдослучайных чисел получил название **смешанного конгруэнтного метода.**

В некоторых случаях используется более простой метод генерирования псевдослучайных чисел, представляющий собой частный случай смешанного метода, когда $\mu = 0$, и получивший название ***мультипликативного конгруэнтного метода***. В этом случае рекуррентное соотношение имеет вид: $X_{i+1} = \lambda X_i (\mathrm{mod}\, m), i = 0,1,2, \ldots .$

На каждом шаге полученное случайное число (множимое) умножается на некоторое постоянное число (множитель) и затем делится на другое постоянное число (делитель). В качестве нового случайного числа принимается остаток от деления, который служит дробной частью случайного числа, равномерно распределённого в интервале (0; 1).

Пример

Первое постоянное число

(множитель) λ= **1357=X_0;**

Второе постоянное число (делитель) m=**5689**

Исходное число	**Произведение**	**Частное, целая часть**	**Остаток**	**Случайное число**
1357	1 8414 49	323	3902	0,3902
3902	5 2950 14	930	4244	0,4244
4244	5 7591 08	1012	1840	0,1840
1840				

Задание 3

Код в Матлабе для получения последовательности 10 равномерно распределённых случайных величин полученных ***мультипликативным конгруэнтным методом***.

Построить точечные диаграммы:

1) (i, x(i));
2) (x(i),x(i+1)).

3.2. Проверка генераторов равномерно распределенных псевдослучайных чисел

Достоверность и точность результатов имитационного моделирования в значительной степени определяется качеством используемых в моделях программных генераторов псевдослучайных последовательностей.

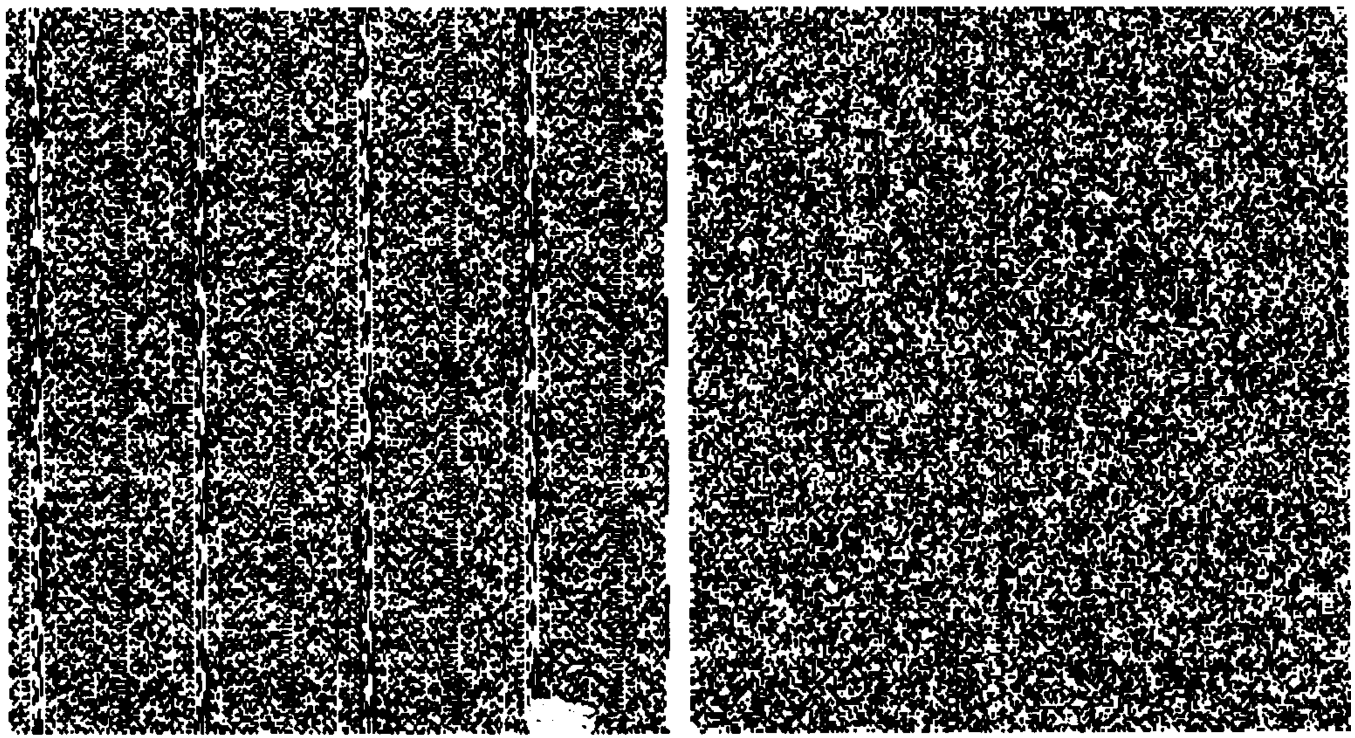
Проверка генераторов равномерно распределенных псевдослучайных чисел предполагает формирование большой совокупности или, как говорят, представительной выборки случайных чисел и выполнение множества проверочных тестов, позволяющих оценить качество генераторов.

Для проверки качества генераторов применяются различные тесты. Нет какого-либо единственного «официального» набора критериев, который бы оценивал, насколько данные случайные последовательности бит применимы именно для конкретной области применения. Существуют различные тесты, которые оценивают, насколько исследуемая последовательность бит «похожа» или «не похожа» на действительно случайную. Методы оценки качества генераторов случайных и псевдослучайных последовательностей можно разделить на две группы:

1) Графические тесты. Свойства последовательностей отображаются в виде графических зависимостей, по виду которых делают выводы о свойствах исследуемой последовательности.

К данной категории можно отнести следующие тесты: гистограмма распределения элементов последовательности, распределение на плоскости, проверка на монотонность и т.д.

На рисунке представлен пример графического теста «распределение на плоскости». Слева результат тестирования отрицательный, справа – положительный:



2) Статистические тесты. Статистические свойства последовательностей определяются **числовыми характеристиками**. На основе оценочных критериев делаются заключения о степени близости свойств анализируемой и истинно случайной последовательностей. В отличие от графических тестов, где результаты интерпретируются пользователями, вследствие чего возможны различия в трактовке результатов, статистические тесты характеризуются тем, что они выдают численную характеристику, которая позволяет однозначно сказать, пройден тест или нет.

Различают три вида проверки программных генераторов равномерно распределенных псевдослучайных чисел:

- на периодичность;
- на случайность;
- на равномерность.

Проверка на периодичность требует обязательного определения длины периода, что в значительной степени определяет качество генератора случайных чисел. Чем больше длина периода, тем генератор более качественный.

Проверка на случайность. При проверке на случайность программных генераторов ***двоичных*** случайных чисел можно использовать совокупность тестов, а именно тесты проверки:

- частот;
- пар;
- комбинаций;
- серий;
- корреляции.

- *Тест проверки частот* предполагает разбиение диапазона распределения на несколько интервалов и подсчет количества (частот или вероятностей) попаданий случайных чисел в выделенные интервалы.
- *Тест проверки пар* заключается в подсчете количества "1" для каждого *разряда* всей совокупности выработанных генератором двоичных случайных чисел. Очевидно, количество "1" во всех разрядах должно составлять примерно 50% от количества выработанных генератором случайных чисел.

- *Тест проверки комбинаций* сводится к подсчету "1" в случайных числах, количество которых в среднем должно составлять половину от количества разрядов.
- *Тест проверки серий* заключается в подсчете количества различных длин последовательностей одинаковых значений (1 или 0).
- *Тест проверки корреляции* заключается в определении коэффициента корреляции между последовательностями случайных чисел, вырабатываемых двумя разными генераторами. Также этот тест может использоваться для проверки взаимонезависимости элементов последовательности.

- **Проверка на равномерность.** При проверке на равномерность можно использовать тест проверки частот, так как гистограмма частот хорошо отражает равномерность распределения случайных чисел по всему диапазону изменения.

В Матлабе нет функций для проверки выборки на соответствие теоретическому распределению по χ^2-критерию Пирсона!

Задание 4

Для случайной последовательности, полученной в задании 3 построить гистограмму частот и, используя критерий Пирсона, проверить имеет ли полученная последовательность равномерное распределение. Рассчитать математическое ожидание и дисперсию.

Проверка гипотезы о распределении случайной величины по равномерному закону

Пусть случайная величина X распределена равномерно на заданном отрезке [a;b].

Выборочные данные группируем и представляем в виде последовательности интервалов $[x_i; x_{i+1})$ и соответствующих им частот m_i.

Затем вычисляем p_i попадания X в частичные интервалы, определяем теоретические частоты $m'_i = np_i$ и находим наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi^2(\text{наблюдаемое})$.

Определив табличное значение критерия по таблицам критических точек распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы k-1, принимаем одно из решений: если наблюдаемое значение меньше табличного, то нет оснований отклонять гипотезу о равномерном распределении случайной величины X на отрезке [a,b], в противном случае гипотеза отвергается.

Гистограммы в Matlab

n=hist(y) распределяет элементы вектора **y** в 10 интервалов одинаковой длины Δ и возвращает количество элементов, попавших в каждый интервал, в виде вектора ***n***. Если **y** - матрица, то **hist** работает со столбцами.

n=hist(y,l), где **l** - скаляр, использует l интервалов одинаковой длины Δ.

n=hist(y,x), где x - вектор, возвращает количество элементов вектора y, попавших в интервалы с центрами, заданными вектором x. Число интервалов в этом случае равно числу элементов вектора x.

[n,x]=hist(...) возвращает числа попаданий в интервалы (в векторе n), а также положения центров интервалов (в векторе x).

hist(...) строит гистограмму без возвращения параметров, то есть строит прямоугольники высотой

$$h_i = m_i,$$

где m_i - число элементов, попавших в i-й интервал, i= **1,…,l.**

Функция **hist** используется для получения и отображения гистограммы.

Операторы МАТЛАБ

Оператор max. Используется в виде max(X). Для векторов: возвращает наибольший элемент вектора X. Для матриц: возвращает вектор-строку, состоящую из максимальных элементов каждого столбца матрицы X.

Оператор mean. Используется в виде mean(X). Возвращает среднее арифметическое значений компонент вектора X.

Оператор median. Используется в виде median(X). Возвращает медиану вектора X. **Оператор mode.** Используется в виде mode(X). Возвращает моду вектора X.

Оператор min. Используется в виде min(X). Для векторов: возвращает наименьший элемент вектора X. Для матриц: возвращает вектор-строку, состоящую из минимальных элементов каждого столбца матрицы X.

Оператор std. В форме std(X) или std(X,0) возвращает несмещенную оценку s стандартного отклонения вектора X. В форме std(X,1) возвращает смещенную оценку стандартного отклонения вектора X.

Оператор var. В форме var(X) или var(X,0) возвращает несмещенную оценку дисперсии вектора X. В форме var(X,1) возвращает смещенную оценку дисперсии вектора X.

- **y=unifpdf(x,a,b)** - расчет значения плотности вероятности равномерного в промежутке (*a*, *b)* распределения в точке *x.*

- **y=tcdf(x,k)** - расчет значения функции распределения распределения Стьюдента с *k* степенями свободы в точке *x.*
- **y=unifcdf(x,a,b)** - расчет значения функции распределения равномерного распределения в промежутке *(a, b)* распределения в точке *x.*

Стандартные функции Matlab для моделирования одномерных случайных чисел

- **y=chi2rnd(k)** - χ^2 -распределение.
- **y=exprnd (lambda)** - экспоненциальное **распределение.**
- **y=frnd (m,k)** - распределение Фишера.
- **y=gamrnd (a,b)** - гамма-распределение.
- **y=normrnd (a,sigma)** - нормальное распределение.
- **y=trnd (k)** - распределение Стьюдента.

- **y=unifrnd(a,b)** - равномерное распределение.
- **y=rand(m,k)** - моделирует *(m* х *к)* -матрицу со случайными данными, выбранными из равномерного распределения в интервале (0,1).

Задание 5

Используя функцию **unifrnd(a,b)** сгенерировать последовательность 100 равномерно распределенных на отрезке (0,1) чисел и проверить качество данного генератора БСВ.