Chaines de Markov et Casinos

Pierre Faugère

ENS de Lyon

LFCG, Mardi 28 Juin 2022

Collectionneur de coupons

Collectionneur de coupons

$\longrightarrow$ Espérance du temps de premier pile si : $p = \frac{1}{2}$?

Collectionneur de coupons

$\longrightarrow$ Espérance du temps de premier pile si : $p = \frac{1}{2}$? $p = \frac{1}{4}$?

Collectionneur de coupons

$\longrightarrow$ Espérance du temps de premier pile si : $p = \frac{1}{2}$? $p = \frac{1}{4}$? en général?

Collectionneur de coupons

$\longrightarrow$ Espérance du temps de premier pile si : $p = \frac{1}{2}$? $p = \frac{1}{4}$? en général?

Notation

τ_k : nombre de coupons collectés lorsqu'on en a k distincts

Collectionneur de coupons

$\longrightarrow$ Espérance du temps de premier pile si : $p = \frac{1}{2}$? $p = \frac{1}{4}$? en général?

Notation

τ_k : nombre de coupons collectés lorsqu'on en a k distincts

Notation

$r_k = \tau_k - \tau_{k-1}$

Collectionneur de coupons

$\longrightarrow$ Espérance du temps de premier pile si : $p = \frac{1}{2}$? $p = \frac{1}{4}$? en général?

Notation

τ_k : nombre de coupons collectés lorsqu'on en a k distincts

Notation

$r_k = \tau_k - \tau_{k-1}$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tau_n] &= \mathbb{E}[\tau_n - \tau_{n-1} + \tau_{n-1} - \tau_{n-2} + \ldots + \tau_1 - \tau_1 + \tau_0] \\
&= \mathbb{E}[r_n + r_{n-1} + r_{n-2} + \ldots + r_0] \\
&= \mathbb{E}[r_n] + \mathbb{E}[r_{n-1}] + \mathbb{E}[r_{n-2}] + \ldots + \mathbb{E}[r_0]
\end{aligned}$$

Collectionneur de coupons

- Or : $\mathbb{E}[r_k] = \frac{n}{n-k+1}$

Collectionneur de coupons

- Or : $\mathbb{E}[r_k] = \frac{n}{n-k+1}$
- D'où : $\mathbb{E}[\tau_n] = n \times (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})$

Collectionneur de coupons

- Or : $\mathbb{E}[r_k] = \frac{n}{n-k+1}$
- D'où : $\mathbb{E}[\tau_n] = n \times (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) \approx n \times \log(n)$

Collectionneur de coupons

- Or : $\mathbb{E}[r_k] = \frac{n}{n-k+1}$
- D'où : $\mathbb{E}[\tau_n] = n \times (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) \approx n \times \log(n)$

Problème dual

R_k : nombre de coupons encore non collectés après k achats
$C_{k,j}$: on a déjà collecté le coupon j au k-ième achat (ou avant)

Collectionneur de coupons

- Or : $\mathbb{E}[r_k] = \frac{n}{n-k+1}$
- D'où : $\mathbb{E}[\tau_n] = n \times (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) \approx n \times \log(n)$

Problème dual

R_k : nombre de coupons encore non collectés après k achats
$C_{k,j}$: on a déjà collecté le coupon j au k-ième achat (ou avant)

Proposition

On a : $\mathbb{E}[R_k] = n \times (1 - \frac{1}{n})^k$

Collectionneur de coupons

- Or : $\mathbb{E}[r_k] = \frac{n}{n-k+1}$
- D'où : $\mathbb{E}[\tau_n] = n \times (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) \approx n \times \log(n)$

Problème dual

R_k : nombre de coupons encore non collectés après k achats
$C_{k,j}$: on a déjà collecté le coupon j au k-ième achat (ou avant)

Proposition

On a : $\mathbb{E}[R_k] = n \times (1 - \frac{1}{n})^k$

Proof.

$R_k = \mathbb{1}_{C^c_{k,1}} + \mathbb{1}_{C^c_{k,2}} + ... + \mathbb{1}_{C^c_{k,n}}$ $\square$

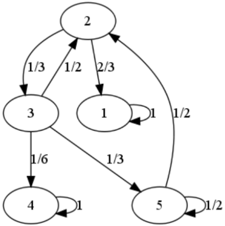
Méthodes de mélanges et temps de mélange

Notions mathématiques

$\longrightarrow$ Qu'est-ce qu'une chaine de Markov?

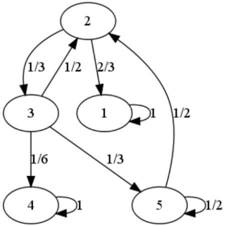
Notions mathématiques

$\longrightarrow$ Qu'est-ce qu'une chaine de Markov?



Notions mathématiques

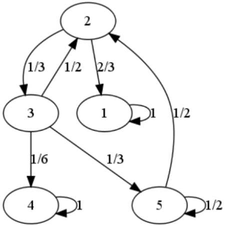
$\longrightarrow$ Qu'est-ce qu'une chaine de Markov?



$\longrightarrow$ Quel lien entre mélange et chaine de Markov?

Notions mathématiques

$\longrightarrow$ Qu'est-ce qu'une chaine de Markov?



$\longrightarrow$ Quel lien entre mélange et chaine de Markov?
$\longrightarrow$ Un mélange EST une chaine de Markov

Notions mathématiques

Notions mathématiques

Définition : probabilité

Une *probabilité* sur un ensemble Ω fini est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ qui vérifie :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont disjoints
- $P(\Omega) = 1$

Notions mathématiques

Définition : probabilité

Une *probabilité* sur un ensemble Ω fini est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont disjoints
- $P(\Omega) = 1$

Définition : distance entre probabilités

Si P et Q sont deux probabilités, on définit la *distance* entre P et Q de la manière suivante : $d(P,Q) = \max_{A \subset \Omega} |P(A) - Q(A)|$

Mesure d'un temps de mélange

Mesure d'un temps de mélange

- Le temps de mélange

Mesure d'un temps de mélange

- Le temps de mélange

$\longrightarrow$ Principe du temps de mélange : on compare la probabilité $P^t(x, \bullet)$ à la probabilité uniforme sur l'ensemble des permutations (ou configurations) $\mathfrak{S}_n$ en fonction de t

Mesure d'un temps de mélange

- Le temps de mélange

$\longrightarrow$ Principe du temps de mélange : on compare la probabilité $P^t(x, \bullet)$ à la probabilité uniforme sur l'ensemble des permutations (ou configurations) $\mathfrak{S}_n$ en fonction de t

Définition : temps de mélange

On pose : $d(t) = \max_{x \in \mathfrak{S}_n} d(P^t(x, \bullet), \mu)$

On définit le *temps de mélange* d'une chaine de Markov :

$t_{mix}(\epsilon) = min\{t \geq 0 \,|\, d(t) < \epsilon\}$

Mesure d'un temps de mélange

- Le temps de mélange

$\longrightarrow$ Principe du temps de mélange : on compare la probabilité $P^t(x, \bullet)$ à la probabilité uniforme sur l'ensemble des permutations (ou configurations) $\mathfrak{S}_n$ en fonction de t

Définition : temps de mélange

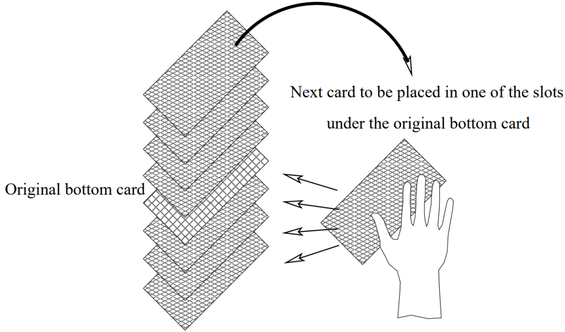
On pose : $d(t) = \max_{x \in \mathfrak{S}_n} d(P^t(x, \bullet), \mu)$

On définit le *temps de mélange* d'une chaine de Markov :

$t_{mix}(\epsilon) = min\{t \geq 0 \,|\, d(t) < \epsilon\}$

- Le temps fort stationnaire

Top-to-random shuffle



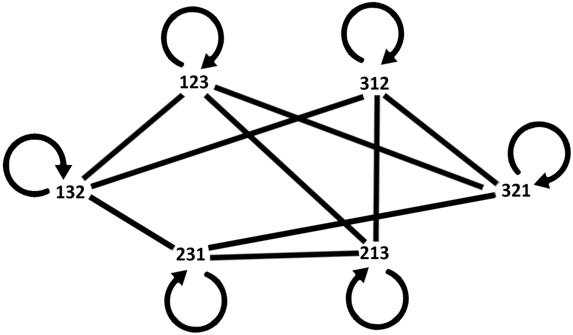
Proposition

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ la chaine de Markov sur $\mathfrak{S}_n$ correspondant au mélange "top-to-random", alors si au temps t il y a k cartes en dessous de la carte initialement au fond du paquet, alors l'arrangement de ces k cartes est uniforme parmi les $k!$ arrangments.

Random-to-top shuffle

Drawing by Yelena Shvets

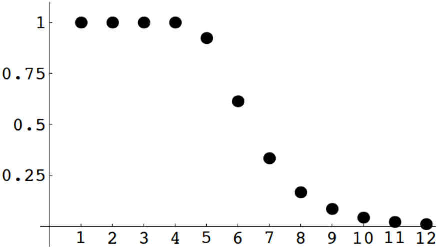
Transpositions aléatoires



Diaconis and Shahshahani (1981)

$t_{mix}(\epsilon) \approx \frac{n}{2} log(n)$

Mélange américain



1	2	3	4	5	6
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9237	0.6135

7	8	9	10	11	12
0.3341	0.1672	0.0854	0.0429	0.0215	0.0108