Marche aléatoire de l'homme saoul

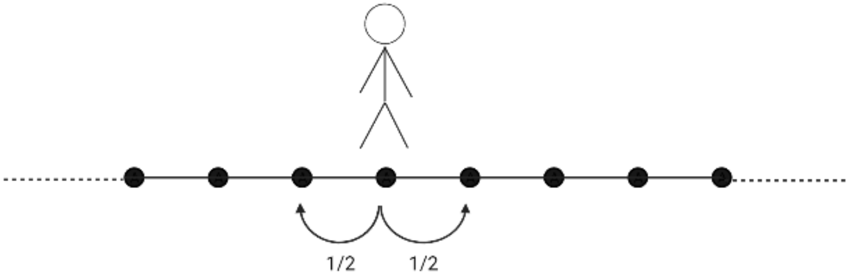
Pierre Faugère

ENS de Lyon

Lycée Paul Valéry, Mardi 31 Mai 2022

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On veut modéliser la marche
aléatoire d'un homme saoul qui se déplace dans un espace à une dimension :



Aparté : formalisation en termes probabilistes

Formellement, on se donne une famille $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables *i.i.d* qui suivent la loi suivante :
$P(X_i = +1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

Aparté : formalisation en termes probabilistes

Formellement, on se donne une famille $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de variables *i.i.d* qui suivent la loi suivante :
$P(X_i = +1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

Notation

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $S_n = X_1 + ... + X_n$

Aparté : formalisation en termes probabilistes

Formellement, on se donne une famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables $i.i.d$ qui suivent la loi suivante :
$P(X_i = +1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

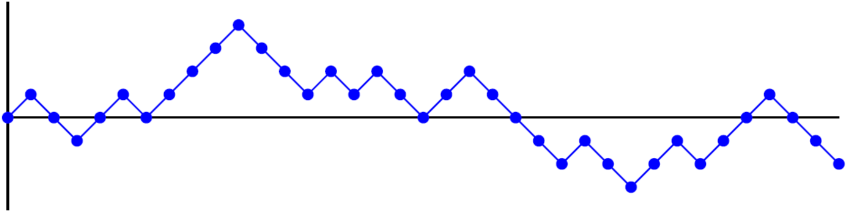
Notation

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $S_n = X_1 + ... + X_n$

On fait cela pour ensuite étudier les chemins, chaque chemin étant caractérisé par la suite $(n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

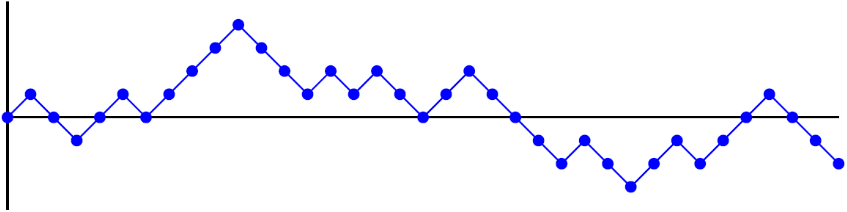
On peut représenter une trajectoire de la manière suivante :



$\longrightarrow$ Cela permet une approche plus géométrique du problème, en étudiant les trajectoires

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On peut représenter une trajectoire de la manière suivante :

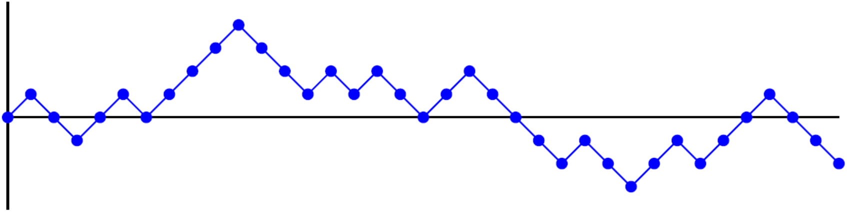


$\longrightarrow$ Cela permet une approche plus géométrique du problème, en étudiant les trajectoires

$\longrightarrow$ Combien a-t-on de trajectoires de longueurs n possibles?

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On peut représenter une trajectoire de la manière suivante :



$\longrightarrow$ Cela permet une approche plus géométrique du problème, en étudiant les trajectoires

$\longrightarrow$ Combien a-t-on de trajectoires de longueurs n possibles? 2^n

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Definition

Un point (n, k) est *atteignable* s'il existe d et m tels que : $\begin{cases} m + d = n \\ m - d = k \end{cases}$

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Definition

Un point (n, k) est *atteignable* s'il existe d et m tels que : $\begin{cases} m + d = n \\ m - d = k \end{cases}$

Remarque : en fait on demande simplement que n et k aient la même parité.

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

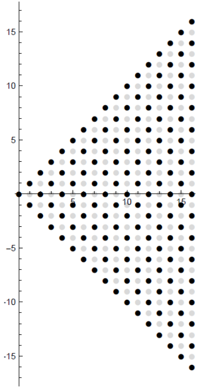
Definition

Un point (n, k) est *atteignable* s'il existe d et m tels que : $\begin{cases} m + d = n \\ m - d = k \end{cases}$

Remarque : en fait on demande simplement que n et k aient la même parité.
(et que n soit supérieur a k)

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On peut représenter alors tous les points atteignables :



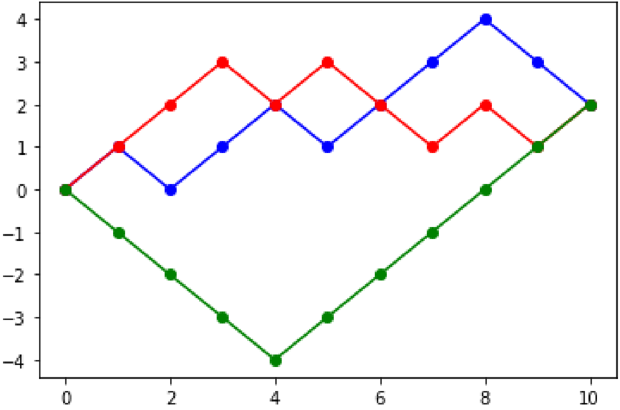
Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Question naturelle : pour un point atteignable donné (n, k) quelle est la probabilité de l'atteindre?

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Question naturelle : pour un point atteignable donné (n, k) quelle est la probabilité de l'atteindre?

$\longrightarrow$ Dénombrement de chemins



Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Chaque chemin est caractérisé par l'emplacement des montées parmi tous les pas :

Chaque chemin est caractérisé par l'emplacement des montées parmi tous les pas :

Notation

On pose $N_{n,k} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Chaque chemin est caractérisé par l'emplacement des montées parmi tous les pas :

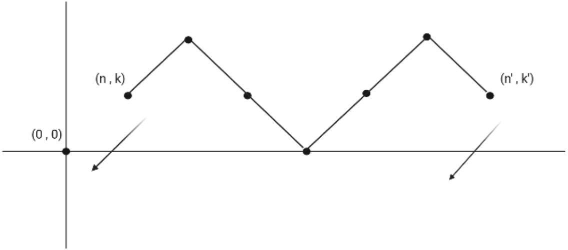
Notation

On pose $N_{n,k} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}$

$N_{n,k}$: nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,k)

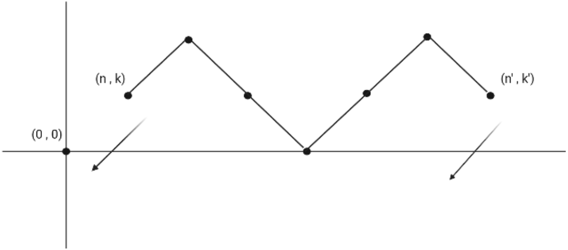
Translation

$\longrightarrow$ Cela nous donne aussi le nombre de chemins de (n,k) à (n',k')



Translation

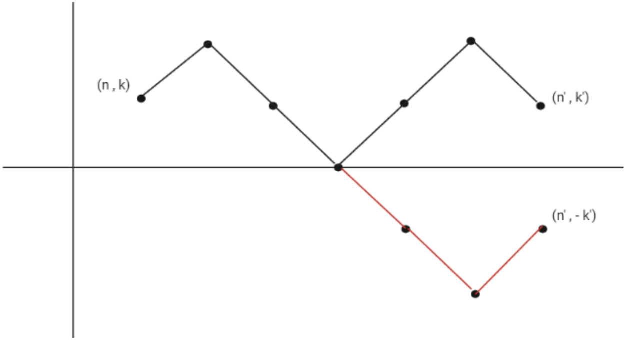
$\longrightarrow$ Cela nous donne aussi le nombre de chemins de (n, k) à (n', k')



$\longrightarrow$ $N_{n'-n,k'-k}$

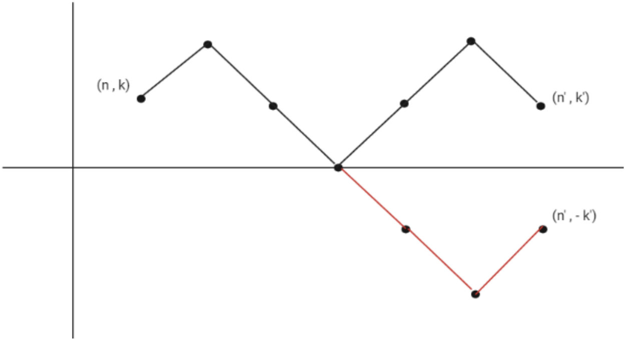
Nombre de chemins qui ne passent pas par l'origine

Astuce géométrique : le principe de réflexion



Nombre de chemins qui ne passent pas par l'origine

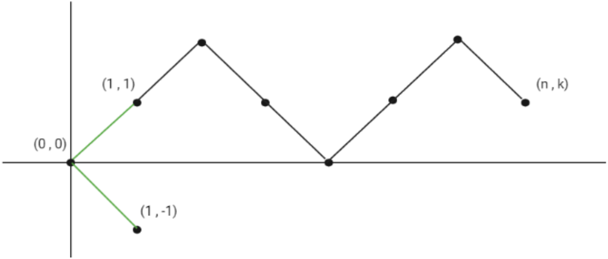
Astuce géométrique : le principe de réflexion



$A =$ chemins de (n, k) à (n', k') qui passent par 0.
$B =$ chemins de (n, k) à $(n', -k')$.

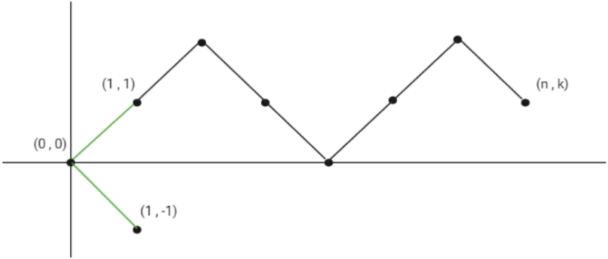
Morale de l'histoire

$T_{n,k}$ = nombre total de chemins de $(0,0)$ à (n,k) qui restent toujours strictement au dessus de l'axe des abscisses (sauf au début)



Morale de l'histoire

$T_{n,k}$ = nombre total de chemins de $(0,0)$ à (n,k) qui restent toujours strictement au dessus de l'axe des abscisses (sauf au début)



$$T_{n,k} = N_{n-1,k-1} - N_{n-1,-k-1}$$

Théorème du scrutin

$T_{n,k} = \frac{k}{n} N_{n,k}$

Théorème du scrutin

$T_{n,k} = \frac{k}{n} N_{n,k}$

$\longrightarrow$ Pourquoi "scrutin" ?