Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales

Rafael Alejandro Mellado Climent

May 27, 2018

Ejercicios: (5) Transformada de Laplace

5.1 Aplicando las propiedades de la translación, halle las siguientes transformadas de Laplace:

(a) $\mathscr{L}[e^{2t}sin(t)]$.

Dado que tenemos que la transformada de Laplace de $g(t) = e^{at}f(t)$,Por la propiedad de desplazamiento en frecuencia, podemos dividir nuestra función como lo acabamos de hacer, de tal manera que nos queda que:

$\mathscr{L}[e^{2t}sin(t)] = \mathscr{L}[e^{2t}f(t)] = F(s-a) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+1} = \dfrac{s-2}{(s-2)^2+1}$

(b) $\mathscr{L}[e^{5t}cos(2t)]$.

Aplicando el mismo principio:

$\mathscr{L}[e^{5t}cos(2t)] = \mathscr{L}[e^{5t}f(t)] = F(s-a) = \dfrac{a}{(s-a)^2+2^2} = \dfrac{5}{(s-5)^2+2^2}$

(c) $\mathscr{L}[e^{3t}t]$.

$\mathscr{L}[e^{3t}t] = \mathscr{L}[e^{3t}f(t)] = F(s-a) = \dfrac{1}{(s-a)^2} = \dfrac{1}{(s-3)^2}$

(d) $\mathscr{L}[t^2U(t-1)]$.

Para empezar voy a recordar que la función:

$$U(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases} \tag{1}$$

Como no me acuerdo exactamente de como aplicar la propiedad de desplazamiento temporal, que enunciaba lo siguiente:

$$\mathscr{L}[f(t-a)\cdot U(t-a)]_{(s)} = e^{(-a\cdot s)}\cdot F(s-a);$$

No sé cómo aplicarla ya que para poder aplicarla necesito que el desplazamiento temporal sea el mismo, y en este caso no lo es. Voy a intentarlo aplicando la definición:

$$\mathscr{L}[f(t)\cdot U(t-a)]_{(s)} = \int_0^\infty f(t)\cdot U(t-a)e^{-st}dt \tag{2}$$

que sustituyendo en (2) por nuestros valores obtenemos:

$$\mathscr{L}[f(t)\cdot U(t-1)]_{(s)} = \int_0^\infty f(t)\cdot U(t-1)e^{-st}dt$$

Aunque si que es verdad que puedo expresar mi función de t como la suma y resta en una unidad de t, quedando de esta manera:

$$\int_0^\infty (t-1+1)\cdot U(t-1)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left((t-1)\cdot U(t-1)e^{-st} + U(t-1)e^{-st}\right)dt$$

Esto no es más que la suma de integrales:

$$\int_0^\infty \left((t-1)\cdot U(t-1)e^{-st} + U(t-1)e^{-st}\right) dt = F(s)\cdot e^{-s} + \int_0^\infty U(t-1)e^{-st}dt =$$

Donde tenemos que:

$$\int_0^\infty U(t-1)e^{-st}dt = \mathscr{L}[U(t-1)]_{(s)} \tag{3}$$

$$= e^{-s}\cdot F(s)\cdot \mathscr{L}[U(t-1)]_{(s)} = \frac{e^{-s}}{s^2}\cdot\frac{e^{-s}}{s} = \frac{e^{-2s}}{s^3}$$

(e) $\mathscr{L}[(t-2)\cdot U(t-2)]$.
Esta se resuelve por desplazamiento lateral, quedando:

$$\mathscr{L}[(t-2)\cdot U(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

(f)

$$\mathscr{L}[(t^2-3t+2)\cdot U(t-2)].$$

$$\mathscr{L}[(t-2)\cdot(t-1)\cdot U(t-2)] = \mathscr{L}[((t-2)+1)(t-2)\cdot U(t-2)] =$$

$$\mathscr{L}[(t-2)^2U(t-2)]\cdot\mathscr{L}[(t-2)U(t-2)]$$

Quedando unas transformadas de Laplace:

$$\left(\frac{2e^{-2s}}{s^3}\right)\left(\frac{e^{-2s}}{s^2}\right) = \left(\frac{2e^{-4s}}{s^4}\right)$$

5.2 Utilice las propiedades de la transformada de Laplace para calcular:

(i) $\mathscr{L}[tsint(2t)]$
Para resolver esta transformada de Laplace utilizaremos la siguiente propiedad:

$$\mathscr{L}[t^n f(t)]_{(s)} = (-1)^n\frac{d}{ds^n}F(s) = (-1)^nF^{(n)}(s) \tag{4}$$

En nuestro caso la transformada de Laplace, sería de la siguiente forma:

$$\mathscr{L}[t\cdot f(t)] = (-1)\cdot F(s) = (-1)\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)\frac{d}{ds} = (-1)\left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

(ii) $\mathscr{L}[t^2cos(4t)]$.

$$\mathscr{L}[t^2f(t)] = (-1)^2\left(\frac{s}{s^2+4^2}\right)\frac{d}{ds} = \left(\frac{s}{s^2+4^2}\right)\frac{d}{ds} = (-1)\frac{x^2-16}{(x^2+16)^2}$$

(iii) $\mathscr{L}[t^n]; n \geq 1$

$$\mathscr{L}[t^n \cdot U(t)] = (-1)^n \left(\frac{1}{s}\right) \frac{d}{ds^n}$$

$$\mathscr{L}[t^n] = \begin{cases} 1 & \text{si } \ n \ es \ par \\ \\ (-1)\left(\frac{1}{s}\right)\frac{d}{ds^n} & \text{si } n \ no \ es \ par \end{cases}$$

(iv) $\mathscr{L}[\int_0^t \frac{sin(u)}{u} du]$

Para resolver estas integrales voy a aplicar la misma definición de la transformada de Laplace, vamos a utilizar la propiedades del producto de convolución :

$$\mathscr{L}[f(t) * g(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \cdot \mathscr{L}g(t)] \tag{5}$$

Para empezar vampos a ver que efectivamente es un producto de convolución, el producto de convolución tiene que satisfacer lo siguiente

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t)g(t-a)dt \tag{6}$$

Lo bueno que tiene el producto de convolción es asociativo pues no dejan de ser integrales,por lo que me da igual cual de ellas sea la $f(t)$ y cual $g(t)$, para este caso en concreto me interesa que mi función $\frac{sin(u)}{u}$, sea mi $f(t)$ y mi otra función que aparece será la función identidad evaluada en - u,es decir, $U(t-u)$, quedándome de esta manera una transformada de Laplace de un producto de convolución, que como hemos visto antes es de la forma que aparece en (4).

Volviendo a nuestro caso particular:

$$\mathscr{L}[\int_0^t \frac{sin(u)}{u} du] = \mathscr{L}[sin(t)] \cdot \mathscr{L}[U(t-u)] = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{e^{(-us)}}{s}\right) = \frac{e^{-us}}{(s^2+1)s}$$

(v) $\mathscr{L}[t \int_0^t sin(u)du]$

No sé muy bien como resolver esta ecuación, así lo que voy a hacer es resolver esa integral, quedando como nueva transformada de Laplace, la siguiente:

$$\mathscr{L}[t \int_0^t sin(u)du] = \mathscr{L}[t((-1)(cos(t)+1))] = \mathscr{L}[-tcos(t) - t] = (-1)\mathscr{L}tcos(t)] \cdot (-1)\mathscr{L}[t] =$$
$$= \mathscr{L}[t \cdot cos(t)] \cdot \mathscr{L}[t]$$

Estas se resuelven como se indica en la fórmula(4):

$$\mathscr{L}[t \cdot cos(t)] \cdot \mathscr{L}[t] = (-1)\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\frac{d}{ds} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

(vi) $\mathscr{L}[e^{-2t}\int_0^t u \cdot e^{2u} sen(u)du]$ En esta no sé ni por dónde empezar...

5.3 Exprese las siguientes funciones en términos de funciones escalón unitario y obtenga su transformada de Laplace

(a) $\begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 2t-2 & \text{si } 2 \leq t < 4 \\ sin(t) & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 3-t & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq t < 4\pi \\ 0 & \text{si } t \geq 4\pi \end{cases}$

(d) $\begin{cases} e^{-2t} & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$

5.4 Calcule las siguientes transformadas inversas

(i.) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right]$

Este resultado es el que hemos obtenido antes, concretamente en el ejercicio 5.1 el apartado e), por lo que:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right] = (t-2)\cdot U(t-2)$$

(ii.) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-2s+3}\right]$

Lo primero que tenemos que hacer en estos casos es descomponer nuestra fracción en suma de fracciones, siempre que se pueda como este no es el caso, vamos a completar cuadrados de manera que nos quede más simplificado:

$$\frac{1}{s^2-2s+3} = \frac{1}{(s-1)^2+2}$$

Ahora bien fijémonos en que el polinomio se parece bastante a:

$$\frac{b}{(s-a)^2+b^2} = \frac{+1-1+\sqrt{2}}{(s-1)^2\sqrt{2^2}+1}$$