Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales

Rafael Alejandro Mellado Climent

May 28, 2018

Ejercicios: (5) Transformada de Laplace

5.1 Aplicando las propiedades de la translación, halle las siguientes transformadas de Laplace:

(a) $\mathscr{L}[e^{2t}sin(t)]$.

Dado que tenemos que la transformada de Laplace de $g(t) = e^{at}f(t)$,Por la propiedad de desplazamiento en frecuencia, podemos dividir nuestra función como lo acabamos de hacer, de tal manera que nos queda que:

$$\mathscr{L}[e^{2t}sin(t)] = \mathscr{L}[e^{2t}f(t)] = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2+1} = \frac{s-2}{(s-2)^2+1}$$

(b) $\mathscr{L}[e^{5t}cos(2t)]$.

Aplicando el mismo principio:

$$\mathscr{L}[e^{5t}cos(2t)] = \mathscr{L}[e^{5t}f(t)] = F(s-a) = \frac{a}{(s-a)^2+2^2} = \frac{5}{(s-5)^2+2^2}$$

(c) $\mathscr{L}[e^{3t}t]$.

$$\mathscr{L}[e^{3t}t] = \mathscr{L}[e^{3t}f(t)] = F(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2} = \frac{1}{(s-3)^2}$$

(d) $\mathscr{L}[t^2U(t-1)]$.

Para empezar voy a recordar que la función:

$$U(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases} \tag{1}$$

Como no me acuerdo exactamente de como aplicar la propiedad de desplazamiento temporal, que enunciaba lo siguiente:

$$\mathscr{L}[f(t-a)\cdot U(t-a)]_{(s)} = e^{(-a\cdot s)}\cdot F(s-a);$$

No sé cómo aplicarla ya que para poder aplicarla necesito que el desplazamiento temporal sea el mismo, y en este caso no lo es. Voy a intentarlo aplicando la definición:

$$\mathscr{L}[f(t)\cdot U(t-a)]_{(s)} = \int_0^\infty f(t)\cdot U(t-a)e^{-st}dt \tag{2}$$

que sustituyendo en (2) por nuestros valores obtenemos:

$$\mathscr{L}[f(t)\cdot U(t-1)]_{(s)} = \int_0^\infty f(t)\cdot U(t-1)e^{-st}dt$$

Aunque si que es verdad que puedo expresar mi función de t como la suma y resta en una unidad de t, quedando de esta manera:

$$\int_0^\infty (t-1+1)\cdot U(t-1)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left((t-1)\cdot U(t-1)e^{-st} + U(t-1)e^{-st}\right)dt$$

Esto no es más que la suma de integrales:

$$\int_0^\infty \left((t-1)\cdot U(t-1)e^{-st} + U(t-1)e^{-st}\right)dt = F(s)\cdot e^{-s} + \int_0^\infty U(t-1)e^{-st}dt =$$

Donde tenemos que:

$$\int_0^\infty U(t-1)e^{-st}dt = \mathscr{L}[U(t-1)]_{(s)} \tag{3}$$

$$= e^{-s}\cdot F(s)\cdot \mathscr{L}[U(t-1)]_{(s)} = \frac{e^{-s}}{s^2}\cdot\frac{e^{-s}}{s} = \frac{e^{-2s}}{s^3}$$

(e) $\mathscr{L}[(t-2)\cdot U(t-2)]$.
Esta se resuelve por desplazamiento lateral, quedando:

$$\mathscr{L}[(t-2)\cdot U(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

(f)

$$\mathscr{L}[(t^2-3t+2)\cdot U(t-2)].$$

$$\mathscr{L}[(t-2)\cdot(t-1)\cdot U(t-2)] = \mathscr{L}[((t-2)+1)(t-2)\cdot U(t-2)] =$$

$$\mathscr{L}[(t-2)^2U(t-2)]\cdot\mathscr{L}[(t-2)U(t-2)]$$

Quedando unas transformadas de Laplace:

$$\left(\frac{2e^{-2s}}{s^3}\right)\left(\frac{e^{-2s}}{s^2}\right) = \left(\frac{2e^{-4s}}{s^4}\right)$$

5.2 Utilice las propiedades de la transformada de Laplace para calcular:

(i) $\mathscr{L}[tsint(2t)]$
Para resolver esta transformada de Laplace utilizaremos la siguiente propiedad:

$$\mathscr{L}[t^nf(t)]_{(s)} = (-1)^n\frac{d}{ds^n}F(s) = (-1)^nF^{(n)}(s) \tag{4}$$

En nuestro caso la transformada de Laplace, sería de la siguiente forma:

$$\mathscr{L}[t\cdot f(t)] = (-1)\cdot F(s) = (-1)\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)\frac{d}{ds} = (-1)\left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

(ii) $\mathscr{L}[t^2cos(4t)]$.

$$\mathscr{L}[t^2f(t)] = (-1)^2\left(\frac{s}{s^2+4^2}\right)\frac{d}{ds} = \left(\frac{s}{s^2+4^2}\right)\frac{d}{ds} = (-1)\frac{x^2-16}{(x^2+16)^2}$$

(iii) $\mathscr{L}[t^n]; n \geq 1$

$$\mathscr{L}[t^n \cdot U(t)] = (-1)^n \left(\frac{1}{s}\right) \frac{d}{ds^n}$$

$$\mathscr{L}[t^n] = \begin{cases} 1 & \text{si } \ n \ es \ par \\ \\ (-1)\left(\frac{1}{s}\right)\frac{d}{ds^n} & \text{si } n \ no \ es \ par \end{cases}$$

(iv) $\mathscr{L}[\int_0^t \frac{sin(u)}{u} du]$

Para resolver estas integrales voy a aplicar la misma definición de la transformada de Laplace, vamos a utilizar la propiedades del producto de convolución :

$$\mathscr{L}[f(t) * g(t)] = \mathscr{L}[f(t)] \cdot \mathscr{L}g(t)] \tag{5}$$

Para empezar vampos a ver que efectivamente es un producto de convolución, el producto de convolución tiene que satisfacer lo siguiente

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t)g(t-a)dt \tag{6}$$

Lo bueno que tiene el producto de convolción es asociativo pues no dejan de ser integrales,por lo que me da igual cual de ellas sea la $f(t)$ y cual $g(t)$, para este caso en concreto me interesa que mi función $\frac{sin(u)}{u}$, sea mi $f(t)$ y mi otra función que aparece será la función identidad evaluada en - u,es decir, $U(t-u)$, quedándome de esta manera una transformada de Laplace de un producto de convolución, que como hemos visto antes es de la forma que aparece en (4).

Volviendo a nuestro caso particular:

$$\mathscr{L}[\int_0^t \frac{sin(u)}{u} du] = \mathscr{L}[sin(t)] \cdot \mathscr{L}[U(t-u)] = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{e^{(-us)}}{s}\right) = \frac{e^{-us}}{(s^2+1)s}$$

(v) $\mathscr{L}[t \int_0^t sin(u)du]$

No sé muy bien como resolver esta ecuación, así lo que voy a hacer es resolver esa integral, quedando como nueva transformada de Laplace, la siguiente:

$$\mathscr{L}[t \int_0^t sin(u)du] = \mathscr{L}[t((-1)(cos(t)+1))] = \mathscr{L}[-tcos(t)-t] = (-1)\mathscr{L}tcos(t)] \cdot (-1)\mathscr{L}[t] =$$

$$= \mathscr{L}[t \cdot cos(t)] \cdot \mathscr{L}[t]$$

Estas se resuelven como se indica en la fórmula(4):

$$\mathscr{L}[t \cdot cos(t)] \cdot \mathscr{L}[t] = (-1)\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\frac{d}{ds} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

(vi) $\mathscr{L}[e^{-2t}\int_0^t u\cdot e^{2u}sen(u)du]$ En esta no sé ni por dónde empezar...

5.3 Exprese las siguientes funciones en términos de funciones escalón unitario y obtenga su transformada de Laplace

(a) $\begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 2t-2 & \text{si } 2 \leq t < 4 \\ sin(t) & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 3-t & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq t < 4\pi \\ 0 & \text{si } t \geq 4\pi \end{cases}$

(d) $\begin{cases} e^{-2t} & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$

5.4 Calcule las siguientes transformadas inversas

(i.) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right]$

Este resultado es el que hemos obtenido antes, concretamente en el ejercicio 5.1 el apartado e), por lo que:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right] = (t-2)\cdot U(t-2)$$

(ii.) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-2s+3}\right]$

Lo primero que tenemos que hacer en estos casos es descomponer nuestra fracción en suma de fracciones, siempre que se pueda como este no es el caso, vamos a completar cuadrados de manera que nos quede más simplificado:

$$\frac{1}{s^2-2s+3} = \frac{1}{(s-1)^2+2}$$

Ahora bien fijémonos en que el polinomio se parece bastante a:

$$\frac{b}{(s-a)^2+b^2} = \frac{+1-1+\sqrt{2}}{(s-1)^2\sqrt{2^2}+1}$$

(iii.) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right]$

Para resolver esta primero completamos cuadrados, de esta manera podemos verlo más claro todo, quedando así:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4s+5}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+2)^2+1}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right]\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-2}{(s+2)^2+1}\right]=$$

$$=e^{-2t}\cdot cos(t)\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-2}{(s+2)^2+1}\right]=e^{-2t}\cdot cos(t)\cdot(-2)\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]=$$

$$e^{-2t}\cdot cos(t)\cdot(-2)e^{-2t}\cdot sen(t)$$

(iv.) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{6s}{s^2+9}+\dfrac{3}{2s^2+8s+10}\right]$

Para resolver esta transformada de Laplace lo que vamos a hacer es dividirla en dos por la propiedad de linealidad de las transformadas de Laplace, quedando entonces de esta manera:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6s}{s^2+9}+\frac{3}{2s^2+8s+10}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6s}{s^2+9}\right]3\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s^2+8s+10}\right]=$$

$$=6\cdot cos(3t)\cdot 3\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s^2+8s+10}\right]=18\cdot cos(3t)\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s^2+8s+10}\right]=$$

$$=18\cdot cos(3t)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+1}\right]=\cdot cos(3t)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2t}sen(t);$$

(v.) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-\pi}}{s^2+1}\right]$

Esta es inmediata $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-\pi}}{s^2+1}\right]=sen(b(t-\pi))U(t-\pi)$

(vi.) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-s}}{s^2+s}\right]$

Para resolver esta inversa, primero vamos a factorizar el polinomio:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2+s}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right]$$

Vale no la sé resolver...

(vii.) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+5)}\right]$ Que tampoco sé como resolverla...

5.5 Calcule las transformadas inversas de las siguientes funciones racionales de s, mediante descomposición en fracciones simples:

a) $F(s) = \dfrac{s+5}{s^2-4}$

Como se indica en el enunciado vamos a descomponer en fracciones simples nuestra función:

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2-4} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2}$$

Ahora vamos a obtener los valores de A y B:

$$A(s-2) + B(s+2) = s+5$$

$$si\ s = -2 \quad -4A = 3 \quad A = -\frac{3}{4}$$

$$si\ s = 2 \qquad 4B = 7 \quad B = \frac{7}{4}$$

Sustituyendo los valores obtenidos nos que lo siguiente:

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2-4} = \frac{-3}{4(s+2)} + \frac{7}{4(s-2)} = (-1)\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + \frac{7}{4}\cdot\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

Estas ya son inmediatas asi que queda como resultado:

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2-4} = -\frac{3}{4}\cdot e^{-2t} + \frac{7}{4}\cdot e^{2t}$$

b) $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$

Vamos a hacer lo mismo que con la anterior

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^4} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} + \frac{D}{(s+1)^4}$$

Ahora vamos a obtener los valores de $A, B, C\ y\ D$:

$$A(s+1) + B(s+1)^2 + C(+1)^3 + (s+1)^4 = 1$$

Esto es un sistema que ya sabemos resolver la única diferencia es que esta vez tiene la misma raíz, diferenciándose unas de otras por la multiplicidad de la misma, lo que habría que hacer es ir dando valores a s, como $s = 1, 2, 3, 4$.