Correction de l'exercice 90 (suite)

Question 3 :

on cherche la forme trigonométrique de $z = -2 + 2i$.

- Calculons le module ρ de z :
  $z = -2 + 2i$. Donc le module de z est $\rho = \mid z \mid = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2}$
- Calculons l'argument θ de z.
  On peut factoriser z par le module : $z = 2\sqrt{2}(\frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i) = 2\sqrt{2}(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$.
  Ainsi $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
  Or $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
  Par conséquent : $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  Or le chapitre sur le cercle trigonométrique, nous informe que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
  En observant le cercle trigonométrique : la valeur de θ cherchée est la valeur symétrique de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des ordonnées : c'est le nombre $\frac{3\pi}{4}$..
  C'est à dire $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Ainsi $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- on peut ainsi affirmer que la forme trigonométrique de z est :

$$z = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} + i \times \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

Question 4

on cherche la forme trigonométrique de $z = -4i$.

- Calculons le module ρ de z :
  $z = 0 - 4i$. Donc le module de z est $\rho = \mid z \mid = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$
- Calculons l'argument θ de z.
  On peut factoriser z par le module : $z = 4(\frac{0}{4} - \frac{4}{4}i) = 4(0 - 1i)$.
  Ainsi $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = -1$.
  Or le chapitre sur le cercle trigonométrique, nous informe que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et que $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
  En observant le cercle trigonométrique, on remarque que : $\cos\frac{-\pi}{2} = 0$ et que $\sin\frac{-\pi}{2} = -1$.
  C'est à dire $\theta = \frac{-\pi}{2}$.
- on peut ainsi affirmer que la forme trigonométrique de z est :

$$z = 4\cos\frac{-\pi}{2} + i \times 4\sin\frac{-\pi}{2} = 4(\cos\frac{-\pi}{2} + i4\sin\frac{-\pi}{2})$$

Méthode plus simple : un point M d'affixe $-4i$ admet pour coordonnées $(0; -4)$.
Le point M est donc situé sur l'axe des ordonnées en -4. Donc l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{2}$ et $OM = 4$.
Ce qui signifie exactement que $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$ et que le module $\rho = 4$.
D'où directement la forme trigonométrique de z :

$$z = 4\cos\frac{-\pi}{2} + i \times 4\sin\frac{-\pi}{2} = 4(\cos\frac{-\pi}{2} + i4\sin\frac{-\pi}{2})$$

Question 5 :

on cherche la forme trigonométrique de $z = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

- Calculons le module ρ de z :
  $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$. Donc le module de z est $\rho = \mid z \mid = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 \times 2 + 4 \times 2} = \sqrt{16} = 4$

- Calculons l'argument θ de z.

  On peut factoriser z par le module : $z = 4(\frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{4}i) = 4(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$.

  Par conséquent : $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  Or le chapitre sur le cercle trigonométrique, nous informe que $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- on peut ainsi affirmer que la forme trigonométrique de z est :

$$z = 4\cos\frac{\pi}{4} + i \times 4\sin\frac{\pi}{4} = 4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Question 6 :

on cherche la forme trigonométrique de $z = -8$.

- Calculons le module ρ de z :
  $z = -8 + 0i$. Donc le module de z est $\rho = \mid z \mid = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = \sqrt{64} = 8$
- Calculons l'argument θ de z.

  On peut factoriser z par le module : $z = 8(\frac{-8}{8} + \frac{0}{8}i) = 8(-1 + 0i)$.

  Ainsi $\cos\theta = -1$ et $\sin\theta = 0$.
  Or le chapitre sur le cercle trigonométrique, nous informe que $\cos\pi = -1$ et que $\sin\pi = 0$.
  C'est à dire $\theta = \pi$.
- on peut ainsi affirmer que la forme trigonométrique de z est :

$$z = 8\cos\pi + i \times 9\sin\pi = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Remarque : cela n'a rien d'étonnant car un point M ayant pour affixe -8 est un point de coordonnées $(-8; 0)$. Il est donc situé sur l'axe des abscisses, sur sa partie négative. Ainsi $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \pi$ et $OM = 8$.
Ce qui signifie exactement que $\arg(z) = \pi$ et que le module $\rho = 8$. D'où la forme trigonométrique trouvée ci-dessus.