

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le sujet traite de la réduction de sous-algèbres de  $\mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un  $\mathbb{R}$ - ou  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, c'est-à-dire de la co-diagonalisation ou la co-trigonalisation des éléments d'une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  (ou de  $M_n(\mathbb{K})$ , en adoptant un point de vue matriciel).

La notion de sous-algèbre est définie en introduction du sujet et la partie I propose de s'approprier cette notion, au travers d'exemples choisis, en dimension 2 et en dimension  $n$ : matrices symétriques, antisymétriques, triangulaires supérieures en section I-A, algèbre des endomorphismes laissant un sous-espace stable en section I-B et algèbres  $\Gamma(\mathbb{R})$ ,  $\Gamma(\mathbb{C})$  en section I-C. La partie II est consacrée à la sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{R})$  constituée des matrices circulantes, dont on démontre la co-diagonalisabilité dans  $M_n(\mathbb{C})$  (alors que cette algèbre elle-même ne constitue pas une  $\mathbb{C}$ -algèbre).

La partie III propose de calculer la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de  $M_n(\mathbb{R})$ , en recourant au produit scalaire canonique de  $M_n(\mathbb{R})$  et à la notion d'algèbre transposée, avec un retour sur les résultats de la section I-B, à la toute dernière question de cette partie.

Enfin, les parties IV et V proposent de démontrer la co-trigonalisation des éléments d'une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  constituée d'éléments nilpotents. En partie IV, on démontre ce résultat par récurrence forte sur la dimension de  $E$  et en s'appuyant sur un théorème de Burnside qu'on démontre, finalement, en partie V.

## Analyse globale des résultats

Sur les 3473 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 24,4 %, pour un écart-type de 14,7 %. Le sujet peut donc être considéré comme long, mais il a permis une bonne discrimination parmi les candidats. Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur le soin apporté aux réponses, bien plus que sur le volume traité. La meilleure copie a obtenu un total de 82 % des points du barème total.

Les parties I à III ont été abordées par la quasi-totalité des candidats (plus de 95 % d'entre eux), tandis que les parties IV (environ 60 %) et V (environ 25 %) l'ont moins été, principalement en raison de leur plus grande difficulté relative. Les parties I à III représentent environ 72 % des points du barème.

Comme mentionné plus haut, le soin mis à traiter les questions d'appropriation des termes du sujet a été un facteur important de sélection. Prenons pour exemple la section I-A, dont l'objectif est de s'approprier la notion de sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{K})$ , section traitée par la quasi-totalité des candidats (plus de 99,8 %). Près de 83 % d'entre eux ont obtenu moins de la moitié des points attribués, traduisant une certaine négligence à établir l'ensemble des propriétés d'une sous-algèbre et une mauvaise compréhension de la notion de contre-exemple (cf. plus loin). À l'opposé, seulement 1,7 % des candidats ont répondu parfaitement à l'ensemble des questions de cette section du sujet. On note les mêmes contrastes à la question Q9, quant à la notion de sous-algèbre diagonalisable de  $M_n(\mathbb{C})$ .

Le sujet comporte certains passages « classiques ». Par exemple, celui sur les matrices circulantes, en sections II-B, II-C et II-D, montre une distribution des résultats moins contrastée parmi les copies. Il en est de même pour la section III-A, relative au produit scalaire canonique sur  $M_n(\mathbb{R})$ . Certains candidats, ayant traité ces points pendant l'année, ont sans doute pu trouver davantage de repères.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### – Toute réponse doit être justifiée

Une réponse en une ligne donnant directement le résultat (attendu ou non), sans un minimum de contextualisation, est toujours mal perçue, souvent sanctionnée. Dans ce même ordre d'idée, il est fortement recommandé d'être attentif à la rédaction des premières questions de l'épreuve. Par exemple, en question **Q1**, il n'a malheureusement pas été rare de lire «  $T_n(\mathbb{K})$  est clairement une sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{K})$  » ou « par un raisonnement similaire,  $T_n^+(\mathbb{K})$  est une sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{K})$  ». Les notions de sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{K})$  et de matrice triangulaire supérieure stricte venant d'être (re)définies dans le sujet, il était de bon ton d'en vérifier point par point les propriétés.

### – Les variables utilisées par les candidats doivent être déclarées

Il n'a pas été rare de voir apparaître des  $A, B, x, y, \alpha, \beta$  au milieu d'un raisonnement sans en avoir vu la déclaration au préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent. C'est parfois très malvenu, puisque le sujet s'autorise quelques aller-retours entre  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  qui peuvent créer de fortes confusions.

### – Le jury recommande aux candidats une posture d'humilité

Notamment de bannir de leur rédaction des mots comme « clairement », « trivialement », « évidemment » et la fameuse « récurrence triviale ». Ceux-ci n'apportent rien au contenu mathématique de la copie et ne peuvent jouer qu'en défaveur du candidat, surtout lorsqu'ils sont suivis d'erreurs manifestes ou lorsqu'ils servent à passer rapidement sur des points essentiels à la résolution de la question. Écrire, par exemple, à la question **Q1**, que «  $T_n^+(\mathbb{K})$  est trivialement un espace vectoriel » montre surtout que le candidat a décidé de prendre de haut un point constitutif de la notion de sous-algèbre, qu'on demande de s'approprier dans ce qui est la toute première question du sujet. L'impression laissée, d'emblée, n'est pas bonne.

### – En guise de contre-exemples

Les candidats préfèrent laisser des réponses impliquant des paramètres qui, s'ils sont bien choisis, ne constituent plus un contre-exemple à l'affirmation étudiée. Cette remarque concerne les questions **Q2**, **Q3**, **Q8**, entre autres. Par exemple, à la question demandant si  $S_2(\mathbb{K})$  est une sous-algèbre de  $M_2(\mathbb{K})$ , la majorité des candidats introduisent deux matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ , effectuent le produit matriciel et en déduisent : « puisque  $ab' + bc' \neq ba' + cb'$ , alors le produit n'est pas une matrice symétrique », ce qui est faux, si on particularise les coefficients de ces deux matrices. De la même manière, à la question **Q8**, on lit très souvent que le polynôme  $(X - a)^2 + b^2$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , sans avoir choisi  $b \neq 0$  au préalable. Or, le polynôme  $(X - a)^2$  est bien scindé sur  $\mathbb{R}$ . Les exemples de ce type sont très nombreux dans les copies.

### – Des formulations à éviter

Des formulations telles que « on est en dimension finie » ou « on travaille en dimension finie » (par exemple en question **Q24**) sont mathématiquement imprécises et malvenues, notamment à l'écrit. Dans ce cas précis, il est bien plus pertinent de préciser quel espace est de dimension finie. Dans la question **Q24**, par exemple, il s'agit d'invoquer la dimension finie de l'espace  $M_n(\mathbb{R})$  pour affirmer que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}^\perp$  sont supplémentaires dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

- *Inclusion / appartenance*

On a beaucoup lu le symbole d'inclusion à la place du symbole d'appartenance (et vice versa).

- *De nombreuses erreurs sur les quantificateurs*

Les confusions sur l'ordre des quantificateurs ( $\forall, \exists$ ) dans une proposition mathématique, ont malheureusement été très répandues. Citons par exemple, à la question **Q3**, ces nombreux candidats qui ont souhaité démontrer que pour tous  $A, B \in S_n(\mathbb{K})$ , on a  $AB \notin S_n(\mathbb{K})$ , alors qu'il suffit de montrer qu'il existe  $A, B \in S_n(\mathbb{K})$  tels que  $AB \notin S_n(\mathbb{K})$ . On retrouve des problèmes tout à fait similaires aux questions **Q2**, **Q8**, **Q9** et **Q21**.

Le jury rappelle également que les *fautes de français*, même si elles ne sont pas explicitement comptabilisées dans le barème, nuisent à la copie et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale. Malheureusement, cette épreuve a été loin de faire exception dans ce domaine.

## I Exemples de sous-algèbres

**Q1.** Une sous-algèbre d'une algèbre  $\mathcal{A}$  est avant tout un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}$ . De très nombreux candidats l'oublient et se contentent de démontrer (avec plus ou moins de réussite) la stabilité par produit, ce qui constitue une mauvaise appropriation des termes du sujet. Ici, il s'agit de faire ce double travail (structure de sous-espace vectoriel et stabilité par produit) pour  $T_n(\mathbb{K})$  et  $T_n^+(\mathbb{K})$ . Remarque analogue pour les questions **Q4**, **Q7**, **Q15** et **Q27**.

**Q2.** Voir les remarques générales, la mise en évidence d'un contre-exemple précis, reste le meilleur moyen de conclure, pour  $S_2(\mathbb{K})$  comme pour  $A_2(\mathbb{K})$ . Par ailleurs, on a souvent lu des propositions de matrices antisymétriques avec des coefficients diagonaux non nuls.

**Q3.** De nombreux candidats proposent, pour seule réponse, un contre-exemple en taille 3 pour chacun des deux ensembles. Cela ne peut constituer une réponse suffisante. On peut, par exemple, proposer des matrices définies par blocs réutilisant les contre-exemples proposés à la question précédente.

**Q4.** Même remarque qu'en question **Q1**. Par ailleurs, beaucoup écrivent  $(\lambda u + v)(F) = \lambda u(F) + v(F)$ , alors qu'on a, à priori, la seule inclusion  $(\lambda u + v)(F) \subset \lambda u(F) + v(F)$ .

**Q5.** Nous avons trouvé très peu de réponses complètement satisfaisantes. De nombreuses fois, les candidats font référence à « la » base de  $E$  adaptée à  $F$  (et, parfois, à  $F$  et « son » supplémentaire). On rappelle aux candidats qu'en général, il n'y a pas unicité d'une base de  $E$  adaptée à un sous-espace vectoriel  $F$  (et qu'il existe une multiplicité de supplémentaires à un sous-espace vectoriel donné (hors  $E$  et l'espace nul)).

**Q6.** Le jury s'attendait à un bien meilleur taux de réussite sur une question d'un niveau tout à fait raisonnable (maximisation d'un trinôme du second degré sur un intervalle borné). On a noté de nombreuses erreurs sur les sens de variation, sur le calcul de la valeur du trinôme en  $(n - 1)$ , etc.

**Q7.** Même remarque qu'en question **Q1**.

**Q8.** Voir remarques générales et question **Q2** : il est beaucoup plus simple de proposer un contre-exemple précis comme la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  plutôt qu'un raisonnement général portant sur des paramètres  $a, b \in \mathbb{R}$  (à moins qu'on pense à éliminer le cas  $b = 0$  ce qui a été rarement fait).

**Q9.** On constate ici les premiers écarts de compréhension, parmi les candidats, de la notion de sous-algèbre diagonalisable. Il s'agit ici de trouver une base *commune* de diagonalisation des matrices de l'algèbre  $\Gamma(\mathbb{C})$  et pas seulement de montrer que toute matrice de  $\Gamma(\mathbb{C})$  est diagonalisable. On a également trop souvent

lu que la somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable (ce qui est, sans autre argument, faux).

## II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

**Q10.** Un certain nombre de candidats ont confondu la matrice  $J$  et la notation  $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ , se condamnant pour les trois questions à suivre.

**Q13.** Beaucoup de candidats sont partis de l'idée que  $\dim \mathcal{A} = n$  (parfois vaguement justifiée par l'évocation, insuffisante, de « degrés de liberté »), se contentant d'établir le caractère libre, ou générateur, de la famille  $(I_n, J, \dots, J^{n-1})$  pour conclure. Or, ce résultat de dimension n'a, jusqu'à ce moment du sujet, jamais été établi.

**Q15.** Même remarque qu'en question **Q1**, outre le fait que dans l'expression « sous-algèbre commutative », de nombreux candidats ne voient que l'adjectif « commutative », ce qui ne compose qu'une partie de la question.

**Q16.** On note une maîtrise très imparfaite du développement par rapport à une ligne ou une colonne, notamment pour ce qui est des facteurs  $(-1)^{i+j}$  qui doivent apparaître. Par ailleurs, le jury rappelle que la définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée  $A$ , telle que stipulée dans le programme, est  $\det(XI_n - A)$  (et non  $\det(A - XI_n)$ ). Toutefois, aucune pénalité n'a été appliquée en cas d'usage de la seconde forme.

**Q17 à Q19.** Pour ceux (relativement nombreux) qui ont trouvé, par un raisonnement suffisamment étayé, le bon polynôme caractéristique  $(X^n - 1)$  en question **Q16**, on note une bonne maîtrise des racines  $n$ -ièmes de l'unité, allant, moins rarement qu'attendu, jusqu'à la détermination correcte des espaces propres de la matrice  $J$  en question **Q19**.

**Q18.** Peu de candidats ont pensé à mettre le cas  $n = 2$  à part, pour lequel la matrice  $J$  est bien diagonalisable. Beaucoup ont répondu, à contrario, que le polynôme  $X^n - 1$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , ce qui n'est vrai que pour  $n \geq 3$  (donc faux en toute généralité).

**Q20.** Très peu de candidats ont vu la subtilité de cette question (non stabilité par multiplication par un scalaire complexe non réel). À contrario, on a malheureusement beaucoup lu que toute sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{R})$  est systématiquement une sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{C})$ , « par inclusion ».

**Q21 et Q22.** Ces questions, lorsqu'elles ont été traitées, l'ont souvent été de manière satisfaisante.

## III Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

**Q23.** Cette question (presque de cours) a été abordée par presque tous les candidats, avec un succès variable. Notons que la plupart connaissent bien les propriétés caractéristiques d'un produit scalaire. Parmi les erreurs relevées, on déplore toutefois la croyance selon laquelle  $\text{tr}(A^\top A) = \text{tr}(A^2)$ , puis que  $\text{tr}(A^2) \geq 0$ , positivité sans doute acquise en raison de la présence d'un carré. Également parmi les erreurs rencontrées, on a souvent lu l'écriture, fausse en général,  $\text{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$ , au lieu de la somme double attendue  $\text{tr}(A^\top A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$ .

**Q25.** Beaucoup pensent que si une matrice  $M$  n'appartient pas à  $\mathcal{A}$ , alors elle appartient à son supplémentaire orthogonal  $\mathcal{A}^\perp$ , ce qui est grossièrement faux.

**Q27.** Même remarque qu'en **Q1**. On a également noté de nombreuses confusions entre la dimension de l'algèbre  $\mathcal{A}$  et la taille des matrices qu'elle contient.

**Q29.** Question difficile, pour laquelle on a eu très peu de propositions pleinement satisfaisantes. Le jury a valorisé les bonnes idées et les pistes intéressantes.

#### IV Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

**Q30.** Beaucoup de raisonnements alambiqués, là où il aurait suffi de remarquer que toute matrice de taille 1 est triangulaire, diagonale, etc.

**Q31.** De nombreuses copies invoquent une *réciproque* du théorème de Burnside, là où il fallait parler de *contraposée*.

**Q32 à Q35.** Peu de propositions, la plupart intéressantes sans être complètement satisfaisantes.

#### V Le théorème de Burnside

**Q36 à Q40.** Questions pour la plupart difficiles (voire très difficiles) et très peu traitées. La question **Q36** l'a été un peu plus que les autres, notamment par des copies plutôt faibles, les candidats pensant se trouver face à une question simple de début de partie (ce qui n'est pas le cas). Dans ces questions, le jury a veillé à valoriser les bonnes idées.

### Conclusion

À l'écrit, il est absolument primordial de veiller à avoir bien répondu à toutes les parties d'une question et à avoir bien cité toutes les hypothèses des théorèmes utilisés. Le correcteur, à l'écrit (contrairement à l'examinateur, à l'oral), ne peut interroger le candidat afin de lui demander d'étayer ses affirmations ; il faut donc que tout soit dit sur la copie. Par exemple, on pourra regretter cet oubli fréquent d'établir la structure de sous-espace vectoriel afin de conclure à la structure de sous-algèbre. C'est ainsi que beaucoup risquent de se retrouver déçus de leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses sont incomplètes.

Nous tenons également à rappeler la plus-value importante qu'apportent une rédaction soignée et une copie bien présentée. Et ce, à double titre :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines subtilités, c'est ainsi que beaucoup ont négligé certains aspects de la notion de sous-algèbre, de vérifier la validité des contre-exemples proposés, ou ont confondu diagonalisation et co-diagonalisation ;
- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, nous recommandons aux candidats de soigner leur écriture ; de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les inserts plus ou moins lisibles et d'écrire dans un français correct.

Même si le jury n'a retenu aucun item de barème portant explicitement sur ces derniers points de forme, l'impression globale s'en ressent et ce facteur finit par avoir une influence, consciente ou non, sur la note attribuée.

Enfin, il n'était pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffisait de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Les bonnes et très bonnes copies sont, presque sans exception, de cette espèce.