

**ECOLES NORMALES SUPERIEURES  
ECOLE POLYTECHNIQUE**

**CONCOURS D'ADMISSION 2022**

**LUNDI 25 AVRIL 2022  
08h00 - 12h00**

**FILIÈRE PSI**

**MATHEMATIQUES (XUSR)**

**Durée : 4 heures**

***L'utilisation des calculatrices n'est pas  
 autorisée pour cette épreuve***

**Le sujet comprend 7 pages numérotées de 1 à 7.**

### Début de l'épreuve

Pour  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $x = (x_1, \dots, x_d)$  et  $y = (y_1, \dots, y_d)$  dans  $\mathbb{R}^d$ , nous noterons:

- $x \cdot y$  le produit scalaire usuel de  $x$  et  $y$ ,

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

- $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$ , la norme euclidienne usuelle de  $x$ ,
- $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}$  le segment joignant  $x$  à  $y$ ,

On rappelle qu'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  est convexe si pour tout  $(x, y) \in A^2$ , on a  $[x, y] \subset A$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux parties non vides de  $\mathbb{R}^d$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nous noterons

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b, a \in A, b \in B\}, \quad \lambda A := \{\lambda a, a \in A\}, \\ A - B &:= A + (-1)B, \quad A - x := A - \{x\} \end{aligned}$$

nous noterons  $\dim(A)$  la dimension de l'espace vectoriel engendré par  $A - a$  où  $a$  est un élément quelconque de  $A$  (cette définition étant indépendante du choix de  $a \in A$ ). En particulier si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\mathbb{R}^d$  et  $x \neq y$ , on a  $\dim(\{x\}) = 0$ , et  $\dim([x, y]) = 1$ .

Pour  $M \in \mathcal{M}_{m \times d}(\mathbb{R})$ , nous identifierons toujours  $M$  à l'application linéaire dont  $M$  est la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^m$  et noterons donc

$$\text{Ker}(M) := \{x \in \mathbb{R}^d : Mx = 0\}, \quad \text{Im}(M) := \{Mx, x \in \mathbb{R}^d\}$$

enfin  $M^T$  désignera la transposée de  $M$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous noterons  $\mathbb{R}_+^k$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{R}^k$  dont les coordonnées sont dans  $\mathbb{R}_+$  et pour  $y_1$  et  $y_2$  dans  $\mathbb{R}^k$ , nous écrirons  $y_1 \geq y_2$  (ou  $y_2 \leq y_1$ ) quand  $y_1 - y_2 \in \mathbb{R}_+^k$ .

On rappelle enfin que toute suite bornée d'éléments de  $\mathbb{R}^k$  possède une extraction qui converge.

# Partie I: Projection et séparation

## Projection

Soit  $C$  une partie non vide, convexe et fermée de  $\mathbb{R}^d$  et  $x \in \mathbb{R}^d$ , considérons:

$$\inf_{y \in C} \|x - y\|^2. \quad (1)$$

- 1) Montrer que (1) possède une unique solution (c'est à dire qu'il existe un unique  $y \in C$  tel que  $\|x - y\|^2 \leq \|x - z\|^2$  pour tout  $z \in C$ ) que nous appellerons projection de  $x$  sur  $C$  et noterons  $\text{proj}_C(x)$ . Montrer que  $x = \text{proj}_C(x)$  si et seulement si  $x \in C$ .
- 2) Soit  $y \in \mathbb{R}^d$  montrer que

$$y = \text{proj}_C(x) \iff y \in C \text{ et } (x - y) \cdot (z - y) \leq 0, \forall z \in C.$$

- 3) Montrer que pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , on a

$$(\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) \geq \|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|^2,$$

et en déduire que  $\text{proj}_C$  est continue.

- 4) Déterminer explicitement  $\text{proj}_C$  dans les cas suivants:

$$\begin{aligned} i) \quad & C = \mathbb{R}_+^d, \quad ii) \quad C = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq 1\}, \\ iii) \quad & C = \{y \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d y_i \leq 1\}, \quad iv) \quad C = [-1, 1]^d. \end{aligned}$$

## Séparation

Soit  $C$  et  $D$  deux parties convexes non vides de  $\mathbb{R}^d$  telles que

$C$  est fermée et bornée,  $D$  est fermée, et  $C \cap D = \emptyset$ .

- 5) Montrer que  $D - C$  est une partie convexe fermée de  $\mathbb{R}^d$  ne contenant pas 0.
- 6) Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{R}^d$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$p \cdot x \leq p \cdot y - \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in C \times D.$$

(on dit que  $C$  et  $D$  peuvent être séparés strictement).

- 7) Soit  $C$  une partie convexe fermée non vide de  $\mathbb{R}^d$  et soit  $\sigma_C: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  définie par:

$$\sigma_C(p) := \sup\{p \cdot x, x \in C\}$$

montrer que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d : p \cdot x \leq \sigma_C(p), \forall p \in \mathbb{R}^d\}$$

(de sorte que  $C$  est une intersection de demi-espaces fermés).

- 8) Soit  $A$  une partie convexe non vide de  $\mathbb{R}^d$  et  $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ , montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  tel que

$$p \cdot x \leq p \cdot y, \forall y \in A.$$

## Partie II: Points extrémaux

Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}^d$ , on appelle enveloppe convexe de  $E$  et l'on note  $\text{co}(E)$  l'ensemble

$$\text{co}(E) := \left\{ \sum_{i=1}^I \lambda_i x_i, I \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^I \lambda_i = 1, (x_1, \dots, x_I) \in E^I \right\}.$$

Soit  $A$  une partie convexe non vide de  $\mathbb{R}^d$ , nous dirons que  $x \in A$  est un point extrémal de  $A$  si  $\forall (y, z, \lambda) \in A \times A \times ]0, 1[$ , on a

$$x = (1 - \lambda)y + \lambda z \Rightarrow y = z.$$

Nous noterons  $\text{Ext}(A)$  l'ensemble des points extrémaux de  $A$ .

### Cas particuliers

- 9) Soit  $A$  une partie convexe non vide de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $I \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_1, \dots, x_I \in A^I$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_I) \in \mathbb{R}_+^I$  tels que  $\sum_{i=1}^I \lambda_i = 1$ , montrer que:

- a)  $\sum_{i=1}^I \lambda_i x_i \in A$ ,
- b) si  $x := \sum_{i=1}^I \lambda_i x_i \in \text{Ext}(A)$  alors  $x_i = x$  pour tout  $i \in \{1, \dots, I\}$  tel que  $\lambda_i > 0$ .

- 10) Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}^d$  montrer que  $\text{co}(E)$  est le plus petit convexe contenant  $E$  et que  $\text{Ext}(\text{co}(E)) \subset E$ .

11) Soit  $A = \text{co}(E)$  où  $E$  est la partie de  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$E = \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \cup \{(1 + \cos(\theta), \sin(\theta), 0), \theta \in [0, 2\pi]\}$$

montrer que  $\text{Ext}(A)$  est non vide et n'est pas fermée.

12) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(p_1, \dots, p_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$  et  $(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$  tels que

$$A := \{x \in \mathbb{R}^d : p_i \cdot x \leq b_i, i = 1, \dots, k\}$$

soit non vide. Montrer que  $A$  est convexe et fermée. Soit  $x \in A$ , soit  $I(x) := \{i \in \{1, \dots, k\} : p_i \cdot x = b_i\}$ , montrer que

$$x \in \text{Ext}(A) \iff \text{rang}(\{p_i, i \in I(x)\}) = d$$

en déduire que  $\text{Ext}(A)$  est un ensemble fini (éventuellement vide) dont le cardinal est inférieur ou égal à  $2^k$ .

### Cas d'un convexe fermé borné

Dans les trois questions qui suivent,  $K$  est une partie non vide, convexe, fermée et bornée de  $\mathbb{R}^d$ .

13) Soit  $p \in \mathbb{R}^d$ , posons

$$K_p := \{x \in K : p \cdot x \leq p \cdot y, \forall y \in K\}.$$

Montrer que  $K_p$  est non vide, convexe et fermée et que  $\text{Ext}(K_p) \subset \text{Ext}(K)$ .

14) Montrer que  $\text{Ext}(K)$  est non vide (on pourra se ramener au cas où  $0 \in K$  et raisonner sur la dimension de  $K$ ).

15) Montrer que  $K = \text{co}(\text{Ext}(K))$ .

## Partie III: Un résultat de dualité

### Cônes convexes

On dit qu'une partie  $F$  de  $\mathbb{R}^d$  est un cône si  $\lambda F \subset F$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Soit  $E$  une partie non vide de  $\mathbb{R}^d$ , le cône polaire de  $E$  est défini par

$$E^+ := \{p \in \mathbb{R}^d : p \cdot x \geq 0, \forall x \in E\}$$

et son cône bi-polaire par

$$E^{++} = (E^+)^+ := \{\xi \in \mathbb{R}^d : \xi \cdot p \geq 0, \forall p \in E^+\}.$$

- 16) Montrer que  $E^+$  et  $E^{++}$  sont des cônes convexes fermés et que  $E \subset E^{++}$ .
- 17) Montrer que  $E = E^{++}$  si et seulement si  $E$  est un cône convexe fermé.
- 18) Soit  $\xi_1, \dots, \xi_k$ ,  $k$  éléments de  $\mathbb{R}^d$  et

$$F := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \xi_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^k \right\}$$

montrer que  $F$  est un cône convexe fermé. Soit  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , montrer que l'équivalence entre:

- $\xi \in F$ ,
- $\xi \cdot x \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$\xi_i \cdot x \geq 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

## Programmation linéaire

Soit  $M \in \mathcal{M}_{k \times d}(\mathbb{R})$ ,  $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$  et  $p \in \mathbb{R}^d$ . Posons

$$\alpha := \inf \left\{ p \cdot x : x \in \mathbb{R}^d, x \geq 0, Mx \leq b \right\}$$

et

$$\beta := \sup \left\{ b \cdot q : q \in \mathbb{R}^k, q \leq 0, M^T q \leq p \right\}$$

(en adoptant la convention:  $\inf \emptyset = +\infty$  et  $\sup \emptyset = -\infty$ ).

- 19) Montrer que  $\alpha \geq \beta$ .
- 20) On suppose qu'il existe  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$\bar{x} \geq 0, M\bar{x} \leq b \text{ et } p \cdot \bar{x} = \alpha.$$

En notant  $M_i$  le vecteur de  $\mathbb{R}^d$  dont les coordonnées sont les coefficients de la  $i$ -ème ligne de  $M$ , posons:

$$I := \{i \in \{1, \dots, k\} : M_i \cdot \bar{x} = b_i\}$$

et

$$J := \{j \in \{1, \dots, d\} : \bar{x}_j = 0\}.$$

- a) Montrer que  $p \cdot z \geq 0$  pour tout  $z \in \mathbb{R}^d$  tel que  

$$z_j \geq 0 \text{ pour tout } j \in J \text{ et } M_i \cdot z \leq 0 \text{ pour tout } i \in I.$$
- b) Montrer qu'il existe  $\bar{q} \in \mathbb{R}^k$  tel que:  

$$\bar{q} \leq 0, M^T \bar{q} \leq p, \bar{q} \cdot (M\bar{x} - b) = 0 \text{ et } (p - M^T \bar{q}) \cdot \bar{x} = 0.$$
- c) Montrer que  $b \cdot \bar{q} = \alpha = \beta$ .

## Partie IV: Systèmes linéaires sous-déterminés

Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ , on pose

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^d |x_i|, \|x\|_\infty := \max\{|x_i|, i = 1, \dots, d\}$$

$$I_+(x) := \{i \in \{1, \dots, d\} : x_i > 0\}, I_-(x) := \{i \in \{1, \dots, d\} : x_i < 0\}$$

et

$$I_0(x) := \{i \in \{1, \dots, d\} : x_i = 0\}.$$

Soit  $M \in \mathcal{M}_{k \times d}(\mathbb{R})$  et supposons que

$$\text{rang}(M) = k.$$

Soit  $b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ , l'objectif de cette partie est de trouver une solution du système linéaire

$$Mx = b \tag{2}$$

ayant au plus  $k$  coordonnées non nulles par une méthode de minimisation.  
Pour ce faire, on s'intéresse à:

$$r := \inf\{\|x\|_1, x \in \mathbb{R}^d, Mx = b\}. \tag{3}$$

21) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$\|x\|_1 = \max\{x \cdot y, y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_\infty \leq 1\},$$

et

$$\|x\|_\infty = \max\{x \cdot y, y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_1 \leq 1\}.$$

22) Notons  $C$  l'ensemble:

$$C := \{x \in \mathbb{R}^d : Mx = b, \|x\|_1 = r\}.$$

Montrer que  $C$  est non vide, convexe, fermé et borné.

- 23) Fixons  $\bar{x} \in C$ . Montrer qu'il existe  $q \in \text{Ker}(M)^\perp \setminus \{0\}$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on ait

$$q_i \bar{x}_i = \|q\|_\infty |\bar{x}_i|.$$

- 24) Soit  $K$  l'ensemble des  $y \in \mathbb{R}^d$  tels que

$$My = b, \quad y_i = 0 \quad \forall i \in I_0(\bar{x}), \quad q_i y_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Montrer que  $K$  est non vide et inclus dans  $C$ .

- 25) Montrer que si  $y \in \text{Ext}(K)$  alors

$$h \in \text{Ker}(M) \text{ et } I_0(y) \subset I_0(h) \Rightarrow h = 0.$$

- 26) En déduire que si  $y \in \text{Ext}(K)$  alors le cardinal de  $I_+(y) \cup I_-(y)$  est inférieur ou égal à  $k$ .

**Fin du sujet.**