

## Autour des théorèmes de Thalès

- Corrigés -

Document proposé par Yoshi – D'autres sont disponibles sur <http://www.bibmath.net>

### Exercice 1 – Nœud papillon

- Celui qui a répondu oui, aurait dû se douter que c'était faux à la simple lecture de la 2e question.  
Considérons les triangles ABC et PCR.

Il faut calculer séparément les rapports  $\frac{CR}{CA}$  et  $\frac{CP}{CB}$  :

$$\frac{CR}{CA} = \frac{1,2}{3,3} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11} \quad \text{et} \quad \frac{CP}{CB} = \frac{1,5}{4,5} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Il ne faut pas faire de comparaisons d'égalités sur des valeurs approchées.

On constate que les deux rapports  $\frac{CR}{CA}$  et  $\frac{CP}{CB}$  ne sont pas égaux.

Même si les points R, C, A d'une part et P, C, B d'autre part sont placés dans le même ordre sur les droites (CA) et (CB), puisque les rapports  $\frac{CR}{CA}$  et  $\frac{CP}{CB}$  ne sont pas égaux, alors ***les droites (PR) et (AB) ne sont pas parallèles.***

*Pour les curieux : il ne s'agit pas là de la réciproque du théorème de Thalès, mais de sa contraposée.*

- Le rapport le plus simple est  $\frac{CP}{CB} = \frac{1}{3}$ . On va donc essayer de modifier le rapport  $\frac{CR}{CA}$  de façon à obtenir aussi  $\frac{1}{3}$ .

On doit donc modifier soit CR, soit CA. Si on prend  $CR = 1,1$ , alors on a  $\frac{CR}{CA} = \frac{1,1}{3,3} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$  et donc  $\frac{CR}{CA} = \frac{CP}{CB}$ .

Si on prend  $CA = 3,6$ , alors on a  $\frac{CR}{CA} = \frac{1,2}{3,6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$  et donc  $\frac{CR}{CA} = \frac{CP}{CB}$ .

(On aurait pu aussi modifier CP ou CB, mais c'était moins évident (il aurait fallu prendre, par ex, pour CP :  $\frac{8}{11}$ , grâce aux "produits en croix").

### Exercice 2 – Trois parallèles ?

Là encore, la calculatrice sera inutile.

- Puisque les points C et D appartiennent respectivement aux droites (NA) et (NM) sécantes en M, et que, par hypothèse, les droites (CD) et (AM) sont parallèles, alors le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{NC}{NA} = \frac{ND}{NM} = \frac{CD}{AM}$$

Puisque, par construction, D est un point de [NM], alors  $NM = ND + DM = 4,8 + 1,2 = 6$ . On remplace maintenant ND par 4,8, NM par 6 et NA par 10 dans les 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> rapports :  $\frac{NC}{10} = \frac{4,8}{6}$ . D'où, avec la règle de l'égalité des produits en croix, on obtient :  $NC = \frac{4,8 \times 10}{6} = 8$ . **NC mesure 8 cm.**

- Pour savoir si les droites (CD) et (OB) sont parallèles, comparons les rapports  $\frac{NB}{NC}$  et  $\frac{NO}{ND}$

$\frac{NB}{NC} = \frac{3}{8}$  et  $\frac{NO}{ND} = \frac{2}{4,8} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$ . On constate maintenant que  $\frac{NB}{NC} \neq \frac{NO}{ND}$

Même si les points O, N, D d'une part et B, N, C d'autre part sont placés dans le même ordre sur les droites (ND) et (NC), puisque les rapports  $\frac{NB}{NC}$  et  $\frac{NO}{ND}$  ne sont pas égaux, alors ***les droites (CD) et (OB) ne sont pas parallèles.***

### Exercice 3 – Dans le triangle.

1. Considérons les triangles ATS et AEU. On sait que T est sur [AE], S sur [AU] et que (TS) // (EU).

On peut leur appliquer le théorème de Thalès et écrire les rapports égaux suivants  $\frac{AE}{AT} = \frac{AU}{AS} = \frac{EU}{TS}$ .

On ne conservera que les deux premiers rapports :  $\frac{AE}{AT} = \frac{AU}{AS}$

Considérons les triangles ATG et AES. On sait que T est sur [AE], G sur [AS] et que (TG) // (AS).

On peut leur appliquer le théorème de Thalès et écrire les rapports égaux suivants  $\frac{AE}{AT} = \frac{AS}{AG} = \frac{ES}{TG}$ .

On ne conservera que les deux premiers rapports :  $\frac{AE}{AT} = \frac{AS}{AG}$

2. On a donc :  $\frac{AE}{AT} = \frac{AU}{AS}$  et  $\frac{AE}{AT} = \frac{AS}{AG}$  on en déduit que  $\frac{AU}{AS} = \frac{AS}{AG}$

La règle de l'égalité des produits en croix permet d'écrire :  $AU \times AG = AS \times AS$  et donc  $AU \times AG = AS^2$

### Exercice 4– Portée du feu de croisement.

1. Le mur figuré par la droite (BA) est vertical et le sol figuré par (HM) parfaitement horizontal.

Donc : (AB) ⊥ (HM). De plus, par hypothèse, on sait que : (HP) ⊥ (HM). Les deux droites (HP) et (AB), toutes deux perpendiculaires à (HM) sont donc parallèles entre elles.

2. Par construction, on a : A ∈ [HM]. Donc HM = HA + AM et, comme HM = x et HA = 3, on peut écrire : AM = HM - AM = x - 3.

Puisque les points B et C appartiennent respectivement aux droites (PM) et (HM) sécantes en M et que (PH) et

(HM) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, on peut écrire :  $\frac{MB}{MA} = \frac{MA}{MH} = \frac{BA}{HP}$ .

On utilise les deux derniers rapports dans lesquels on remplace MA par x - 3, MH par x, AB par 0,55 et HP par 0,6 et on obtient :  $\frac{x-3}{x-3} = \frac{0,55}{0,6}$ . Multiplions le dénominateur et le numérateur de la 2<sup>e</sup> fraction par 100 :

$$\frac{x-3}{x} = \frac{55}{60}, \text{ que l'on simplifie alors par 5 et on obtient enfin } \frac{x-3}{x} = \frac{11}{12}.$$

3. On applique la règle de l'égalité des produits en croix à l'égalité précédente, et on obtient : 12(x - 3) = 11x. On développe le 1<sup>er</sup> membre et on obtient 12x - 36 = 11x. Et après soustraction de 11x et ajout de 36 aux 2 membres : 12x - 11x = 36.

D'où x = 36.

4. Puisqu'on a noté x la portée HM des feux de croisement de ce véhicule, alors HM = 36 m.

Puisque nous avons alors 30 m < HM < 45 m, oui ce véhicule respecte la consigne de sécurité.

### Exercice 5. - La bouée.

Le bâton étant placé verticalement dans le sol, alors (SA) ⊥ (PB)

Paul se place bien droit alors (OP) ⊥ (PB).

Les deux droites (IP) et (PB) toutes deux perpendiculaires à la même droite (PB), sont parallèles.

Considérons les triangles BSA et BOP.

On a BP = BA + AP = x + 30

On sait que A est sur [BP], S sur [BO] et que (OP) // (SA), on peut leur appliquer le théorème de Thalès et écrire les rapports égaux suivants  $\frac{BS}{BO} = \frac{BA}{BP} = \frac{SA}{OP}$ . et on ne conservera que les 2e et 3e rapports  $\frac{BA}{BP} = \frac{SA}{OP}$  dans

lesquels, on remplacera BA par x, BP par x + 30, SA par 1 et OP par 1,6 :  $\frac{x}{x+30} = \frac{1}{1,6}$

La règle de l'égalité des produits en croix permet d'écrire :  $1,6x = x + 30$  ..

D'où :  $0,6x = 30$  et  $x = \frac{30}{0,6} = \frac{300}{6} = 50$  : la bouée est à 50 m du bord de la plage.

(calculatrice inutile : ^\_^\n)

### Exercice 6 – Un dessin aussi précis soit-il, est-il fiable ?

1. Calcul de EG et GF, FH et AH, HC et DC

Considérons le "sablier" GFEBD.

Par construction, F ∈ [GH] et D ∈ [BC], Puisque, par hypothèse, (GH) // (BC), alors on peut aussi dire que (FG) // (BD).

Puisque les points F et G appartiennent respectivement aux droites (BE) et (DE) sécantes en E et que (FG) et (BD) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès, on peut écrire :

On remplace alors EF par 63, EB par 36, ED par 44 et BD par 48 :  $\frac{63}{36} = \frac{EG}{44} = \frac{FG}{48}$ . La règle de l'égalité des produits en croix appliquée aux deux premiers rapports donne :  $EG = 44 \times 63 / 36 = 77$ . **EG = 77 mm**  
De même, avec les 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> rapports, on obtient :  $FG = 48 \times 63 / 36 = 84$ . **FG = 84 mm**  
*Considérons le "sablier" EGFHA.*

On montrerait de même avec le théorème de Thalès que :  $\frac{FE}{FA} = \frac{FG}{FH} = \frac{EG}{AH}$

On remplace alors FE par 63, FA par 45, FG par 84 et EG par 77 :  $\frac{63}{45} = \frac{84}{FH} = \frac{77}{AH}$

La règle de l'égalité des produits en croix appliquée aux deux premiers rapports donne :  $FH = 84 \times 45 / 63 = 60$ .  
**FH = 60 mm**

De même, avec les 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> rapports, on obtient :  $AH = 77 \times 45 / 63 = 55$ . **AH = 55 mm**.

Puisque, par construction, D  $\overset{\text{g}}{\in}$  [BC] et que, par hypothèse, (GH) // (BC) alors on peut aussi dire que (GH) // (DC).

Puisque, par construction, H  $\overset{\text{g}}{\in}$  [AC] et que, par hypothèse, (GD) // (AC) alors on peut aussi dire que (GD) // (HC)..

Le quadrilatère GHCD ayant ses 4 côtés parallèles deux à deux, est donc un parallélogramme. Ses côtés opposés ont donc la même longueur, donc  $HC = GD = GE + ED = 77 + 44 = 121$  et  $CD = GH = GF + FH = 84 + 60 = 144$ .

$$\mathbf{HC = 121 \text{ mm et } CD = 144 \text{ mm.}}$$

2. Les droites (AD) et (BH) semblent parallèles.

3. On remarque que les points C, B, D d'une part et C, H, A d'autre part, sont alignés dans le même ordre sur (CB) et (CA).

Pour répondre à la question, comparons les rapports  $\frac{CH}{CA}$  et  $\frac{CD}{CB}$ .

Puisque, par construction, D  $\in$  [BC] et H  $\in$  [AC], alors  $CB = CD + DB = 144 + 48 = 192$  et  $CA = CH + HA = 121 + 55 = 176$ .

$$\mathbf{CB = 192 \text{ mm et } CA = 176 \text{ mm.}}$$

$$\frac{CH}{CA} = \frac{121}{176} = \frac{11}{16}$$

$$\text{On constate que } \frac{CH}{CA} \neq \frac{CD}{CB}$$

$\frac{CD}{CB} = \frac{144}{192} = \frac{12}{16}$   
Puisque les rapports  $\frac{CH}{CA}$  et  $\frac{CD}{CB}$  ne sont pas égaux, alors les droites (AB) et (DH) ne sont pas parallèles.

**Remarque 1.** On aurait pu utiliser une 2<sup>e</sup> méthode en utilisant un "*raisonnement par l'absurde*".

Supposons que les droites (AB) et (HD) sont parallèles. On sait de plus que, par hypothèse, (GH) // (BC).

Le quadrilatère FHDB formé par l'intersection de 4 droites parallèles deux à deux est donc un parallélogramme. Ses côtés opposés sont donc de même longueur, et en particulier  $FH = BD$  et  $BD = 48 \text{ mm}$ .

Or, le calcul de FH nous a donné  $FH = 60 \text{ mm}$ . Il y a donc contradiction. Donc (AB) et (EH) ne sont pas parallèles (la question posée avait pour but de tester si la réciproque du théorème de Thalès s'appliquait ou pas)

En l'absence d'instructions précises, vous auriez pu utiliser le raisonnement ci-dessus, à condition de le faire "proprement" (il est plus "délicat" à manier), mais donc, ici, non !

**Remarque 2.** Il est toujours profitable d'économiser les calculs et donc la déperdition d'énergie. Pour cela rien de mieux qu'un (petit) raisonnement géométrique. C'est ce qui a motivé le procédé employé pour le calcul de HC et CD. Bien sûr, la "force brute" marchait aussi : c'est la méthode utilisée par la très grande majorité d'entre vous. Elle consistait à appliquer le théorème de Thalès aux deux triangles "enchâssés" BED et BAC, avec les lourdeurs et contraintes inhérentes à ladite procédure.

## Exercice 7 – Calculs minimum

Le but de l'exercice ,n'est pas de calculer pour calculer, mais de faire le minimum de calculs pour construire la figure à l'échelle.

1. Non, on ne peut pas construire la figure. On connaît ED, DH, EH : on peut tracer le triangle EDH.

On trace ensuite les demi-droites [DE) et [DH), mais on ne peut placer F et G avec précision avec la seule longueur FG : il faudrait tâtonner...

Admettons cependant.

On trace la demi-droite [EH), puis par D la parallèle à [EH) : le problème qui se pose est le placement du point A. Sans autres mesures, il y a plusieurs solutions, dont une seule est la bonne... Mais laquelle ?

2. On va donc calculer DF (ou DG) qui permettra de placer F (ou  $g^\circ$ ) et de trouver l'autre point en traçant la parallèle à [EH] passant par F (ou G).

Concernant le point A, si on connaissait la longueur BE, on placerait B et A serait l'intersection de (BC) et (DE). En effet, l'énoncé donne (BH) // (CD) et (AC) // (GD). Comme H est sur [DG] et B sur [AC], on conclut que (BH) // (CD) et (BC) // (HD).

Le quadrilatère BCDH a ses 4 côtés parallèles deux à deux, c'est donc un parallélogramme. Ses côtés opposés sont donc aussi égaux, et en particulier CD = BE.

Considérons les triangles DEH et DFG.

Le point E est sur (DF), le point H sur (DG) et on sait que (EH) // (FG). On peut appliquer le théorème de Thalès et écrire les rapports égaux suivants  $\frac{DE}{DF} = \frac{DH}{DG} = \frac{EH}{FG}$ .

On utilisera les 1er et 3e rapports dans lesquels, on remplacera DE par 28, EH par 20 et FG par 55 :

$$\frac{28}{DF} = \frac{20}{55} \quad \text{La règle de l'égalité des produits en croix permet d'écrire : } DF = \frac{28 \times 55}{20} \dots$$

Inutile de sortir la calculette ! En effet  $28 = 4 \times 7$ ,  $55 = 5 \times 11$  et  $20 = 4 \times 5$ .

On va donc simplifier 28 et 20 par 4, puis le 5 du dénominateur avec le 5 de 55 :

$$DF = \frac{28 \times 55}{20} = \frac{7 \times 55}{5} = 7 \times 11 = 77 \quad DF = 77 \text{ mm}$$

Considérons maintenant les triangles EDH et EBC.

On peut calculer BE en une seule fois en posant BH =  $x$ . D'où BE = BH - EH =  $x - 20$ .

Ces triangles sont placés en configuration noeud papillon ou sablier E est sur (BH) et sur (AD) et on sait que (AC) // GD, donc que - puisque B est sur (AC) et H sur (DG), (AB) // DH, on peut appliquer le théorème de

Thalès et écrire les rapports égaux suivants  $\frac{ED}{EA} = \frac{EH}{EB} = \frac{DH}{AB}$ .

On utilisera les 2e et 3e rapports dans lesquels, on remplacera :

$$\text{EH par 20, EB par } x - 20, \text{ DH par 24 et AB par 54 : } \frac{20}{x-20} = \frac{24}{54}$$

$$\text{La règle de l'égalité des produits en croix permet d'écrire : } x - 20 = \frac{20 \times 54}{24} \dots$$

$$\text{Là encore inutile de se jeter sur la calculette : } \frac{20 \times 54}{24} = \frac{5 \times 54}{6} = 5 \times 9 = 45$$

On a donc  $x - 20 = 45$ , donc  $x = 65$ . BH = 65 mm