

F-MATHEMATIQUES II - filière PSI

I) Remarques générales :

:

Le problème posé à cette épreuve portait sur les matrices symplectiques et le groupe symplectique.

Dans la partie "Notations", l'énoncé introduit les notations utiles pour la résolution du problème, et rappelle quelques techniques usuelles de calcul relatives aux matrices découpées par blocs.

La première partie introduit le groupe symplectique et en étudie ses propriétés usuelles.

La seconde partie étudie le centre du groupe symplectique.

La troisième partie étudie la valeur du déterminant d'une matrice symplectique.

Ce problème exigeait des candidats une bonne habileté en calcul matriciel, et une bonne connaissance du cours d'algèbre linéaire et bilinéaire. Il fallait utiliser abondamment les techniques relatives aux matrices représentées par blocs. Fort heureusement, l'énoncé rappelait quelques résultats dans le paragraphe des notations. Il fallait bien comprendre la structure logique de l'énoncé, et savoir utiliser les résultats obtenus pour la résolution des questions ultérieures. Les résultats précédents ^ utiliser étaient souvent suggérés par l'énoncé. Ainsi, Q7 utilise Q6, Q10 utilise Q2 et Q7, Q12 utilise Q9 et Q11, Q14 utilise Q8 et Q13, Q16 utilise Q6, Q17 utilise Q16, Q18 utilise Q17, Q19 utilise Q5, Q14 et Q18.

Une grande partie des candidats ont abordé les trois quarts du sujet, jusqu'aux questions 13 et 14. Un certain nombre de candidats ont traité correctement l'intégralité du sujet.

II) Remarques particulières :

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème:

Les questions de la partie I étaient faciles. Les correcteurs, ^ juste titre, ont été exigeants sur la rédaction, et ne pouvaient pas se contenter de calculs successifs sans explications.

Question 1: Environ la moitié des candidats essaient de calculer le déterminant de J pour montrer que cette matrice est inversible. Malheureusement, le calcul est le plus souvent incorrect, et les candidats sont maladroits avec le calcul par blocs. Nous avons accepté l'argument : $J^{-1} = {}^t J$. Certains remarquent que J est orthogonale.

Rappelons que le déterminant d'une matrice est toujours un scalaire, et ne saurait être égal ^ I_n .

Certains candidats affirment dès cette première question, à tort, qu'une matrice est symplectique si et seulement si elle est orthogonale, ce qui a pour conséquence que presque toutes les solutions des questions suivantes sont fausses.

Question 2: Le calcul direct a été problématique pour une minorité de copies. En particulier, certains candidats n'ont pas compris la définition d'une matrice symplectique et ont calculé $'K(\alpha)K(\alpha)K(\alpha)$ au lieu de $'K(\alpha)JK(\alpha)$.

Question 3: Bien que cette question soit très facile, beaucoup de candidats ont réussi à la rater. Ils se sont trompés dans l'expression de $'L_v$, puis ont affirmé que $'UU^{-1} = I_n$. Il y avait plusieurs garde-fous dans l'énoncé qui auraient dû attirer l'attention des candidats quand ils se trompaient pour calculer la transposée d'une matrice définie par blocs.

Question 4: Peu de candidats ont justifié correctement cette question, en particulier en ce qui concerne la simplification par $\det J$ (ce déterminant est-il nul ou pas ?). Certains avaient

trouvé une valeur fausse pour le déterminant ^ la question 1. Certains font des erreurs de logique très graves, confondant une application et sa réciproque, affirmant ainsi qu'une matrice est symplectique si et seulement si son déterminant vaut 1 (et même, dans certaines copies, si et seulement si son déterminant est non nul !)

Question 5: L'énoncé est mal compris dans certaines copies. Certains candidats prennent deux éléments particuliers de Sp_{2n} , par exemple J et $K(\alpha)$, constatent que le produit $JK(\alpha)$ est dans Sp_{2n} , puis écrivent "donc, le produit de deux éléments de Sp_{2n} est dans Sp_{2n} ", et pensent avoir prouvé la propriété demandée !

Question 6: Une proportion importante de candidats font l'erreur de logique : M et MM^{-1} sont symplectiques, donc, d'après la question 5, M^{-1} l'est !

Question 7: Cette question était liée ^ la précédente (il est aussi possible de résoudre ces questions dans l'ordre inverse). Il y a beaucoup de solutions acrobatiques, pas toujours claires, pas toujours honnêtes, y compris en ce qui concerne l'inversibilité de M . Certains écrivent : "L'inverse de J est dans Sp_{2n} , donc, un élément de Sp_{2n} est inversible et a son inverse dans Sp_{2n} ". Les solutions simples et correctes sont rares.

Question 8: Il y a toujours des problèmes de logique (confusion entre condition nécessaire et condition suffisante), et des problèmes de calcul de la transposée d'une matrice définie par blocs. Une fraction infime des candidats ont vu que les quatre conditions trouvées étaient redondantes et pouvaient se résumer ^ trois d'entre elles.

Question 9: Il fallait bien lire l'énoncé et comprendre que les éléments de Z sont parmi ceux de Sp_{2n} . Certains affirment sans le justifier que I et $-I$ appartiennent ^ Sp_{2n} .

Question 10: Trop de candidats ne cherchent pas à montrer que la matrice L est symplectique. La moitié au moins des candidats écrivent des relations fausses à partir de $LM = ML$ pour éviter d'avoir à montrer que ' $LM = M'L$ '.

Question 11: Cette question est facile et quasiment toujours bien traitée.

Question 12: Les raisonnements sont souvent trop rapides et superficiels. Il faut exprimer que A commute avec $I + E_{i,j}$, et il faut en déduire que A est scalaire pour pouvoir conclure. De plus, une matrice diagonale de déterminant 1 n'a pas forcément tous ses coefficients diagonaux égaux. Certains affirment le résultat de la question sans démonstration, comme s'il s'agissait d'un résultat du cours, ce qui n'est pas le cas.

Question 13: On rencontre toujours des problèmes de logique, avec la confusion entre implication et implication réciproque. Il faut noter que de nombreux calculs et résultats sont faux, parce que le candidat pense que la multiplication de deux matrices carrées est commutative.

Question 14: Il s'agit d'une question de synthèse astucieuse, utilisant en particulier les résultats des questions 8 et 13, qui a été bien traitée dans les meilleures copies.

Question 15: Cette question s'inspire de la preuve de l'orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique. L'hypothèse de non inversibilité de Q n'est pas utile ici et est donnée en vue de la question Q17. De même, l'hypothèse de non nullité de V_1 et V_2 n'est pas utile. Cette question est résolue correctement dans une copie sur quatre. Dans la majorité des copies, les candidats montrent leur grande incompréhension en algèbre linéaire et bilinéaire, et font des opérations illicites : divisions de matrices, produits scalaires de matrices et de vecteurs, produits de matrices impossibles, etc...

Question 16: Cette question est souvent bien traitée quand elle est abordée.

Question 17: Cette question d'algèbre bilinéaire est assez simple et proche du cours. Elle

a permis de distinguer les candidats qui sont ^ l'aise avec le sujet de ceux qui n'ont pas bien compris la notion de famille libre. Le caractère non nul des vecteurs DV_i n'intervient que dans la conclusion.

Question 18: Cette question a été abordée par une proportion importante de candidats, mais a été rarement bien traitée. Le raisonnement était assez subtil et demandait une rédaction soignée.

Question 19: Il s'agit d'une question de synthèse qui demandait une bonne compréhension des questions précédentes. L'énoncé suggérait implicitement d'utiliser les questions Q14 et Q18. Il fallait utiliser aussi Q2 et Q5.

III) Conseils aux candidats et conclusion :

Les notes obtenues sont étalées de 0 ^ 20. Les correcteurs ont utilisé un barème généreux, et la moyenne obtenue par les candidats est de 9 sur 20.

Les prestations des candidats sont très variables. Pour beaucoup de candidats, l'énoncé est souvent lu avec une attention insuffisante, le cours est mal su, aussi bien en ce qui concerne les définitions que les théorèmes et démonstrations classiques.

A l'opposé, beaucoup de candidats maîtrisent bien le cours, et ont su traiter complètement et correctement l'intégralité du sujet.

Il y a un constat décevant concernant des copies o • de nombreuses questions difficiles sont traitées. Les solutions sont très mal rédigées, avec des implications et des équivalences écrites à tort et à travers sans précaution, avec des cadres de preuve mal définis. Certains bons élèves travaillent ainsi de façon approximative et sont trop peu exigeants vis-a-vis d'eux-mêmes.

On ne saurait trop recommander aux candidats de lire le sujet en entier avant de commencer la résolution. Une vision globale plus claire peut donner de précieuses indications pour certaines questions.

Les candidats doivent bien connaître leur cours, qui comporte tous les outils qu'il faudra mettre en oeuvre pour rédiger une bonne solution. Ils doivent aussi maîtriser l'art du raisonnement, et les techniques classiques de calcul.

Il faut avoir réfléchi complètement sur une question avant d'en commencer la rédaction, pour obtenir la clarté et la rigueur nécessaires. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle doivent • être bannis.

Espérons que ces remarques pourront aider les futurs candidats ^ mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.