



CONCOURS COMMUN INP  
RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE 2023  
DE MATHÉMATIQUES

## 1/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet se compose d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

L'exercice couvre une part significative du programme d'analyse (intégration, séries entières, équations différentielles). Il aboutit à une expression explicite des coefficients du développement en série entière de la fonction de Bessel.

Le premier problème aborde la marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  avec des questions d'analyse et de probabilités. La première partie consiste en une question de cours et application. La deuxième partie permet de calculer la probabilité de retour à l'origine de la particule lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini. La troisième partie mène au calcul du nombre moyen de passages à l'origine de la particule lorsque le nombre de pas tend vers l'infini, que la marche soit symétrique ou non.

Le second problème s'intéresse au comportement asymptotique de la suite des puissances itérées d'une matrice dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ . La première partie est l'étude d'un cas particulier et fait appel aux connaissances portant sur la diagonalisation de matrices. La deuxième partie traite du cas où tous les éléments du spectre de la matrice sont de module strictement inférieur à 1. Cette partie commence par traiter le cas où la matrice est triangulaire supérieure et se poursuit par une étude qui permet de conclure dans la dernière question au cas d'une matrice quelconque en utilisant la propriété de trigonalisabilité des matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ . Enfin, la troisième partie est une application à l'étude d'une méthode numérique dite de Gauss Seidel pour la résolution d'un système linéaire appliquée à une matrice à diagonale strictement dominante.

### Commentaire général sur les copies

Les copies sont assez bien présentées dans l'ensemble, mais on regrette la présence trop importante de ratures et de surcharges ou encore d'abréviations qui nuisent à la lisibilité. Il est conseillé d'utiliser systématiquement un brouillon avant de se lancer dans la rédaction. On rappelle que les abréviations n'ont pas leur place dans une copie de concours.

Notons également que l'honnêteté intellectuelle est évaluée dans les copies. En particulier dans les démonstrations où le résultat est donné dans l'énoncé, donner le résultat réellement obtenu peut permettre de gagner quelques points là où tenter le bluff pour tomber à tout prix sur le résultat de l'énoncé n'en vaudra aucun.

## 2/ ANALYSE DÉTAILLÉE DES QUESTIONS

### a) Exercice

Q1 : la question est théoriquement simple et les réponses sont souvent compliquées. La plupart des candidats ne savent pas vraiment ce qu'ils cherchent et donnent une réponse souvent disproportionnée dans le meilleur des cas (ils montrent par exemple la continuité de  $f$  par théorème d'intégrales dépendant d'un paramètre), fausse sinon.

Q2 : l'existence du théorème qu'il fallait utiliser ici est souvent connue mais la mise en œuvre est plus délicate. Certains candidats n'ont pas cherché à justifier le résultat. Quelques fois, le calcul de la dérivée est faux.

Q3 : les candidats manquent souvent de précaution en parlant de dérivabilité pour une fonction de deux variables. Certains calculs sont inexacts.

Q4 : question souvent délaissée par les candidats, mais assez correctement abordée lorsque c'est le cas.

Q5 : question classique mais, malgré tout, les candidats dérapent facilement dans la réorganisation des termes de la série et les réindexations nécessaires, ce qui conduit malheureusement parfois à des coups de bluff.

Q6 : le développement en série entière du cosinus est souvent bien connu mais peu précisent le rayon de convergence et l'interversion série intégrale est rarement correctement justifiée.

Q7 : peu de réponses, très peu de bonnes réponses. Les candidats invoquent par réflexe le théorème d'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, ou encore l'unicité d'une série entière sans préciser dans quel contexte cette phrase a du sens.

Q8 : question également peu abordée et rarement bien traitée, des confusions apparaissant notamment entre les indices.

### b) Problème 1

Q9 : une question de cours plutôt bien réussie malgré quelques confusions avec les développements limités.

Q10 : il est arrivé de voir des réponses justes en application d'une question 9 fausse. Avoir le résultat sous les yeux donne trop souvent lieu à des calculs malhonnêtes.

Q11 : question assez bien traitée, l'erreur la plus courante étant l'oubli de préciser que les variables sont indépendantes avant de conclure à une loi binomiale.

Q12 : certains candidats n'appliquent pas les résultats précédents et tentent de retrouver une loi binomiale.

Q13 : la plupart des candidats pensent à utiliser la formule de Stirling mais certains se heurtent à des difficultés de calculs.

Q14 : question plutôt bien traitée malgré une mauvaise compréhension de la signification de l'indice  $n$  de la variable aléatoire  $T_n$ .

Q15 : certains candidats affirment par automatisme que le paramètre de la loi de Bernoulli est de nouveau égal à  $p$  alors que ce paramètre est le résultat d'un précédent calcul.

Q16 : lorsqu'elle est abordée, la question conduit souvent à des résultats corrects. Il fallait penser à justifier de pouvoir appliquer la question 10.

Q17 : question parfois traitée partiellement, la récurrence est plus ou moins bien menée jusqu'au bout.

### c) Problème 2

Q18 : cette première question du problème d'algèbre est souvent bien traitée. Certains candidats ont mené toute l'étude du polynôme caractéristique pour y répondre. Ils auraient gagné du temps en lisant les questions suivantes qui aidaient à détailler cette démarche.

Q19 : question bien traitée sauf de rares exceptions et quelques candidats qui ont multiplié au lieu d'ajouter les coefficients dans le produit matriciel.

Q20 : certains candidats ont bien traité la question même si le détail des opérations sur les lignes ou colonnes pouvaient manquer et quelques fois cacher des erreurs. Certains ont eu l'habileté d'exploiter la connaissance d'au moins une valeur propre.

Q21 : certains candidats ont refait les mêmes calculs qu'en question 20 alors que l'énoncé les amenaient à utiliser le résultat de la question 20.

Q22 : on observe beaucoup de confusions dans les réponses données. Le théorème de Cayley-Hamilton est souvent invoqué pour montrer que  $Q_{a,b}$  est annulateur de  $M(a, b)$  alors qu'il est hors sujet ici. Les correcteurs s'étonnent de voir citée, très souvent de manière incorrecte, la notion de polynôme minimal annulateur alors que ce n'est pas au programme. En revanche, la caractérisation d'une matrice diagonale par existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples est en général bien exploitée. Le cas particulier  $a = 0$  est souvent oublié.

Q23 : les candidats qui abordent cette question sont ceux qui connaissent la méthode et les calculs à mener. Ceux-là parviennent généralement à donner le bon résultat. Certains tentent maladroitement de "poser" une division euclidienne sans savoir de quoi il s'agit.

Q24 : cette fin de partie est traitée essentiellement par les candidats qui ont réussi la question 23. La rédaction peut sembler parfois hâtive.

Q25 : beaucoup d'erreurs de rédaction sont signalées, notamment lorsque le candidat ne distingue pas les égalités vectorielles des égalités en normes. Sur de nombreuses copies on lit que  $\|e_1\| = 1$ .

Q26 : la première partie est relativement bien traitée malgré des explications un peu simplistes parfois. La deuxième partie est plus technique et lorsqu'elle est abordée, elle l'est par une récurrence plus ou moins bien menée.

Q27 : les bonnes réponses à cette question difficile sont ici exceptionnelles. Certains candidats se sont aventurés dans une démonstration sans avoir repéré la principale difficulté de cette question.

Q28 : quelques candidats ont su reconnaître la récurrence entamée dans les questions précédentes.

Q29 : cette fin de partie est peu abordée mais l'argument de trigonalisation dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est le plus souvent formulé à bon escient.

Q30 : les candidats justifient la plupart du temps par un calcul de déterminant, parfois par le résultat admis sur les matrices à diagonale strictement dominante. Mais on observe également beaucoup d'arguments faux, comme les matrices triangulaires donc inversibles, ou encore que les coefficients diagonaux de  $A$  sont non nuls parce que  $A$  est inversible.

Q31 et Q32 : ces questions sont sans difficulté mais ont été trop peu abordées.