



ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

J. 20 1118

**SESSION 2020**

# **CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE**

## **ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

**Durée : 2 Heures  
Coefficient : 1**

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde (recto),
- 2 page de consignes (recto-verso),
- 1 page d'avertissement (recto),
- 12 pages de texte (recto-verso) numérotées de 1 à 12

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT  
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

### A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à bille ou feutre à encre foncée : bleue ou noire. Vous devez **cocher ou noircir** complètement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 3) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 4) Si vous voulez corriger votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la ligne de repentir.
- 5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.  
**Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.**

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : le logiciel de correction lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'il aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 80 sont neutralisées).  
Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.  
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :
  - soit vous décidez de ne pas traiter cette question,  
*la ligne correspondante doit rester vierge.*
  - soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,  
*vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*
  - soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,  
*vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*
  - soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,  
*vous devez alors noircir la case E.*

**En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.**

## Questions liées

1 à 8

9 à 18

19 à 26

30 à 32

33-34

## Notations

Les lettres  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  désignent respectivement les ensembles des réels, des complexes, des entiers naturels et des entiers relatifs.

On rappelle que  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  où  $i$  désigne le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$  et  $x$  est un nombre réel.

$\mathbb{R}[X]$  désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

# PARTIE I

Etant donné un paramètre réel  $\alpha$ , on note  $E_\alpha$  l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  de réels qui vérifient, pour tout  $n$  positif, la relation :

$$u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n).$$

## Question 1

On peut établir :

- A) Pour tout  $\alpha$  réel, il existe deux réels non nuls  $r$  et  $s$ , avec  $r < s$ , tels que les suites  $(r^n)_{n \geq 0}$  et  $(s^n)_{n \geq 0}$  appartiennent à l'ensemble  $E_\alpha$ .
- B) Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe deux réels non nuls  $r$  et  $s$ , avec  $r < s$ , tels que les suites  $(r^n)_{n \geq 0}$  et  $(s^n)_{n \geq 0}$  appartiennent à l'ensemble  $E_\alpha$ .
- C) Pour tout  $\alpha < -4$ , il existe deux réels non nuls  $r$  et  $s$ , avec  $r < s$ , tels que les suites  $(r^n)_{n \geq 0}$  et  $(s^n)_{n \geq 0}$  appartiennent à l'ensemble  $E_\alpha$ .
- D) Pour tout  $\alpha \in ]-4; 0[$ , il existe deux réels non nuls  $r$  et  $s$ , avec  $r < s$ , tels que les suites  $(r^n)_{n \geq 0}$  et  $(s^n)_{n \geq 0}$  appartiennent à l'ensemble  $E_\alpha$ .

## Question 2

Alors, lorsqu'ils existent, les réels  $r$  et  $s$  vérifient :

- A)  $r = -4$ ,  $s = 0$  et  $|r| > |s|$ .
- B)  $r = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$ ,  $s = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$  et  $|r| > |s|$ .
- C)  $r = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$ ,  $s = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$  et  $|r| < |s|$ .
- D)  $r = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$ ,  $s = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$  et  $|r| > |s|$ .

## Question 3

On suppose  $\alpha \in ]-4; 0[$ . Soit  $(w_n)_{n \geq 0}$  une suite dont le terme général s'écrit sous la forme

$$w_n = ar^n + bs^n,$$

avec  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $r$  et  $s$  étant solutions de l'équation

$$x^2 + \alpha x + \alpha = 0.$$

- A) La suite  $(w_n)_{n \geq 0}$  appartient à  $E_\alpha$ .
- B) La suite  $(w_n)_{n \geq 0}$  appartient à  $E_{-\alpha}$ .
- C) Pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0} \in E_\alpha$ , il existe un couple de réels  $(a; b)$  tels que  $u_n = ar^n + bs^n$
- D) Pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0} \in E_{-\alpha}$ , il existe un couple de réels  $(a; b)$  tels que  $u_n = ar^n + bs^n$

**Tournez la page S.V.P.**

### Question 4

On suppose  $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ . Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite appartenant à  $E_\alpha$ .

- A) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers une limite  $l > 0$ .
- B) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0.
- C) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $+\infty$ .
- D) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'a pas de limite.

### Question 5

Connaissant  $u_0$  et  $u_1$ , on peut écrire :

- A)  $u_n = \frac{u_0 s - u_1}{s - r} r^n + \frac{u_1 - u_0 r}{s - r} s^n$
- B)  $u_n = \frac{u_1 s - u_0}{s - r} r^n + \frac{u_0 - u_1 r}{s - r} s^n$
- C)  $u_n = \frac{u_1 - u_0 r}{s - r} r^n + \frac{u_0 s - u_1}{s - r} s^n$
- D)  $u_n = \frac{u_0 - u_1 r}{s - r} r^n + \frac{u_1 s - u_0}{s - r} s^n$

### Question 6

On montre alors :

- A) Si  $u_0 s - u_1 \neq 0$ , alors il existe un indice  $n_0$  tel que, pour  $n > n_0$ ,  $u_n$  ne s'annule pas et garde un signe constant. De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln |s|.$$

- B) Si  $u_0 s - u_1 \neq 0$ , alors il existe un indice  $n_0$  tel que, pour  $n > n_0$ ,  $u_n$  ne s'annule pas et garde un signe constant. De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln |r|.$$

- C) Si  $u_1 - u_0 r \neq 0$ , alors il existe un indice  $n_0$  tel que, pour  $n > n_0$ ,  $u_n$  ne s'annule pas et garde un signe constant. De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln |s|.$$

- D) Si  $u_1 - u_0 r \neq 0$ , alors il existe un indice  $n_0$  tel que, pour  $n > n_0$ ,  $u_n$  ne s'annule pas et garde un signe constant. De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln |r|.$$

## **Question 7**

Par contre :

- A) Si  $u_0s - u_1 = 0$ , alors  $u_n$  change de signe à chaque rang. De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln |s|.$$

- B) Si  $u_0s - u_1 = 0$ , alors  $u_n$  change de signe à chaque rang. De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln |r|.$$

- C) Si  $u_1 - u_0r = 0$ , alors  $u_n$  change de signe à chaque rang. De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln |s|.$$

- D) Si  $u_1 - u_0r = 0$ , alors  $u_n$  change de signe à chaque rang. De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln |r|.$$

## **Question 8**

Supposons maintenant  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Les suites bornées de  $E_\alpha$  sont les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  telles que :

- A)  $u_0s - u_1 = 0$ . Ces suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  sont alors de la forme  $u_n = \mu s^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .
- B)  $u_0s - u_1 = 0$ . Ces suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  sont alors de la forme  $u_n = \mu r^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .
- C)  $u_1 - u_0r = 0$ . Ces suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  sont alors de la forme  $u_n = \mu r^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .
- D)  $u_1 - u_0r = 0$ . Ces suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  sont alors de la forme  $u_n = \mu s^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

## **PARTIE II**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère les fonctions  $t_n$  telles que  $t_n(x) = \cos(n \arccos x)$ .

### **Question 9**

L'identité  $\cos(\arccos \alpha) = \alpha$  est vérifiée pour  $\alpha \in I$ , avec :

- A)  $I = \mathbb{R}$
- B)  $I = [0; \pi]$
- C)  $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- D)  $I = [-1; 1]$

### **Question 10**

L'identité  $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$  est vérifiée pour  $\alpha \in J$ , avec :

- A)  $J = \mathbb{R}$
- B)  $J = [0; \pi]$
- C)  $J = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- D)  $J = [-1; 1]$

### **Question 11**

On en déduit que, pour tout entier naturel  $n$  :

- A) La fonction  $t_n$  est définie sur  $D = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .
- B) La fonction  $t_n$  est définie sur  $D = [0; \pi]$ .
- C) La fonction  $t_n$  est définie sur  $D = [-1; 1]$ .
- D) La fonction  $t_n$  est définie sur  $D = \mathbb{R}$ .

### **Question 12**

On a :

- A) Pour tout  $x \in D$ ,  $t_0(x) = 1$  et  $t_1(x) = x$ .
- B) Pour tout  $x \in D$ ,  $t_0(x) = 1$  et  $t_1(x) = \pi - x$ .
- C) Pour tout  $x \in D$ ,  $t_2(x) = 1 - 2x^2$  et  $t_3(x) = 4x^3 - 3x$
- D) Pour tout  $x \in D$ ,  $t_2(x) = 2x^2 - 1$  et  $t_3(x) = 3x - 4x^3$

### Question 13

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on note  $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$ . La fonction  $t_n$  s'annule pour :

- A)  $x_k = \theta_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- B)  $x_k = \theta_k$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .
- C)  $x_k = \cos(\theta_k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- D)  $x_k = \cos(\theta_k)$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ .

### Question 14

On suppose  $n \geq 2$  et  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ . On montre que :

- A)  $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = 0$  si  $p$  est impair
- B)  $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = \frac{1}{\sin \frac{p\pi}{2n}}$  si  $p$  est pair
- C)  $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = 0$  si  $p$  est pair
- D)  $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = \frac{1}{\sin \frac{p\pi}{2n}}$  si  $p$  est impair

### Question 15

Ainsi, on en déduit que, si les  $x_k$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  sont solutions de l'équation  $t_n(x) = 0$  :

- A)  $\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0$  si  $p$  est impair
- B)  $\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = \frac{1}{\sin \frac{p\pi}{2n}}$  si  $p$  est pair
- C)  $\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0$  si  $p$  est pair
- D)  $\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = \frac{1}{\sin \frac{p\pi}{2n}}$  si  $p$  est impair

### Question 16

On admet que pour  $x \in I$ , le changement de variable bijectif  $\theta = \text{Arccos } x$  permet d'écrire  $t_n(x) = \cos(n\theta)$ , avec  $\theta \in J$ . Pour  $n \geq 1$ , on a :

- A)  $t_{n-1}(x) + t_{n+1}(x) = xt_n(x)$
- B)  $t_{n-1}(x) + t_{n+1}(x) = 2xt_n(x)$
- C)  $t_{n-1}(x) + t_{n+1}(x) = -xt_n(x)$
- D)  $t_{n-1}(x) + t_{n+1}(x) = -2xt_n(x)$ .

### **Question 17**

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $t_n$  est la restriction à  $I$  d'un polynôme  $T_n$  de  $\mathbb{R}[X]$ .

- A) Le polynôme  $T_n$  est de degré  $n-1$ , pour  $n \geq 1$  son terme de plus haut degré admet pour coefficient  $2^n$ .
- B) Le polynôme  $T_n$  est de degré  $n$ , pour  $n \geq 1$  son terme de plus haut degré admet pour coefficient  $2^{n+1}$ .
- C) Le polynôme  $T_n$  est de degré  $n+1$ , pour  $n \geq 1$  son terme de plus haut degré admet pour coefficient  $2^n$ .
- D) Le polynôme  $T_n$  est de degré  $n$ , pour  $n \geq 1$  son terme de plus haut degré admet pour coefficient  $2^{n-1}$ .

### **Question 18**

On peut montrer que :

- A) Le polynôme  $T_n$  admet à la fois des racines réelles et des racines complexes non réelles.
- B) Les racines du polynôme  $T_n$  sont toutes réelles.
- C) Les racines du polynôme  $T_n$  sont toutes complexes non réelles.
- D) On ne peut pas se prononcer sur le caractère réel ou non des racines du polynôme  $T_n$  : cela dépend de  $n$ .

### **PARTIE III**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , d'élément neutre  $0_E$ , et  $Id$  l'application identique de  $E$  dans  $E$ . L'ensemble  $L(E)$  est l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

On dit que  $p$ , élément de  $L(E)$ , est un projecteur si et seulement si  $p^2 = p$ . Dans cette partie,  $p$  désigne un projecteur de  $E$ .

#### **Question 19**

Soit  $u \in E$ . On a :

- A)  $u \in \text{Im } p \Leftrightarrow p(u) = 0_E$
- B)  $u \in \text{Im } p \Leftrightarrow p(u) = u$
- C)  $u \in \text{Ker } p \Leftrightarrow p(u) = 0_E$
- D)  $u \in \text{Ker } p \Leftrightarrow p(u) = u$

#### **Question 20**

On a :

- A)  $\text{Ker } p \cap \text{Im } p = \emptyset$
- B)  $\text{Ker } p \cup \text{Im } p = E$
- C)  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont complémentaires dans  $E$ .
- D)  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont supplémentaires dans  $E$ .

#### **Question 21**

L'application linéaire  $q = Id - p$  vérifie :

- A)  $q^2 = q$  et  $\text{Ker } q = \text{Ker } p$
- B)  $q^2 = p$  et  $\text{Ker } q = \text{Im } p$
- C)  $q^2 = q$  et  $\text{Im } q = \text{Ker } p$
- D)  $q^2 = p$  et  $\text{Im } q = \text{Im } p$

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ . On admet la propriété  $(P)$  suivante :

$(P)$  : Pour tout  $u \in E$ , il existe un unique couple  $(u_1, u_2) \in F \times G$  tel que  $u = u_1 + u_2$

On introduit  $p_1$  et  $q_1$ , applications de  $E$  dans  $E$  définies par :

Pour tout  $u \in E$ ,  $p_1(u) = u_1$  et  $q_1(u) = u_2$ , où  $(u_1, u_2)$  est donné par la propriété  $(P)$

L'application  $p_1$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors que  $q_1$  est la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

#### **Question 22**

- A)  $p_1$  est un endomorphisme de  $G$
- B)  $p_1$  est un projecteur de  $G$
- C)  $q_1$  est un endomorphisme de  $F$
- D)  $q_1$  est un projecteur de  $F$

**Tournez la page S.V.P.**

### **Question 23**

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = y = z\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 2x + y = 0\}.$$

- A)  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , mais pas  $G$ .
- B)  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , mais pas  $F$ .
- C)  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
- D)  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

### **Question 24**

La projection  $p$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  est représentée de façon matricielle dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par :

$$\text{A) } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{B) } M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{C) } M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D) } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

### **Question 25**

La projection  $q$  sur  $G$  parallèlement à  $F$  est représentée de façon matricielle dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par :

A)  $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B)  $N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

C)  $N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

D)  $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

### **Question 26**

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  définie par la matrice  $A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  :

A) L'application  $f$  est la projection sur  $F'$  parallèlement à  $G'$ , avec :

$$F' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } x + 2y + 3z = 0\} \text{ et } G' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } 2x = 3y = 6z\}.$$

B) L'application  $f$  est la projection sur  $F'$  parallèlement à  $G'$ , avec :

$$F' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } 2x = 3y = 6z\} \text{ et } G' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } x + 2y + 3z = 0\}$$

C) L'application  $f$  est la projection sur  $F'$  parallèlement à  $G'$ , avec :

$$F' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } 2x = 3y = -3z\} \text{ et } G' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } x + 2y + 3z = 0\}$$

D) L'application  $f$  n'est pas une projection.

## **PARTIE IV**

On désigne par « carré parfait » tout entier  $n \in \mathbb{N}$  tel qu'il existe un entier  $q$  vérifiant  $q^2 = n$ .

### **Question 27**

La somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs :

- A) est toujours un carré parfait.
- B) est un carré parfait si le plus petit entier est pair, et n'est pas un carré parfait si le plus petit entier est impair.
- C) n'est jamais un carré parfait.
- D) on ne peut pas déterminer sous quelles conditions cette somme est un carré parfait ou ne l'est pas.

### **Question 28**

Soit  $p$  un entier de la forme  $p = 8n + 7$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ .

- A)  $p$  ne peut être la somme de trois carrés parfaits.
- B) Il existe des valeurs de  $p$  telles que  $p$  est la somme de trois carrés parfaits.
- C) Il existe des valeurs de  $p$  telles que  $p$  est la somme de trois carrés parfaits d'entiers consécutifs.
- D)  $p$  ne peut être la somme de trois carrés parfaits d'entiers consécutifs.

### **Question 29**

Si  $p$  est premier et  $8p^2 + 1$  est premier alors :

- A)  $8p^2 - 3$  est premier.
- B)  $8p^2 - 1$  est premier.
- C)  $8p^2 + 3$  est premier.
- D)  $8p^2 + 5$  est premier.

Dans les questions 30 à 32, le triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$  est solution de l'équation  $x^2 + y^2 = z^2$ . On suppose que  $\text{PGCD}(x, y, z) = 1$ .

### **Question 30**

- A)  $x$  et  $y$  ne sont pas premiers entre eux.
- B)  $x$  et  $z$  ne sont pas premiers entre eux.
- C)  $y$  et  $z$  ne sont pas premiers entre eux.
- D)  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont 2 à 2 premiers entre eux.

### **Question 31**

- A) Les nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont pairs.
- B) Les nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont impairs.
- C) Les nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont tels que deux sont pairs et un est impair.
- D) Les nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont tels que deux sont impairs et un est pair.

### **Question 32**

- A) Le nombre  $z$  est impair.
- B) Le nombre  $z$  est pair.
- C) Les nombres  $x$  et  $y$  sont tous les deux impairs.
- D) Les nombres  $x$  et  $y$  sont l'un pair et l'autre impair.

## **PARTIE V**

On considère la suite de fonctions  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f_0(x) = 1 - x \text{ et } f_{n+1}(x) = \frac{1}{2 - f_n(x)}.$$

### **Question 33**

On a, pour  $n \geq 1$  :

- A)  $f_n(x) = \frac{1+nx}{1+(n+1)x}$
- B)  $f_n(x) = \frac{1+(n+1)x}{1+nx}$
- C)  $f_n(x) = \frac{1+(n-1)x}{1+nx}$
- D)  $f_n(x) = \frac{1+nx}{1+(n-1)x}$

### **Question 34**

Le développement limité de  $f_n$  en 0 à l'ordre 5 est :

- A)  $f_n(x) = 1 - x + nx^2 - n^2x^3 + n^3x^4 - n^4x^5 + x^5o(x)$
- B)  $f_n(x) = 1 - x + (n+1)x^2 - (n+1)^2x^3 + (n+1)^3x^4 - (n+1)^4x^5 + x^5o(x)$
- C)  $f_n(x) = 1 + x - nx^2 + n^2x^3 - n^3x^4 + n^4x^5 + x^5o(x)$
- D)  $f_n(x) = 1 + x - (n-1)x^2 + (n-1)^2x^3 - (n-1)^3x^4 + (n-1)^4x^5 + x^5o(x)$

## **PARTIE VI**

### **Question 35**

La famille Capulet compte deux enfants. L'ainée est une fille. La probabilité  $p$  que les deux enfants soient des filles est :

A)  $p = \frac{1}{4}$

B)  $p = \frac{1}{3}$

C)  $p = \frac{1}{2}$

D)  $p = \frac{3}{4}$

### **Question 36**

La famille Montaigu compte deux enfants, dont un garçon. La probabilité  $p$  que les deux enfants soient des garçons est :

A)  $p = \frac{1}{4}$

B)  $p = \frac{1}{3}$

C)  $p = \frac{1}{2}$

D)  $p = \frac{3}{4}$