

1.7 Mathématiques 2 - filière PSI

1.7.1 Présentation générale et intérêt scientifique du sujet

Le but ultime du sujet était d'étudier un équivalent du nombre de retours à zéro sur n pas, dans deux situations :

- une marche aléatoire symétrique (questions **14** à **19**) ;
- un tirage sans remise dans une urne initialement équilibrée (questions **20** et **21**).

Afin d'obtenir lesdits équivalents, il était nécessaire de disposer de plusieurs résultats de comportement asymptotique de sommes, notamment :

- un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$ (question **10**, directement liée à la question **3**) ;
- un équivalent de $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ quand n tend vers $+\infty$ (question **11**), qui s'avère être une constante non nulle ;
- et enfin une généralisation du deuxième équivalent (question **13**).

Ces résultats sur les équivalents de sommes s'avèrent relever du même principe général : un théorème sur les sommes de Riemann, adapté à des fonctions intégrables sur un intervalle ouvert borné. Une difficulté majeure est que l'hypothèse d'intégrabilité ne suffit pas à assurer la convergence de sommes de Riemann, même régulières, vers l'intégrale : un contre-exemple était étudié à la question **2**. En revanche, il est classique que des hypothèses de monotonie au voisinage des bornes de l'intervalle, en plus bien sûr de l'intégrabilité, suffisent à assurer la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale. Dans le sujet, on se limitait à deux exemples simples : la fonction $t \mapsto t^{-1/2}$ sur $]0, 1[$ (question **3**), et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ sur ce même intervalle (questions **4** à **8**).

1.7.2 Structure du sujet

Le sujet était constitué de deux parties à thèmes bien distincts : la première partie utilisait de façon quasi exclusive les techniques sur les intégrales, tandis que la seconde faisait appel aux raisonnements probabilistes, avec quelques questions de calcul asymptotique. Plusieurs résultats de la partie **1** intervenaient dans la partie **2**, et seules les toutes premières questions de la partie **2** pouvaient être traitées de façon entièrement autonome.

Remarques générales sur la présentation et la rédaction

Le jury déplore une nouvelle fois que la présentation des copies soit souvent négligée. Orthographe et syntaxe sont souvent défaillantes. Trop peu de candidats font l'effort d'organiser clairement leur argumentation avec des paragraphes bien découpés, des formules encadrées, etc. La rigueur est trop régulièrement absente dans le discours sur les objets : confusions innombrables entre la fonction f et la valeur $f(x)$, usage de la notation $f(x)'$ dénuée de sens, etc. Enfin, et comme signalé dans les rapports précédents, on attend un surcroît de rigueur de la part des candidats lorsqu'ils utilisent un résultat établi antérieurement dans le sujet : il faut qu'ils s'astreignent systématiquement à faire une référence précise à la question où ledit résultat a été démontré.

1.7.3 Remarques sur les difficultés rencontrées

Ce problème a dans l'ensemble été fort mal réussi par les candidats. Beaucoup d'entre eux sont parvenus uniquement à résoudre les parties les plus élémentaires des questions, très proches du cours, et n'ont presque jamais réussi à traiter une question en profondeur. Notamment, peu de candidats ont compris l'esprit de la première partie, à savoir un recours quasi systématique à la comparaison somme-intégrale pour une fonction monotone : il est possible d'ailleurs que des candidats aient été étonnés d'avoir à utiliser la même technique à trois reprises, et aient voulu chercher dans d'autres directions. Quoi qu'il en soit, il est visible que bien des candidats ont été désarçonnés de ne rester qu'en surface pour les questions **2** à **7**, allant jusqu'à perdre complètement de vue la structure argumentative de cette partie : ainsi, le jury a été étonné par la très faible proportion de copies identifiant un simple raisonnement sur la convergence d'une suite fondé sur la séparation selon les termes de rang pair et les termes de rang impair, ce qui est pourtant un schéma classique (question **8**).

Chez bon nombre de candidats, on note une différence très sensible de performance entre la partie « intégrales » et la partie « probabilités ».

Certains semblent assez à l'aise avec les intégrales généralisées, et très maladroits avec les probabilités, et d'autres présentent le défaut inverse.

Quant au traitement des questions de probabilités, on doit signaler le peu de soin avec lequel beaucoup de candidats traitent les variables aléatoires.

On lit trop souvent des raisonnements abusifs comme « $X_n = 1$ ou $X_n = -1$ », révélant une confusion entre la variable X_n (qui est une fonction), et ses réalisations. De tels raisonnements doivent être impérativement formalisés par retour à une issue (on fixe ω dans l'univers Ω et on raisonne sur $X_n(\omega)$).

Trop de candidats dédaignent la discipline voulant qu'invoquer un théorème nécessite d'en vérifier les hypothèses.

Les candidats étaient confrontés à une difficulté classique, qui réside dans le degré de crédibilité qu'on peut accorder aux réponses intuitives en probabilités, dans un cadre où le sujet fournit un formalisme parfaitement rigoureux du problème. En particulier, pour résoudre une question telle que les questions **15** et **16**, les candidats doivent s'astreindre autant que possible à s'appuyer sur le formalisme des variables aléatoires développé par l'énoncé plutôt que d'agiter des raisonnements intuitifs.

En revanche, quand aucun formalisme clair n'est fourni dans l'énoncé, comme dans la question **20**, une réponse intuitive peut rapporter la totalité des points à condition que le candidat fasse des efforts d'explication (très) conséquents, d'autant plus que le résultat est ici donné.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans [l'annexe F](#).

1.7.4 Ultimes conseils aux futurs candidats

Terminons comme toujours par réitérer quelques conseils importants pour les futurs candidats.

- Maîtriser parfaitement son cours.
- Être très attentif à la précision de l'énoncé.
- Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Au moment de la rédaction, donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.
- Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet. Beaucoup de candidats ont réussi à avoir une note tout à fait satisfaisante en ne traitant que cinq ou six questions (mais en profondeur).

- Les tentatives de picorage désespéré sur les questions tardives sont le plus souvent vouées à l'échec et irritent les correcteurs.
-