

7. On a :

$$\int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{(1-t)^{1+1/n}} dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{(\ln(t)^2)}{(1-t)^{1+1/n}} dt \leq n \gamma_n \leq \int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{(1-t)^{1+1/n}} dt$$

Il résulte alors de ce qui précède que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \gamma_n = \int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{1-t} dt$.

8. Prouver que, pour tout entier naturel p , l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t) t^p dt$ existe.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto -\ln(t) t^p$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 elle donc intégrable sur $]0, 1]$.

Si $p = 0$, la fonction $t \mapsto -\ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$ et intégrable sur $]0, 1]$ puisque $\ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

9. Par intégrations par parties d'une intégrale impropre (attention à vérifier la convergence du crochet)

, on a facilement : $\int_0^1 (-\ln(t)) t^p dt = \frac{1}{(p+1)^2}$.

10. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $f_p : t \mapsto -\ln(t) t^p$. f_p est continue par morceaux sur $]0, 1]$ positive et intégrable sur $]0, 1]$.

Pour tout $t \in]0, 1[$, $\sum_{p=0}^N f_p(t) = -\ln(t) \sum_{p=0}^N t^p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln t \times \frac{1}{1-t}$.

$\sum_{p \geq 0} f_p$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers $S : t \mapsto \frac{-\ln(t)}{1-t}$ qui est continue par morceaux sur $]0, 1[$.

De plus $\sum_{p=0}^N \int_0^1 |f_p(t)| dt = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(p+1)^2}$ qui converge (par critère de Riemann).

D'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^1 S(t) dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 f_p(t) dt \text{ d'où } \int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{1-t} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+p)^2}$$

11. On en déduit alors que $n \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))}{1-t} dt = \frac{\pi^2}{6}$, d'où $n \gamma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi^2}{6} + o(1)$.

Soit : $\gamma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi^2}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

* * * * *

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Tout d'abord, comme l'an dernier, les mêmes remarques générales :

- Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, trop lourdement raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examineur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**. Les résultats doivent être clairement mis en évidence.

Nous nous interrogeons d'ailleurs sur l'opportunité de mettre des points de présentation.

- Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.

- De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent le « le théorème spectrale », « la loi de poisson » etc.

- Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.

Dans plusieurs copies les questions ne sont pas traitées dans l'ordre : il n'est pas rare de voir en fin de copie ou en fin de feuille double, des réponses à des questions ébauchées plus haut ou qui avaient été passées.

Parfois, on obtient des réponses à des questions d'un exercice au cours de la résolution d'un autre exercice !

La double numérotation est assez souvent omise : au lieu de la question **2.4.**, on lit question **4.**, puis vient la question **3....**

- Notons que nous avons de nouveau rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.

- Signalons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

- De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.

- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , encore faut-il les vérifier !

- Cette année, nous avons demandé des représentations graphiques de fonctions : nous avons pu constater que beaucoup de candidats n'y attachent pas assez d'importance et souvent les bâclent : elles permettent pourtant d'aider à la compréhension de la notion étudiée et nous sommes très attentifs au soin qu'ils y apportent.

- Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc...

- Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire PSI.

- Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice. Par exemple, trop peu de candidats ont réalisé que la

méthode utilisée dans la question 2. de l'exercice 4 était une démonstration par récurrence.

- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PSI et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.

En exemple, le Théorème du rang appliqué à une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ prend parfois des formes étranges : $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A))$ ou encore, $\dim(A) = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A))$!

- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :

* Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.

* On trouve encore trop d'équivalents à 0...

- Les quantificateurs, les symboles \implies , \iff sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.

- Rappelons que lorsqu'il y a plusieurs variables qui interviennent, il est judicieux de préciser pour quelle variable on cherche un équivalent : une écriture du style $t^{p(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dots$ ne veut pas dire grand chose.

- Reste à signaler que les probabilités génèrent un refus de beaucoup de candidats : près de 30% des candidats n'abandonnent pas cet exercice : rappelons que nous posons systématiquement un exercice de probabilité.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur, une rédaction claire et lisible et une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.

Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.

Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

Nous avons compilé un certain nombre d'erreurs constatées sur les copies qu'il nous semble important de signaler dans ce rapport afin d'espérer ne plus les rencontrer l'an prochain.

• Exercice 1.

Thème de l'exercice : Probabilité pour qu'une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.

- **Q.1.** : on ne peut que déplorer le nombre de copies dans lesquelles le candidat n'a pas été capable de restituer convenablement la formule du binôme de Newton.

Par exemple dans la question 1.2., on lit régulièrement : $(1 + X)^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 X^{2k}$, comme si prendre le carré était une opération linéaire.

La relation $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ est souvent ignorée.

Rechercher les termes d'indice $\frac{n}{2}$ pour obtenir le coefficient de X^n ne peut aboutir.

- **Q.2.** Dans cette question, la condition nécessaire et suffisante n'est que très rarement bien explicitée...
- Les conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation ne sont pas toujours bien connues : par exemple, certains candidats pensent qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, le déterminant est non nul.
- La recherche des racines du polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est souvent calculé en utilisant la trace et le déterminant de la matrice ce qui amène les candidats à calculer le discriminant du polynôme $X^2 - (a+c)X + ac$. Cela génère souvent des calculs lourds qui aboutissent en général à une réponse fausse...sans parler des polynômes caractéristiques faux (2×0 vaut souvent 2) !
- **Q.4.** : l'inversibilité d'une matrice semble être une notion floue et lointaine dans la tête de certains. Pour beaucoup, diagonalisable entraîne inversible !

• Exercice 2.

Thème de l'exercice : Étude de quelques propriétés de l'application linéaire $f \mapsto \int_0^1 \min(x, t) dt$.

- La question 1., qui est une question de cours, semble être d'une difficulté insurmontable, même dans les bonnes copies.
La résolution de l'équation caractéristique (lorsqu'elle est juste) $r^2 + \alpha = 0$ pose beaucoup de problèmes : la plupart du temps on voit un calcul de discriminant apparaître et des calculs très lourds, souvent faux à l'arrivée... sans parler des $\sqrt{\alpha}$ pour un α précisé négatif juste avant !
De temps en temps, on lit que l'équation différentielle n'a pas de solution réelle lorsque $\alpha > 0$: les collègues de physique-chimie seraient ravis d'apprendre qu'un oscillateur harmonique, ça n'existe pas dans le monde réel !
- Justifier que la fonction $x \mapsto \int_a^x h(t) dt$ est de classe C^1 lorsque h est continue n'est pas toujours fait avec la rigueur attendue et le calcul juste de sa dérivée reste aléatoire.
- La question 3.1. qui demandait une représentation graphique de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ n'est pas toujours réussie : on observe parfois une confusion avec le max, ou des choses plus étranges (graphe d'une fonction constante...).
Il semble que beaucoup de candidats n'aient pas assimilé la définition de la fonction min qui était pourtant rappelée en début d'exercice. Cela a donné de malheureuses erreurs : comment avoir un graphe au dessus de $\frac{1}{3}$ sachant que, par définition du min, il est en dessous.
- Dans la question 3.3., on retrouve la non compréhension du min de deux nombres : certains candidats proposent deux formules, une valable pour $t \leq x$ (en calculant $\int_0^1 t dt$) et une pour $t \geq x$ (en calculant $\int_0^1 x dt$).

Beaucoup de candidats semblent avoir oublié que lorsque l'on écrit $\int_a^b f(t) dt$, alors t varie de a à b .

On regrette que certaines copies donnent un résultat sans aucune explication : rappelons que tout résultat proposé se doit d'être justifié.

- Dans la question **4.1.**, on retrouve les mêmes erreurs que dans la question précédente.
De plus, beaucoup de candidats veulent appliquer un théorème de dérivation des intégrales à paramètre et expliquent que la fonction $t \mapsto \min(x, t)$ est dérivable, bien qu'un point anguleux ait été observé sur la courbe de la question **3.1**.
- Dans la question **5.**, pour démontrer que l'application T est linéaire, nous avons trop souvent rencontré des copies qui évaluaient $T(f)(\lambda x + y)$ au lieu de $T(\lambda f + g)$.
Par ailleurs, signalons toujours la confusion entre fonction et image : c'est $T(f) \in E$ qu'il s'agit de démontrer, et non $T(f)(x) \in E$, voire pire encore comme $T(f(x)) \in E$.
- Dans la question **6.** : on remarque une confusion entre T est injective et $T(f)$ est injective.
Certaines copies tentent de démontrer que $T(f)(x) = T(f)(y) \implies x = y$!
- La question **8.1.** qui demandait d'effectuer un raisonnement par l'absurde pour prouver que les valeurs propres de l'endomorphisme T étaient strictement positives commence parfois par une mauvaise hypothèse absurde (" supposons que λ n'est pas valeur propre de T ") : rappelons qu'il est nécessaire de lire attentivement l'énoncé proposé.

• Exercice 3.

Thème de l'exercice : Étude des propriétés d'une matrice symétrique réelle.

Toute la question **2.**, très détaillée, étudie quelques propriétés d'une matrice de rang 1.

La question **4.** exhibe un sous-espace stable F par l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique et propose d'utiliser une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ pour obtenir facilement ses valeurs propres.

- Une première remarque : le théorème utilisé dès la première question s'appelle **Le théorème spectral**, en lien avec le **spectre**... On lit sans cesse un **e** à la fin de **spectral**.
- Dans la question **2.**, la matrice U_X n'est pas toujours carrée d'ordre n : assez souvent, il s'agit d'un nombre réel, donc de rang 1.
Le fait que les colonnes soient proportionnelles est rarement vu. Parfois, le rang de U_X est même plus grand que n . Certains candidats trouvent un rang de 1 en mentionnant la colinéarité des colonnes mais ne mentionnent pas que la matrice n'est pas nulle.
Le théorème du rang reste une catastrophe : la relation $\dim \text{Ker}(U_X) + \text{rg}(U_X) = n^2$ est certes très connue, mais fausse !
- Question **3.** : noter que les valeurs propres se lisent sur la diagonale des matrices diagonales, mais pas sur la diagonale des matrices diagonalisables.
- Dans la question **4.3.3.** la matrice G n'est pas une matrice symétrique et on ne peut utiliser cet argument pour prouver sa diagonalisabilité.

• Exercice 4.

Thème de l'exercice : obtention d'un développement asymptotique d'une intégrale.

- Questions **1.1.** Trop peu d'étudiants connaissent les développements limités usuels même à l'ordre 2.

Rappelons qu'un développement limité ne s'arrête pas comme ça : il doit y avoir un reste.

Il est fortement conseillé aux candidats de vérifier que les deux membres de l'égalité d'un développement limité au voisinage d'un point a tendent vers la même limite lorsque x tend vers a : cela éviterait beaucoup d'erreurs.

Trop peu de copies réalisent que la question **1.1.1.** est là pour aider à la résolution de la question suivante.

Les équivalents sont parfois étonnants lorsque l'on ne lit pas $1 - t^\alpha \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 0$!

Les intégrales de Riemann sont souvent maltraitées. La réponse $\beta > 1$ reste trop fréquente.

- La question **2.1.** est très peu réussie (même la première inéquation).

Beaucoup de candidats espèrent pouvoir la démontrer en partant d'une inégalité qu'ils estiment évidente et qu'ils ne justifient pas et dont ils ne donnent en général pas le domaine d'application, comme $\ln(1 + t) \leq t$ (bien sûr vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$) ou encore $t \leq e^t - 1$.

- Dans la question **2.2.**, une erreur logique retrouvée plusieurs fois consiste à confondre "soit p , on suppose" avec "on suppose pour tout p ". Concrètement, cela a mené les candidats concernés à simplement remplacer p par $p + 1$.

Trop peu d'étudiants ont réalisé que dans la question **2.** on raisonnait par récurrence.

- La question **3.** illustre un manque de rigueur chez beaucoup de candidats qui confondent allègrement $<$ et \leq .

- Question **4.** et question **6.** : beaucoup d'élèves majorent $\frac{1}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$ par 1 pour $0 < t < 1$.

Pour démontrer la convergence des intégrales, l'argument de continuité (continuité par morceaux) est très souvent omis.

- Question **6.** : Le théorème de convergence dominée a des hypothèses...

Nous conseillons fortement aux candidats de les énoncées clairement sur leur copie, comme cela était demandé dans l'énoncé.

On retrouve la même problématique pour le théorème d'intégration termes à termes.

Luc VALETTE