

**ECOLE POLYTECHNIQUE**

**CONCOURS D'ADMISSION 2021**

**MARDI 13 AVRIL 2021**

**08h00 - 12h00**

**FILIERE MP - Epreuve n° 3**

**MATHEMATIQUES B (X)**

*Durée : 4 heures*

*L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve*

Dans tout le sujet,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On admet que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On note  $P(A)$  la probabilité d'un événement  $A \subset \Omega$  et  $E(X)$  l'espérance d'une variable aléatoire  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  à valeurs réelles.

On rappelle que si  $s \in ]1, +\infty[$ , la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$  converge et on note  $\zeta(s)$  sa limite.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  suit la loi zeta de paramètre  $s > 1$  si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$P(X = n) = \zeta(s)^{-1} \frac{1}{n^s}.$$

Si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p$  est un nombre premier, on note  $\nu_p(n)$  la valuation de  $n$  en  $p$ . On note également  $(p_k)_{k \geq 1}$  la suite croissante des nombres premiers.

Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose,  $\chi_4(2n) = 0$  et  $\chi_4(2n-1) = (-1)^{n-1}$ . On pourra utiliser sans justification que, pour  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $\chi_4(mn) = \chi_4(m)\chi_4(n)$ .

Le sujet comporte quatre parties, et les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

## Partie I

Soit  $s > 1$  un nombre réel et soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  suivant la loi zeta de paramètre  $s$ . Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\{n \mid X\}$  l'évènement «  $n$  divise  $X$  » et  $\{n \nmid X\}$  l'évènement complémentaire.

**1a.** Calculer  $P(n \mid X)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**1b.** Soit  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'entiers naturels. Montrer que les évènements

$$\{p_1^{\alpha_1} \mid X\}, \{p_2^{\alpha_2} \mid X\}, \dots, \{p_k^{\alpha_k} \mid X\}, \dots$$

sont mutuellement indépendants.

**2a.** Soit  $r \geq 1$  un entier. Montrer que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^r \{p_i \nmid X\}\right) = \prod_{i=1}^r (1 - p_i^{-s}).$$

**2b.** En déduire que

$$\zeta(s)^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - p_k^{-s}).$$

**3a.** Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $\nu_{p_k}(X) + 1$  suit la loi géométrique de paramètre  $(1 - p_k^{-s})$ .

**3b.** Montrer que, pour  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_1 < \dots < k_r$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ , on a

$$P(\nu_{p_{k_1}}(X) = n_1, \dots, \nu_{p_{k_r}}(X) = n_r) = \sum_{\ell=0}^r (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r = \ell}} P(\nu_{p_{k_1}}(X) \geq n_1 + \varepsilon_1, \nu_{p_{k_2}}(X) \geq n_2 + \varepsilon_2, \dots, \nu_{p_{k_r}}(X) \geq n_r + \varepsilon_r).$$

**3c.** En déduire que les variables aléatoires  $\nu_{p_1}(X), \dots, \nu_{p_k}(X), \dots$  sont mutuellement indépendantes.

Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note, pour  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,

$$r_i(n) = \text{Card}\{d \in \mathbb{N} : d \equiv i[4] \text{ et } d \mid n\}.$$

On pose  $g(n) = r_1(n) - r_3(n)$ .

**4a.** Montrer que si  $m$  et  $n$  sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux, on a  $g(mn) = g(m)g(n)$ .

**4b.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et tout nombre premier  $p$ , on a

$$g(p^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2, \\ n + 1 & \text{si } p \equiv 1[4], \\ \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) & \text{si } p \equiv 3[4]. \end{cases}$$

**5.** Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{N}^*$ , la suite  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  converge vers un réel  $f(x)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On suppose qu'il existe une fonction  $h : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, +\infty[$  telle que  $h(X)$  est d'espérance finie et telle que  $|f_n(m)| \leq h(m)$  pour tous  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Justifier que  $E(f(X))$  est d'espérance finie et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(f_n(X)) = E(f(X)).$$

**6a.** On note  $r(n)$  le nombre de diviseurs  $d \geq 1$  de  $n$ . Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} r(n)n^{-s}$  converge et que sa somme vaut  $\zeta(s)^2$ .

**6b.** En déduire que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)n^{-s}$  converge.

**7a.** Montrer que la suite de fonctions  $\left(x \mapsto \prod_{k=1}^n p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)_{n \geq 1}$  de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}^*$  converge simplement vers la fonction identité.

**7b.** Montrer que  $E(g(X)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n E\left(g(p_k^{\nu_{p_k}(X)})\right)$ .

**8a.** Montrer que si  $p$  est un nombre premier tel que  $p \equiv 1[4]$ , on a

$$E(g(p^{\nu_p(X)})) = \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

**8b.** Calculer  $E(g(p^{\nu_p(X)}))$  si  $p$  est un nombre premier vérifiant  $p \equiv 3[4]$ .

**8c.** En déduire

$$E(g(X)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \chi_4(p_k)p_k^{-s}}.$$

**9a.** Montrer que, si  $p$  est un nombre premier,

$$E\left(\chi_4(p^{\nu_p(X)})\right) = \frac{1 - p^{-s}}{1 - \chi_4(p)p^{-s}}.$$

**9b.** Montrer que

$$E(\chi_4(X)) = \frac{1}{\zeta(s)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \chi_4(p_k)p_k^{-s}}.$$

**9c.** En déduire que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

est convergente et que sa somme vaut  $E(g(X))$ .

## Partie II

**10a.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Expliciter un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta)P_n(\sin^2(\theta)).$$

*Indication : on pourra développer  $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{2n+1}$ .*

**10b.** Déterminer les racines de  $P_n$  et en déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P_n(x) = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).$$

**10c.** En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin(\pi x) = (2n+1) \sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).$$

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $m > |x|$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > m$  :

$$u_{m,n}(x) = (2n+1) \sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).$$

et

$$v_{m,n}(x) = \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right).$$

**11a.** Montrer que les suites, indexées par  $n$ ,  $(u_{m,n}(x))_{n>m}$  et  $(v_{m,n}(x))_{n>m}$  sont convergentes dans  $\mathbb{R}^*$ .

On note  $v_m(x)$  la limite de  $(v_{m,n}(x))_{n>m}$ .

**11b.** Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n > m$ , on a

$$1 \geq v_{m,n}(x) \geq \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$$

et en déduire que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m(x) = 1$ .

**11c.** En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin(\pi x) = \pi x \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

### Partie III

On rappelle que la suite  $\left(\left(\sum_{k=1}^n k^{-1}\right) - \ln(n)\right)_{n \geq 1}$  converge. On note  $\gamma$  sa limite. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^n \frac{e^{xk^{-1}}}{1 + xk^{-1}}.$$

**12.** Montrer que la suite de fonctions  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers une fonction  $\Gamma$  de  $]0, +\infty[$  vers  $]0, +\infty[$ .

**13.** Montrer que, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

**14a.** Montrer que la fonction  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$$(\ln(\Gamma))''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

**14b.** Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\Gamma))''(x) = 0$ .

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que la fonction  $\ln(f)$  est convexe et vérifie  $f(1) = 1$  et  $f(x+1) = xf(x)$  pour tout  $x > 0$ .

**15a.** Montrer que la fonction

$$S : \begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right) \end{array}$$

est 1-périodique et convexe.

**15b.** En déduire que  $f = \Gamma$ .

**16.** Montrer que pour tous  $a \in ]0, +\infty[$  et  $x \in ]0, +\infty[$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}.$$

*Indication : on pourra poser, pour  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} dt$ .*

**17.** Montrer que pour tout  $x \in ]0, 1[$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

## Partie IV

**18a.** Montrer que pour tout  $x \in ]0, 1[$  :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

**18b.** En déduire que, pour  $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  :

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) 2^{2k+2} x^{2k}.$$

**18c.** En déduire que la fonction :

$$v : \begin{array}{ccc} ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

est développable en série entière et que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!} E_{2k}$$

où, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $E_{2k} = v^{(2k)}(0)$ .

**19a.** Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0$$

et en déduire les valeurs de  $E_0$ ,  $E_2$  et  $E_4$ .

**19b.** Calculer  $E(g(X))$  lorsque  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi zeta de paramètre 3 puis de paramètre 5.