

# **CONCOURS COMMUN SUP 2000**

## **DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES**

### **Épreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)**

**Mardi 23 mai 2000 de 08h00 à 12h00**

#### **Instructions générales :**

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette correspondant à l'épreuve et figurant sur leur convocation.

### **PROBLÈME D'ANALYSE**

- $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est la  $\mathbb{R}$ -algèbre des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- L'objectif du problème est d'étudier les ensembles  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  suivants :  
 $\mathcal{E} = \{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \}.$   
 $\mathcal{F}$  est la partie constituée des éléments  $f$  de  $\mathcal{E}$  tels que :
  - $f$  n'est pas la fonction identiquement nulle.
  - $f$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .

#### **PARTIE I**

1. Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble  $\mathcal{E}$ .
2. On note ch la fonction cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique. Démontrer la formule :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ch}(x+y) = \text{ch } x \text{ ch } y + \text{sh } x \text{ sh } y.$   
En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble  $\mathcal{E}$ .
3. Soit  $f$  dans  $\mathcal{E}$ ; montrer que pour tout réel  $\alpha$ , la fonction  $f_\alpha$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  
 $x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha x)$  est dans  $\mathcal{E}$ .
4. On fixe un élément  $f$  de  $\mathcal{E}$ .  
En donnant à  $x$  et à  $y$  des valeurs particulières, prouver que :
  - a.  $f(0)$  vaut 0 ou 1.
  - b. Si  $f(0) = 0$ , alors  $f$  est la fonction identiquement nulle.
  - c. Si  $f(0) = 1$ , alors  $f$  est une fonction paire.

## PARTIE II

**A.** On fixe ici un élément  $f$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $f(0) = 1$ .

**1.** Montrer que pour chaque réel  $r > 0$ , on a :

a.  $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du$ .

b.  $\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) \int_0^r f(y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(v)dv$ .

**2.** a. Montrer que l'on peut choisir  $r > 0$  de façon à rendre strictement positive la constante  $\int_0^r f(y)dy$ .

Dans la suite de ce **2.**, on fixe un réel  $r > 0$  qui vérifie :  $\int_0^r f(y)dy > 0$ .

b. En déduire que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

c. Montrer alors que  $f$  est en fait de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

d. Prouver l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, c f'(x) = f(x+r) - f(x-r).$$

**3.** En déduire l'existence d'une constante réelle  $\lambda$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x).$$

**B.** Conclusion.

**1.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'' = \mu y$ , en séparant les cas :  $\mu > 0$ ,  $\mu < 0$  et  $\mu = 0$ .

**2.** En déduire tous les éléments de  $\mathcal{E}$  en exploitant le L4.c.

**3.** Donner tous les éléments de  $\mathcal{F}$ .

## PARTIE III

On se propose d'étudier l'ensemble  $\mathcal{F}$  par une méthode différente.

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

Si  $a$  est un élément fixé de  $\mathbb{R}_+^*$  et si  $D_a = \{ a \frac{p}{2^q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \}$ ,

tout réel est limite d'une suite d'éléments de  $D_a$ .

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}$ . On pose  $E = \{x > 0 / f(x) = 0\}$ .

**A.**

**1.** Montrer que  $f(0) = 1$ , et que  $f$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**2.** Montrer que  $E$  admet une borne inférieure que l'on note  $a$ .

**3.** Prouver que  $f(a) = 0$  (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que :  $a > 0$ .

**4.** Montrer que :  $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$ .

**B.** On pose  $\omega = \frac{\pi}{2a}$ , et on note  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  :  $x \mapsto \cos(\omega x)$ .

**1.** a. Soit  $q \in \mathbb{N}$  ; montrer que :  $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2 \left[ f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \right]^2$ .

b. En déduire, en raisonnant par récurrence sur  $q$ , que :  $\forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$ .

*On démontrerait de même le résultat suivant que le candidat pourra utiliser librement :*

*si  $q \in \mathbb{N}$  est fixé :  $\forall p \in \mathbb{N}, f\left(p \frac{a}{2^q}\right) = g\left(p \frac{a}{2^q}\right)$ .*

2. Prouver que :  $\forall x \in D_a, f(x) = g(x)$ .

3. En déduire que  $f = g$ .

C. En déduire tous les éléments de  $\mathcal{F}$ .

## PROBLÈME D'ALGÈBRE

**Notations et objectifs :**

- Soit  $n$  un entier,  $n \geq 2$  ; on note  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la  $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels, et  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  la  $\mathbb{R}$ -algèbre des formes linéaires sur  $E$ .  
On rappelle que :  $\dim(E) = \dim(E^*)$ .  
Les éléments de  $E$  sont notés  $M = (m_{ij})$ , la matrice élémentaire  $E_{ij}$  est la matrice de  $E$  dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la  $i$ -ème ligne et sur la  $j$ -ème colonne, qui vaut 1.

Lorsque  $A$  et  $B$  sont des éléments de  $E$ , on note  $A \cdot B$  leur produit.

Si  $M \in E$ , on note  $\text{vect}(M)$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $M$ .

- L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de  $E$  possède au moins une matrice inversible.

- Si  $M = (m_{ij}) \in E$ , on note  $T(M)$  le réel  $\sum_{k=1}^n m_{kk}$ .

On définit ainsi une application  $T$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$  :  $M \mapsto T(M)$ .

A chaque matrice  $U$  de  $E$ , on associe :

- L'application  $T_U$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$  :  $M \mapsto T_U(M) = T(U \cdot M)$ .
- L'ensemble  $H_U = \{M \in E / T(U \cdot M) = 0\}$ .

### PARTIE I : Généralités, exemples

#### 1. Quelques propriétés.

- a. Montrer que  $T$  est une application linéaire.
- b. Pour  $U \in E$ , prouver que l'application  $T_U$  est dans  $E^*$ .
- c. Soit  $U \in E$  ; reconnaître  $\text{Ker } T_U$ , et montrer que  $H_U$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

2. *Dans cette question seulement*, on prend  $n = 2$ , et on pose  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a. Ecrire les quatre matrices élémentaires  $E_{ij}$  ; que peut-on dire de la famille  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  de  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?
- b. Montrer que  $H_U$  est l'ensemble des matrices de  $E$  dont la somme des quatre coefficients vaut 0.
- c. Trouver une matrice  $M$  de  $E$  telle que  $T(U \cdot M) \neq 0$ , et en déduire la dimension de  $\text{Im } T_U$  puis la dimension de  $H_U$ .

- d. Montrer que  $H_U$  possède une matrice inversible.  
*La partie III propose une généralisation de ce résultat.*

### PARTIE II : Quelques résultats utiles pour la suite

1. Soit  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  des éléments de  $E$ .

a. Montrer que  $T(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ .

b. En déduire les identités suivantes :

$$(I_1) \quad T(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

$$(I_2) \quad T(B \cdot A) = T(A \cdot B).$$

2. Soit  $U$  dans  $E$ .

a. Si  $U$  est la matrice nulle, déterminer  $\dim H_U$ .

b. Si  $U$  n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers  $(i_0, j_0)$  tel que  $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$ . En déduire  $\dim H_U$ .

3. Pour  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ , on note  $T_{ij} = T_{E_{ij}}$ .

a. Les indices  $k$  et  $l$  étant fixés, calculer  $T_{ij}(E_{kl})$  en utilisant  $(I_1)$ .

b. En déduire que les  $n^2$  éléments  $T_{ij}$  de  $E^*$  permettent de définir une base de  $E^*$ .

4. Montrer que l'application  $\varphi$  de  $E$  vers  $E^* : U \mapsto \varphi(U) = T_U$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. On considère un hyperplan vectoriel  $H$  de  $E$ .

a. Quelle est sa dimension ?

b. Soit  $A$  une matrice non nulle de  $E$  qui n'appartient pas à  $H$ , montrer que :  $E = H \oplus \text{vect}(A)$ .

c. Construire alors un élément  $l$  de  $E^*$  tel que  $H = \text{Ker } l$ .

d. Prouver l'existence d'un élément  $U$  de  $E$  tel que  $H = H_U$ .

### PARTIE III : Le résultat général

Pour  $1 \leq r \leq n$ , on note  $R_r = \sum_{i=1}^r E_{ii}$ .

1. Soit  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$  c'est à dire  $P = (p_{ij})$  avec  $\begin{cases} p_{i+1,i} = 1, & 1 \leq i \leq n-1 \\ p_{1,n} = 1 \\ p_{ij} = 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$ .

a. Montrer que  $P$  est inversible.

b. Prouver que  $P$  appartient à l'hyperplan  $H_{R_r}$ .

2. En déduire que chaque hyperplan vectoriel  $H$  de  $E$  possède au moins une matrice inversible.

*Indication : lorsque  $H = H_U$ , avec  $U$  de rang  $r$ , on rappelle l'existence de matrices  $S_1$  et  $S_2$  inversibles telles que  $S_1 \cdot U \cdot S_2 = R_r$ .*