

Racines carrées

- Corrigés -

Document proposé par Yoshi – D'autres sont disponibles sur <http://www.bibmath.net>

Exercice 1.

Écrire chacun des nombres sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers et b le plus petit possible.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} ; \quad \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} ; \quad \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{160} = \sqrt{16 \times 10} = \sqrt{16} \times \sqrt{10} = 4\sqrt{10} ; \quad \sqrt{275} = \sqrt{25 \times 11} = \sqrt{25} \times \sqrt{11} = 5\sqrt{11} ; \quad \sqrt{\frac{18}{25}} = \sqrt{\frac{9 \times 2}{5^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

Caractère de divisibilité : un nombre se divise par 25, s'il est terminé par 00, 36, 50 ou 75.

$$\sqrt{\frac{99}{891}} \quad 99 \text{ se divise par 9 et 891 aussi } (8+9+1=18), \text{ mais } 891/9=99, \text{ donc } \sqrt{\frac{99}{891}} = \sqrt{\frac{99}{99 \times 9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\frac{495}{44}} \quad \text{Par quel bout le prendre ?... } 44 = 4 \times 11 \text{ est le nombre le plus simple. } 495 \text{ ne se divise pas par 4, si on ne connaît pas le caractère de divisibilité par 11, il faut essayer et } 495 = 45 \times 11, \text{ donc } \sqrt{\frac{495}{44}} = \sqrt{\frac{45 \times 11}{4 \times 11}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \sqrt{\frac{9 \times 5}{2^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Exercice 2

Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est un nombre entier le plus petit possible.

$$\textcircled{a} \quad 2\sqrt{20} + \sqrt{5} - \sqrt{45} = 2\sqrt{4 \times 5} + \sqrt{5} - \sqrt{9 \times 5} = 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5} + \sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\textcircled{b} \quad \sqrt{40} - \sqrt{160} + 2\sqrt{250} : 40 \text{ c'est } 4 \times 10, 160 \text{ c'est } 16 \times 10 \text{ et } 250 = 25 \times 10 \\ \text{d'où } \sqrt{40} - \sqrt{160} + 2\sqrt{250} = \sqrt{4 \times 10} - \sqrt{16 \times 10} + 2\sqrt{25 \times 10} = 2\sqrt{10} - 4\sqrt{10} + 2 \times 5\sqrt{10} = 8\sqrt{10}$$

$$\textcircled{c} \quad 3\sqrt{6} - 2\sqrt{24} + 3\sqrt{96} : \text{ tout doit être divisible par 6. Donc } 3\sqrt{6} - 2\sqrt{24} + 3\sqrt{96} = 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} + 12\sqrt{6} = 11\sqrt{6}$$

$$\textcircled{d} \quad 5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180} : 45 \text{ est le nombre le plus intéressant, } 45 = 9 \times 5, \text{ donc tout devrait être multiple de 5.}$$

$$5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180} = 5\sqrt{9 \times 5} - \sqrt{16 \times 5} + 2\sqrt{36 \times 5} = 5 \times 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2 \times 6\sqrt{5} = 15\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = 23\sqrt{5}$$

$$\textcircled{e} \quad 5\sqrt{48} - 4\sqrt{75} + 3\sqrt{27} : 27 \text{ est le nombre le plus intéressant, } 27 = 9 \times 3, \text{ donc tout devrait être multiple de 3.}$$

$$5\sqrt{48} - 4\sqrt{75} + 3\sqrt{27} = 5\sqrt{16 \times 3} - 4\sqrt{25 \times 3} + 3\sqrt{9 \times 3} = 20\sqrt{3} - 20\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\textcircled{f} \quad 2\sqrt{5} + \sqrt{125} - 6\sqrt{45} = 2\sqrt{5} + \sqrt{25 \times 5} - 6\sqrt{9 \times 5} = 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 18\sqrt{5} = -11\sqrt{5}$$

$$\textcircled{g} \quad \sqrt{108} - (3\sqrt{192} - 2\sqrt{243}) : 108 \text{ se divise par 4 (puisque 08 divisible par 4) et par 9 (1+8=9) donc par 36 ; } 108 = 36 \times 3.$$

$$\sqrt{108} - (3\sqrt{192} - 2\sqrt{243}) = \sqrt{36 \times 3} - (3\sqrt{64 \times 3} - 2\sqrt{81 \times 3}) = 6\sqrt{3} - (24\sqrt{3} - 18\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 0$$

$$\textcircled{h} \quad \sqrt{48} - 15\sqrt{27} + 2\sqrt{675} = \sqrt{16 \times 3} - 15\sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{225 \times 3} = 4\sqrt{3} - 45\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = -11\sqrt{3}$$

$$\textcircled{i} \quad \sqrt{108} - \sqrt{243} + 2\sqrt{147} = \sqrt{36 \times 3} - \sqrt{81 \times 3} + 2\sqrt{49 \times 3} = 6\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 14\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Exercice 3

Simplifier les produits suivants

$$\textcircled{a} \quad \sqrt{14} \times \sqrt{56} = \sqrt{14 \times 56} = \sqrt{(2 \times 7) \times (8 \times 7)} = \sqrt{16 \times 7^2} = \sqrt{16} \times \sqrt{7^2} = 4 \times 7 = 28$$

$$\textcircled{b} \quad \sqrt{80} \times \sqrt{180} = \sqrt{8} \times \sqrt{10} \times \sqrt{18} \times \sqrt{10} = 10\sqrt{8} \times \sqrt{18} = 10\sqrt{4 \times 2} \times \sqrt{9 \times 2} = 10 \times 2 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 10 \times 2 \times 3 \times 2 = 120$$

$$\textcircled{c} \quad \sqrt{2^3} \times \sqrt{2^7} = \sqrt{2^3} \times 2^7 = \sqrt{2^{10}} = \sqrt{(2^5)^2} = 2^5 = 32$$

$$\textcircled{d} \quad \sqrt{2 \times 3^2} \times \sqrt{2^3 \times 3^4 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2^3} \times \sqrt{3^4} \times \sqrt{5} = \sqrt{2} \times 3^2 \times 3 \times \sqrt{5} = 27 \times \sqrt{2^4} \times \sqrt{5} = 27 \times 4 \times \sqrt{5} = 108\sqrt{5}$$

$$\textcircled{e} \quad \sqrt{8} \times \sqrt{225} \times \sqrt{72} = \sqrt{8} \times \sqrt{15^2} \times \sqrt{8 \times 9} = \sqrt{8} \times 15 \times \sqrt{8} \times \sqrt{9} = 8 \times 15 \times 3 = 360$$

$$\textcircled{f} \quad \sqrt{7,5} \times \sqrt{2,7} \times \sqrt{0,04} = \sqrt{75 \times 10^{-1}} \times \sqrt{27 \times 10^{-1}} \times \sqrt{4 \times 10^{-2}} = \sqrt{75} \times \sqrt{27} \times 2 \times \sqrt{10^{-4}} = 2 \times 5\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times 10^{-2} = 90 \times 10^{-2} = 0,9$$

$$\textcircled{g} \quad \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{8}{9}} = \sqrt{8} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$$

$$\textcircled{h} \quad 3\sqrt{\frac{1}{75}} \times 3\sqrt{\frac{3}{4}} = 9 \times \sqrt{\frac{1}{75} \times \frac{3}{4}} = 9 \times \sqrt{\frac{1}{25} \times \frac{1}{4}} = 9 \times \sqrt{\frac{1}{100}} = 9 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$\textcircled{i} \quad \sqrt{\frac{8}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{50}} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{3}}{\sqrt{27} \times \sqrt{50}} = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times 5\sqrt{2}} = \frac{2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$$

$$\textcircled{j} \quad \sqrt{45} \times \sqrt{\frac{22}{20}} \times \sqrt{\frac{18}{11}} = 3\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{11}{10}} \times \sqrt{\frac{18}{11}} = 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{11 \times 18}{10 \times 11}} = 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{9}{5}} = 3 \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = 3 \times \sqrt{9} = 3 \times 3 = 9$$

$$\frac{\sqrt{2^3 \times 3^6}}{\sqrt{9} \times \sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2^3} \times \sqrt{3^6}}{\sqrt{3^2} \times \sqrt{2^5}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{2^5}} \times \frac{\sqrt{3^6}}{\sqrt{3^2}} = \sqrt{\frac{2^3}{2^5}} \times \sqrt{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt{\frac{1}{2^2}} \times \sqrt{3^4} = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$\frac{\sqrt{4,9 \times 10^3}}{\sqrt{3} \times 10^2 \times \sqrt{12} \times 10^6} = \frac{\sqrt{49 \times 10^2}}{\sqrt{3} \times 10^2 \times \sqrt{12} \times 10^6} = \frac{10\sqrt{49}}{10\sqrt{3} \times 10^3 \sqrt{12}} = \frac{7}{10^3 \sqrt{3} \times \sqrt{12}} = \frac{7}{10^3 \sqrt{36}} = \frac{7}{6} \times 10^{-3} = \frac{7}{6000}$$

$$\frac{\sqrt{5^5} \times \sqrt{2^3 \times 7^3}}{\sqrt{50} \times \sqrt{28}} = \frac{\sqrt{5^4} \times 5 \times \sqrt{(2^2 \times 2) \times (7^2 \times 7)}}{\sqrt{25} \times 2 \times \sqrt{4 \times 7}} = \frac{5^2 \sqrt{5} \times 2 \times \sqrt{2} \times 7 \sqrt{7}}{5 \sqrt{2} \times 2 \sqrt{7}} = \frac{35 \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7}}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = 35 \sqrt{5}$$

Exercice 4

Effectuer les produits suivants, puis réduire

Dans ce qui suit, je note (P1) : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; (P2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; (P3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ et (D) la distributivité.

$$\textcircled{a} (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 3 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6} \quad (\text{P2})$$

$$\textcircled{a} (2 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 2 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3 = -1 + \sqrt{3} \quad (\text{D})$$

$$\textcircled{a} (2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 4 \times 3 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{5} + 5 = 12 + 4\sqrt{15} + 5 = 17 + 4\sqrt{15} \quad (\text{P1})$$

$$\textcircled{a} (2\sqrt{5} + \sqrt{3})(4\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 4\sqrt{5} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 40 - 2\sqrt{15} + 4\sqrt{15} - 3 = 37 + 2\sqrt{15} \quad (\text{D})$$

$$\textcircled{a} (2\sqrt{7} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{7} - 3\sqrt{5}) = (2\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{5})^2 = 4 \times 7 - 9 \times 5 = -17 \quad (\text{P3})$$

$$\textcircled{a} \sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{2})(3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) = \sqrt{5}(\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \times 3\sqrt{5} + \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}) = \sqrt{5}(15 - 2\sqrt{10} - 3\sqrt{10} + 4) = \sqrt{5}(19 - 5\sqrt{10})$$

$$\text{soit } 19\sqrt{5} - 5\sqrt{50} = 19\sqrt{5} - 5\sqrt{25 \times 2} = 19\sqrt{5} - 25\sqrt{2} \quad (\text{D})$$

$$\textcircled{a} (3\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{18})(3 - \sqrt{12} + \sqrt{27}) = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = 4\sqrt{2}(3 + \sqrt{2}) = 12\sqrt{2} + 8 \quad (\text{D})$$

$$\textcircled{a} (3\sqrt{6} - \sqrt{150})(5\sqrt{24} - 2\sqrt{54}) = (3\sqrt{6} - \sqrt{25 \times 6})(5\sqrt{4 \times 6} - 2\sqrt{9 \times 6}) = (3\sqrt{6} - 5\sqrt{6})(10\sqrt{6} - 6\sqrt{6}) = -2\sqrt{6} \times 4\sqrt{6} = -8 \times 6 = -48$$

Exercice 5

3 est la moitié de $3\sqrt{2}$

Il fallait plutôt se demander si $3\sqrt{2}$ était le double de 3. La réponse est donc non : le double de 3 est 6, c'est à dire $3 \times 2 = 3 \times (\sqrt{2})^2$

Oui, $(2\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{3} + 1)$ est un nombre entier. Développons : $(2\sqrt{3})^2 - 1^2 = 4 \times 3 - 1 = 12 - 1 = 11$

$$\sqrt{8} + \sqrt{50} = \sqrt{98} \quad \text{Vrai !} \quad \sqrt{8} + \sqrt{50} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = 7\sqrt{2}$$

Exercice 6

L'inverse de $\sqrt{2} + 1$ est $\sqrt{2} - 1$: $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \quad \text{VRAI}$

$\frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{3}}$ est l'écriture de l'inverse de $\sqrt{8} - \sqrt{3}$ donc :

si $\frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{3}}$ est égal à $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5}$ alors $\sqrt{8} - \sqrt{3}$ et $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5}$ sont donc des inverses.

Voyons cela : $(\sqrt{8} - \sqrt{3}) \times \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5} = \frac{(\sqrt{8} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{5} = \frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{5} = \frac{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}{5} = \frac{8 - 3}{5} = 1 \quad \text{VRAI}$

Exercice 7

$3x^2 = 69,12$ D'où $x^2 = 23,04$ et $x = \sqrt{23,04} = 4,8$

$3y^2 = 30,72$ D'où $y^2 = 15,36$ et $y = \sqrt{15,36} = 3,2$

$3z^2 = 7,68$ D'où $z^2 = 2,56$ et $z = \sqrt{2,56} = 1,6$

$$A = \sqrt{69,12} - \sqrt{30,72} - \sqrt{7,68} = \sqrt{23,04 \times 3} - \sqrt{15,36 \times 3} - \sqrt{2,56 \times 3} = 4,8\sqrt{3} - 3,2\sqrt{3} - 1,6\sqrt{3} = 0$$