



1/ CONSIGNES GÉNÉRALES :

Présentation du sujet :

Le sujet, composé d'un seul problème en six parties largement indépendantes, abordait le thème des polynômes de Legendre.

La partie I permettait principalement d'établir que ces polynômes sont scindés à racines simples.

La partie II avait pour but de prouver la diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et d'en étudier les éléments propres, avec dans la dernière question une application à la détermination des éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

La partie III permettait d'obtenir une famille orthonormale pour un produit scalaire défini sur l'espace $\mathbb{R}[X]$, puis s'intéressait à la distance d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

La partie IV concernait la fonction génératrice associée aux polynômes de Legendre, la partie V permettant d'en obtenir une expression intégrale.

Enfin, la partie VI proposait une application des polynômes de Legendre à l'approximation d'intégrales.

Ce sujet avait pour but d'évaluer les connaissances des candidats sur de très nombreuses notions des programmes des deux années de classes préparatoires. Il devait permettre d'évaluer chez ces candidats les six grandes compétences exposées dans les objectifs de formation du programme de la classe de PC.

Problèmes constatés par les correcteurs :

L'épreuve proposée a permis de classer correctement les candidats de niveau moyen à fort, mais a sans doute pénalisé les candidats les plus faibles par le niveau de technicité exigé et l'absence de questions très faciles.

Les correcteurs ont cependant constaté des lacunes importantes chez de nombreux candidats. Il faut insister sur le fait que les définitions doivent être connues avec précision et que les théorèmes utilisés comportent des hypothèses qu'il convient de rappeler et de vérifier. Les raisonnements doivent être plus précis et plus rigoureux.

Notons quelques remarques signalées par les correcteurs sur des points précis des programmes de PCSI et de PC :

- en algèbre, la notion d'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme n'est pas maîtrisée. $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , à coefficients réels. Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est donc pas, en général, de degré n . La définition d'un produit scalaire est trop souvent mal connue et on ne trouve dans les copies que très rarement une preuve correcte du caractère défini.
- en analyse, les manipulations de valeurs absolues (ou de modules) ainsi que celles des inégalités ne sont très souvent pas maîtrisées. Une connaissance des formules élémentaires de trigonométrie est attendue. La règle de d'Alembert n'est pas la seule manière de déterminer un rayon de convergence.
- de manière générale, la rédaction d'un raisonnement par récurrence pose des problèmes à de trop nombreux candidats.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Partie I (Quelques résultats généraux) :

Q1. Question bien traitée.

Q2. Cette question, apparemment facile, a posé des problèmes à de nombreux candidats.

Q3. La notion de famille échelonnée en degré est maîtrisée par la majorité des candidats. Une famille de $(n+1)$ polynômes de $R_n[X]$ n'est cependant pas nécessairement génératrice de $R_n[X]$.

Q4. Un certain nombre de candidats a résolu la question par un calcul direct. Pour les autres, l'énoncé du théorème de Rolle est souvent mal connu.

Q5. Question plus délicate, mal traitée par une majorité de candidats.

Q6. Très rares sont les candidats qui comprennent qu'un raisonnement par récurrence a été mis en place en Q4 et Q5.

Partie II (Étude des éléments propres d'un endomorphisme) :

Q7. Un certain nombre de candidats confond $R[X]$ et $R_n[X]$. Par ailleurs, la définition d'un endomorphisme n'est pas toujours connue.

Q8. Un polynôme de $R_n[X]$ n'est pas nécessairement de degré n .

Q9. Question bien traitée par une majorité de candidats.

Q10. Le fait que les valeurs propres sont deux à deux distinctes est rarement justifié.

Q11. Question bien traitée en général.

Q12. La principale erreur est l'absence des coefficients binomiaux dans la formule de Leibniz.

Q13. Question très souvent traitée, mais le fait que L_k est non nul est rarement mentionné.

Q14. Cette question n'a pas été comprise. Certains candidats donnent le résultat attendu, mais la justification est presque toujours absente.

Partie III (Distance à $R_n[X]$) :

Q15. Question très mal traitée. Le cours est mal connu (définition d'un produit scalaire et preuve du caractère défini).

Q16. Question bien traitée en général.

Q17. Q18. Q19. Questions souvent correctement traitées.

Q20. Le fait que $R_n[X]$ est de dimension finie n'est quasiment jamais mentionné, preuve que le cours est connu de manière trop superficielle.

Q21. Question peu abordée.

Partie IV (Fonction génératrice) :

Q22. Question très mal traitée en général. Le maniement des valeurs absolues et des inégalités pose de gros problèmes aux candidats. La notion de récurrence forte (ou double) est très mal maîtrisée.

Q23. Une grande majorité de candidats veut utiliser la règle de d'Alembert et échoue. Pour ceux qui utilisent un théorème de comparaison, l'hypothèse de positivité est souvent absente.

Q24. Le calcul commence souvent correctement, mais rares sont ceux qui arrivent au bout.

Q25. La constante multiplicative est souvent choisie par le candidat pour arriver au résultat demandé. L'étude du signe de $1 - 2xt + t^2$ n'est quasiment jamais faite.

Q26. Souvent abordée, mais de manière incomplète.

Partie V (Expression intégrale) :

- Q27.** Question très mal traitée. De nombreux candidats ignorent la définition de la convergence normale et les inégalités sur des nombres complexes ne sont pas rares.
- Q28.** On attend plus de précision sur les hypothèses du théorème d'interversion.
- Q29.** Question souvent bien traitée par ceux qui l'ont abordée.
- Q30.** Question peu abordée. Peu de candidats savent calculer $\cos^2(\arctan x)$ et peu d'entre eux connaissent ou savent retrouver une primitive de $1/x^2 + a^2$.
- Q31.** Question presque systématiquement délaissée. Seuls les tous meilleurs candidats s'en sont sortis.
- Q32.** L'unicité du développement en série entière n'est que très rarement évoquée.
- Q33.** Le lien avec ce qui précède n'a quasiment jamais été observé.
- Q34.** Question presque jamais abordée.

Partie VI (Application à l'approximation d'intégrales) :

- Q35.** L'idée du raisonnement apparaît dans un certain nombre de copies, mais la rigueur est souvent absente.
- Q36.** Question abordée, mais très rarement bien traitée.
- Q37.** Beaucoup de candidats confondent $L(R_{n-1}[X], R)$ et $R_{n-1}[X]$.
- Q38.** Bien traitée par ceux qui l'ont abordée.
- Q39. à Q44.** Questions très peu abordées et le plus souvent mal traitées.