

E Mathématiques 1 PSI

Q1 - La première question prouvait l'équivalence entre la positivité d'une matrice symétrique et la positivité de son spectre. Il s'agit d'une question de cours. Le sens direct est souvent bien traité ; la réciproque, nettement plus difficile, n'a été correctement rédigée que par un cinquième des candidats.

Q2 - La convexité de l'ensemble formé par les matrices (définies) positives demandait de vérifier le caractère symétrique de la $tA + (1 - t)B$ et sa positivité. Le premier point a souvent été oublié. Pour la positivité, l'argument de coréduction des matrices A et B , vu également aux questions 10 et 11, est bien sûr incorrect.

Ces ensembles ne sont pas des sous-espaces vectoriels. Cela a été majoritairement montré pour $S_n^{++}(\mathbb{R})$ avec la matrice nulle, moins souvent pour $S_n^+(\mathbb{R})$ par exemple avec $-I_n$; on demandait ici un exemple explicite.

Q3 - Les candidats proposent en général une matrice solution. Plus rares sont ceux qui vérifient la symétrie et la positivité du spectre.

Q4 - L'inégalité de convexité (Jensen) est classique. La récurrence demande un certain soin, et assez peu de candidats ont su la mettre réellement en œuvre. Certains parlent de la linéarité de f , ce qui est évidemment faux.

Q5 - La convexité de $-\ln$ a été démontrée par la grande majorité des candidats. L'inégalité entre la trace et le déterminant a été prouvée par une moitié des candidats. Le cas des matrices symétriques positives et non définies positives n'est vu que dans peu de copies.

Q6 - La question est généralement bien traitée, avec mention du théorème spectral.

Q7 - L'inégalité découle de la question 6. La preuve n'est pas toujours complètement convaincante, notamment pour l'inégalité entre la norme infinie et la norme deux.

Q8 - C'est sûrement la question la plus difficile du sujet ; elle aurait clairement mérité une indication. Elle n'a été traitée que par une poignée de candidats.

Q9 - La question est très facile. Le calcul de la dérivée seconde n'est cependant pas toujours juste.

Q10 - Cette question est difficile. Il fallait utiliser les questions 8 et 9, ce qui n'était pas indiqué. Elle est tout de même vue dans les bonnes copies.

Q11 - Elle est un peu plus facile que la précédente, et traitée un peu plus souvent.

Q12 - Il suffit ici de passer au logarithme népérien, ce qui très souvent vu. Il fallait cependant conclure à la concavité et non à la convexité.

Q13 - La question n'est pas difficile et a été bien traitée par les candidats l'ayant abordée.

Q14 - L'inégalité est presque immédiate avec la question 13.

Q15 - On pouvait ici utiliser le caractère polynomial du déterminant ou bien le résultat de la question 8. Les deux arguments sont souvent donnés.

Q16 - Certains connaissaient le caractère ouvert de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$. Dans le cas traité ici, on peut conclure assez facilement avec la question 8.

La suite du sujet a été réellement abordée par assez peu de candidats.

↑RETOUR