

## Composition de Mathématiques, Filière PC (XEULS)

### Commentaires généraux

L'épreuve portait sur l'étude de l'existence et de l'unicité des points fixes et des valeurs propres pour certaines applications linéaires, en plus de leur utilisation dans le contexte des processus stochastiques itératifs de type Galton-Watson. La première partie abordait une classe de matrices contractantes et leurs itérations, ainsi que l'existence de leurs points fixes. Dans la deuxième partie, on étudiait les suites de puissances des matrices introduites et leur convergence. La troisième partie explorait comment les résultats des deux parties précédentes s'appliquaient à l'étude de modèles matriciels dans la dynamique des populations. La quatrième partie était dédiée à l'application des résultats des parties précédentes pour donner une interprétation probabiliste à certains résultats, et pour étudier plus spécifiquement le cas où des populations s'éteignent presque sûrement en un temps fini.

Le sujet de cette année était techniquement délicat et contenait une part de notations à absorber non négligeable. Même si certaines questions étaient difficiles, beaucoup d'entre elles n'étaient pas trop compliquées. L'essentiel était de gérer son temps efficacement, de ne pas s'attarder sur les questions faciles et de progresser dans l'épreuve. Il est toujours utile de lire le sujet en entier avant de commencer, pour mieux comprendre ce qui est demandé.

Il est décevant que de nombreux candidats manquent de rigueur sur les bases, comme les calculs et les raisonnements simples. Les erreurs révèlent des lacunes majeures. De plus, ils ont du mal à identifier les types de problèmes posés. Malgré des notes passables, certaines copies contiennent des erreurs de fond sur certains points importants du programme.

Néanmoins, les correcteurs ont apprécié les efforts de rédaction. Il est important de maintenir cette qualité en énonçant correctement les théorèmes, en rédigeant clairement et en mettant en évidence les points clés d'une démonstration.

### I-Première Partie

Cette première partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 3.9 points.

**1.** Question algébrique très simple.

**2.** Question réussie par la majorité des candidats mais très peu de candidats ont montré rigoureusement que  $u_P$  appartenait à l'ensemble demandé. Nous rappelons aux candidats qu'il est important de bien lire les questions dans leur intégralité afin de ne pas omettre par étourderie de répondre à une partie de la question.

**3.** Seuls quelques candidats ont réussi cette question. Il suffisait d'utiliser l'indication donnée.

**4.** La majorité des candidats a réussi cette question. La preuve par récurrence est parfois mal dirigée.

**5.** Un nombre très limité de candidats a démontré correctement la convergence. L'argument de télescopage a été rarement employé. Beaucoup de confusion chez les candidats entre la convergence de la norme d'une suite et de la suite elle-même. Le jury constate aussi beaucoup de confusion entre la convergence de la série et de la suite.

**6.** La continuité de la fonction a généralement été omise lors du passage à la limite. Une majorité de candidats a incorrectement déduit l'unicité du point fixe à partir de l'unicité de la limite.

**7.** La question a été réussie par la majorité des candidats, cependant, la démonstration repose souvent sur une récurrence immédiate qui aurait nécessité une rédaction adéquate. Seuls quelques candidats proposent une preuve complète et convaincante.

## **II-Deuxième Partie**

Cette seconde partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 5.6 points.

**8.** La question était simple et a été réussie par la majorité des candidats.

**9.** La question n'a pas posé de difficulté pour la plupart des candidats. Le jury tient à souligner qu'il ne suffit pas de fournir la réponse mais également de fournir une preuve adéquate.

**10.a)** Cette question, qui requérait l'application des résultats précédents et une partie de majoration technique, n'a été résolue que par quelques candidats.

**10.b)** Il suffisait d'utiliser proprement la question 6 en vérifiant que les conditions nécessaires pour cette utilisation était bien vérifiée. Elle n'a été résolue que par une poignée de candidats.

**11.** Une infime fraction des candidats a présenté une solution correcte à cette question. L'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires est souvent mal expliquée. La difficulté principale de cette question était qu'il fallait penser à diviser par  $X^d$  avant de dériver pour pouvoir obtenir une preuve très rapide du résultat.

**12.a)** Cette question était basée sur une récurrence simple à partir du résultat précédent. Malheureusement, seuls quelques candidats l'ont abordée.

**12.b)** Seulement un nombre très restreint de candidats ont proposé une solution correcte à cette question qui nécessitait de prendre du recul sur les résultats obtenus précédemment.

**12.c)** Il suffisait d'utiliser correctement la question 10 a). Beaucoup de candidats l'ont remarqué, mais sans pour autant fournir les justifications correctes.

## **III-Troisième Partie**

Cette troisième partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 3.8 points.

**13.a)** La question était facile et ne nécessitait qu'un simple calcul basé sur l'utilisation des notations introduites. Le jury tient à préciser que lors de l'utilisation de l'indépendance de variables aléatoires ou de l'utilisation de la linéarité de l'espérance, ces arguments doivent apparaître clairement sur la copie à l'endroit exact où ils sont utilisés.

**13.b)** Pour résoudre cette question, il suffisait d'utiliser correctement les définitions fournies précédemment et d'effectuer les calculs de manière rigoureuse. Peu de candidats utilisent une partition d'événements à deux à deux disjoints pour se ramener correctement au cadre de la question 13a).

**14.** Question réussie par la majorité des candidats. Attention néanmoins à bien préciser les étapes et les arguments utilisés (indépendance, linéarité) lorsqu'ils sont utilisés. Le jury a accepté sans démonstration les arguments énonçant que pour des variables indépendantes la variance de la somme est égale à la somme des variances.

**15.a)** Seulement un nombre très restreint de candidats ont proposé une solution correcte à cette question en utilisant la question 14.

**15.b)** Question facile si on utilise bien 15a). Même remarque qu'à la question 13b).

**16.** Idem si on utilise la formule obtenue en 15b). Une partie des candidats qui a répondu à cette question n'a pas su correctement utiliser l'hypothèse de récurrence.

## IV-Quatrième partie

Cette quatrième partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 6.7 points.

**17.** Très peu de candidats ont abordé cette question. L'utilisation de la question 10b) a souvent été mal justifiée par la plupart des candidats.

**18.** Cette question était plus complexe et a été traitée par une infime partie des candidats. L'argument qu'une suite à valeurs entières tendant vers 0 s'annule à partir d'un certain rang a manqué à certains candidats.

**19.a)** Très peu de candidats ont eu l'idée d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Les solutions proposées manquaient souvent de rigueur.

**19.b)** La question n'a pas posé de problèmes à la majorité des candidats. L'argument le plus simple était d'utiliser l'équivalence des normes en dimension finie.

**20.a)** Trop peu de candidats ont réussi à résoudre proprement cette question. La fin de cette dernière se basait sur la question 17.

**20.b)** Même remarque qu'à la question précédente. Cette question nécessitait d'utiliser le résultat de la question 16.

**21.a)** La question était facile puisqu'il s'agissait juste d'inverser l'ordre de séries à termes positifs et elle a été abordée par beaucoup de candidats. Cependant, une quantité non négligeable de candidats

a affirmé que la série de terme générale l'inverse de lambda fois gamma était une série convergente, alors que l'inverse de gamma n'est pas inférieur à 1.

**21.b)** Cette question pourtant peu difficile et a été peu abordée.

**21.c)** Un nombre très limité de candidats a réussi à résoudre correctement cette question. Elle nécessitait d'utiliser les questions 20b et 21a ce qui réclamait un certain recul sur la quatrième partie.

**21.d)** Cette question n'a pas posé de problème lorsqu'on utilise correctement la question 21c) et l'inégalité de Tchebychev (et non l'inégalité de Markov qui ne permet pas facilement d'obtenir le résultat demandé).

**22.** La résolution de cette dernière question nécessitait l'application de l'inégalité de Tchebychev en se basant sur le résultat de la question 21c). La fin de la question devait faire apparaître des suites croissantes ou décroissantes d'événements pour pouvoir passer à la limite dans les probabilités. Cependant, la majorité des candidats n'a pas abordé cette dernière question.

Statistiques :

Sur les 1420 copies des candidats français, la moyenne globale est de 8,18/20 et un écart-type de 3,56.