

# Éléments de correction

## EXERCICE 1

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_k = X^k$ .

### Questions de cours

Soit  $\alpha$  un réel.

1. La famille  $\mathcal{E}$  est une famille de polynômes non nuls échelonnés en degré : elle est donc libre. De plus, elle est de cardinal  $n + 1 = \dim(E_n)$ . C'est donc une base de  $E_n$ .
2. C'est la formule de Taylor en  $\alpha$  :  $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$ . Les composantes de  $P$  dans la base  $\mathcal{E}$  sont donc  $\left( P(\alpha), P'(\alpha), \dots, \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} \right)$ .
3. Comme  $\alpha$  est une racine d'ordre  $r$  de  $P$ ,  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$ . D'après la formule de Taylor :  $P = \sum_{k=r}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = (X - \alpha)^r \sum_{k=0}^{n-r} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!} (X - \alpha)^k$ . Donc le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - \alpha)^r$  et le polynôme nul et le quotient est  $\sum_{k=0}^{n-r} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!} (X - \alpha)^k$ .

\*\*\*\*\*

À tout polynôme  $P$  de  $E_n$ , on associe le polynôme  $Q$  défini par :

$$Q(X) = X P(X) - \frac{1}{n} (X^2 - 1) P'(X)$$

et on note  $T$  l'application qui à  $P$  associe  $Q$ .

4.  $T(P_k) = X^{k+1} - \frac{k}{n} (X^2 - 1) X^{k-1}$ . Si  $k = 0$ , on obtient  $T(1) = X$  et si  $0 < k < n$ ,  $T(P_k) = \frac{n-k}{n} P_{k+1} + \frac{k}{n} P_{k-1}$ , et si  $k = n$ ,  $T(X^n) = X^{n-1}$ .
5. On vérifie que  $T$  est linéaire, puis on remarque que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $T(P_k) \in E_n$ . Comme  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $E_n$ , les images des éléments de  $E_n$  par  $T$  sont dans  $E_n$ .

$$6. M = \begin{pmatrix} 0 & 1/n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/n & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1)/n & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}$$

7. On suppose que  $\lambda$  est une valeur propre réelle de l'endomorphisme  $T$  et soit  $P$  un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

- 7.1.** Notons  $a$  le coefficient dominant de  $P$ . Alors le coefficient dominant de  $XP$  est encore  $a$  et celui de  $\frac{1}{n}(X^2 - 1)P'$  est  $\frac{\deg(P)}{n}a$ . Donc, si  $\deg(P) \neq n$ ,  $\deg(T(P)) = \deg(P) + 1$ , donc  $P$  ne peut pas être un vecteur propre. Ainsi,  $\deg(P) = n$ .
- 7.2.** Il existe  $Q \in E_n$  tel que  $P = (X - z_0)^r Q$  avec  $Q(z_0) \neq 0$ . Donc  $P' = r(X - z_0)^{r-1}Q + (X - z_0)^r Q' = (X - z_0)^{r-1}(rQ + (X - z_0)Q')$ . En posant  $R = (rQ + (X - z_0)Q')$ , on remarque que  $R(z_0) \neq 0$ . De plus,  $\lambda P - XP = \frac{1}{n}(X^2 - 1)P'$ , donc  $(\lambda - X)(X - z_0)Q = \frac{1}{n}(X^2 - 1)R$ . En évaluant en  $z_0$ , on obtient  $0 = z_0^2 - 1$ .
- 7.3.** D'après la question précédente, il existe  $\alpha \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $P = (X - 1)^\alpha(X + 1)^{n-\alpha}$ .
- 8.** D'après la question précédente, les vecteurs propres unitaires de  $T$  sont de la forme  $P = (X - 1)^\alpha(X + 1)^{n-\alpha}$ . Alors  $T(P) = X(X - 1)^\alpha(X + 1)^{n-\alpha} - \frac{1}{n}(X^2 - 1)\left(\alpha(X - 1)^{\alpha-1}(X + 1)^{n-\alpha} + (n - \alpha)(X - 1)^\alpha(X + 1)^{n-\alpha-1}\right) = (X - 1)^\alpha(X + 1)^{n-\alpha}\left(X - \frac{\alpha}{n}(X + 1) - \frac{n - \alpha}{n}(X - 1)\right) = \left(1 - \frac{2\alpha}{n}\right)P$ . Ainsi, les valeurs propres de  $T$  sont les  $1 - \frac{2\alpha}{n}$ , pour  $\alpha \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , avec  $P = (X - 1)^\alpha(X + 1)^{n-\alpha}$  comme vecteur propre associé.  $T$  est diagonalisable car il a  $n + 1 = \dim(E_n)$  valeurs propres distinctes.

## EXERCICE 2

### Questions de cours

1. Réponse (A) :  $e^{b \ln(a)}$ .
2. Comme  $\ln(t) < 0$ ,  $x \ln(t) > y \ln(t)$ , donc  $t^x = e^{x \ln(t)} > e^{y \ln(t)} = t^y$ .
3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ .
4.  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -[e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ .

Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $\Gamma(n + 1) = n!$ . L'initialisation est déjà faite. Prenons  $n \in \mathbb{N}$  et supposons que  $\Gamma(n + 1) = n!$ . Alors  $\Gamma(n + 2) = (n + 1)\Gamma(n + 1) = (n + 1)n!$  par hypothèse de récurrence. Donc  $\Gamma(n + 2) = (n + 1)!$ . On conclut alors par récurrence.

\*\*\*\*\*

5. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{x^x} dt,$$

où, comme il est d'usage,  $t^{x^x} = t^{(t^x)}$ .

**5.1.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $f : t \mapsto t^x = e^{x \ln(t) \ln(t)}$  est continue sur  $]0, 1]$ .

Lorsque  $x < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} x \ln(t) = +\infty$ , donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{x \ln(t) \ln(t)} = -\infty$  et la fonction  $f$  se prolonge par continuité en 0 par 0. De même lorsque  $x = 0$ .

Lorsque  $x > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} x \ln(t) = -\infty$ , donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{x \ln(t) \ln(t)} = 0$  par croissances comparées. Donc la fonction  $f$  se prolonge encore en 0 par 1.

Ainsi, la fonction  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

- 5.2.** Soit  $x < y$  deux réels. D'après les questions de cours, pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $t^x > t^y$ , donc  $t^x < t^y$ . En intégrant, on obtient  $F(x) \leq F(y)$ , donc  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- 5.3.** On remarque que  $F(0) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ . Comme  $F$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , pour tout  $x \geq 0$ ,  $F(x) \geq F(0) = \frac{1}{2}$ .

- 5.4.** Pour tout  $t \in ]0, 1]$ , la fonction  $x \mapsto t^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout  $t \in ]0, 1]$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t^x \leq 1$  qui est intégrable sur  $[0, 1]$ . D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, la fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- 5.5.** Pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} t^x = 1$ , la fonction  $t \mapsto 1$  est continue sur  $]0, 1]$  et la domination de la question précédente s'applique encore. D'après le théorème de convergence dominée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^1 1 dt = 1$ . De même, comme pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} t^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .

- 5.6.** A faire ! Dresser alors avec soin le tableau de variations de  $F$  et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que  $F'(0) = \frac{1}{4}$  et on tracera la tangente au point d'abscisse  $x = 0$ .

- 6.** Soit  $x$  un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $g_n$  la fonction définie sur  $]0, 1]$  par  $g_n(t) = \frac{t^{nx} \ln^n(t)}{n!}$ .

- 6.1.** Soit  $t \in ]0, 1]$ . La série  $\sum_{n \geq 0} g_n(t)$  est une série exponentielle qui converge vers  $e^{t^{x \ln(t)}} = t^x$ . Donc la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$  converge simplement sur  $]0, 1]$  vers la fonction  $t \mapsto t^x$ .

- 6.2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On peut faire des intégrations par parties successives, ou bien on effectue le changement de variable  $C^1$  bijectif  $u = -\ln(t)$ , de sorte que  $\int_0^1 |g_n(t)| dt = -\frac{1}{n!} \int_{+\infty}^0 e^{-nu} |(-u)^n| e^{-u} du = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-u(nx+1)} u^n du$ , puis le changement  $v = u(nx+1)$ , pour obtenir  $\int_0^1 |g_n(t)| dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-v} \frac{v^n}{(nx+1)^n} dv$ . Cette dernière intégrale étant convergente, celle d'origine l'était aussi et de plus,  $\int_0^1 |g_n(t)| dt = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}} = \frac{1}{(nx+1)^{n+1}}$ .

- 6.3.** La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$  converge simplement vers  $t \mapsto t^x$  qui est continue sur  $]0, 1]$ . De plus, la série

$\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |g_n(t)| dt = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(nx + 1)^{n+1}}$  converge car c'est une série à termes positifs de terme général  $\frac{1}{(nx + 1)^{n+1}} = o(1/n^2)$ .

On peut donc intervertir la somme et l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^1 t^x dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |g_n(t)| dt.$$

Or, pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,  $|g_n(t)| = (-1)^n g_n(t)$  car  $\ln(t) < 0$ .

Ainsi, finalement :  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(nx + 1)^{n+1}}$ .

### EXERCICE 3

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur  $\mathbb{R}_+$ .

Pour tout élément  $f$  de  $E$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$  on pose  $F(x) = \int_0^x f(u) du$ .

1.  $F$  est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi, pour tout  $x$  réel positif, on a :  $F'(x) = f(x)$ .

Soit  $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Psi(f)(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ .

2. Soit  $x > 0$ .

Le changement de variable affine  $u = xt$  permet d'écrire que :  $\Psi(f)(x) = \frac{F(x)}{x}$ .

3. D'après la question 1. la fonction  $\Psi(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Étude en 0 : on a, pour tout  $x > 0$ ,  $\Psi(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$  et donc,  $\lim_{x \rightarrow 0} \Psi(f)(x) = F'(0) = f(0)$ .

On en déduit que  $\Psi(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $\Psi(f)(0) = f(0)$ .

4. La linéarité de l'intégration donne celle de  $\Psi$ .

De plus, d'après la question précédente, pour toute  $f$  de  $E$ , on a  $\Psi(f) \in E$ , ce qui achève de prouver que  $\Psi$  est un endomorphisme de  $E$ .

#### 5. Surjectivité de $\Psi$

Soit  $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

- 5.1. Par opérations élémentaires, la fonction  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Étude en 0 : On a, pour tout  $x > 0$ ,  $|h(x)| \leq |x|$ , ce qui prouve que  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$ .

Il en résulte que la fonction  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

- 5.2. Soit  $x > 0$ . Étudions la dérивabilité de la fonction  $h$  en 0.

On a :  $\Delta(x) = \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

On considère alors la suite  $u$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$ .

Alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\Delta(u_n) = (-1)^n$ , ce qui prouve que  $\Delta(x)$  n'admet pas de limite lorsque  $x$  tend vers 0.

Il en résulte que  $h$  n'est pas dérivable en 0 et donc, ne peut être de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

### 5.3. Soit $g \in \text{Im}(\Psi)$ : il existe donc $f \in E$ telle que $g = \Psi(f)$ .

Alors, pour tout  $x > 0$ ,  $x g(x) = F(x)$  et  $0 \times g(0) = 0 = F(0)$ .

On en déduit que la fonction  $x \mapsto x g(x)$  coïncide avec la fonction  $x \mapsto F(x)$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Conclusion : la fonction  $x \mapsto x g(x)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

### 5.4. En utilisant la question précédente regardons si la fonction $\theta : x \mapsto x h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ :

- Facilement, puisque pour tout  $x > 0$ , on a :  $|\theta(x)| \leq x^2$ , la fonction  $\theta$  est de classe  $C^0$  sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $\theta(0) = 0$ .

- Pour  $x > 0$ ,  $\frac{\theta(x) - \theta(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  qui tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0 : la fonction  $\theta$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\theta'(0) = 0$ .

- Pour tout  $x > 0$ ,  $\theta'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  qui n'admet pas de limite en 0 puisque la fonction  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'en possède pas (On procède comme à la question 5.2)

Il en résulte que la fonction  $\theta$  n'est pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qui prouve d'après la question précédente que  $h \notin \text{Im}(\Psi)$ .

### 5.5. On déduit de l'étude précédente que $\Psi$ n'est pas surjective.

## 6. Soit $f \in E$ telle que $\Psi(f) = 0$ (fonction nulle)

Ainsi, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{F(x)}{x} = 0$ , soit  $\forall x > 0, F(x) = 0$ .

Comme  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit que  $F$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$  et par dérivation que  $f$  est aussi nulle sur  $\mathbb{R}_+$ .

Conclusion :  $\Psi$  est injective.

## 7. Recherche des éléments propres de $\Psi$

### 7.1. Comme $\Psi$ est injective, 0 n'est pas valeur propre de $\Psi$ .

Soit  $\mu \in \mathbb{R}$ . On considère l'équation différentielle  $(L)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$y' + \frac{\mu}{x} y = 0$$

**7.2.** Les solutions de  $(L)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{C}{x^\mu}$  où  $C \in \mathbb{R}$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ .

**7.3.** Pour qu'une solution de  $(L)$  soit prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}_+$  il faut qu'elle possède une limite finie en 0.

- Si  $\mu \leq 0$ , la fonction  $x \mapsto \frac{C}{x^\mu}$  possède une limite finie en 0.

- Si  $\mu > 0$ , la fonction  $x \mapsto \frac{C}{x^\mu}$  n'est prolongeable par continuité en 0 que si, et seulement si,  $C = 0$  et c'est donc la fonction nulle.

Conclusion : Les solutions de  $(L)$  prolongeables par continuité en 0 sont les fonctions  $x \mapsto \frac{C}{x^\mu}$ , avec  $\mu \leq 0$  et  $C \in \mathbb{R}$ .

**7.4.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\Psi$  et  $f$  une fonction non nulle du sous-espace propre associé  $E_\lambda(\Psi)$ .

Ainsi, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{F(x)}{x} = \lambda f(x) = \lambda F'(x)$ .

Ainsi,  $F$  est solution de l'équation  $(L)$  dans le cas où  $\mu = -\frac{1}{\lambda}$ .

Mais comme  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , il faut récupérer les solutions de  $(L)$  prolongeables par continuité sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qui donne :  $\lambda > 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $F(x) = C x^{1/\lambda}$  puis  $f(x) = x^{1/\lambda - 1}$ .

Mais il faut aussi que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}_+$  et donc  $\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0$  ce qui donne finalement  $\lambda \in ]0, 1]$

Ainsi, le spectre de  $\Psi$  est inclus dans  $]0, 1]$  et facilement,  $E_\lambda(\Psi) \subset \text{Vect}(x \mapsto x^{1/\lambda - 1})$ .

Réciproquement, soit  $\lambda \in ]0, 1]$  et  $f_\lambda : x \mapsto x^{1/\lambda - 1}$ .

On a :  $\Psi(f_\lambda) = \int_0^1 (xt)^{\frac{1}{\lambda}-1} dt = x^{\frac{1}{\lambda}-1} \left[ \lambda t^{\frac{1}{\lambda}} \right]_0^1 = \lambda f_\lambda(x)$ .

Finalement, on a donc démontré que le spectre de  $\Psi$  est  $]0, 1]$  et que pour chaque valeur propre  $\lambda > 0$ , le sous-espace propre associé est :  $E_\lambda(\Psi) = \text{Vect}(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1})$ .

**8.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note  $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$  et  $F_n$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $\mathcal{B}$ .

**8.1. On veut montrer que la famille  $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$  est une base de  $F_n$**

Soient  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  et  $(\beta_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  des scalaires tels que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^n \beta_j g_j = 0$  (\*).

**8.1.1.** Soit  $x > 0$ .

En simplifiant par  $x$  non nul, on a :  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1} + \sum_{j=1}^n \beta_j x^{j-1} \ln(x) = g(x) = 0$ .

- Si  $\beta_1 \neq 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq 0$  et donc  $\beta_1 = 0$ .

- On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \alpha_1$  et donc que  $\alpha_1 = 0$ .

**8.1.2.** Soit  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . On suppose que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$ .

On a toujours  $x > 0$  et on simplifie (\*) par  $x^{p-1}$  cette fois, ce qui donne :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i f_{i-p+1} + \sum_{j=p+1}^n \beta_j g_{j-p+1} = 0$$

Par le même raisonnement qu'au-dessus, on obtient alors  $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$ .

**8.1.3.** Par récurrence forte, on a donc montré que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$ , ce qui prouve la liberté de la famille  $\mathcal{B}$  et que  $\dim(F_n) = 2n$ .

## 8.2. Où l'on démontre que $\Psi$ induit un endomorphisme sur $F_n$

**8.2.1.** Soient  $x > 0$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

La fonction  $t \mapsto t^p \ln(t)$  est continue sur l'intervalle  $]0, x]$ .

Par croissances comparées,  $\lim_{t \rightarrow 0} t^p \ln(t) = 0$  et donc, on peut prolonger par continuité la fonction  $t \mapsto t^p \ln(t)$  sur l'intervalle  $[0, x]$ .

Conclusion : l'intégrale  $\int_0^x t^p \ln(t) dt$  converge.

Comme les fonctions  $t \mapsto t^{p+1}$  et  $t \mapsto \ln(t)$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_0^x t^p \ln(t) dt = \left[ \frac{t^{p+1}}{p+1} \ln(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{p+1}}{p+1} \frac{1}{t} dt = \frac{x^{p+1}}{p+1} \ln(x) - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}.$$

**8.2.2.** Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Alors, pour tout  $x \geq 0$ , on a :

$$\Psi(f_i)(x) = \int_0^1 (xt)^i dt = x^i \left[ \frac{t^{i+1}}{i+1} \right]_0^1 = \frac{1}{i+1} x^i, \text{ soit } \Psi(f_i) = \frac{1}{i+1} f_i \in F_n$$

et  $\Psi(g_i) = \int_0^1 (xt)^i \ln(xt) dt = \int_0^1 (xt)^i (\ln(x) + \ln(t)) dt = \frac{1}{i+1} x^i \ln(x) - \frac{1}{(i+1)^2} x^i$ , soit

$$\Psi(g_i) = \frac{1}{i+1} g_i - \frac{1}{(i+1)^2} f_i \in F_n.$$

On en déduit que  $\Psi$  induit un endomorphisme  $\Psi_n$  sur  $F_n$ .

**8.3.** On en déduit la matrice de l'application  $\Psi_n$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$M_{\mathcal{B}}(\Psi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{(n+1)^2} \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

**8.4.**  $M_{\mathcal{B}}(\Psi)$  est une matrice triangulaire dont aucun des termes diagonaux est nuls : c'est une matrice inversible et donc,  $\Psi_n$  est un automorphisme de  $F_n$ .

On aurait aussi pu dire que l'injectivité de  $\Psi$  entraîne celle de  $\Psi_n$  et en tant qu'endomorphisme injectif de  $F_n$  qui est de dimension finie, c'est un automorphisme de  $F_n$ .

**8.5.** Soit  $z : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto z(x) = \begin{cases} (x+x^2) \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$ .

On a :  $z = g_1 + g_2 \in F_n$ .

Puis, on prend  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^n \beta_j g_j \in F_n$  et on écrit que  $\Psi_n(f) = z$ , ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\beta_1}{4} = 0 \\ \frac{\alpha_2}{3} - \frac{\beta_2}{9} = 0 \\ \frac{\beta_1}{2} = 1 \\ \frac{\beta_2}{3} = 1 \end{cases}$$

soit finalement,  $\Psi^{-1}(z) = f_1 + f_2 + 2g_1 + 3g_2$

## EXERCICE 4

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

### Questions de cours

**1.** Soit  $p$  une projection vectorielle de rang  $r \in \mathbb{N}$ .

**1.1.** Lorsque  $r = 0$ ,  $W$  est la matrice nulle. Lorsque  $r = n$ ,  $W = I_n$ . Dans les autres cas, on écrit la matrice par blocs :  $W = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ .

**1.2.** Lorsque  $r = 0$ ,  $\mathbf{Sp}(W) = \{0\}$ . Lorsque  $r = n$ ,  $\mathbf{Sp}(W) = \{1\}$ . Dans les autres cas,  $\mathbf{Sp}(W) = \{0, 1\}$

**1.3.** On a  $\mathbf{rg}(W) = \mathbf{tr}(W)$ .

**1.4.** Si  $r = n$ ,  $\det(W) = 1$ . Sinon,  $\det(W) = 0$ .

\*\*\*\*\*

On considère la famille  $X_1, \dots, X_n$  de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

Soit  $M$  une variable aléatoire discrète de  $\Omega$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $\omega$  dans  $\Omega$ ,  $M(\omega)$  est diagonalisable et semblable à  $\Delta(\omega) = \text{diag}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ .

**2.** On note  $T$  la variable aléatoire  $\mathbf{tr}(M)$ .

**2.1.** Comme la trace est invariante par similitude,  $T = \mathbf{tr}(\Delta) = \sum_{k=1}^n X_k$ . Comme  $X_1, \dots, X_n$  sont à valeurs dans  $\{0, 1\}$ ,  $T$  est donc à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

**2.2.**  $T$  est la somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .  $T$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

D'après le cours,  $\mathbb{E}(T) = np$ .

3. Comme le rang est invariant par similitude,  $R = \text{rg}(\Delta) = \sum_{k=1}^n X_k$  car  $\Delta$  est une matrice de projection.  
 Donc  $R = T$  et suit donc aussi une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .
4. On note  $D$  la variable aléatoire  $\det(M)$ .

- 4.1.** Comme le déterminant est invariant par similitude,  $D = \det(\Delta) = \prod_{k=1}^n X_k$ . Donc  $D(\Omega) = \{0, 1\}$ .
- 4.2.**  $D$  suit donc une loi de Bernoulli de paramètre  $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1) = p^n$  car les variables sont indépendantes. Donc  $\mathbb{E}(D) = p^n$ .

5. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement  $Z$  :

« les sous-espaces propres de la matrice  $M$  ont tous la même dimension ».

- 5.1.** Comme le spectre est invariant par similitude,  $V = \bigcap_{k=1}^n (X_k = 1) \cup \bigcap_{k=1}^n (X_k = 0)$  et les deux évènements sont incompatibles. Donc  $\mathbb{P}(V) = p^n + (1-p)^n$  par indépendance.
- 5.2.** Rappelons que  $M$  a soit une valeur propre, soit deux valeurs propres distinctes. Comme  $n$  est impair, si  $M$  a deux valeurs propres distinctes, les deux sous-espaces propres ne peuvent pas être de la même dimension. Donc  $Z = V$ , et  $\mathbb{P}(Z) = p^n + (1-p)^n$ .
- 5.3.** Comme  $T$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ ,  $\mathbb{P}(T = r) = \binom{2r}{r} p^r (1-p)^r$ .  
 L'évènement  $(T = r)$  correspond à :  $\dim(E_1(M)) = r$ . Comme  $n = 2r$ , on a donc aussi  $\dim(E_0(M)) = r$ . On obtient ainsi :  $Z = V \cup (T = r)$ , donc  $\mathbb{P}(Z) = p^{2r} + (1-p)^{2r} + \binom{2r}{r} p^r (1-p)^r$ .

6. Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on note  $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^{\top} = (a_{ij}(\omega))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ .

- 6.1.** Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{ij}(\omega) = X_i(\omega)X_j(\omega)$ .
- 6.2.** Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La variable  $a_{ii}$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\mathbb{P}(X_i^2 = 1) = p$ .  
 Si  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $i \neq j$ , la variable  $a_{ij}$  suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = p^2$$

par indépendance.

- 6.3.**  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n X_i^2$ . Or,  $X_i^2 = X_i$  car  $X_i$  ne prend que les valeurs 0 et 1.

On en déduit donc que :  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n X_i$ .

- 6.4.** On remarque que toutes les colonnes de  $A$  sont liées (elles sont toutes multiples de  $U$ ). Donc le rang de  $A$  vaut 0 si  $U$  est nulle et 1 sinon :  $\text{rg}(A)(\Omega) = \{0, 1\}$ .

- 6.5.** Soit  $\omega$  dans  $\Omega$ . Trois cas se présentent :

- soit  $A(\omega)$  est la matrice nulle et sa seule valeur propre est 0 ;

- soit  $A(\omega)$  est non nulle et  $n = 1$  et sa seule valeur propre est 1 ;
- soit  $A(\omega)$  est non nulle et  $n > 1$  et elle a deux valeurs propres 0 et  $\sum_{i=1}^n X_i(\omega)^2 = T(\omega)$ .

**6.6.** Comme  $\mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_n = 0) = (1 - p)^n$  par indépendance,  $\mathbf{rg}(A)$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $1 - (1 - p)^n$ .

## COMMENTAIRES

### • Commentaires généraux

Malheureusement, il me faut reprendre presque intégralement les remarques générales faites l'an dernier sur les copies :

- Les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre.**

Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.

Notons que nous avons rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.

Rappelons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , il faut les vérifier !

- Enfin, un exemple ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MP.

- Signalons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice.

Il nous a semblé en effet que beaucoup de candidats lisent de plus en plus approximativement l'énoncé, ce qui induit nombre d'erreurs facilement évitables : « donner sans démonstration » donne lieu à une démonstration, « démontrer par récurrence » ne donne pas lieu à une récurrence, la donnée  $F'(0) = \frac{1}{4}$  se transforme en  $F(0) = \frac{1}{4}$  etc...

- Un grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de MP et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.

- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés.

De plus, beaucoup de candidats ne manipulent pas correctement les quantificateurs, ce qui entraîne de grosses difficultés dans les démonstrations, voire des contradictions.

- Dans le même type d'erreurs, on constate une grande confusion dans beaucoup de copies entre variable et paramètre : cela occasionne de grosses erreurs en particulier dans les intégrales à paramètre. Il est par