CORRECTION

Exercice 1.

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1,+\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall\, x \in J,\quad f_{-1}(x) = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}$$

1. Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions.

1.1. Soient $(a_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.

Ainsi, $\forall\, x \in J$, $a_{-1}\ \ln(1+x) + \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{a_k}{(1+x)^k} = 0$

En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_{-1}\ \ln(1+x) + \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{a_k}{(1+x)^k}\right) = 0$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{a_k}{(1+x)^k}\right) = a_0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$ entraînent que $\boxed{a_0 = a_{-1} = 0}$

1.2. Il reste à prouver que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $a_k = 0$.

Or : $\forall\, x \in J$, $\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{a_k}{(1+x)^k} = 0 \iff \forall\, x \in J$, $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k\,(1+x)^{p-k} = 0$

La famille $\left((1+x)^{p-k}\right)_{k\in[\![1,p]\!]}$ étant une famille de polynôme de degrés échelonnés, elle est libre et nous pouvons en déduire que : $\forall\, k \in [\![1,k]\!]$, $a_k = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B} = (f_k)_{k\in[\![-1,p]\!]} \text{ est libre}}$

1.3. Comme $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$, la famille $\mathscr{B}$ engendre E : $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = p+2}$

2. On note u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall\, x \in J,\quad g(x) = (1+x)\, f'(x)$$

2.1. Facilement, en utilisant la définition de u, on trouve :

- $u(f_{-1}) = f_0$,
- $\forall\, k \in [\![0,p]\!]$, $u(f_k) = -k\, f_k$.

En particulier, $u(f_0) = 0$ (application nulle).

2.2. • u est linéaire puisque la dérivation est linéaire.

• D'après les questions précédentes :

- $\mathscr{B}$ est une base de E,

- $\forall\, k \in [\![0, p]\!]$, $u(f_k) \in E$

et par conséquent, la linéarité de u entraîne que : $\forall\, f \in E$, $u(f) \in E$.

Conclusion : u est un endomorphisme de E.

2.3. D'après le cours et comme $\mathscr{B}$ est une base de E, on a, en utilisant la question précédente :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, ..., f_p).$$

D'après le Théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.

Comme $u(f_0) = 0$ et que $f_0 \neq 0$, on en déduit : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(f_0)$.

2.4. Comme $f_{-1} \notin \mathrm{Im}(u)$, on a $u^{-1}(\{f_{-1}\}) = \varnothing$.

2.5. La matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$ est donnée grâce à la question **2.1.**.

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -p \end{pmatrix}$

2.6. La matrice M est triangulaire inférieure.

Ses valeurs propres de la matrice M sont donc les éléments de la diagonale, soit $\{0, -1, -2, ..., -p\}$. Les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont tous de dimension 1, ce qui entraîne que E n'est pas la somme directe de ses sous-espaces propres.

On en déduit que M et par suite u, n'est pas diagonalisable.

2.7. Facilement, par un calcul par blocs, $M^2 = \mathbf{diag}(0, 0, 1, 4, ..., p^2)$ et donc, u^2 est diagonalisable.

3. L'équation différentielle s'écrit encore $y'(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ puisque $t \in J$.

Ainsi, les fonctions solutions de cette équation différentielle sur J sont de la forme :

$$t \longmapsto \frac{1}{2}\ln^2(1+t) + C \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

4. On a $h_2 : t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(1+t)$

4.1. On a donc : h_3 est la solution sur J qui s'annule en 0 de l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{1}{2}\ln^2(1+t) \times \frac{1}{1+t}$$

Il en résulte que h_3 est la fonction :

$$h_3 : t \mapsto \frac{1}{6}\ln^3(1+t)$$

4.2. On va raisonner par récurrence sur l'entier k en notant : $P(k)$ la proposition :

$$h_k : t \in J \longmapsto \frac{1}{k\,!}\ln^k(1+t)$$

- $P(2)$ est vérifiée d'après la question précédente.
- Soit alors $k \geqslant 2$ tel que la proposition $P(k)$ soit vérifiée.

Alors, h_{k+1} est la solution qui s'annule en 0 de l'équation différentielle :

$$y'(t) = \frac{1}{1+t} \times \frac{1}{k\,!}\ln^k(1+t)$$

La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{(k+1)\,!}\ln^{k+1}(1+t)$ vérifie : $g(0) = 0$ et $\forall\, t \in J$, $g'(t) = h_k(t)$

Il s'en suit que $g = h_{k+1}$, ce qui prouve $P(k+1)$.

- Conclusion : $\forall\, k \geqslant 2$, $h_k : t \mapsto \dfrac{1}{k\,!}\ln^k(1+t)$.

5. Etude de la série de Fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2} h_k$.

5.1. La série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2} h_k$ s'écrit pour tout $t \in J$:

$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\,!}\ln^k(1+t)$$

On reconnaît la série entière de la fonction exponentielle qui est de rayon de convergence infini.

Il en résulte que la série converge et que l'on a :

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k\,!}\ln^k(1+t) = \exp(\ln(1+t)) - \ln(1+t) - 1$$

et donc, $H : t \mapsto t - \ln(1+t)$.

5.2. On a : $H = \mathrm{Id}_E - f_0$.

La fonction H sera dans E si et seulement si Id_E l'est.

Supposons donc qu'il existe une famille de scalaires $(b_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ telle que : $\mathrm{Id}_E = \sum\limits_{k=-1}^{p} b_k\, f_k$.

Ainsi, $\forall\, x \in J$, $x = b_{-1}\ln(1+x) + \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{b_k}{(1+x)^k}$ et pour $x \neq 0$, $1 = b_{-1}\dfrac{\ln(1+x)}{x} + \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{b_k}{x(1+x)^k}$

En faisant alors tendre x vers $+\infty$, on obtient $1 = 0$, ce qui prouve que notre hypothèse est fausse.

Ainsi, $\mathrm{Id}_E \notin E$ et par suite, $H \notin E$.

5.3. H est dérivable d'après la question précédente et on a, pour tout $t \in J$:

$H'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = f_0 - f_1$ et donc, $H' \in E$.

Exercice 2.

On note S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. D'après les relations coefficients racines, les racines, on a, en notant r_1 et r_2 les racines de l'équation :

$$\begin{cases} r_1\, r_2 = -1 \ (1) \\ \text{et} \\ r_1 + r_2 = 1 \ (2) \end{cases}$$

Comme le discriminant $\Delta = 5 > 0$, les deux racines sont réelles et de signe contraire d'après (1).

En utilisant les notations de l'énoncé, les deux racines s'écrivent donc, d'après (1) : γ et $-\dfrac{1}{\gamma}$.

De plus, $\gamma = 1 - \dfrac{-1}{\gamma} = 1 + \dfrac{1}{\gamma} > 1$

2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S vérifiant : $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
En prenant successivement $n = 0$ et $n = 1$ et en utilisant le cours, seule la réponse (3) est correcte.

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n \sqrt{5}}$.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par :
• X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
• Pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$

3.1. Comme $X_0(\Omega) = X_1(\Omega) = \mathbb{N}$, on a aussi $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit donc $k \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{P}(X_2 = k) = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}([X_0 = i] \cap [X_1 = k-i]) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_0 = i)\,\mathbb{P}(X_1 = k-i)$ puisque les v.a. X_0 et X_1 sont indépendantes

Soit $\mathbb{P}(X_2 = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i\,!\,\mathrm{e}^{\lambda}}\, \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)\,!\,\mathrm{e}^{\mu}} = \frac{1}{k\,!\,\mathrm{e}^{\lambda+\mu}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} = \frac{1}{k\,!\,\mathrm{e}^{\lambda+\mu}} (\lambda+\mu)^k$

ce qui prouve que X_2 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

3.2. Comme X_0 est positive, $\mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1) = 0$ et les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.3. On va montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = y_{n-1}\, X_0 + y_n\, X_1$ en raisonnant par récurrence sur l'entier naturel n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H(n)$ la proposition : $X_n = y_{n-1}\, X_0 + y_n\, X_1$.

• Initialisation :

$y_0\, X_0 + y_1\, X_1 = 0\, X_0 + 1\, X_1 = X_1$ et $y_1\, X_0 + y_2\, X_1 = X_0 + X_1 = X_2$

et donc, $H(0)$ et $H(1)$ sont vérifiées.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ soient vérifiées.

Alors : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n = (y_n\, X_0 + y_{n+1}\, X_1) + (y_{n-1}\, X_0 + y_n\, X_1)$ d'après l'hypothèse de récurrence

soit : $X_{n+2} = (y_n + y_{n-1})\, X_0 + (y_{n+1} + y_n)\, X_1 = y_{n+1}\, X_0 + y_{n+2}\, X_1$, ce qui prouve que $H(n+1)$ est vérifiée ;

• Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = y_{n-1}\, X_0 + y_n\, X_1$.

3.4. Étude de l'espérance de la variable aléatoire X_n.

3.4.1. D'après la question précédente et par linéarité de l'espérance, on peut écrire :

$\mathbb{E}(X_n) = y_{n-1}\, \mathbb{E}(X_0) + y_n\, \mathbb{E}(X_1) = \lambda\, y_{n-1} + \mu\, y_n$

ce qui prouve par la même occasion que l'espérance de X_n existe.

Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \lambda\, y_{n-1} + \mu\, y_n$.

3.4.2. Comme $\gamma > 1$, on a $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}}$

Ainsi : $x_n = \lambda \left(\dfrac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + o\left(\gamma^{n-1}\right) \right) + \mu \left(\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + o\left(\gamma^n\right) \right)$

c'est-à-dire : $x_n = \dfrac{\lambda + \mu\,\gamma}{\sqrt{5}}\, \gamma^{n-1} + o\left(\gamma^{n-1}\right)$ et donc, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda + \mu\,\gamma}{\sqrt{5}}\, \gamma^{n-1}$

3.5. Comme X_0 et X_1 sont indépendantes, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{n-1}\, X_0$ et $y_n\, X_1$ aussi, et donc :

$\mathbb{V}(X_n) = y_{n-1}^2\, \mathbb{V}(X_0) + y_n^2\, \mathbb{V}(X_1) = y_{n-1}^2\, \lambda + y_n^2\, \mu,$

3.6. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_p, X_q) &= \mathrm{Cov}(y_{p-1}\, X_0 + y_p\, X_1, y_{q-1}\, X_0 + y_q\, X_1) \\ &= y_{p-1}y_{q-1}\, \mathbb{V}(X_0) + y_p y_q\, \mathbb{V}(X_1) + (y_{p-1}y_q + y_p y_{q-1})\, \mathrm{Cov}(X_0, X_1) \\ &= y_{p-1}y_{q-1}\, \lambda + y_p y_q\, \mu \text{ puisque } X_0 \text{ et } X_1 \text{ sont indépendantes.} \end{aligned}$$

En montrant par récurrence par exemple que $y_k > 0$ pour tout $k \geqslant 1$, on obtient finalement que : $\mathrm{Cov}(X_p, X_q) > 0$ et donc que les deux variables aléatoires X_p et X_q ne sont pas indépendantes.

Exercice 3.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^n}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, au voisinage de l'infini on a : $\mathrm{e}^{-t^n} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

Par comparaison, on en déduit l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^n}$ sur $[1, +\infty[$ et par suite, l'existence de l'intérale I_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est positive et continue et intégrable sur $[1, +\infty[$ (question précédente)

Facilement, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : t \in [1, +\infty[\mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

et :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in [1, +\infty[, |f_n(t)| \leqslant f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ qui est une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$.

Par le Théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

3. Comme l'application $\varphi : u \mapsto u^{1/n}$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ et les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $[1, +\infty[$, on peut appliquer le théorème de changement de variable , ce sui donne :

$$\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f_n(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$$

4. D'après la question précédente, $n\,I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$.

- Pour tout $u \in [1, +\infty[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,u^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, u \in [1, +\infty[, \left|\mathrm{e}^{-u}\,u^{\frac{1}{n}-1}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-u}$.
- La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

On a donc, par convergence dominée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = J > 0$

5. Facilement, $I_n \underset{n}{\sim} \dfrac{J}{n}$.

6. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} I_n x^n$.

6.1. Comme $I_n \underset{n}{\sim} \dfrac{J}{n}$, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} I_n x^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant1} \frac{x^n}{n}$ qui est 1. Ainsi, $R = 1$.

6.2. Notons D_f l'ensemble de définition de f.

On sait déjà que : $]-1,1[\subset D_f\subset[-1,1]$.

On étudie donc la convergence de la série entière pour $x=1$ et $x=-1$.

• Comme $I_n \underset{n}{\sim} \dfrac{J}{n}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} I_n$ diverge et $1\notin D_f$.

• Pour $x=-1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est alternée (puisque $I_n>0$) :

- comme $I_n \underset{n}{\sim} \dfrac{J}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

- comme pour tout entier naturel non nul n, $e^{-t^{n+1}} \leqslant e^{-t^n}$, la suite (I_n) est décroissante.

Le théorème des séries alternées nous permet alors d'affirmer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ converge et $-1\in D_f$.

Conclusion : $D_f=[-1,1[$.

Exercice 4.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$, u un endomorphisme de E, $m\in\mathbb{N}^*$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ m nombres complexes distincts deux à deux.

1. Par hypothèse, pour tout vecteur x de E, il existe de façon unique des $x_j\in E_j$ tels que $x=\sum\limits_{j=1}^{m} x_j$.

Notons alors p_j l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, x\in E,\ p_j(x)=x_j$ (projecteur sur E_j)

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a : $u^k(x)=\sum\limits_{j=1}^{m} u^k(x_j)=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j^k x_j=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j^k p_j(x)$,

ce qui prouve que l'on a : $\forall\, k\in\mathbb{N},\ \ u^k=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j^k p_j$ (*).

2. Dans cette question, on ne suppose plus u diagonalisable.
On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes $(p_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de E, non nuls et que la suite de scalaires $(\lambda_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ vérifie $(*)$.

2.1. Notons $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{r} a_k X^k$

Alors, $P(u)=\sum\limits_{k=0}^{r} a_k u^k=\sum\limits_{k=0}^{r} a_k\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j^k p_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\left(\sum\limits_{k=0}^{r} a_k\lambda_j^k\right)p_j\right)$

soit finalement : $P(u)=\sum\limits_{j=1}^{m}P(\lambda_j)\,p_j$.

2.2. Prenons dans la relation précédente $P = \prod_{j=1}^{m}(X - \lambda_j)$.

Comme P est scindé, à racines simples et vérifie : $\forall\, j \in [\![1, m]\!]$, $P(\lambda_j) = 0$.

on a : $P(u) = 0$ (endomorphisme nul) et donc, d'après le cours, u est diagonalisable.

2.3. Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{k=1, k\neq j}^{m} \dfrac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$.

2.3.1. Facilement, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]$, on a $L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{lorsque } i = j \end{cases}$

2.3.2. • On a déjà $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = m = \dim(\mathbb{C}_{m-1}[X]$.

• Montrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre :

Soit $(a_k)_{k\in[\![1,m]\!]}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j = 0$ (polynôme nul)

Or, $\forall\, k \in [\![1, m]\!]$, $\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j\right)(\lambda_k) = \sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j(\lambda_k) = a_k = 0$, et la famille $\mathscr{B}$ est libre.

Conclusion : $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$

2.3.3. Soit $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Il existe une unique famille de scalaires $(a_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ tels que $P = \sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j$.

Alors, $\forall\, k \in [\![1, m]\!]$, $P(\lambda_k) = \sum_{j=1}^{m} a_j\, L_j(\lambda_k) = a_k$ et donc, finalement : $P = \sum_{j=1}^{m} P(\lambda_j)\, L_j$.

2.4. Soit $j \in [\![1, m]\!]$. On a : $L_j(u) = \sum_{k=1}^{m} L_j(\lambda_k)\, p_k = p_j$

2.5. Comme u est annulé par $P = \prod_{j=1}^{m}(X - \lambda_j)$, on a déjà : $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$.

Soit $j_0 \in [\![1, m]\!]$. Comme $p_{j_0} \neq 0$, il existe au moins $x \in E$ tel que $p_{j_0}(x) \neq 0$.

Alors :

$$u(p_{j_0}(x)) = (u\, o\, L_{j_0}(u))(x) = L_{j_0}(u)(u(x)) = p_{j_0}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, p_j(x)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Big(\lambda_j\, (p_{j_0}\, o\, p_j\Big)(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, (L_{j_0}\, L_j)(u)(x)$$

Or si $j \neq j_0$, $L_{j_0}\, L_j$ a pour racines $\lambda_1, ..., \lambda_m$ et donc, $\Big(L_{j_0}\, L_j\Big)(u) = 0$

Sinon, $L_{j_0}\, L_{j_0} = L_{j_0}$ et donc, $u(p_{j_0}(x)) = \lambda_{j_0}\, p_{j_0}(x)$, ce qui prouve que λ_{j_0} est valeur propre de l'endomorphisme u.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$.