- Soigner la rédaction. Les correcteurs ne peuvent attribuer la totalité des points qu'aux réponses complètes et précises. Ce point n'est pas en contradiction avec le précédent : il y a là un équilibre à trouver, qui est constitutif de l'épreuve.
- Ne pas « tricher ». Les correcteurs sanctionnent inéluctablement toute tentative d'escroquerie.
- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de commencer à rédiger, afin de bien saisir les objectifs et l'organisation du texte. Bien comprendre ce qui vous est demandé.

1.5.3 Conclusion

Le jury a été perplexe devant le grand nombre d'erreurs de logique et le manque de maîtrise -par certains candidats- de notions fondamentales et de résultats incontournables. Même si nous avons pu nous réjouir de la présence d'un grand nombre de copies excellentes, l'existence de questions de cours (à l'image de la 5) permettant d'évaluer l'assimilation des fondamentaux, nous a permis de constater de grandes différences de niveau de préparation des candidats.

Le jury ne peut que recommander une fois encore aux candidats de s'appuyer sur une solide connaissance du cours, et de ne surtout pas négliger l'entraînement technique indispensable à toute pratique scientifique.

1.6 Mathématiques 1 - filière PSI

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Dans tout ce qui suit, φ désigne la fonction gaussienne $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Le but du problème est, pour une fonction f strictement positive de classe C^2 et à croissance lente (notion définie dans l'énoncé) vérifiant en outre la condition de normalisation,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = 1,$$

d'introduire et de majorer l'entropie

$$Ent_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} ln(f(x))f(x)\varphi(x)dx,$$

en fonction de l'intégrale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)dx.$$

Le résultat est obtenu à la question 20 du problème sous des hypothèses de croissance lente portant sur les dérivées de f.

La bonne définition de l'entropie est démontrée au début de la partie 3 avant la preuve effective du résultat final qui s'appuie de manière essentielle sur une transformation intégrale P_t à paramètre continu t.

La première partie débute par des considérations générales sur les fonctions à croissance lente (questions 1 à 3). Les questions 1 et 3 ont déjà permis à certains bons candidats de montrer leurs qualités de raisonnement. Cette partie se poursuit en étudiant, pour $t \in \mathbb{R}_+$, les propriétés de la fonction $P_t(f)$ (on montre en particulier qu'elle est à croissance lente à la question 6). Elle se termine par la preuve d'une formule intégrale faisant intervenir un opérateur différentiel.

La partie 2 permet d'obtenir une équation aux dérivées partielles sur la fonction $(t, x) \mapsto P_t(f)(x)$, en établissant au passage toutes les propriétés de régularité nécessaires.

Ces deux parties ont fourni l'occasion de tester à plusieurs reprises la maîtrise des candidats sur les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.

La partie 3 utilise les résultats établis précédemment sur la fonction $P_t(f)$ pour donner d'abord une expression exacte de la dérivée de l'entropie $Ent_\varphi(P_t(f))$, avant de la majorer (en valeur absolue) en fonction de,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(\frac{f'^2}{f})(x)\varphi(x)dx.$$

On en déduit la majoration finale par intégration entre 0 et $+\infty$. Cette dernière partie comportait plusieurs questions difficiles.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe E.

1.6.2 Thématiques abordées et généralités sur les copies

Il s'agissait d'un sujet assez technique comportant peu de questions faciles qui a permis de classer efficacement les candidats. Le problème porte essentiellement sur les intégrales impropres, en particulier dans leur version à paramètre. Il nécessite une très bonne connaissance des théorèmes de convergence dominée et de leur champ d'application (les candidats devaient faire preuve de discernement pour savoir quand une version locale était requise) et une certaine habileté technique pour établir à plusieurs reprises des majorations en valeur absolue (hypothèses de domination).

À ce propos, signalons que beaucoup de copies ont affiché des lacunes sur ce point. Une erreur extrêmement fréquente est de passer abusivement de majorations du type $f(x) \leq a$ à $|f(x)| \leq |a|$. Dans la plupart des cas une simple application de l'inégalité triangulaire permettait d'obtenir les majorations souhaitées.

Les questions relatives à la régularité des intégrales à paramètre susmentionnées ont permis de valoriser à la fois la connaissance précise des énoncés du cours et de récompenser l'habileté technique des bons candidats lors de la vérification des hypothèses de domination.

Les questions utilisant l'intégration par parties sur des intégrales impropres (questions 7 et 10) ont permis aux étudiants soigneux de se mettre en avant. Enfin certaines questions assez délicates au début et à la fin du sujet ont permis de distinguer les meilleures copies.

Une majorité de candidats a démontré une bonne connaissance du cours, mais beaucoup restent perfectibles sur le plan technique.

Pour les futurs candidats, rappelons que les techniques de majoration, et en particulier l'inégalité triangulaire, sont des outils fondamentaux de l'analyse et qu'il semble un peu vain d'utiliser des résultats aussi puissants que les théorèmes de convergence dominée s'ils ne sont pas adossés à une maîtrise suffisante de ces méthodes élémentaires. Nous encourageons les élèves préparant les concours à répéter leurs gammes en pratiquant régulièrement des exercices techniques.

Terminons avec un mot sur la présentation des copies : la vérification des différentes hypothèses des théorèmes de convergence dominée a donné lieu à des développements d'une longueur parfois abusive, où les arguments significatifs mathématiquement peinaient à se détacher de vérifications plus triviales. Rappelons que la concision des raisonnements fait partie des qualités attendues dans une copie de mathématiques. Le jury encourage donc les futurs candidats à adopter une présentation plus compacte et structurée en utilisant davantage d'outils tels que le passage à la ligne, l'indentation ou l'utilisation de tirets.