

## COMPOSITION DE MATHEMATIQUES – A – (XLCR)

(Duré: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

Dans tout le problème

- $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,
- $\text{Id}$  est l'application identité sur  $E$ :  $\text{Id}(x) = x$  pour tout  $x \in E$ ,
- $\text{L}(E)$  est l'algèbre des endomorphismes de  $E$ ,
- $\text{GL}(E)$  est le groupe des automorphismes de  $E$ ,
- $E^* = \text{L}(E, \mathbb{R})$  est l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $E$ ,
- $\text{A}(E)$  est l'espace vectoriel des applications  $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont bilinéaires et anti-symétriques, c'est-à-dire qui vérifient, quel que soit  $(x, y, z) \in E^3$  et quel que soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\omega(\lambda x + y, z) &= \lambda\omega(x, z) + \omega(y, z), & \omega(x, \lambda y + z) &= \lambda\omega(x, y) + \omega(x, z), \\ \omega(x, y) &= -\omega(y, x).\end{aligned}$$

Pour tout  $\omega \in \text{A}(E)$  et  $x \in E$ , on note  $\omega(x, \cdot)$  la forme linéaire définie par

$$\left| \begin{array}{rcl} \omega(x, \cdot) : & E & \rightarrow \mathbb{R} \\ & y & \mapsto \omega(x, y) \end{array} \right.$$

Pour tout  $\omega \in \text{A}(E)$ , on note  $\varphi_\omega$  l'application linéaire définie par

$$\left| \begin{array}{rcl} \varphi_\omega : & E & \rightarrow E^* \\ & x & \mapsto \omega(x, \cdot) \end{array} \right.$$

Un élément  $\omega$  de  $\text{A}(E)$  est appelé **forme symplectique sur  $E$**  si  $\varphi_\omega$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $E^*$ .Un élément  $J$  de  $\text{L}(E)$  est appelé **structure complexe sur  $E$**  s'il vérifie  $J^2 = -\text{Id}$ .On dit qu'une forme symplectique  $\omega$  sur  $E$  **dompte** une structure complexe  $J$  si  $\omega(x, J(x)) > 0$  pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ .

On note

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'algèbre des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels,
- $GL_n(\mathbb{R})$  le groupe des matrices inversibles de taille  $n$  à coefficients réels,
- $I_n$  la matrice unité de taille  $n$ ,
- lorsque  $n$  est pair,  $J_n$  la matrice carrée de taille  $n$  définie par blocs

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\frac{n}{2}} \\ I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\det$  l'application déterminant sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,
- ${}^t M$  la transposée de la matrice  $M$ .

On identifie tout élément de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  à un nombre réel.

La partie I est utilisée dans les parties III et IV. Les parties II et III indépendantes entre elles, sont utilisées dans la partie IV.

## Partie I: Bases symplectiques

1. Montrer que la dimension de l'espace vectoriel  $E^*$  vaut  $n$ .
  2. Montrer que  $\omega(x, x) = 0$  pour tout  $\omega \in A(E)$  et pour tout  $x \in E$ .
  3. Soit  $\omega \in A(E)$  et  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  une base de  $E$ .
    - (a) Montrer qu'il existe une unique matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , dont on précisera les coefficients, telle que pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\omega(x, y) = {}^t X M Y$  où  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  sont les matrices colonnes représentant respectivement  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathcal{B}$ :
- $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x &= x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n, \\ y &= y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n. \end{aligned}$$
- On notera alors  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ .*
- (b) Montrer que  $M$  est antisymétrique, c'est-à-dire que  ${}^t M = -M$ .
  - (c) Montrer que l'espace vectoriel  $A(E)$  est de dimension 1 lorsque  $E$  est de dimension 2.
  - (d) Montrer l'équivalence entre les trois énoncés suivants.
    - (E<sub>1</sub>):  $\omega$  est une forme symplectique sur  $E$ .
    - (E<sub>2</sub>): Pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ , il existe  $y \in E$  tel que  $\omega(x, y) \neq 0$ .
    - (E<sub>3</sub>):  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$  est inversible.

4. Montrer que, s'il existe une forme symplectique sur  $E$ , alors  $E$  est de dimension paire.

*Dorénavant, jusqu'à la fin du problème,  $n$  est un entier pair  $\geq 2$ .*

5. Montrer que l'application  $\omega_0$  définie par

$$\begin{aligned} \omega_0 : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto {}^t X J_n Y \end{aligned}$$

est une forme symplectique sur  $\mathbb{R}^n$ .

*Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une forme symplectique  $\omega$  sur  $E$ .*

*Le but des questions 6 à 9 est de montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n$ .*

6. Traiter le cas où  $E$  est de dimension 2.
7. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- (a) Montrer que, pour toute forme linéaire  $u : F \rightarrow \mathbb{R}$ , il existe une forme linéaire  $\tilde{u} : E \rightarrow \mathbb{R}$  dont la restriction à  $F$  coïncide avec  $u$ .

On note  $F^\omega$  le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par

$$F^\omega = \{x \in E : \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$$

et  $\psi_F$  l'application linéaire définie par

$$\begin{cases} \psi_F : & E \rightarrow F^* \\ & x \mapsto \varphi_\omega(x)|_F \end{cases}$$

où  $\varphi_\omega(x)|_F$  est la restriction de  $\varphi_\omega(x)$  à  $F$ .

- (b) Montrer que la restriction de  $\omega$  à  $F \times F$  est une forme symplectique sur  $F$  si et seulement si  $F \cap F^\omega = \{0\}$ .  
(c) Quels sont le noyau et l'image de  $\psi_F$ ?  
(d) Montrer que  $\dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$ .  
(e) Montrer que, si la restriction de  $\omega$  à  $F \times F$  est une forme symplectique sur  $F$ , alors  $E = F \oplus F^\omega$  et la restriction de  $\omega$  à  $F^\omega \times F^\omega$  est une forme symplectique sur  $F^\omega$ .

8. Montrer par récurrence qu'il existe une base  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $E$  telle que

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

9. Conclure. En déduire que  $\omega$  dompte au moins une structure complexe sur  $E$ .

## Partie II: Deux outils sur les polynômes

*On note  $\mathbb{R}_d[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq d$  à coefficients réels, pour tout  $d \in \mathbb{N}$ .*

10. Soit  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  des polynômes non nuls de degrés respectifs  $p$  et  $q$  strictement positifs. Montrer que l'application linéaire  $L_{P,Q}$  définie par

$$\begin{cases} L_{P,Q} : & \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{p+q-1}[X] \\ & (V, W) \mapsto VP + WQ \end{cases}$$

est un isomorphisme si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$ .

11. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Construire une application

$$\begin{cases} r : & \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ & P \mapsto r(P) \end{cases}$$

polynomiale en les coefficients de  $P$ , telle que, si  $r(P)$  est non nul, alors les racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  sont simples.

Indication: On pourra utiliser la question précédente.

12. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  une fonction polynomiale sur  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que la fonction  $f$  est non nulle. Montrer que  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  est dense dans  $\mathbb{R}^d$ .

*Indication:* On pourra utiliser le fait qu'un polynôme non nul à une variable n'a qu'un nombre fini de racines.

*Dans les parties III et IV, on fixe deux formes symplectiques  $\omega$  et  $\omega_1$  sur  $E$ .*

### Partie III: Réduction simultanée

13. Montrer qu'il existe un unique  $u \in \mathrm{GL}(E)$  tel que  $\omega_1(x, y) = \omega(u(x), y)$  pour tout  $(x, y) \in E^2$ . Montrer alors que  $u$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}$  défini par

$$\mathcal{S} = \{ u \in \mathrm{GL}(E) : \forall (x, y) \in E^2, \omega(x, u(y)) = \omega(u(x), y) \} .$$

*Dans les questions 14 à 19, on suppose que  $E$  est de dimension 4.*

14. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  telle que  $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_4$ . Soit  $U \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

- (a) Quelle relation y a-t-il entre les matrices  $J_4$  et  $U$ ?  
(b) Montrer qu'il existe  $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$U = \begin{pmatrix} N & \alpha J_2 \\ \beta J_2 & {}^t N \end{pmatrix} .$$

- (c) Déterminer, en fonction de  $N, \alpha$  et  $\beta$  les coefficients du polynôme  $T$  défini par  $T(X) = \det(N - XI_2) + \alpha\beta$ . Montrer que  $T$  est un polynôme annulateur de  $U$ .

*Dans les questions 15 à 19, on suppose que  $u$  n'admet aucune valeur propre réelle.*

*Le but des questions 15 à 19 est de montrer qu'il existe une base  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $E$ ,  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  tels que*

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\omega) = J_4 \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\omega_1) = r \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

15. Montrer que  $U$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . En déduire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  et des vecteurs  $Z$  et  $Y$  de  $\mathbb{C}^4$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{C}$  tels que  $UZ = \lambda Z$  et  $UY = \lambda Y$ .
16. Soient  $Z_1, Z_2, Y_1, Y_2$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  tels que  $Z = Z_1 + iZ_2$  et  $Y = Y_1 + iY_2$ . Soient  $(z_1, z_2, y_1, y_2) \in E^4$  de coordonnées respectives  $Z_1, Z_2, Y_1, Y_2$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Montrer que  $\tilde{\mathcal{B}} := (z_1, z_2, y_1, -y_2)$  est une base de  $E$ .
17. Montrer que

$$\begin{aligned} \omega(z_1, z_2) &= \omega(y_1, y_2) = 0, \\ \omega(z_1, y_1) &= -\omega(z_2, y_2), \\ \omega(z_1, y_2) &= \omega(z_2, y_1). \end{aligned}$$

18. Montrer que, quitte à remplacer  $Y$  par  $\xi Y$  avec  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  bien choisi, on a  $\omega(z_1, y_1) = -1$  et  $\omega(z_1, y_2) = 0$ .
19. Montrer qu'il existe  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  tels que

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(u) = r \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$$

et conclure.

*Jusqu'à la fin de cette partie, on ne fait plus d'hypothèse sur la dimension de  $E$  ni sur l'endomorphisme  $u$ . On considère un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  annulateur de  $u$  et une décomposition  $P = P_1 \cdots P_r$ , où  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $P_1, \dots, P_r$  sont des polynômes premiers entre eux deux à deux dans  $\mathbb{R}[X]$ . On note  $F_j = \ker[P_j(u)]$  pour  $j = 1, \dots, r$ .*

20. Montrer que  $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$  et que  $F_j$  est stable par  $u$  pour  $j = 1, \dots, r$ .
21. Montrer que, pour tous  $j$  et  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, r\}$  et distincts, on a  $F_k \subset F_j^\omega$  et  $F_k \subset F_j^{\omega_1}$  (la notation  $F^\omega$  est définie en question 7).

*On dit alors que  $F_1, \dots, F_r$  sont deux à deux orthogonaux pour  $\omega$  et pour  $\omega_1$ .*

22. En déduire que, pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ , les restrictions de  $\omega$  et  $\omega_1$  à  $F_j \times F_j$  sont des formes symplectiques sur  $F_j$ .
23. On suppose que le polynôme caractéristique de  $u$  est à racines au plus doubles dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $E$  est la somme directe de sous-espaces de dimension 2 ou 4, deux à deux orthogonaux pour  $\omega$  et  $\omega_1$ , et sur lesquels les restrictions de  $\omega$  et  $\omega_1$  sont des formes symplectiques.

## Partie IV: Structures complexes domptées simultanément

*Dans cette partie, nous allons étudier les liens entre les propositions*

- $(\mathcal{F}_1)$  : *Il existe une structure complexe domptée par  $\omega$  et par  $\omega_1$ .*  
 $(\mathcal{F}_2)$  : *Le segment  $[\omega, \omega_1] = \{(1 - \theta)\omega + \theta\omega_1; \theta \in [0, 1]\}$  est inclus dans l'ensemble des formes symplectiques sur  $E$ .*

24. Soit  $u$  l'automorphisme de  $E$  défini en question 13. On suppose que  $(\mathcal{F}_2)$  est satisfaite et que le polynôme caractéristique de  $u$  est à racines au plus doubles dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $(\mathcal{F}_1)$  est satisfaite.

*Indication:* *On pourra démontrer puis utiliser le fait que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , il existe  $\phi \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  ${}^t X R_\phi X > 0$  et  ${}^t X R_{\theta+\phi} X > 0$ .*

25. Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble défini en question 13. Montrer que l'ensemble des éléments de  $\mathcal{S}$ , dont le polynôme caractéristique  $P$  est à racines au plus doubles dans  $\mathbb{C}$ , est dense dans  $\mathcal{S}$ .

*Indication:* *On pourra utiliser  $r(P')$  où l'application  $r$  est définie en question 11.*

26. Que peut-on conclure?