

Memento Factorisations

Document proposé par Yoshi – D'autres sont disponibles sur <http://www.bibmath.net>

1) Factorisations de niveau 4^e.

Rappel de vocabulaire :

On parle d'un produit de facteurs : $a \times b \times c$ est le produit des 3 facteurs a , b et c .

On parle d'une somme de termes : $a + b + c$ est la somme des 3 termes a , b et c .

Ces factorisations sont toutes basées sur la propriété de Distributivité de la Multiplication sur l'Addition (ou la Soustraction) :

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

Elles consistent à écrire une somme et à la multiplier par le *facteur commun*.

Factoriser c'est toujours remplacer une somme de termes par un produit de facteurs.

Cela s'explique très bien avec une situation concrète :

Supposons qu'en début d'année, un professeur (distrait!) doive ramasser une certaine somme auprès de 25 élèves :

→ il commence par ramasser 4 € ; il a donc récupéré 4×25 (€)

→ puis, s'apercevant de sa distraction, présente ses excuses et redemande 3 €, il a cette fois récupéré 3×25 (€)

Il a donc récupéré en tout : $4 \times 25 + 3 \times 25$ et s'il l'avait fait en une seule fois : $(4+3) \times 25$

Factoriser, en 4^e, commence par l'identification du *facteur commun* :

$ab + ac - ad$ est une somme de 3 termes, chaque terme étant lui le résultat d'un produit de 2 facteurs, il est facile de voir que sur les produits de facteurs ab , ac et ad , il y a la présence d'un facteur **commun** aux 3 produits, le facteur **a**.

Toutes les factorisations 4^e se ramènent à deux types, deux structures ou "squelettes" qu'il suffit d'identifier :

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ac} = \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \text{ et son dérivé, obtenu en remplaçant } b \text{ par } a : \mathbf{a}^2 + \mathbf{ac} = \mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$$

Quelques exemples du 1^{er} type

- $3x + 6y$. Il faut **voir** $3x = 3 \times x$ et $6y = 3 \times 2y$. Le facteur commun est **3** : $3x + 6y = 3(x + 2y)$
- $3xy + 6xz$. Il faut **voir** $3xy = 3x \times y$ et $6xz = 3x \times 2z$. Le facteur commun est **3x** : $3xy + 6xz = 3x(y + 2z)$
- $x(2x+3) + x(x-5)$. Les deux groupes de facteurs sont : $x(2x+3)$ et $x(x-5)$. Le facteur commun est donc **x** : $x(2x+3) + x(x-5) = x[(2x+3) + (x-5)] = x(2x+3+x-5) = x(3x-2)$.
S'il y avait eu un – à la place du + entre les deux termes, à la suppression des parenthèses il aurait fallu changer les signes.
- $(x-1)(2x+3) + (x-1)(x-5)$. Les deux groupes de facteurs sont : $(x-1)(2x+3)$ et $(x-1)(x-5)$. **(x-1)** est commun donc :
 $(x-1)[(2x+3) + (x-5)] = (x-1)(2x+3 + x-5) = (x-1)(3x-2)$. Pas de changements majeurs par rapport à la l'exercice précédent....
- $2(x-1)(2x+3) - 3(x-1)(x-5)$. Il y 2 groupes de 3 facteurs $2(x-1)(2x+3)$ et $3(x-1)(x-5)$. Le facteur commun est encore $(x-1)$. On a : $(x-1) \times 2(2x+3)$ et $(x-1) \times 3(x-5)$. Donc :
 $2(x-1)(2x+3) - 3(x-1)(x-5) = (x-1)[2(2x+3) - 3(x-5)] = (x-1)(4x+6 - 3x+15) = (x-1)(x+21)$.

Quelques exemples du 2^e type

- $x^2 + 6x = x(x + 6)$. Il fallait **voir** $x^2 = x \times x$ et $6x = x \times 6$. Le facteur commun était **x**.
- $3x^2 + 6x = 3x(x+2)$. Il fallait **voir** $3x^2 = 3x \times x$ et $6x = 3x \times 2$. Le facteur commun était **3x**.
- $3x^2y + 6xy^2 = 3xy(x + 2y)$. Il fallait **voir** $3x^2y = 3xy \times x$ et $6xy^2 = 3xy \times 2y$. Le facteur commun était **3xy**.
- $(3x-1)^2 + (3x-1)(x-4) = (3x-1)(3x-1) + (3x-1)(x-4) = (3x-1)[(3x-1)+(x-4)] = (3x-1)(3x-1+x-4) = (3x-1)(4x-5)$. Le facteur commun était **(3x-1)**.

Ce qui suit est limite hors-programme

- $2(3x-1)^2 + 3(3x-1)(x-4) = (3x-1) \times 2(3x-1) + (3x-1) \times 3(x-4) = (3x-1)[2(3x-1) + 3(x-4)] = (3x-1)(6x-2 + 3x-12) = (3x-1)(9x-14)$.
- $2(3x-1)^2 - 3(3x-1)(x-4)$ Le même avec un – à la place d'un + :
 $(3x-1) \times 2(3x-1) - (3x-1) \times 3(x-4) = (3x-1)[2(3x-1) - 3(x-4)] = (3x-1)(6x-2 - 3x+12) = (3x-1)(3x+10)$.
Le – a changé les signes lors de la multiplication...

Quelques "méchancetés" (vraiment hors programme) pour finir.

Ici, on "cache" le facteur commun grâce à deux techniques principales : on prend un multiple et on change les signes, séparément puis ensemble.

- $(2x-2)(2x+3) - 3(x-1)(x-4)$. Ce n'est pas une factorisation 3e, donc c'est 4e, donc il y a un facteur commun. Mais je n'en vois pas ! Donc il est caché... Mais où ? Ici : $(2x-2) = 2(x-1)$
Donc $(2x-2)(2x+3) - 3(x-1)(x-4) = 2(x-1)(2x+3) - 3(x-1)(x-4)$
Et on constate que c'est le dernier du premier type qui a déjà été vu au dessus...
- $2(x-1)(2x+3) + 3(1-x)(x-4)$. Ce n'est pas une factorisation 3e, donc c'est 4e, donc il y a un facteur commun. Mais je n'en vois pas ! Donc il est caché... Alors ouvrir l'œil permet de mettre le doigt sur $(x-1)$ et $(1-x)$ qui sont des opposés : $(1-x) = -(x-1)$. D'où :
 $2(x-1)(2x+3) + 3(1-x)(x-4) = 2(x-1)(2x+3) - 3(x-1)(x-4)$
Et on constate que c'est encore le même !
- $(3x-4)^2 - 9x+12$. Là non plus, on ne voit pas de facteur commun ! Pourtant il est bien là... Il faut chercher... D'abord, on doit repérer $3x-4$ et $-9x+12$ pour en déduire que $9 = 3 \times 3$ et $12 = 3 \times 4$.
Donc déjà : $(3x-4)^2 - 9x+12 = (3x-4)^2 - 3 \times 3x + 3 \times 4$. Est-ce bon ? Non, pas encore....
Regardons mieux : si on retire les 3 , on voit $-3x+4$; à comparer avec les $3x-4$, on remarque des opposés : $-3x+4 = -(3x-4)$ et on en déduit qu'il faut d'abord factoriser par -3 :
 $(3x-4)^2 - 9x+12 = (3x-4)^2 - 3(3x-4) = (3x-4)(3x-4-3) = (3x-4)(3x-7)$

2) Factorisations de niveau 3^e.

Niveau 3^e pur. Il faut connaître par cœur les 3 produits remarquables et savoir identifier les 3 structures :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad (\text{P1}) \quad ; \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad (\text{P2}) \quad \text{et} \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad (\text{P3})$$

A noter : il y toujours, au départ, la présence de deux carrés !

Principal écueil : savoir faire la différence entre ab^2 et $(ab)^2 = a^2 b^2$

Quelques exemples.

- $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x+3)^2 \quad (\text{P1}) \quad ; \quad x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x-4)^2 \quad (\text{P2})$
- $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3) \quad (\text{P3})$. Il suffit de trouver qui est a et qui est b...
- $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x+3)^2 \quad (\text{P1})$
- $9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = (3x-4)^2 \quad (\text{P2})$
De (P1) à (P2), seul le signe change, la structure est la même : un carré, le double produit et +un carré
- $25x^2 - 49 = (5x)^2 - 7^2 = (5x+7)(5x-7) \quad (\text{P3})$
- $(5x-2)^2 - 49 = (5x-2)^2 - 7^2 = (5x-2+7)(5x-2-7) = (5x+5)(5x-9) = 5(x+1)(5x-9) \quad (\text{P3})$
- $(5x-2)^2 - (3x-5)^2 = [(5x-2) + (3x-5)][(5x-2) - (3x-5)] = (5x-2+3x-5)(5x-2-3x+5) = (8x-7)(2x+3)$. Là, s'arrête le programme...

Pour (P3) la structure à repérer est : un carré un - et un carré : d'où le nom de "différence de 2 carrés" qui se factorise en un produit d'une somme (+) par une différence (-)...

3. On pourrait ajouter quelques factorisations plus complexes.

- $(5x-2)^2 - 2(5x-2)(3x-5) + (3x-5)^2 = [(5x-2) - (3x-5)]^2 = (5x-2 - 3x+5)^2 = (2x+3)^2 \quad (\text{P2})$
- $4(5x-2)^2 - 9(2x-5)^2 = [2(5x-2)]^2 - [3(2x-5)]^2 = [2(5x-2) + 3(2x-5)][2(5x-2) - 3(2x-5)] = (10x-4 + 6x-15)(10x-4 - 6x+15) = (16x-19)(4x+11) \quad (\text{P3})$

Mais ceci n'est pas accessible à tous : plutôt niveau seconde !

Niveau 4^e et 3^e simultanément. Factorisations "gigognes", donc à tiroirs... (hors programme aussi)

Principe : Une première factorisation (partielle) en laisse apparaître une autre.

- $4x^2 - 12x + 9 - (2x-3)(3x-5) = (2x-3)^2 - (2x-3)(3x-5) = (2x-3)[(2x-3) - (3x-5)] = (2x-3)(2x-3 - 3x+5) = (2x-3)(-x+2)$
- $(x+3)(5x-2)^2 - (x+3)(3x-5)^2 = (x+3)[(5x-2)^2 - (3x-5)^2]$ On voit le facteur commun
 $= (x+3)[(5x-2) + (3x-5)][(5x-2) - (3x-5)]$ Les 2 carrés et le - ont dû alerter
 $= (x+3)(5x-2 + 3x-5)(5x-2 - 3x+5)$ C'était une diff. de 2 carrés
 $= (x+3)(8x-7)(2x+3)$

- $4(x+3)(5x-2)^2 - 9(x+3)(2x-5)^2 = (x+3)[4(5x-2)^2 - 9(2x-5)^2]$ On voit le facteur commun
 $= (x+3) [[2(5x-2)]^2 - [3(2x-5)]^2]$ Les 2 carrés et le $-$ doivent alerter
 $= (x+3) [2(5x-2) + 3(2x-5)] [2(5x-2) - 3(2x-5)]$ C'était une diff. de 2 carrés
 $= (x+3) (10x-4+6x-15)(10x-4 - 6x+15)$ Et on retrouve la Distributivité...
 $= (x+3) (16x-19)(4x+11)$

Il n'y a que quelques techniques que l'on peut ensuite combiner par deux, par trois à la fois. Il importe de bien éduquer sa vision, de bien savoir ses leçons, donc en particulier de bien connaître les règles de manipulation de puissances.

Ainsi :

$4(5x-2)^2$ ne peut pas représenter a^2 , car d'après les règles des puissances de 4^e : $4(5x-2)^2 \neq [4(5x-2)]^2$. Il faut donc préalablement écrire que $4(5x-2)^2 = 2^2(5x-2)^2 = [2(5x-2)]^2$ et on sait alors que $a = 2(5x-2)$.