

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques PC2 (problème) 2016

Présentation du sujet

L'épreuve est un problème divisé en trois parties ; le but des deux premières parties est de donner quatre expressions du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis, dans la troisième partie, d'étudier la vitesse de convergence de ces quatre séries en déterminant un équivalent de leur reste. Ce problème permettait d'utiliser une bonne partie du cours d'analyse ainsi que plusieurs techniques et exemples classiques : série harmonique alternée, intégrales de Wallis, intégrales de Dirichlet, transformation d'Abel, comparaison série-intégrale.

Analyse par parties

Partie 1

Une question de cours, une bonne moitié des candidats, seulement, connaissait le développement en série entière demandé à la question 1., le rayon de convergence étant alors souvent correct. Pour la question 2. il suffisait de penser à utiliser $x = -1/2$ ce qui n'a pas été souvent perçu. Ce résultat ayant d'ailleurs généré des propositions inexactes à la question précédente. Pour le calcul du rayon de convergence de la question 3., les candidats ont pensé, en général, à utiliser la règle de d'Alembert ; pour le calcul de la somme, certains candidats pensent à utiliser soit un télescopage soit à primitiver le développement en série entière de $\ln(1 - x)$, mais avec beaucoup de maladresses dans les calculs, un résultat final correct étant assez rare. A la question 4., on reconnaît souvent une série alternée, mais certains affirment une convergence absolue. La majoration uniforme du module du reste en revanche n'est pas toujours justifiée et on ne sait pas en général l'utiliser pour calculer la limite en 1.

Partie 2

C'est la partie la moins bien traitée. La formule de Stirling est correctement énoncée par un candidat sur deux ; la plupart des candidats cherchent à montrer la convergence de la série de terme général a_n en utilisant la règle de d'Alembert (qui ne marche pas ici) sans penser à utiliser un équivalent. Pour la question 2.a. la plupart des candidats pensent à faire une intégration par parties mais un grand nombre de candidats se trompent sur les primitives et dérivées des fonctions en jeu. A la question 3.a. les candidats ont confondu la convergence simple de la série de fonctions avec la convergence simple de la suite de fonctions. La technique de changement de variable est connue et souvent maîtrisée mais le choix du changement de variable n'était pas toujours judicieux, lorsque celui-ci n'est pas donné explicitement il faut commencer par penser à un changement de variable affine.

Partie 3

Les deux calculs de somme de termes d'une suite géométrique de cette partie (1.a. et 2.a.) ont posé beaucoup de problèmes aux candidats. La transformation d'Abel (question 1.) était ici guidée, certains candidats arrivent au bout du calcul. La notion de négligeabilité (question 1.c.) n'est pas

maîtrisée par les candidats. L'intégration par partie de la question 2.c. a été en général bien traitée mais l'équivalent de la question 2.d a posé plus de problème. A la question 3.b. un nombre satisfaisant de candidats reconnaissent la technique de comparaison série-intégrale. La dernière question du sujet est abordée dans de nombreuses copies, même faibles, les réponses données plus ou moins bien justifiées étant la plupart du temps correctes.

Commentaire général de l'épreuve

L'épreuve a été traitée par 2058 candidats. Les notes sont étalées entre 0 et 20 avec une moyenne de 9.41 et un écart-type de 4.75. Le sujets n'étant pas trop long et les parties étant indépendantes, toutes les parties ont été abordées en revanche peu de questions ont été bien traitées par une majorité des candidats. Ceux ayant des bases solides d'analyse s'en sont bien sortis ce qui a donné de bonnes, voire très bonnes copies. Le bilan est cependant, en moyenne, plus mitigé et parfois décevant avec des faiblesses surprenantes sur des notions basiques d'analyse (par exemple sur les calculs de somme de termes d'une suite géométrique), on a pu ainsi observé un nombre important de notes faibles.

Les correcteurs ont pu parfois constater que, pour traiter certaines questions, les candidats connaissent la méthode ou ont la bonne idée mais sont complètement bloqués dans la mise en oeuvre de celle-ci par en général des difficultés importantes dans les calculs. Les copies étaient dans l'ensemble bien présentées.

Conseils aux futurs candidats

- ne pas négliger certains chapitres du programme ; un candidat ayant, par exemple, fait l'impasse sur les séries, obtient nécessairement une mauvaise note sur une telle épreuve.
- s'entraîner à faire des calculs afin de ne pas être bloqué dans la mise en œuvre d'une méthode ou technique.
- les correcteurs encouragent fortement la bonne présentation ainsi que la qualité de la rédaction des copies, un nombre de points non négligeable leur est consacré. Sont sanctionnées, par exemple, les copies mal présentées (soulignez vos résultats), les copies comportant trop de fautes d'orthographes ou bien celles dont la rédaction est trop elliptique.