

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2019

VENDREDI 19 AVRIL 2019 - 8h00 – 12h00

FILIERE MP - Epreuve n° 3

MATHEMATIQUES B
(X)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

The first part of the paper discusses the importance of the research and the objectives of the study. It then moves on to a literature review, which provides a background on the topic and identifies the gaps in the existing research. The methodology section describes the research design, data collection, and analysis. The results section presents the findings of the study, and the conclusion summarizes the main points and offers suggestions for future research.

The research was conducted in a systematic and rigorous manner, following the principles of good research practice. The data was collected from a representative sample of the population, and the analysis was carried out using appropriate statistical methods. The results of the study are presented in a clear and concise manner, and the conclusions are based on the evidence gathered.

The study has several strengths, including a well-defined research design, a large and diverse sample, and the use of advanced statistical techniques. However, there are also some limitations, such as the cross-sectional nature of the data and the potential for self-report bias. Despite these limitations, the study provides valuable insights into the topic and contributes to the existing knowledge in the field.

The findings of the study have important implications for practice and policy. They suggest that there is a need for further research in this area, and that the results can be used to inform decision-making and the development of interventions. The study also highlights the importance of considering individual differences and the role of context in understanding the phenomenon being studied.

In conclusion, the study provides a comprehensive and detailed examination of the topic, and its findings are of significant interest to researchers and practitioners alike. The study is well-written and easy to read, and it provides a clear and logical presentation of the research. It is a valuable contribution to the field and a model of good research practice.

Notations

Si $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel et I un intervalle de \mathbb{R} , on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'espace vectoriel des fonctions sur I , à valeurs réelles, de classe \mathcal{C}^n , c'est à dire n fois dérivables sur I et dont la n -ième dérivée est continue sur I .

On munit $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1, 1]} |f(t)|.$$

Soit $y \in I$. On dira qu'une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^n au voisinage de y s'il existe un intervalle J ouvert non vide tel que $y \in J$ et $u \in \mathcal{C}^n(I \cap J)$.

Soit $(x, p) \mapsto H(x, p)$ une fonction continue sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Le but de ce problème est d'étudier certaines fonctions u vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in [-1, 1], \quad u(x) + H(x, u'(x)) = 0. \quad (1)$$

Partie I

On suppose dans cette partie qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ vérifiant

$$\begin{cases} u(x) + |u'(x)| = 0 & \text{pour tout } x \in [-1, 1], \\ u(-1) = u(1) = -1. \end{cases} \quad (2)$$

1a. Justifier que l'application $x \mapsto |u'(x)|$ est une fonction de $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ et en déduire que u est de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de tout point $y \in [-1, 1]$ tel que $u'(y) \neq 0$. Calculer l'expression de $u''(y)$ en fonction de $u'(y)$ en de tels points.

1b. Montrer que si $y \in [-1, 1]$ est tel que $u'(y) = 0$, alors u' est dérivable en y et $u''(y) = 0$.

2. En déduire que u est une fonction de $\mathcal{C}^2([-1, 1])$, qu'elle vérifie sur $[-1, 1]$ l'équation différentielle

$$u'' = u$$

et conclure qu'une telle fonction u n'existe pas.

3. Montrer que les fonctions u_0 et u_1 définies par $u_0(x) = -e^{-1+|x|}$ et $u_1(x) = -e^{1-|x|}$ sur $[-1, 1]$ sont des fonctions de $\mathcal{C}^0([-1, 1])$ et vérifient

$$\begin{cases} u(x) + |u'(x)| = 0, & \text{pour tout } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ u(-1) = u(1) = -1. \end{cases}$$

Partie II

Soit $u \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$.

On définit le **sur-différentiel** de u en $x \in]-1, 1[$ comme l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x , avec $\varphi'(x) = p$ et telle que $u - \varphi$ admet un **maximum local** en x . On note cet ensemble $D^+u(x)$.

On définit le **sous-différentiel** de u en $x \in]-1, 1[$ comme l'ensemble des $p \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x , avec $\varphi'(x) = p$ et telle que $u - \varphi$ admet un **minimum local** en x . On note cet ensemble $D^-u(x)$.

4. Soit $x_0 \in]-1, 1[$. Montrer que si u est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x_0 alors

$$D^+u(x_0) = D^-u(x_0) = \{u'(x_0)\}.$$

5. Soit $x_0 \in]-1, 1[$. On suppose que $D^+u(x_0)$ et $D^-u(x_0)$ sont non vides.

5a. Prouver qu'il existe φ_1, φ_2 de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x_0 et $\delta > 0$ tels que

$$u(x_0) = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$$

et pour tout $|x - x_0| < \delta$,

$$\varphi_1(x) \leq u(x) \leq \varphi_2(x).$$

5b. En déduire que u est dérivable en x_0 . Déterminer $D^+u(x_0)$ et $D^-u(x_0)$.

6a. Soit $x_0 \in]-1, 1[$. Soit $0 < r < \min(|1 - x_0|, |1 + x_0|)$. En considérant la fonction définie par $\varphi_{x_0, r}(x) = \frac{1}{r^2 - |x - x_0|^2}$ sur l'intervalle ouvert $I_{x_0}(r) =]x_0 - r, x_0 + r[$, montrer qu'il existe $y \in I_{x_0}(r)$ tel que $D^+u(y) \neq \emptyset$.

6b. Démontrer que l'ensemble $\{y \in]-1, 1[, D^+u(y) \neq \emptyset\}$ est dense dans $] -1, 1[$.

7a. Soit $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $D^+u(x_0) \neq \emptyset$. Soit $p \in D^+u(x_0)$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [-1, 1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \leq 0. \quad (3)$$

Dans les sous-questions **7b** à **7e**, on considère $x_0 \in]-1, 1[$ et $p \in \mathbb{R}$ satisfaisant (3). Le but est de montrer qu'alors réciproquement $p \in D^+u(x_0)$.

7b. On pose, pour $r > 0$,

$$\varphi(r) = \max \left\{ 0, \sup_{\substack{y \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap [-1, 1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \right\}$$

et $\varphi(0) = 0$. Justifier que, pour tout $r > 0$, $\varphi(r)$ est un nombre réel bien défini, puis que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$u(x) \leq u(x_0) + p(x - x_0) + \varphi(|x - x_0|)|x - x_0|.$$

7c. Montrer que la fonction ρ définie sur $[0, +\infty[$ par $\rho(r) = \int_0^r \varphi(s) ds$ appartient à $\mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ et vérifie

$$\rho(0) = \rho'(0) = 0.$$

7d. Prouver que

$$\forall r \geq 0, \quad \rho(2r) \geq \varphi(r)r.$$

7e. Conclure que $p \in D^+u(x_0)$ et que, pour tout $x_0 \in]-1, 1[$,

$$D^+u(x_0) = \left\{ p \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [-1, 1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \leq 0 \right\}.$$

On peut montrer de même (mais on ne demande pas de le vérifier) que pour tout $x_0 \in]-1, 1[$,

$$D^-u(x_0) = \left\{ p \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf_{\substack{y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [-1, 1] \\ y \neq x_0}} \frac{u(y) - u(x_0) - p(y - x_0)}{|y - x_0|} \geq 0 \right\}.$$

8. Soit $x_0 \in]-1, 1[$. Montrer que le résultat de la question 4 est toujours valable en supposant uniquement u dérivable en x_0 .

9. Soit $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $D^+u(x_0) \neq \emptyset$. Démontrer que $D^+u(x_0)$ est un intervalle fermé.

10. On suppose dans cette question que u est **concave** sur $[-1, 1]$. Soit $x_0 \in]-1, 1[$.

10a. Soient $y_1, y_2 \in [-1, 1] \setminus \{x_0\}$ avec $y_1 < y_2$. Prouver que

$$\frac{u(y_1) - u(x_0)}{y_1 - x_0} \geq \frac{u(y_2) - u(x_0)}{y_2 - x_0}.$$

10b. Montrer que

$$\lim_{y \rightarrow x_0^-} \frac{u(y) - u(x_0)}{y - x_0} =: \ell^- \text{ et } \lim_{y \rightarrow x_0^+} \frac{u(y) - u(x_0)}{y - x_0} =: \ell^+$$

sont bien définies et que $D^+u(x_0) = [\ell^+, \ell^-]$.

10c. Démontrer que

$$D^+u(x_0) = \left\{ p \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1, 1], u(x) \leq u(x_0) + p(x - x_0) \right\}.$$

En déduire que u admet un maximum en x_0 si et seulement si $0 \in D^+u(x_0)$.

Partie III

Soit $(x, p) \mapsto H(x, p)$ une fonction continue sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe une fonction continue croissante $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, vérifiant $\omega(0) = 0$, telle que, pour tous $x, y \in [-1, 1]$, et pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$|H(x, p) - H(y, p)| \leq \omega(|x - y|(1 + |p|)). \quad (4)$$

On dit que $u \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$ est une **sur-solution** de (1) si pour tout $x \in]-1, 1[$, pour tout $p \in D^-u(x)$,

$$u(x) + H(x, p) \geq 0.$$

On dit que $u \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$ est une **sous-solution** de (1) si pour tout $x \in]-1, 1[$, pour tout $p \in D^+u(x)$,

$$u(x) + H(x, p) \leq 0.$$

11a. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1([-1, 1])$ vérifie

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad u(x) + H(x, u'(x)) = 0,$$

alors u est sur-solution et sous-solution de (1).

11b. Montrer que si u est à la fois sur-solution et sous-solution de (1), alors en tout point $x \in]-1, 1[$ au voisinage duquel u est de classe \mathcal{C}^1 , on a

$$u(x) + H(x, u'(x)) = 0.$$

On souhaite démontrer que si u est une sous-solution et v une sur-solution de (1) telles que

$$u(y) \leq v(y) \quad \text{pour } y \in \{-1, 1\},$$

alors

$$u \leq v \quad \text{sur } [-1, 1].$$

Dans les questions **12** à **15**, on suppose par l'absurde qu'il existe $y_0 \in [-1, 1]$ pour lequel $u(y_0) > v(y_0)$.

12. Montrer que la fonction $u - v$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$ en un point $x_0 \in]-1, 1[$ et $M := \max_{x \in [-1, 1]}(u(x) - v(x)) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [-1, 1]^2$ vérifiant

$$|x - y| \leq \sqrt{2(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)\eta},$$

on a

$$|u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)| < M/2$$

et

$$\omega(|x - y| + 2|v(x) - v(y)|) < M/2,$$

où ω est la fonction intervenant en (4).

Pour un paramètre η obtenu grâce à la question précédente, on considère la fonction $\Phi_\eta : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\Phi_\eta(x, y) = u(x) - v(y) - \frac{|x - y|^2}{2\eta}.$$

13. Démontrer que Φ atteint son maximum sur $[-1, 1]^2$ en un point $(x_\eta, y_\eta) \in [-1, 1]^2$ tel que $\Phi_\eta(x_\eta, y_\eta) \geq M$.

14a. Montrer que

$$|x_\eta - y_\eta| \leq \sqrt{2(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty)\eta}.$$

14b. En déduire que $|x_\eta| \neq 1$ et $|y_\eta| \neq 1$.

14c. Conclure que

$$\frac{x_\eta - y_\eta}{\eta} \in D^+u(x_\eta) \cap D^-v(y_\eta).$$

15. Prouver que

$$u(x_\eta) - v(y_\eta) \leq \omega(|x_\eta - y_\eta| + 2|v(x_\eta) - v(y_\eta)|)$$

et obtenir une contradiction. Conclure.

Partie IV

16a. Calculer le sur-différentiel et le sous-différentiel de la fonction u_0 de la question **3** pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$.

16b. Montrer que

$$D^+u_0(0) = [-e^{-1}, e^{-1}] \text{ et } D^-u_0(0) = \emptyset.$$

16c. Vérifier que u_0 est sur-solution et sous-solution de (1) pour $H(x, p) = |p|$.

16d. Qu'en est-il de u_1 ?

16e. En déduire que u_0 est l'unique fonction continue vérifiant $u_0(-1) = u_0(1) = -1$ et qui soit sur-solution et sous-solution de (1) pour $H(x, p) = |p|$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On pose

$$\lambda_\varepsilon^\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

et on définit la fonction $u_\varepsilon : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$u_\varepsilon(x) = \frac{-\lambda_\varepsilon^- e^{\lambda_\varepsilon^+ |x|} + \lambda_\varepsilon^+ e^{\lambda_\varepsilon^- |x|}}{\lambda_\varepsilon^- e^{\lambda_\varepsilon^+} - \lambda_\varepsilon^+ e^{\lambda_\varepsilon^-}}.$$

17. Montrer que u_ε est de classe \mathcal{C}^2 sur $[-1, 1]$ et vérifie

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) + |u'_\varepsilon(x)| - \varepsilon u''_\varepsilon(x) = 0 & \text{pour tout } x \in [-1, 1], \\ u_\varepsilon(-1) = u_\varepsilon(1) = -1. \end{cases} \quad (5)$$

18a. Montrer que u_ε est l'unique solution de classe \mathcal{C}^2 sur $[-1, 1]$ à (5).

18b. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $]0, 1[$ tendant vers 0. Prouver que $(u_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ vers une fonction que l'on déterminera.