

Q14 - Pour montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0$, beaucoup de candidats oublient de mentionner la continuité de la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$, en plus de sa positivité. Davantage encore oublient de justifier que si f est nulle sur $]0, +\infty[$, elle l'est sur $[0, +\infty[$ par continuité. Signalons enfin un curieux argument basé sur le fait « qu'un polynôme (lequel ?) ayant une infinité de racines est nul ».

Q15 - Mêmes remarques qu'à la question **Q13**.

Q16 - D'assez nombreux candidats ont bien traité cette question, en effectuant n intégrations par parties successives, et en notant que les termes tout-intégrés étaient nuls grâce à la question précédente.

Q17 - Cette question a donné lieu à d'assez nombreuses escroqueries pour faire surgir miraculeusement la factorielle de n . Pour la traiter correctement, il fallait disposer du degré et du coefficient dominant du polynôme ψ_n .

Q18 - Cette question délicate a rarement été abordée avec succès.

Q19 - Beaucoup de candidats concluent abusivement en conjecturant (ce qui est vrai !) que la somme de la question précédente vaut $\|f_k\|_\alpha^2$.

Les questions suivantes ont rarement été abordées.

2.6 Mathématiques 1 - filière PSI

2.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet propose la preuve du théorème suivant.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . Soit V un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des endomorphismes de E . On suppose que tous les éléments de V sont nilpotents et que V est de dimension $n(n-1)/2$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de tous les endomorphismes de V est triangulaire supérieure stricte.

Ce problème, très long, mêle algèbre linéaire, réduction et algèbre euclidienne (afin d'éviter la dualité). Le niveau conceptuel de l'épreuve est élevé. La présence de nombreuses questions proches du cours a cependant permis une bonne évaluation des candidats.

Les résultats, théorèmes et techniques du programme ne sont pas toujours maîtrisés ; on ne saurait trop insister sur l'intérêt primordial qu'il y a à travailler le cours.

Les correcteurs ont été surpris par le manque de rigueur, ce qui est particulièrement flagrant en algèbre, ainsi que de soin dans la présentation. Les démonstrations, qualifiées d'évidentes, sont laissées au lecteur ; il n'est pas explicitement fait référence aux questions utilisées ; les quantificateurs sont utilisés de façon inadéquate ; les résultats et points importants sont rarement soulignés ou encadrés ; les copies sont trop souvent sales et pleines de ratures.

Nous conseillons vivement aux futurs candidats de tenir compte de ces diverses remarques.

2.6.2 Analyse détaillée des questions

Q1 - Beaucoup de variantes sont possibles et la question est souvent assez correctement traitée.

Q2 - La preuve du fait que \mathcal{N}_B soit un espace vectoriel est parfois incomplète, la dimension demande de faire référence à l'isomorphisme entre le sous-espace et l'espace des matrices triangulaires supérieures strictes. Pour le dernier point, il est nécessaire de montrer d'une part que l'endomorphisme est nilpotent, d'autre part que son indice est égal à n .

Q3 - La liberté de la première famille est presque toujours bien traitée mais on voit des arguments du type : les vecteurs sont tous non nuls donc la famille est libre, les vecteurs sont positifs et la somme est nulle donc ils sont tous nuls...

La preuve de la liberté de la deuxième famille, nettement plus difficile, est quant à elle rarement correcte. Rappelons que la « concaténation » de deux familles libres n'est en général pas libre.

Q4 - Pour l'inégalité, il faut ici faire appel à la question 3, et ne pas affirmer le résultat. Le deuxième point est très délicat et n'a été démontré que dans une poignée de copies.

Q5 - Pour la dimension de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, nous avons eu des résultats folkloriques : $(n - 1)$, $n(n - 1)/2$, $n(1 - n)$... Le théorème du rang est même souvent invoqué. Pour montrer l'isomorphisme, il faut montrer que l'application est linéaire par rapport à la bonne variable, qu'elle est injective avec un argument d'orthogonalité et enfin qu'il y a égalité des dimensions entre l'espace de départ et l'espace d'arrivée. Nous avons sanctionné des arguments du type : en dimension finie, une application injective est bijective. En revanche, nous avons accepté les preuves faisant explicitement référence à la représentation des formes linéaires.

Q6 - Il y a ici beaucoup de confusion entre les objets, qui commencent à devenir vraiment abstraits. Le caractère bijectif est très rarement vu.

Q7 - La preuve demande de l'initiative, soit en ayant recours à une base orthonormée, soit en choisissant une base adaptée au problème. Elle a été traitée, avec plus ou moins de justesse, par un quart des candidats.

Q8 - La formule du binôme, qui ne s'applique pas, est utilisée par une très grande majorité de candidats. Les correcteurs n'ont accordé aucun point à ceux qui l'utilisaient, que ce soit dans cette question ou dans les suivantes. Rappelons qu'il est toujours préférable de faire confiance à l'énoncé plutôt qu'à soi-même, surtout lorsqu'on trouve un résultat qui simplifie tout.

Q9 - Il faut ici préciser que \mathcal{V} est un sous-espace vectoriel. Dans de nombreuses copies, il est dit que la somme d'endomorphismes nilpotents est nilpotente, ce qui est faux en général.

Q10 - Les réponses sont incomplètes et utilisent de nouveau la formule du binôme. La question 1 et l'argument d'unicité pour les polynômes sont rarement donnés.

Q11 - Pour traiter cette question et les suivantes, il faut un bon degré d'abstraction. Elle est traitée, au moins partiellement, dans quelques bonnes copies.

Q12 - Il faut ici s'approprier les notations. C'est rarement correct.

Q13 - C'est une question presque toujours abordée, avec souvent des confusions sur la définition des espaces.

Q14 - Il suffit ici d'appliquer deux fois le théorème du rang, ce qui est fait par une petite partie des candidats.

La suite du problème est rarement abordée, exceptée le début de la question 17, où l'argument de valeur propre est parfois trouvé.