

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2018

FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES B

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Samedi 5 mai 2018, 9h00 – 13h00

Pour des raisons qui apparaîtront dans la Troisième Partie, on utilise deux entiers naturels distincts n (minuscule) et N (majuscule). Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé.

On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n . Le sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ formé des polynômes pairs (c'est-à-dire vérifiant $P(-X) = P(X)$) est noté Π_n , et celui des polynômes impairs (c'est-à-dire vérifiant $P(-X) = -P(X)$) est noté J_n .

On définit l'ensemble A_N formé des $P \in \mathbb{R}_N[X]$, tels que $P(-1) = P(1) = 1$, qui satisfont de plus $P(x) \geq 0$ pour tout x dans l'intervalle $[-1, 1]$. On définit sur $\mathbb{R}_N[X]$ une forme linéaire L par

$$L(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx.$$

L'objet du problème est l'étude de sa borne inférieure a_N sur le sous-ensemble A_N :

$$a_N = \inf\{L(P) \mid P \in A_N\}.$$

Questions préliminaires

1. (a) Vérifier que A_N est une partie convexe de $\mathbb{R}_N[X]$.
- (b) Montrer que l'expression

$$\|P\|_1 = \int_{-1}^1 |P(x)| dx$$

définit une norme sur $\mathbb{R}_N[X]$.

- (c) Montrer que A_N est fermé dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}_N[X], \|\cdot\|_1)$.
2. (a) Montrer que la borne inférieure de L sur A_N est atteinte.

Dans la suite, on notera B_N l'ensemble des $P \in A_N$ tels que $L(P) = a_N$.

- (b) Montrer que B_N est une partie convexe compacte.
- (c) Vérifier que B_N contient un polynôme pair.

Première Partie

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx,$$

et de la norme associée

$$\|P\|_2 = \sqrt{\langle P, P \rangle}$$

(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire et d'une norme).

Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$P_j(X) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dX^j} [(X^2 - 1)^j].$$

Par convention, $P_0 = 1$.

3. (a) Quel est le degré de P_j ?
(b) Montrer que P_j est un polynôme pair ou impair, selon la valeur de j .
(c) Montrer que $P_j(1) = 1$ et $P_j(-1) = (-1)^j$.
4. Au moyen de l'intégration par parties, montrer que la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ est orthogonale dans $\mathbb{R}_n[X]$.
5. On note
$$g_j = \int_{-1}^1 P_j(x)^2 dx, \quad I_j = \int_{-1}^1 (1-x^2)^j dx.$$
- (a) Établir une relation entre g_j et I_j .
(b) Trouver une relation entre I_j et $I_{j-1} - I_j$, et en déduire une relation de récurrence pour la suite $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$.
(c) En déduire la valeur de I_j , puis celle de g_j .
6. (a) Montrer que la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) En déduire que la famille $(P_{2j})_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}}$ est une base de Π_n , tandis que la famille $(P_{2j+1})_{0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}}$ est une base de J_n .

Deuxième Partie

On choisit un polynôme pair dans B_N (voir la question 2.c), et on le note R_N .

7. Montrer qu'il existe des nombres entiers $r, s, t \geq 0$, des nombres réels c_1, \dots, c_r différents de ± 1 , des réels non nuls ρ_1, \dots, ρ_s et des nombres complexes w_1, \dots, w_t qui ne sont ni réels ni imaginaires purs, tels que

$$R_N(X) = \prod_{j=1}^r \frac{X^2 - c_j^2}{1 - c_j^2} \prod_{k=1}^s \frac{X^2 + \rho_k^2}{1 + \rho_k^2} \prod_{\ell=1}^t \frac{X^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \cdot \frac{X^2 - \overline{w_\ell}^2}{1 - \overline{w_\ell}^2}.$$

8. On décide de remplacer tous les ρ_k par des zéros. On remplace donc les facteurs correspondants de R_N ,

$$\frac{X^2 + \rho_k^2}{1 + \rho_k^2},$$

par des facteurs X^2 . On obtient ainsi un nouveau polynôme S_N de même degré que R_N .

Montrer que $0 \leq S_N(x) \leq R_N(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, puis que $S_N \in B_N$.

9. De même, dans la liste des c_j , on décide de remplacer ceux qui n'appartiennent pas à $[-1, 1]$ par des zéros. On remplace donc les facteurs correspondants de S_N ,

$$\frac{X^2 - c_j^2}{1 - c_j^2},$$

par des facteurs X^2 . On obtient ainsi un nouveau polynôme T_N .

Montrer que $0 \leq T_N(x) \leq S_N(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, puis que $T_N \in B_N$.

10. Soit $w \in \mathbb{C}$ un nombre qui n'est ni réel ni imaginaire pur.

(a) Montrer que l'équation

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \left| \frac{w-1}{w+1} \right|$$

définit un cercle dans le plan complexe, qui passe par w . Vérifier que l'intervalle $]-1, 1[$ coupe ce cercle en un point unique ; on notera y ce point. On exprimera y en fonction du nombre

$$\lambda = \left| \frac{w-1}{w+1} \right|.$$

(b) Montrer l'inégalité

$$\left| \frac{1-w}{1-y} \right| > 1.$$

(c) Montrer que l'équation

$$\left| \frac{z-w}{z-y} \right| = \left| \frac{1-w}{1-y} \right|$$

définit un cercle dans le plan complexe, qui passe par 1 et par -1 .

En déduire que, pour tout $x \in [-1, 1] \setminus \{y\}$, on a

$$\left| \frac{w-x}{y-x} \right| \geq \left| \frac{w-1}{y-1} \right| = \left| \frac{w+1}{y+1} \right|.$$

11. Conclure que R_N a toutes ses racines dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Troisième Partie

On note n la partie entière de $\frac{N}{2}$. On poursuit l'étude du polynôme R_N .

12. Montrer que $\deg R_N = 2n$.

13. Montrer que R_N est le carré d'un polynôme : $R_N(X) = U_N(X)^2$ où $U_N(1) = 1$ et $U_N(-1) = \pm 1$. Que peut-on dire de la parité de U_N ?

14. On suppose dans cette question que U_N est pair ; on a donc $U_N \in \Pi_n$. Dans Π_n , l'équation $P(1) = 1$ définit un sous-espace affine noté H_n .

(a) Montrer que

$$\|U_N\|_2 = \min\{\|P\|_2 \mid P \in H_n\}.$$

(b) En déduire qu'il existe un nombre réel μ tel que pour tout entier $0 \leq j \leq \frac{n}{2}$, on a $\langle U_N, P_{2j} \rangle = \mu$.

(On pourra considérer des polynômes $P \in H_n$ de la forme $U_N + t(P_{2j} - P_{2k})$ avec $t \in \mathbb{R}$.)

(c) Exprimer U_N dans la base des P_{2j} . En déduire que

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{g_{2j}}.$$

(d) Établir dans ce cas la formule

$$a_N = \left(\sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{g_{2j}} \right)^{-1}.$$

15. On suppose maintenant que U_N est impair. Exprimer encore a_N en fonction des g_ℓ .

16. Discuter, en fonction de la parité de n , la valeur de a_N . On en donnera la valeur explicite.

17. Donner la formule explicite de R_N , en fonction des polynômes P_j .