

Épreuve de mathématiques II. (PC- e3a 2017)

1. Présentation

2150 candidats dont 1965 ont composé, avec une moyenne de 9,23 et un écart-type de 4,41.

L'épreuve concernait essentiellement à étudier des intégrales et un opérateur intégral avec quelques questions d'algèbre linéaire ou sur les équations différentielles. Le problème comportait nombre de questions avec des difficultés variées.

2. Commentaires

Le niveau d'ensemble constaté est plutôt moyen voir faible, avec très peu de très bonnes copies, la plupart des candidats cherchant à répondre aux questions tant bien que mal et pas toujours avec les méthodes attendues. On s'inquiète aussi d'un nombre important de candidats à qui semblent manquer des bases nécessaires et en empilent leurs réponses sans toujours donner le sentiment d'une compréhension des choses écrites.

Un nombre donc trop important de copies plutôt faibles et relativement courtes, ce qui conduit à un certain étonnement compte-tenu des questions très classiques et du large spectre du programme balayé par le sujet. Sur la forme, présentation et la rédaction sont globalement convenables et la plupart des candidats connaissent la marche à suivre, mais il reste trop de copies mal présentées, mal numérotées, avec une présentation confuse et en particulier sans référence au numéros des questions. Insistons sur le fait qu'une copie est un texte destiné à convaincre,. Que pour cela il faut introduire la question, la démarche mise en oeuvre et les arguments et des raisonnements précis avec la concentration nécessaire pour faire des calculs corrects.

Beaucoup de fautes en analyse : ainsi sur la convergence des intégrales ("la fonction tend vers 0 en $+\infty$ donc l'intégrale existe"), la confusion entre intégrale dépendant d'un paramètre et dépendant de ses bornes avec la notion fondamentale de primitive mal appréhendée ; la notion de fonction développable en série entière ("la fonction est bijective donc développable", "elle est continue donc développable"), la manipulation d'intégrales divergentes et les intégrations par parties vraiment malhonnêtes (combien ont écrit $\ln(0)!$), la notion de convergence uniforme Des erreurs sur la suite (I_n) , censée être géométrique et l'intégrale $R(x)$, "majorée par son premier terme négligé" pour justifier que $R(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

L'algèbre linéaire a été moins maltraitée : beaucoup d'efforts ont été déployés pour prouver le caractère "endomorphisme" dans II et la bonne matrice a souvent été trouvée. Les équations différentielles aussi ont eu plus de succès : la formule donnant les solutions d'une équation homogène, la méthode de variation de la constante semblent en général assimilées.

3) Analyse des résultats

Partie I

1. (a) Quelques erreurs sur la détermination d'une primitive de $s \mapsto e^{-st}$ pour $t \neq 0$.
(b) La continuité en 0 est effectuée, mais pas de phrase pour l'évoquer ailleurs. Il est curieux qu'après avoir explicité f , trop de candidats utilisent le théorème de continuité sous le signe intégrale avec la majoration fausse :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall s \in [0, 1], \quad e^{-st} \leq e^{-s}.$$

Peu voient d'ailleurs que sur un segment, majorer par une constante suffit. La bijection est rarement bien justifiée, certains étudient le noyau ou donnent des explications fantaisistes. La monotonie est rarement expliquée avec l'intégrale directement, ou quitte à dériver sous le signe intégral...

- (c) Question généralement réussie car le développement en série entière de \exp est connu, mais ensuite cela peut se gâter. Des erreurs de « mélange » entre variables (la fonction obtenue dépend parfois de t) et peu de justification pour intégrer la série entière.
(d) Question généralement réussie lorsque la précédente l'est (quelques tentatives de bluff néanmoins pour compenser des décalages d'indices aux questions précédentes).
2. (a) Parfois très long, pour un résultat qui dépend de t et x ...
(a) Souvent correct.
(b) Parfois très bien faite mais les copies moyennes utilisent des termes du type $\int_0^1 dt/t$. Le caractère C^1 de f est souvent justifié avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètres qui donne, dans quelques copies, une dérivée nulle. La présence du signe moins devant la dérivée a été régulièrement absent et ce signe réapparaît au cours du calcul pour compenser la fin de la question. Beaucoup d'intégrales divergentes apparaissent, avec notamment des " $\ln(0)$ ". La continuité de la fonction sous le signe intégrale est peu évoquée et beaucoup de copies faibles justifient l'existence en mentionnant que $t \mapsto e^{-t}/t$ tend vers 0 en $+\infty$. La classe C^1 et la conclusion correcte est assez rare.
4. (a) La question a été peu abordée et la majoration très rarement. Énormément de tours de passe passe pour l'inégalité de droite.

- (b) On prouve en général la convergence simple, d'autres fois on rappelle de la définition de la convergence, mais on donne une majoration dépendant de x ..., et l'idée de majorer par $1/n$ finalement très rare.
- (c) Question peu abordée.
- 5. (a) De façon analogue à la question 3)b), l'intégrale a souvent faussement été séparée en deux par linéarité et le lien avec S a été peu remarqué.
- 6. (a) La limite a été généralement démontrée mais l'inégalité très peu. Majoration directe par e^{-x}/x en utilisant la décroissance de e^{-t}/t
- (b) Question peu abordée. La plupart cherchent à calculer $R(x)$. Peu ont eu l'idée d'intégrer par parties.

Partie II

- 1. (a) Question très abordée et plutôt réussie même si, à nouveau, un nombre non négligeable de copies justifie l'existence en mentionnant juste la continuité de la fonction intégrée ou le fait qu'elle tende vers 0 en $+\infty$.
- (b) Question plutôt réussie mais beaucoup de candidats oublient de montrer que $I_n = n!$.
- 2. (a) Le fait que T soit un endomorphisme est plutôt correctement écrit mais la matrice pas toujours correcte trouvée (présence notamment de variables dans la matrice voire de fonctions), ou parfois transposée. L'argument pour la non-diagonalisabilité est en général vu. Certains candidats indiquent que M est diagonalisable car elle possède une valeur propre triple ou parce qu'elle est triangulaire supérieure.
- 3. (a) Arriver à justifier que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ est plutôt rare.
- (b) La formule de Taylor est rarement écrite correctement (beaucoup de formules de Taylor-Young notamment).
- 4. (a) La méthode est connue mais la détermination de la solution particulière a souvent été mal faite (avec du bluff sur le signe moins). Pour l'équation complète, on intègre souvent de x à l'infini sans justifier. Le reste de cette partie a été peu abordé.

Partie III

- 1. (a) Question très abordée mais où les calculs n'ont abouti que dans la moitié des copies. Beaucoup de relations dépendent de x à la fin des calculs. N'aboutit pas souvent, mais souvent tenté.
- (b) Cette question est peu abordée.
- 2. (a) Cette question est généralement bien écrite même si l'équivalence n'est pas toujours clairement mentionnée.
- (b) Souvent tenté, parfois réussi.

L'enchaînement b à e. rarement mené au bout.. Par exemple $\exp(-2x - \ln(x)) = (\exp(-2x))/x$ est rare. La fin du problème est peu abordée.

4. Conseils aux futurs candidats. Conclusion.

La variété des questions a permis un bon étalement des notes. Dans une telle épreuve comportant beaucoup de questions il y a souvent moyen de donner des réponses brèves et il convient de réfléchir aux méthodes à utiliser avant de partir dans des calculs compliqués, ce qui fait partie des compétences évaluées.

Nous ne pouvons que conseiller aux candidats de s'efforcer de bien faire, en rédigeant avec précision ce qui est abordé. Une bonne connaissance du cours est indispensable ainsi que la pratique d'exercices d'entraînement pour acquérir un bon savoir-faire. Une lecture attentive et minutieuse du sujet permet d'éviter de nombreuses erreurs et incohérences. Les correcteurs attendent des réponses argumentées, précises. Les références aux résultats du cours doivent être bien rédigées et sans abréviations. Les correcteurs apprécieront les copies propres et bien écrites. On aimerait que les candidats fassent preuve de davantage de rigueur dans les preuves demandées.

Nous constatons des différences sensibles entre les candidats, que les calculs posent problème ainsi et que la précision des explications n'est pas un impératif de tous. Quelques bonnes copies, bien présentées et de bon niveau, mais trop rares.