



## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

### MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

#### RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

## EXERCICE I

$X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  d'espérance finie.

- Q1.** Exprimer, pour  $k$  non nul,  $P(X = k)$  en fonction de  $P(X > k - 1)$  et de  $P(X > k)$ .

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$ .

Démontrer le résultat de cours :  $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ .

- Q2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On effectue, de façon équiprobable,  $p$  tirages successifs avec remise et on note  $X$  le plus grand nombre obtenu. Calculer, pour tout entier naturel  $k$ ,  $P(X \leq k)$ , puis donner la loi de  $X$ .

- Q3.** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$ , puis en utilisant la **Q1.**, déterminer un équivalent pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$  de  $E(X)$ .

## EXERCICE II

On considère les équations différentielles :

$$(E): x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$$

$$(H): x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$$

On note  $I = ]0, +\infty[$ ,  $S_I(E)$  l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$  sur  $I$  et  $S_I(H)$  l'ensemble des solutions de l'équation  $(H)$  sur  $I$ .

- Q4.** Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel  $S_I(H)$ .

- Q5.** Démontrer qu'il existe une unique solution  $f$  de  $(E)$  sur  $I$  développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

Vérifier que pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = \frac{\cosh x - 1}{x^2}$ .

- Q6.** On note pour  $x \in I$ ,  $g(x) = \frac{-1}{x^2}$  et  $h(x) = \frac{\sinh x}{x^2}$ .

On admet dans cette question que  $g \in S_I(E)$  et  $h \in S_I(H)$ .

Donner, sans calculs, l'ensemble  $S_I(E)$ .

- Q7.** Quelle est la dimension de l'espace vectoriel  $S_{\mathbb{R}}(H)$  (solutions de  $(H)$  sur  $\mathbb{R}$ ) ?

# PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

**Q8.** Question préliminaire

Si on admet que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , que vaut la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  ?

## Partie I

**Q9.** On note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ .

Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$ , puis déterminer une relation entre  $W_{n+2}$  et  $W_n$ .

En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , que  $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ .

**Q10.** Déterminer sur l'intervalle  $]-1, 1[$  le développement en série entière des fonctions  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  et  $x \mapsto \text{Arcsin } x$ .

**Q11.** En déduire que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$ .

**Q12.** Justifier que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx$ .

**Q13.** En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

## Partie II

**Q14.** Donner sur l'intervalle  $]-1, 1[$  le développement en série entière de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ , puis calculer l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ .

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

**Q15.** On pose pour  $x \in [0, +\infty[$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$ .

Démontrer que la fonction  $f$  est bien définie et est continue sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

**Q16.** Établir que cette fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intervalle  $]0, 1]$  et exprimer  $f'(x)$  comme une intégrale.

**Q17.** Réduire au même dénominateur l'expression  $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2}$  et en déduire que pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ .

**Q18.** Calculer  $f(1)$ , puis en déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**FIN**