

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Le problème établit plusieurs propriétés des endomorphismes cycliques et des matrices compagnons pour obtenir le théorème de décomposition de Frobenius. Il permet de couvrir une grande partie du programme d'algèbre linéaire et, dans une moindre mesure, bilinéaire.

La partie I est formée de questions assez classiques sur le lien entre la réduction d'une matrice et celle de sa transposée. On utilise ensuite ceci pour étudier la diagonalisabilité d'une matrice compagnon. Cette première partie se termine par une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. Formée de questions proches du cours, elle représente environ un quart du barème.

La partie II caractérise les endomorphismes cycliques nilpotents puis démontre que, lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , si un endomorphisme  $f$  est tel que  $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$  est libre, alors  $f$  est cyclique. Pour cela, le sujet introduit les sous-espaces caractéristiques. Cette partie correspond également à environ un quart des points du sujet.

La partie III établit des propriétés sur le commutant d'un endomorphisme cyclique puis conduit au théorème de décomposition de Frobenius. On retrouve dans cette partie les questions les plus délicates du sujet et elle représente plus d'un tiers des points.

Enfin, dans la partie IV, un lien est effectué avec l'algèbre bilinéaire en introduisant la notion d'endomorphismes orthocycliques.

## Analyse globale des résultats

La longueur raisonnable du sujet a permis aux candidats de parcourir une partie importante du problème. Dans quelques excellentes copies, quasiment toutes les questions (y compris les plus difficiles) sont traitées avec une très bonne rédaction.

Malheureusement, d'autres candidats survolent un grand nombre de questions sans soigner la qualité des arguments.

Sur la forme, l'ensemble des correcteurs regrettent une dégradation de la présentation des copies par rapport à l'an dernier, en particulier au niveau de l'écriture. Nous rappelons également qu'il est préférable de traiter les questions dans l'ordre du sujet et qu'il faut éviter de recourir à des abréviations (surtout lorsqu'elles sont peu connues). Heureusement, nous avons par ailleurs apprécié de corriger des copies bien écrites où les résultats sont correctement mis en valeur.

Nous y reviendrons ci-dessous mais nous avons également noté un gros manque de précision et de rigueur dans beaucoup de copies :

- des affirmations sans justification ;
- invocation d'un résultat sans citation des hypothèses ;
- confusion avec des hypothèses de questions précédentes ;
- confusion entre une équivalence et des mots de liaison comme « donc ».

Mathématiquement, nous avons relevé beaucoup de confusions dans la manipulation des polynômes d'endomorphismes, par exemple de nombreux  $f(x)^k$ , des produits de vecteurs au lieu de  $(PQ)(f)(x) = (P(f) \circ Q(f))(x)$  et même des relations de divisibilité entre vecteurs. On trouve également des confusions entre famille libre et famille génératrice et même entre différentes significations d'entiers (dimension, taille, degré, cardinal, rang).

Dans quelques copies, nous avons noté des confusions sur la notion d'endomorphismes cycliques ; les candidats pensant que  $f$  cyclique signifie  $f^n = \text{Id}$  ou même  $f^n = 0$ .

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

### I Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

La partie I a été abordée en intégralité par la plupart des candidats.

Pour **Q1**, certains ont tenté une approche infructueuse par les vecteurs propres pensant que  $X^\top M^\top = \lambda X^\top$  avec  $X$  non nulle permet de conclure.

Dans **Q2**, l'équivalence n'est pas toujours présente même si la caractérisation de la diagonalisabilité est en général correcte. Quelques affirmations fausses sur l'égalité des sous espaces propres.

Les questions **Q3** et **Q4**, calculatoires, n'ont pas reçu la rigueur nécessaire. Dans **Q3**, le résultat semble connu donc il apparaît parfois mystérieusement après des erreurs dans les développements de déterminants. Nous précisons qu'une affirmation du type « après développement par rapport à la dernière colonne on obtient ... » ne rapporte pas de point même en explicitant le premier et le dernier déterminant. Nous apprécions des mineurs explicités très précisément (de même que des matrices blocs rigoureuses dans des questions ultérieures).

La résolution du système dans **Q4** est en général mal menée : mélange entre équivalence et implication, mauvaise gestion de la dernière ligne etc. Moins d'un quart des candidats a obtenu la totalité des points sur cette question.

Si la question **Q5** a été globalement bien traitée, la question **Q6** a par contre manqué de précision dans la rédaction. Les correcteurs attendaient des références aux questions précédentes.

La première partie de **Q7** a été bien traitée mais il manque souvent un argument pour justifier que  $\deg \pi_f \leqslant n$ . On trouve ici des confusions entre la liberté dans  $E$  et la liberté dans  $\mathcal{L}(E)$ , certains affirmant que  $\mathcal{L}(E)$  est de dimension  $n$ .

Dans les copies où la question **Q8** est traitée, les arguments manquent souvent de précision. Par contre, la question **Q9**, assez simple, a été réussie par une grande majorité des candidats.

La question **Q10** montre une compréhension vague de la notion d'endomorphisme induit mais les candidats qui reviennent aux matrices parviennent à conclure.

La plupart des candidats échouent dans la question **Q11**, en particulier en ne voyant pas que les coefficients  $\alpha_i$  dépendent de  $x$  et donc que  $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \dots + \alpha_0$  n'est pas un polynôme annulateur de  $f$ . À noter que certains ont réalisé qu'ils avaient utilisé le théorème de Cayley-Hamilton dans des questions précédentes, éventuellement en revenant sur ces questions. Même si nous avons apprécié un tel recul, son absence n'a pas été pénalisée, l'énoncé manquant de précision à ce sujet.

### II Étude des endomorphismes cycliques

La question **Q12** a été plutôt bien réussie. Des arguments hors programme sur les noyaux itérés n'ont pas rapporté de point.

Dans **Q13**, la décomposition est en général bien réussie mais ce n'est pas le cas de la stabilité : confusion entre sous espaces propres et sous espaces caractérisques, écriture de  $(f(x) - \lambda_k x)^{m_k}$ . On retrouve ces mêmes erreurs dans **Q14**.

Peu de candidats ont vu que **Q15** était une simple question de cours.

Beaucoup ont affirmé dès **Q13** que  $m_k = \dim F_k$  ce qui est évidemment pénalisant de **Q13 à Q17**. Dans cette dernière, la décomposition en blocs est plutôt réussie.

En cette fin de partie II, **Q18** et **Q19** étaient les premières questions assez délicates et ont été peu traitées.

### III Endomorphismes commutants

Le début de la partie III a été traitée (avec des réussites diverses) par une grande partie des candidats mais beaucoup de copies ne vont pas plus loin.

Les questions **Q24** et **Q25**, très difficiles, n'ont été parfaitement réussies que dans quelques copies. Nous avons récompensé l'étude du cas  $r = 2$  dans **Q24**. Par contre, écrire « par récurrence immédiate » donne une très mauvaise impression dans la mesure où l'hérédité est loin d'être simple.

Les questions de **Q26 à Q31** sont encore assez abordées. Il y a eu quelques confusions entre somme directe et supplémentaires (**Q28–Q30**). Dans **Q31**, l'argument (insuffisant) se résume souvent à « on recommence avec  $f$  ».

### IV Endomorphismes orthocycliques

Quelques candidats abordent la dernière partie mais assez peu pensent au théorème de réduction des isométries vectorielles dans **Q34**.

## Conclusion

Les correcteurs ont certes apprécié de corriger quelques excellentes copies traitant correctement l'essentiel du problème mais, dans ce sujet, il était possible d'obtenir une assez bonne note en traitant correctement les parties I et II. Il n'est donc pas nécessaire de vouloir absolument traiter énormément de questions au détriment de la qualité de la rédaction, de la précision de l'argumentation mais aussi de la présentation de la copie. Les paraphrases de l'énoncé tout comme les affirmations gratuites sont inutiles.