

## 1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice était centré sur la notion d'endomorphisme cyclique. Le second exercice introduisait et établissait quelques propriétés classiques de la fonction dilogarithme. Le troisième exercice concernait l'étude d'une variable aléatoire modélisant la durée d'un jeu de société dans différentes situations.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

## 2/ COMMENTAIRES GÉNÉRAUX SUR LES COPIES

L'ensemble des correcteurs ont remarqué une amélioration par rapport à la session précédente dans la qualité de la présentation des copies, notamment lors de l'utilisation de théorèmes nécessitant la vérification de nombreuses hypothèses.

Rappelons néanmoins que l'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement toutes ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question. Les candidats doivent également faire attention à introduire correctement les objets et les notations qu'ils utilisent pendant leur raisonnement. De plus, ils ne doivent pas confondre le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

Nous avons constaté une fois de plus qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas l'énoncé et les questions assez consciencieusement : certains d'entre eux restent bloqués en ayant loupé une information dans l'énoncé ; d'autres oublient de répondre à une partie de la question.

L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment

fondée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

L'exercice 1 a été traité de manière pertinente par une majorité de candidats. Les difficultés rencontrées par les candidats se situaient principalement dans les parties III et IV. Une part importante de ces difficultés concernait des problèmes de logique pour la manipulation de la définition d'endomorphisme cyclique, notamment dans l'utilisation du quantificateur universel et du quantificateur existentiel.

L'exercice 2 a également été abordé de manière satisfaisante par une majorité des candidats. Par rapport à la session précédente, des progrès ont été constatés dans la manipulation des objets et des outils de l'analyse. Cependant, certains problèmes persistent : par exemple, le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées est rarement correctement rédigé. Il faut vérifier l'hypothèse sur les limites au bord de l'intervalle d'intégration et mentionner la convergence d'au moins une des deux intégrales en jeu avant de pouvoir écrire la relation d'égalité.

L'exercice 3 est celui qui a posé le plus de difficultés aux candidats, notamment les questions portant sur les probabilités. Nous tenons à rappeler que la rigueur et le formalisme ne sont pas facultatifs en probabilité. Il ne faut pas confondre un évènement avec sa probabilité, les calculs doivent être justifiés soigneusement en mentionnant l'incompatibilité ou l'indépendance des évènements lorsqu'elles sont nécessaires et il faut citer les théorèmes utilisés en vérifiant leurs hypothèses.

### 3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

#### Exercice 1 (Endomorphisme cyclique) :

**Q1.** Quelques candidats n'ont pas bien appliqué la définition d'endomorphisme cyclique : ils ont oublié de remplacer l'entier  $n$  par 2. Attention à ne pas confondre cardinal et dimension.

**Q2.** Une part importante de candidats ne maîtrisent pas correctement la notion de matrice d'un endomorphisme dans une base, ce qui les a conduit à obtenir une matrice erronée pour  $f$  dans la base canonique. D'autres candidats ont choisi de déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $(v, f(v))$  : c'est une idée pertinente, mais ils ont souvent oublié de déduire les sous-espaces propres de  $f$  à partir des sous-espaces propres de  $M$ .

**Q3.** Question globalement traitée de manière pertinente.

**Q4.** Question globalement bien traitée.

**Q5.** Lorsque l'on souhaite utiliser le théorème spectral, il ne faut pas oublier de préciser que la matrice est à coefficients réels. L'utilisation d'un polynôme annulateur pour justifier la diagonalisabilité de l'endomorphisme  $g$  est peu fréquente.

**Q6.** Quelques candidats ont rencontré des problèmes de rédaction, notamment des confusions entre le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

**Q7.** Une part importante de candidats affirment sans aucune démonstration que l'application est à valeurs dans  $R_n[X]$ .

**Q8.** Question globalement bien traitée.

**Q9.** Les réponses à cette question sont souvent incomplètes et assez mal rédigées. Il ne suffit pas de traiter le cas d'un polynôme de degré  $n$ . De même, il n'est pas suffisant d'étudier uniquement l'image du terme dominant d'un polynôme  $P$  pour conclure.

**Q10.** Une partie des candidats ne précisent pas le polynôme  $P$  choisi pour appliquer la définition. D'autres se trompent dans la dimension de  $R_n[X]$ .

**Q11.** Il est préférable de rédiger proprement une récurrence pour démontrer la propriété demandée.

**Q12.** Beaucoup de candidats n'expliquent pas leurs calculs et certains ne reconnaissent pas le déterminant de Vandermonde.

**Q13.** Les réponses des candidats contenaient beaucoup de problèmes de logique, notamment dans l'utilisation du quantificateur universel et du quantificateur existentiel.

## **Exercice 2 (La fonction dilogarithme) :**

**Q14.** Certains candidats ne comprennent pas ce qu'il faut faire dans cette question. Il n'est pas suffisant d'affirmer que le dénominateur ne s'annule pas : il faut le démontrer.

**Q15.** Les candidats oublient souvent de mentionner la continuité de la fonction.

**Q16.** Peu de candidats pensent à mentionner la positivité de  $f$  dans leur raisonnement, alors qu'ils l'utilisent implicitement pour démontrer l'inégalité.

**Q17.** Une part des candidats ne domine pas convenablement la fonction intégrée pour appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

**Q18.** Le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées est rarement correctement rédigé. Il faut vérifier l'hypothèse sur les limites au bord de l'intervalle d'intégration et mentionner la convergence d'au moins une des deux intégrales en jeu avant de pouvoir écrire la relation d'égalité.

**Q19.** La plupart des candidats reconnaissent la série géométrique, mais peu d'entre eux justifient que sa raison  $q$  vérifie  $|q| < 1$ .

**Q20.** De nombreux candidats établissent que le rayon de convergence de la série entière est  $R=1$ , mais ils oublient d'étudier la convergence en  $x = -1$  et en  $x = 1$ . Des hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont souvent omises et d'autres mal formulées.

**Q21.** Question globalement bien traitée.

**Q22.** Question globalement bien traitée. Quelques candidats ont oublié que  $L(1)$  était donné dans l'introduction de l'exercice.

**Q23.** Certains ont essayé d'utiliser la définition de  $L$  sous forme d'intégrale à paramètre, ce qui était davantage difficile que d'utiliser l'expression de  $L$  sous forme de la somme d'une série entière.

**Q24.** Beaucoup de candidats n'ont pas réussi à justifier correctement que  $h$  est dérivable sur l'intervalle  $]0,1[$ . Le calcul de  $h'$  est souvent erroné : beaucoup de candidats se sont trompés pour dériver la composée  $x \rightarrow L(1-x)$ .

**Q25.** Question peu traitée. L'étude de la limite de la fonction  $h$  en 0 ou en 1 est rarement suffisamment justifiée.

## **Exercice 3 (Un jeu de société) :**

**Q26.** Les réponses des candidats sont souvent imprécises sur le lien avec l'entier  $n$ .

**Q27.** Les réponses des candidats sur la variable aléatoire  $T$  manquent de clarté.

**Q28.** Question globalement bien traitée.

**Q29.** Lorsqu'on utilise la règle de d'Alembert, il faut faire attention aux erreurs de calculs, notamment pour simplifier le quotient des coefficients binomiaux.

**Q30.** Question globalement bien traitée.

**Q31.** Les justifications sont souvent floues et incomplètes : il faut notamment mentionner l'indépendance entre les variables aléatoires  $X_k$ .

**Q32.** Les réponses données par les candidats sont souvent complètement erronées, ce qui montre une mauvaise compréhension de la situation décrite dans l'exercice.

**Q33.** Question globalement bien traitée.

**Q34.** Il n'est pas possible d'appliquer directement le résultat de la question précédente en prenant la valeur  $k=0$ .

**Q35.** Peu de candidats ont fait le lien avec la question 30.

**Q36.** Question globalement bien traitée. Néanmoins, peu de candidats justifient, même succinctement, que  $T$  est d'espérance finie.

**Q37.** Peu de candidats ont été capables d'appliquer simplement la formule des probabilités totales. Plusieurs justifications sont souvent omises pour arriver à la formule donnée dans l'énoncé.

**Q38.** L'initialisation est très rarement correctement justifiée.

**Q39.** Question très peu traitée et rarement correctement.