

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

## Problème n° 1

### Notations

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels et  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

### Partie A : logarithme de base $a$

**Rappel.** On appelle *logarithme* toute fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$ , dérivable, telle que :

- il existe un nombre réel  $a$  non nul tel que, pour tout nombre réel  $x$  strictement positif,

$$f'(x) = \frac{a}{x}.$$

- $f(1) = 0$ .

**I.** Soit  $a$  un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera  $f_a$ , tel que, pour tout nombre réel  $x > 0$ ,  $f'_a(x) = \frac{a}{x}$ . Lorsque  $a = 1$ , on utilise la notation  $\ln$  (logarithme néperien).

**II.** Pour tout nombre réel  $a$  non nul, exprimer  $f_a$  à l'aide de  $\ln$ .

**III.** Montrer que, pour tout nombre réel  $a$  non nul, tous nombres réels  $x, y > 0$ ,

$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

*Indication* : on pourra étudier la fonction définie par  $x \mapsto f_a(xy)$ .

**IV.** Montrer que pour tout nombre réel  $x > 0$ ,

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x).$$

**V.** Soient  $x$  un nombre réel strictement positif et  $r$  un nombre rationnel. Montrer que  $f_a(x^r) = r f_a(x)$ .

*Indication* : on pourra commencer par le cas où  $r$  est un entier naturel, puis celui où  $r$  est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où  $r$  est un nombre rationnel.

**VI.** Montrer que la fonction  $\ln$  est strictement croissante.

**VII.** Déterminer les limites quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et quand  $x$  tend vers 0 de la fonction  $\ln$ .

**VIII.** Montrer que la fonction  $\ln$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

**IX.** Comment peut-on généraliser les résultats des questions VI. et VIII. au cas des logarithmes  $f_a$  ?

### Partie B : logarithme décimal

**X.** Montrer qu'il existe un unique logarithme  $f_a$  tel que  $f_a(10) = 1$ . Ce logarithme est noté  $\text{Log}$  et est appelé logarithme décimal.

**XI.** Soit  $N$  un nombre entier naturel dont l'écriture en base dix possède  $n$  chiffres. Déterminer la partie entière de  $\log(N)$ .

**XII.** Les exercices suivants sont proposés à une classe de terminale scientifique :

1. Combien le nombre  $4^{2019}$  possède t-il de chiffres ?
2. Le niveau sonore  $L$  (en dB) s'exprime en fonction de l'intensité  $I$  (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ) selon la formule
$$L = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right),$$
où  $I_0 = 10^{-12} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$  correspond à l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000Hz.
  - a. Calculer le niveau sonore correspondant à une intensité sonore de  $10^{-5} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ .
  - b. Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10dB ?
3. Une balle lancée d'une hauteur de 2m atteint après chaque rebond 70% de sa hauteur précédente et cesse de rebondir quand sa hauteur n'excède pas 1mm. Au bout de combien de rebonds cela se produira-t-il ?

Pour chacun de ces trois exercices, présentez une rédaction de la solution, telle que vous l'exposeriez à une classe de terminale scientifique.

## Partie C : calcul approché de valeurs du logarithme népérien

**XIII.** Montrer que pour tout nombre réel  $x \neq -1$  et tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}.$$

**XIV.** En déduire que pour tout nombre réel  $x > -1$  et tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt.$$

**XV.** On suppose que  $x \geq 0$ . Montrer que

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

**XVI.** On suppose que  $-1 < x \leq 0$ . Montrer que

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{1+x} \times \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

**XVII.** En déduire que, si  $-1 < x \leq 1$ , la série de terme général  $(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  est convergente et que sa somme vaut  $\ln(1+x)$ . On pourra raisonner par disjonction de cas.

**XVIII.** Justifier que la série de terme général  $(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  diverge lorsque  $|x| > 1$ .

**XIX.** À l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur de  $n$  pour laquelle  $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$  est une valeur approchée de  $\ln(1+x)$  à  $10^{-8}$  près pour :

1.  $x = \frac{1}{3}$ .

2.  $x = \frac{1}{8}$ .

3.  $x = 1$ .

**XX.** 1. Justifier que

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

2. Soit  $p$  un entier naturel non nul. On considère  $R_p = \sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ . Montrer que

$$R_p = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=p}^N \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

3. Soit  $N$  un entier naturel non nul. Montrer que si  $0 < p \leq N$ ,

$$\sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+2)^2} \leq \sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leq \sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4. Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. Montrer que si  $0 < p \leq N$ ,

$$\int_p^{N+1} \frac{dx}{(2x+a)^2} \leq \sum_{k=p}^N \frac{1}{(2k+a)^2} \leq \int_{p-1}^N \frac{dx}{(2x+a)^2}.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel non nul  $p$ ,

$$\frac{1}{4p+4} \leq R_p \leq \frac{1}{4p-2}.$$

6. Montrer que  $R_p$  est équivalent à  $\frac{1}{4p}$  lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ .

**XXI.** On se propose de calculer des approximation de  $\ln(2)$  et  $\ln(3)$ .

1. Exprimer  $\ln(2)$  et  $\ln(3)$  à l'aide de  $\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right)$  et  $\ln\left(1 + \frac{1}{8}\right)$ .

2. Les calculs de la question XIX. ont donné les valeurs approchées à  $10^{-8}$  près suivantes :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) \approx 0,28768207 \quad \ln\left(1 + \frac{1}{8}\right) \approx 0,11778304.$$

En déduire une valeur approchée de  $\ln(2)$  et  $\ln(3)$ . Donner la précision de ces résultats.

**XXII.** Montrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n} dt}{1-t^2}.$$

**XXIII.** En déduire que si  $x \in [0, 1[,$  alors

$$\left| \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{1-x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

- XXIV.**
1. Quelle valeur de  $x$  doit-on choisir pour déduire de la question précédente une valeur approchée de  $\ln(2)$  ? de  $\ln(3)$  ?
  2. À l'aide de ces valeurs de  $x$ , donner une valeur de  $n$  permettant d'obtenir des valeurs approchées de  $\ln(2)$  et de  $\ln(3)$  à  $10^{-8}$  près.
  3. Comparer cette méthode d'approximation de  $\ln(2)$  et  $\ln(3)$  avec celle de la question XXI.

**XXV.** On se propose de calculer des valeurs approchées de  $\ln(n)$  pour tout nombre entier  $n > 1$ .

1. Expliquer pourquoi il suffit de calculer des valeurs de  $\ln(p)$  pour  $p$  nombre premier.
2. Décrire une méthode pour calculer des valeurs approchées de  $\ln(n)$  pour tout entier  $n$  tel que  $2 \leq n \leq 20$ .

## Problème n° 2

### Notations.

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des nombres relatifs et  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls est noté  $\mathbb{Q}^+$ .

Pour  $m$  et  $n$  deux entiers naturels,  $\llbracket m, n \rrbracket$  désigne l'ensemble des entiers  $k$  tels que  $m \leq k \leq n$ .

On rappelle que, pour tout élément  $x$  non nul de  $\mathbb{Q}^+$ , il existe un unique couple  $(a, b)$  d'entiers naturels premiers entre eux tel que  $x = \frac{a}{b}$ . Le quotient  $\frac{a}{b}$  est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé, FFI) de  $x$ . Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est  $\frac{0}{1}$ .

### Partie A : Somme des cancres

**Définition.** Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $\mathbb{Q}^+$ . Leur FFI respectives sont notées  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  ( $a, b, c, d$  sont des entiers naturels,  $b$  et  $d$  sont non nuls,  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux,  $c$  et  $d$  sont premiers entre eux). La somme des cancres de  $x$  et  $y$  est définie par :

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d}.$$

**I. Question de cours.** Soient  $a, b, n$  trois entiers relatifs,  $a$  et  $b$  étant non nuls. Montrer que  $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, b + na)$ .

**II.** Soient  $x$  et  $y$  deux rationnels positifs.

1. Montrer que  $x \oplus y$  est un rationnel positif.

2. On note  $\frac{a}{b}$  la FFI de  $x$  et  $\frac{c}{d}$  la FFI de  $y$ . La FFI de  $x \oplus y$  est-elle toujours  $\frac{a+c}{b+d}$  ?

**III.** Chacune des affirmations suivantes est soit vraie soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.

1. Pour tout  $x \in \mathbb{Q}^+$ ,  $x \oplus 0 = x$ .

2. Pour tout  $x \in \mathbb{Q}^+$ ,  $x \oplus x = x$ .

3. Pour tous  $x, y \in \mathbb{Q}^+$ ,  $x \oplus y = y \oplus x$ .

4. Pour tous  $x, y, z \in \mathbb{Q}^+$ ,  $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ .

5. Pour tous  $x, y \in \mathbb{Q}^+$ , non nuls,  $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y}$ .

6. Pour tous  $x, y \in \mathbb{Q}^+$ , pour tout entier naturel  $n$ ,  $(n+x) \oplus (n+y) = n + (x \oplus y)$ .

**IV.** Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $\mathbb{Q}^+$ .

1. Montrer que  $x \oplus y = x$  si, et seulement si,  $x = y$ .

2. Montrer que si  $x < y$ , alors  $x < x \oplus y < y$ .

**V.** Interprétation géométrique. On se place dans un plan euclidien, muni d'un repère  $(O, I, J)$ . Pour  $x \in \mathbb{Q}^+$ , de FFI  $\frac{a}{b}$ , on note  $M_x$  le point de coordonnées  $(b, a)$ .

1. Soient  $x, y \in \mathbb{Q}^+$ , non nuls. Montrer que  $O, M_{x+y}$  et le milieu de  $[M_x M_y]$  sont alignés.

2. Qu'est la droite  $(OM_{x+y})$  pour le triangle  $OM_x M_y$  ?

**VI.** Soient  $x, y \in \mathbb{Q}^+$ , non nuls, de FFI respectives  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ . On suppose que  $a > c$  et  $b < d$ .

En utilisant l'aire de rectangles et de triangles rectangles, montrer que l'aire du triangle  $OM_x M_y$  est

$$\frac{ad - bc}{2}.$$

## Partie B : suites de Farey

**Définition** : pour tout entier  $n \geq 1$ , la suite de Farey d'ordre  $n$  est la suite dont les termes sont, rangés dans l'ordre croissant, tous les rationnels positifs compris entre 0 et 1 dont la FFI a un dénominateur inférieur ou égal à  $n$ . On note  $F_n$  cette suite. Par exemple :

$$\begin{aligned} F_1 &= \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right), \\ F_2 &= \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right), \\ F_3 &= \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right). \end{aligned}$$

**VII.** Déterminer  $F_4$ ,  $F_5$  et  $F_6$ .

**VIII.** Soit  $x \in \mathbb{Q}^+$  et soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que  $x$  est un terme de la suite  $F_n$  si, et seulement si, il existe  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $b$  non nul, tels que  $x = \frac{a}{b}$  et  $0 \leq a \leq b \leq n$ .

**IX.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que les termes de  $F_n$  sont aussi des termes de  $F_{n+1}$ .

**X.** Montrer que si  $x$  est un terme de la suite  $F_n$  alors  $1-x$  également.

**XI.** On considère l'application suivante :

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{Q}^+ & \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \mapsto (a, b) \text{ tel que } \frac{a}{b} \text{ est la FFI de } x. \end{cases}$$

1. Montrer que  $\theta$  est injective.

2. Montrer que  $\theta$  n'est pas surjective.

*Indication* : on pourra montrer que  $(2, 2)$  n'appartient pas à  $\theta(\mathbb{Q}^+)$ .

3. Soit  $x$  un élément de la suite  $F_n$ , non nul. Montrer que  $\theta(x) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$ .

4. On note  $f_n$  le nombre de termes de  $F_n$ . Montrer que  $f_n \leq n^2 + 1$  et que l'égalité n'est satisfaite que si  $n = 1$ .

**XII.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. L'indicatrice d'Euler de  $n$  est l'entier défini par

$$\varphi(n) = \text{card}(\{k \in [\![1, n]\!], \text{PGCD}(k, n) = 1\}).$$

Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$f_n = 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k).$$

## Partie C : éléments consécutifs des suites de Farey

**XIII.** Soit  $n$  un entier naturel non nul et soient  $x$  et  $y$  deux termes consécutifs de la suite  $F_{n+1}$ . On suppose qu'aucun des deux n'est un terme de  $F_n$ .

1. Montrer qu'il existe  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $x = \frac{k}{n+1}$  et  $y = \frac{k+1}{n+1}$ .

2. Montrer que  $x < \frac{k}{n} < y$ .

3. Montrer que si  $x$  et  $y$  sont deux termes consécutifs de la suite  $F_{n+1}$ , alors au moins l'un des deux est un élément de  $F_n$ .

**XIV.** Le but de cette question est de démontrer, pour tout entier  $n \geq 1$ , la propriété  $(P_n)$  : « si  $x$  et  $y$  sont, dans cet ordre, deux termes consécutifs de la suite de Farey  $F_n$ , dont les FFI respectives sont  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ , alors  $bc - ad = 1$  et  $x \oplus y$  est la première fraction qui apparaît entre  $x$  et  $y$  dans une suite de Farey d'ordre  $m$  strictement supérieur à  $n$ . »

1. Démontrer  $(P_1)$ .

2. On suppose que, pour un certain entier  $n \geq 1$ , la propriété  $(P_n)$  est vraie. Soit alors  $x$  et  $y$  deux termes consécutifs (dans cet ordre) de  $F_{n+1}$ , dont les FFI respectives sont  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ . On rappelle que, dans ce cas,  $x$  ou  $y$  est un élément de  $F_n$ .

a. Montrer que si  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $F_n$ , alors  $bc - ad = 1$  et  $x \oplus y$  est la première fraction qui apparaît entre  $x$  et  $y$  dans une suite de Farey d'ordre strictement supérieur à  $n + 1$ .

b. On suppose dans tout ce qui suit que  $x$  est un terme de  $F_n$  et que  $y$  n'est pas un terme de  $F_n$ . Soit  $z$  le successeur de  $x$  dans  $F_n$  et  $z = \frac{r}{s}$  la FFI de  $z$ .

Montrer que  $\frac{a+r}{b+s}$  est une fraction irréductible comprise entre  $x$  et  $z$ .

c. Montrer que  $x < y < z$  puis que  $y = x \oplus z$ .

d. En déduire que  $c = a + r$  et  $d = b + s$ .

e. Déduire que  $bc - ad = rd - sc = 1$ .

f. Soit  $\frac{p}{q}$  la première fraction irréductible qui apparaît entre  $x$  et  $y$  dans une suite de Farey  $F_m$  d'ordre strictement  $m$  supérieur à  $n+1$ . On pose  $u = qc - pd$  et  $v = pb - aq$ . Montrer que  $u$  et  $v$  sont des entiers naturels non nuls et que

$$\begin{cases} au + cv = p, \\ bu + dv = q. \end{cases}$$

g. Déduire que  $x \oplus y$  apparaît dans une suite  $F_{m'}$  avec  $n + 1 < m' \leq m$  et que

$$x < x \oplus y < y.$$

h. En déduire que  $x \oplus y = \frac{p}{q}$ .

3. Conclure.

**XV.** Applications.

1. Montrer que si  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont les FFI de deux termes successifs d'une suite de Farey  $F_n$ , alors  $\frac{a+c}{b+d}$  est une fraction irréductible.

2. Soient  $x, y$  et  $z$  trois termes consécutifs d'une suite de Farey  $F_n$  de FFI respectives sont  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  et  $\frac{e}{f}$ . Montrer que  $bc - ad = de - fc$  puis que  $y = x \oplus z$ .