

Projeto de Concepção e Análise de Algoritmos

PapaRica: Distribuição de refeições prontas

André de Jesus Fernandes Flores – up201907001

Diogo Luís Araújo de Faria – up201907014

Tiago André Batista Rodrigues – up201906807

Índice

[Primeira Parte 3](#_Toc72688945)

[1. Descrição do tema 3](#_Toc72688946)

[2. Formalização do problema 4](#_Toc72688947)

[2.1. Dados de entrada 4](#_Toc72688948)

[2.2. Dados de Saída 4](#_Toc72688949)

[2.3. Restrições 4](#_Toc72688950)

[2.4. Funções objetivo 5](#_Toc72688951)

[3. Perspetiva de Solução 6](#_Toc72688952)

[1.1. Primeira fase 6](#_Toc72688953)

[1.2. Segunda fase 6](#_Toc72688954)

[1.3. Remoção das arestas indesejáveis 6](#_Toc72688955)

[1.4. Distribuição das encomendas 6](#_Toc72688956)

[1.5. Pré-processamento 7](#_Toc72688957)

[1.6. Verificar se os pontos pertencem a um CFC 8](#_Toc72688958)

[1.7. Ordenação dos pontos de interesse do trajeto 8](#_Toc72688959)

[1.8. Calcular a sequência de vértices a percorrer 9](#_Toc72688960)

[4. Conclusão 10](#_Toc72688961)

[Segunda Parte 11](#_Toc72688962)

[1. Diferenças entre planeamento & implementação 11](#_Toc72688963)

[2. Funcionalidades implementadas 12](#_Toc72688964)

[Opção 0 12](#_Toc72688965)

[Opção 1 12](#_Toc72688966)

[Opção 2 12](#_Toc72688967)

[Correr programa 13](#_Toc72688968)

[3. Estruturas de dados 14](#_Toc72688969)

[Graph, Node & Edge 14](#_Toc72688970)

[MealBasket 14](#_Toc72688971)

[Vehicle & vehicle\_type 14](#_Toc72688972)

[PapaRica 14](#_Toc72688973)

[4. Algoritmos implementados & análise de complexidade 15](#_Toc72688974)

[Kosaraju 15](#_Toc72688975)

[Floyd-Warshall 16](#_Toc72688976)

[A\* 17](#_Toc72688977)

[First Fit Decreasing 18](#_Toc72688978)

[Nearest Neighbour 18](#_Toc72688979)

[5. Análise da Conectividade 20](#_Toc72688980)

[6. Conclusão 21](#_Toc72688981)

[Bibliografia 22](#_Toc72688982)

# Primeira Parte

## Descrição do tema

A **PapaRica** é uma empresa de confeção e distribuição de refeições prontas a consumir. Para tal, existe uma frota de veículos encarregue das entregas ao cliente, sendo que as recolhe diariamente em Vila do Conde para as distribuir na área metropolitana do Porto.

As encomendas são distribuídas em cabazes, sendo identificadas com a informação relevante acerca do destino e conteúdo.

O trabalho consiste em implementar um sistema que calcule os trajetos ótimos para a realização das entregas.

Numa primeira fase vai-se considerar a existência de um único veículo de entrega com capacidade ilimitada, sendo que se expande numa segunda fase a uma frota de veículos de diferentes capacidades e tipos.

Um exemplo de um trajeto de um veículo pode ser:

Sede -> Cliente 1 -> … -> Cliente n -> Sede

Para uma entrega poder ser realizada tem de existir pelo menos um trajeto possível que permita sair e retornar à Sede passando por todos os Clientes, tendo em consideração a existência de obras públicas que podem, em certas situações, impossibilitar a entrega de certas encomendas.

## Formalização do problema

### Dados de entrada

* Vi – Sequência de veículos disponíveis para utilização, sendo Vi[n] o n-ésimo elemento e caracterizado por:
* type – Tipo de veículo (numa fase inicial = ‘heavy’);
* cap – Capacidade (numa fase inicial = ∞).
* Ci – Sequência de cabazes para distribuição, sendo Ci[n] o n-ésimo elemento e caracterizado por:
* clientName – Nome do destinatário;
* packageNumber – Número de embalagens contidas no cabaz;
* invoiceNumber – Número da fatura;
* destAddress – Vértice de destino.
* Gi = (Ni, Ei) – Grafo dirigido pesado inicial, composto por:
* N – Vértices do grafo, que representam pontos da cidade, caracterizados por:
* type – Tipo de vértice;
* address – Endereço;
* adj ⊆ E – Conjunto de arestas que se iniciam do vértice.
* E – Arestas do grafo, que representam o caminho entre 2 vértices, caracterizados por:
* weight – Peso da aresta, que representa a distância;
* dest Ni – Vértice de destino;
* ID – Identificador de aresta.
* S Ni – Vértice que representa a Sede, de onde o veículo sai e retorna.

### Dados de Saída

* Gf = (Nf, Ef) – Grafo dirigido pesado final, sendo que Nf = Ni e Ef = Ei.
* Vf – Sequência de veículos utilizados em entregas, sendo Vf[n] o n-ésimo elemento. Cada um é caracterizado por:
* T – Sequência de vértices ordenados por ordem de passagem (com possibilidade de repetidos);
* B – Sequência de cabazes para entrega pelo veículo ordenada pela ordem de entrega;
* cap – Capacidade ocupada do veículo.

### Restrições

#### Restrições sobre os dados de entrada

* n [0, |Vi| - 1]:
  + type(Vi[n]) = ‘light’ ‘heavy’ ‘motorcycles’ – tipos de veículos têm de ser carros ligeiros (‘light’), carros pesados (‘heavy’) ou motociclos (‘motorcycles’);
  + cap(Vi[n]) >= 0 – capacidade têm de ser maior ou igual a zero, visto que se trata de uma quantidade de embalagens.
* n [0, |Ci| - 1]:
  + packageNumber(Ci[n]) >= 1 – número de embalagens tem de ser positivo, visto que um cabaz tem de ter pelo menos uma embalagem;
  + invoiceNumber(Ci[n]) >= 1 – número de fatura tem de ser maior ou igual a um;
  + destAddress(Ci[n]) Ni – vértice de destino tem de existir no conjunto de vértices do grafo.
* n Ni, type(n) = ‘HQ’ ‘destiny’ ‘intermediate’.
* e Ei:
  + weight(e) >= 0 – arestas têm de ter um peso igual ou maior que zero visto que este corresponde à distância;
  + ID(e) >= 0 – identificador de uma aresta tem de ser maior ou igual a zero e único para cada uma;
  + Deve ser utilizável por veículos.
* type(S) = ‘HQ’ – tipo de sede deve ser ‘HQ’.

#### Restrições sobre os dados de saída

* – os vértices iniciais e finais vão ser iguais.
* – as arestas iniciais e finais vão ser iguais.
* Vf Vi – os veículos utilizados têm de ser parte do conjunto de veículos disponíveis.
* v Vf:
  + T(v) Vi – os vértices têm de fazer parte do conjunto de vertices iniciais;
  + B(v) Ci – o conjunto de cabazes para entrega tem de fazer parte do conjunto de cabazes inicial;
  + cap(v) = – a capacidade utilizada de um veículo tem de ser igual ao número de embalagens totais em cabazes;
  + Capacidade utilizada do veículo tem ser menor ou igual à capacidade disponível do veículo.
* T[0] adj(S) dest(T[|T| - 1]) = S – o trajeto de todos os veículos começa e acaba na sede.

### Funções objetivo

O objetivo do trabalho é encontrar o mínimo número de veículos para entregar as encomendas e o menor trajeto para cada veículo possível. Para tal é necessária a minimização de duas funções, sendo que uma se refere ao menor número de veículos e a outra ao menor trajeto possível:

* f = |Vf|
* g =

Numa fase inicial devido à consideração de uma capacidade infinita de veículos, a minimização da função f é desnecessária, sendo que na fase seguinte se prioriza a sua minimização à função g.

## Perspetiva de Solução

### Primeira fase

Inicialmente vai ser considerada a existência de apenas um veículo com capacidade infinita para a distribuição das encomendas, sendo então apenas necessário encontrar o trajeto ótimo para o mesmo. Para tal, seguem-se as próximas etapas:

1. Remoção das arestas indesejáveis, que vão ser as inutilizáveis pelos veículos.
2. Pré-processamento em que se calculam as distâncias entre todos os pares de pontos.
3. Verificar se os pontos de interesse (Sede e clientes) pertencem a uma componente fortemente conexa.
4. Ordenação dos pontos de interesse.
5. Calcular a sequência de vértices a percorrer no trajeto.

### Segunda fase

Numa segunda fase, já vão ser considerados vários veículos de diferentes tipos e capacidades, pelo que é necessária uma distribuição ótima das encomendas pelos veículos disponíveis antes do cálculo do trajeto ótimo. Para tal, são necessárias as seguintes etapas:

1. Remoção das arestas indesejáveis, que vão ser as inutilizáveis pelos veículos.
2. Pré-processamento em que se calculam as distâncias entre todos os pares de pontos.
3. Distribuir as encomendas pelos veículos disponíveis.
4. Verificar se os pontos de interesse (Sede e clientes) pertencem a uma componente fortemente conexa.
5. Ordenação de pontos de interesse para cada veículo, considerando os pontos de entrega específicos do trajeto.
6. Calcular a sequência de vértices a percorrer no trajeto de cada veículo.

### Remoção das arestas indesejáveis

A remoção vai consistir em encontrar as arestas inutilizáveis por veículos, atribuindo ao seu peso o valor de infinito, utilizando uma pesquisa em profundidade, que ao percorrer todos os vértices os assinala como visitados e nos permite no final encontrar aqueles que tal não é possível.

Eficiência temporal: O(|N| + |E|); Eficiência espacial: O(|N|)

### Distribuição das encomendas

Esta etapa vai ser realizado utilizando o algoritmo “First Fit Decreasing”[1], que ordena a sequência de cabazes por número de embalagens crescente e atribui sucessivamente a veículos, já ordenados pela sua capacidade, até que não existam mais cabazes para distribuição.

Eficiência temporal: O(|C| \* log(|C|)); Eficiência espacial: O(|C|); Sendo |C| o número de cabazes;

### Pré-processamento

Nesta etapa considerou-se a utilização de 2 diferentes algoritmos dependendo da densidade do grafo utilizado. Para um grafo esparso, utilizar-se-ia o algoritmo de Dijkstra repetidamente de forma a se obterem as distâncias entre cada par de ponto, enquanto que para um grafo denso, utilizar-se-ia o algoritmo de Floyd-Warshall.

Neste caso, considera-se que o grafo a utilizar da cidade metropolitana do Porto é um grafo denso e, por isso, utiliza-se o algoritmo de Floyd-Warshall.

Text, letter

Description automatically generated

Eficiência temporal: O(|N|3); Eficiência espacial: O(|N|2);

### Verificar se os pontos pertencem a um CFC

Este passo vai ser realizado utilizando o método lecionado na cadeira:

* Pesquisa em profundidade no grafo G determina floresta de expansão, numerando vértices em pós-ordem;
* Inverter todas as arestas de G;
* Segunda pesquisa em profundidade, em Gr, começando sempre pelo vértice de numeração mais alta ainda não visitado;
* Cada árvore obtida é um componente fortemente conexo.
* Percorrer cada CFC e verificar se têm todos os vértices do trajeto (Sede e clientes), sendo que se nenhum CFC for encontrado não vai existir um trajeto possível.

### Ordenação dos pontos de interesse do trajeto

Para tal, utiliza-se o algoritmo de Nearest Neighbour[2] que, para cada vértice se calcula o vértice que se encontra a menor distância sucessivamente até se encontrar o trajeto final.

Este algoritmo é um método de construção heurística que apresenta um caminho aproximadamente 25% mais longo do que o caminho de menor distância exato. Tal facto é contrariado pelo facto de ser um algoritmo com boa eficiência temporal quando comparado com métodos exatos.

Text

Description automatically generated

Eficiência temporal: O(|A2|); Eficiência espacial: O(|A|); Sendo |A| o número de clientes

### Calcular a sequência de vértices a percorrer

De forma a calcular esta sequência, utiliza-se sucessivamente um algoritmo, GetPath mencionado no algoritmo 1, para encontrar o caminho entre dois pontos sucessivamente entre cada ponto sucessivo dos vértices principais utilizando a array de vértices “next” calculada no algoritmo de Floyd-Warshall.

Eficiência temporal: O(|T|); Eficiência Espacial: O(|T|); Sendo |T| o número de vértices a percorrer no trajeto.

## Conclusão

Com a preparação necessária para a elaboração deste relatório e consequente planeamento do projeto, adquirimos uma melhor compreensão do uso de grafos e algoritmos relacionados com os mesmos.

O trabalho foi dividido igualmente pelos 3 elementos do grupo.

# Segunda Parte

## Diferenças entre planeamento & implementação

O primeiro passo que foi dado no planeamento foi a remoção das arestas indesejáveis que, como explicado, consistia numa pesquisa em profundidade em começo no vértice da Sede e que marcava as arestas que chegassem a vértices impossíveis de alcançar com o valor de infinito.

No entanto, na implementação nós utilizamos, de forma a diminuir o grande número de vértices e, consequentemente, arestas, do grafo, um cálculo da maior componente fortemente conexa, considerando-se como Sede um vértice dessa mesma.

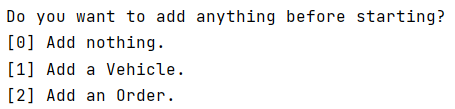
Assim, torna-se desnecessário a pesquisa em profundidade, visto que devido ao facto de os vértices pertencerem à componente fortemente conexa, é implícito que são vértices alcançáveis.

Por sua vez, este passo também faz com que a verificação de se a Sede e Clientes estão numa componente fortemente conexa seja desnecessário, visto que necessariamente têm de estar e, qualquer tentativa de se adicionar algum Cliente já vai verificar o mesmo também.

Uma outra diferença foi que se adicionou a implementação do algoritmo A\* de forma a substituir o Floyd-Warshall, pelo que no implementação final existe a possibilidade de correr o algoritmo utilizando um dos dois algoritmos.

## Funcionalidades implementadas

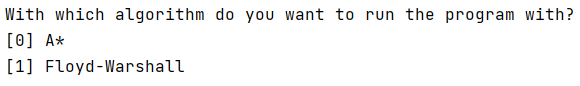
Quando se corre o programa, a seguinte mensagem aparece:



### Opção 0

A opção 0 é simplesmente para correr o programa e receber os resultados, enquanto que as outras duas permitem adicionar mais coisas pelo utilizados.

Ao escolher 0 é nos dada a opção de escolher que algoritmo vai ser utilizado na escolha da trajetória:

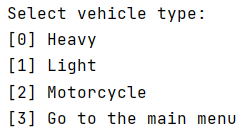


Escolhendo a opção 0, utiliza-se o A\* na escolha do caminho, enquanto que se escolher o Floyd-Warshall tem de se realizar um pré-processamento primeiro antes de percorrer para o resto.

### Opção 1

Ao escolher esta opção pode-se adicionar um novo veículo à empresa para que possa também efetuar entregas.

De seguida seleciona-se o tipo de veículo:



Escolhendo, pode-se também especificar a capacidade ou deixar como infinito, se preferível.



### Opção 2

Com esta opção pode-se adicionar outra ordem para entrega.



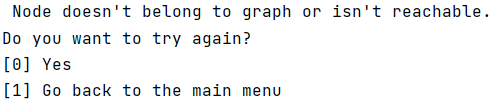






Estas opções permitem criar uma ordem, dando o número de refeições por cabaz, seguido pelo nome da pessoa e por fim pela localização, dada em termos de x e y.

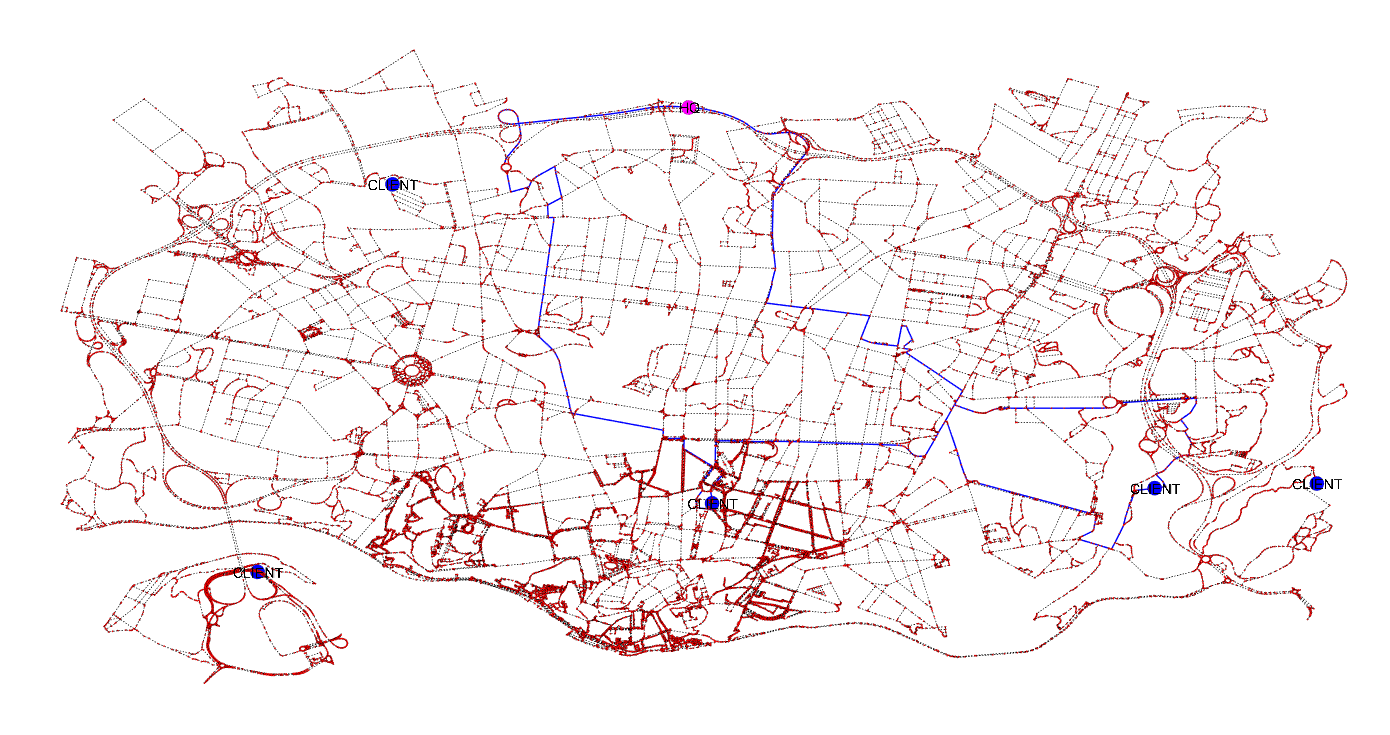
A localização é verificada e se não existir no grafo ou não for uma localização a que seja possível chegar a seguinte mensagem aparece e é dada a oportunidade de escrever de novo a localização, por motivos de engano, ou voltar para o inicio sem adicionar a ordem.



### Correr programa

Depois de selecionar as opções pretendidas anteriormente, o algoritmo corre, sendo escrito na consola o número diferente de trajetos a percorrer, cada um por um veículo específico.

Cada veículo diferente vai resultar num trajeto diferente e, consequentemente, numa janela com um grafo, em que está de cor diferente o trajeto a percorrer, diferente.



Esta imagem mostra um exemplo, em que o vértice a cor-de-rosa e a dizer “HQ” representa a sede e os vértices a azul e a dizer “Client” representam os clientes. As arestas a cor azul representam as arestas percorridas no caminho pelo veículo.

Fechando a janela, vai ser calculado o caminho para o veículo seguinte que, no final, vai ser apresentado da mesma forma e assim sucessivamente.

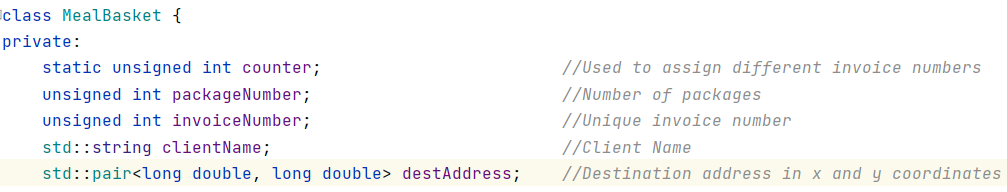
## Estruturas de dados

### Graph, Node & Edge

Estas estruturas são muito semelhantes às utilizados no decorrer do semestre, com apenas algumas funções ou atributos, como tags de forma a proceder à identificação de Clientes ou Sede.

### MealBasket

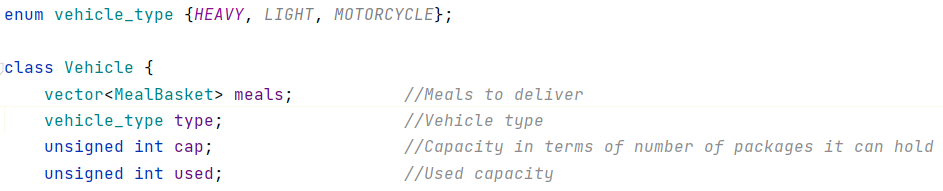
Esta classe representa um cabaz, sendo caracterizado por:



O atributo counter é incrementado por cada cabaz adicionado, começando em 0, e o atributo destAddress tem de ter coordenadas que correspondem a um vértice que seja alcançável.

### Vehicle & vehicle\_type

A classe Vehicle representa um veículo específico, enquanto que vehicle\_type é um enum que representa os tipos de veículos. São caracterizados por:



O atributo meals, começa vazio visto que ainda não foram escolhidas as encomendas a entregar, o atributo type tem como valor default ‘HEAVY’, a capacidade tem como defaul ‘INT\_MAX’ e o atributo used é inicializado com 0;

### PapaRica

Esta classe é utilizada para a interação entre utilizador e aplicação e também para a aplicação dos algoritmos de distribuição de cabazes e consequente criação de caminho para cada veículo.

## Algoritmos implementados & análise de complexidade

### Kosaraju

Este algoritmo retorna a maior, que tem mais vértices, componente fortemente conexa calculável no grafo dado fazendo o cálculo de várias diferentes componentes e escolher a maior.

Text

Description automatically generated

Complexidade temporal: O(|N| + |E|)

Complexidade espacial: O(|N|)

Análise empírica temporal:

### Floyd-Warshall

Numa primeira fase, nós tínhamos ideia que o grafo iria ser mais denso do que o que realmente seria, sendo que se procedeu à implementação deste algoritmo de forma a serem calculadas as distâncias entre todos os pontos de forma a facilitar os cálculos futuros no caminho mais curto e também a reconstrução de caminho necessário no fim.

Text, letter

Description automatically generated

Visto que este algoritmo é efetuado numa componente fortemente conexa, e não no grafo como um todo, |N| e |E| são o número de vértices e arestas, respetivamente, nesta componente.

Complexidade temporal: O(|N|3)

Complexidade espacial: O(|N|2)

Análise empírica temporal:

### A\*

Com a informação de que o grafo acaba por ser mais esparso, em que o número de vértices e arestas difere por pouco, também implementamos o algoritmo A\*.

Text

Description automatically generated

Sendo B o número de arestas sucessoras e D o quão a função tem de pesquisar:

Complexidade temporal: O(B ^ D)

Complexidade espacial: O(B ^ D)

Análise temporal empírica (desde ponto 0 até ponto maior nos diferentes grafos):

### First Fit Decreasing

De forma a ser realizada a distribuição das encomendas pelos veículos diferentes, visto que se fez a implementação da 2 fase que se falou, utiliza-se este algoritmo, que distribui as encomendas ordenadas por ordem crescente pelos veículos disponíveis, sendo que estes também estão ordenados pela sua capacidade.

Text

Description automatically generated

Sendo |C| o número de cabazes e |V| o número de veículos:

Complexidade temporal: O(|C| \* |V|)

Complexidade espacial: O(|C|)

Análise temporal empírica:

### Nearest Neighbour

Utilizamos este algoritmo para encontrar o caminho que um veículo tem de percorrer, iniciando o seu caminho no vértice da Sede, passando por todos os clientes e acabando na Sede. Apesar deste algoritmo apresentar um caminho aproximadamente 25% mais longo do ótimo, ele apresenta uma melhor complexidade temporal do que os algoritmos para caminhos ótimos.

Para este algoritmo foram criadas duas diferentes implementações que apenas diferem na forma de obter distância entre dois vértices diferentes na altura em que se realiza um “sort” relativo a um vértice especifico.

Text

Description automatically generated

Sendo |A| o número de vértices de clientes:

Complexidade temporal: O(|A2|)

Complexidade espacial: O(|A|)

Análise temporal empírica:

## Análise da Conectividade

A conectividade de um grafo tem um impacto enorme nos nossos algoritmos, pelo que a utilização de vértices e arestas desnecessárias resulta num algoritmo significativamente mais lento do que apenas utilizando os necessários.

Por esta mesma razão, utilizou-se o algoritmo de Kosaraju mencionado anteriormente no início da execução do programa de forma a reduzir o número de vértices e arestas, calculando a maior componente fortemente conexa, da qual a Sede vai pertencer.

Assim, visto que qualquer trajeto vai iniciar e acabar no mesmo vértice, Sede, todos os clientes têm de necessariamente pertencer a uma componente fortemente conexa em que a mesma esteja inserida, logo é possível descartar os vértices, e por consequência arestas, que existem fora do grafo originado pelo algoritmo.

## Conclusão

Concluindo, no decorrer deste projeto foi necessário o estudo de vários algoritmos, vários que não foram implementados pela sua complexidade ou pelo facto de se encontrarem melhores, permitindo que o nosso conhecimento deste tipo de problemas melhorasse imenso.

Foram realizadas duas implementações diferentes, diferindo no uso do algoritmo de Floyd-Warshall e do algoritmo de A\*, sendo que, como esperado, o A\*, apesar de apresentar tempos extremamente superiores ao do Floyd-Warshall na sua utilização durante o Nearest Neighbour, acaba por resultar num programa mais rápido, visto que não necessita de um expendioso pré processamento.

Tal conclusão pode não ser tão realizada pelos gráficos apresentados pois eles foram realizados em grafos em rede que são densos, ao contrário do grafo da cidade do Porto que é mais esparso. No entanto, neste grafo não foi possível obter resultados utilizando o algoritmo de Floyd-Warshall pois demorava demasiado tempo a correr.

Esta parte, tal como a primeira, foi divida igualmente pelos 3 elementos do grupo.

# Bibliografia

[1] Dósa, György. (2007). The tight bound of first fit decreasing bin-packing algorithm is FFD(I) ≤ 11/9 OPT(I) + 6/9. Lect Notes Comput Sci. 4614. 1-11. 10.1007/978-3-540-74450-4\_1.

[2] Johnson, D. S.; McGeoch, L. A. (1997). “The Traveling Salesman Problem: A Case Study in Local Optimization” (PDF). In Aarts, E. H. L.; Lenstra, J.K. *Local Search In Combinatorial Optimization*. London: John Wiley and Sons Ltd. pp. 215-310