

## DAP2 – Zusätzliches Vorlesungsmaterial 2

Vorlesungstermin: 20.04.2017

### Einheit 2.1: O-Notation

1.  $10n \in O(n)$

**Beweis:** Zu zeigen: es gibt Konstanten  $c, n_0 > 0$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  es

$$10n \leq c \cdot n$$

gilt. Wähle  $n_0 = 1$  und  $c = 10$ . Dann ist  $10n \leq 10n$  für alle  $n \geq n_0$  erfüllt. □

2.  $n^2 \notin O(1000n)$

**Beweis:**

Zu zeigen: für jede Konstante  $c$  und  $n_0$  gibt es ein  $n \geq n_0$ , sodass

$$n^2 > c \cdot 1000 \cdot n$$

ist. Seien also  $c$  und  $n_0$  beliebige positive Konstanten. Wähle  $n = \max \{(c + 1) \cdot 1000, n_0\}$ . Es gelten dann  $n \geq n_0$  und

$$n^2 \geq \max \{(c + 1) \cdot 1000, n_0\} \cdot n \geq (c + 1) \cdot 1000 \cdot n > c \cdot 1000 \cdot n.$$

Somit folgt  $n^2 \notin O(1000n)$ . □

3.  $O(1000n) = O(n)$

**Beweis:**

Zu zeigen:  $g(n) \in O(1000n) \Leftrightarrow g(n) \in O(n)$

" $\Rightarrow$ " Sei  $g(n) \in O(1000n)$ . Dann gibt es  $c, n_0 > 0$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  es  $g(n) \leq c \cdot 1000n$  gilt. Setze nun  $c' = 1000c$ . Dann gilt es für alle  $n \geq n_0$  auch

$$g(n) \leq c' \cdot n.$$

Also ist  $g(n) \in O(n)$ .

" $\Leftarrow$ " Sei  $g(n) \in O(n)$ . Dann gibt es  $c, n_0 > 0$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  es  $g(n) \leq c \cdot n$  gilt. Damit gilt insbesondere auch  $g(n) \leq c \cdot 1000n$ . Somit ist  $g(n) \in O(1000n)$ . □

4. Für allen Konstanten  $c > 0$  und  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$O(\log^c n) \subseteq O(n^\varepsilon).$$

**Beweis:**

Seien  $c > 0, \varepsilon > 0$  festgewählte Konstanten. Zu zeigen: für alle  $g(n) \in O(\log^c n)$  gilt auch  $g(n) \in O(n^\varepsilon)$ .

Wir zeigen zunächst die folgende Behauptung.

**Behauptung:** Für jedes  $k > 0, n > 1$  gilt  $\log^k n \leq k^k \cdot n$ .

**Beweis:**

$$\log^k n = \log^k \left( (n^{1/k})^k \right) = k^k \cdot \log^k (n^{1/k}) \leq k^k \cdot (n^{1/k})^k = k^k \cdot n$$

(da  $\log x \leq x$  für  $x \geq 1$  und mit  $x = n^{1/k}$ ).

Sei nun  $g(n) \in O(\log^c n)$ . Dann gibt es  $c', n_0 > 0$ , sodass  $g(n) \leq c' \cdot \log^c n$  für alle  $n \geq n_0$  gilt. Wir zeigen im Folgenden, dass

$$\log^c n \leq \left( \frac{c}{\varepsilon} \right)^c \cdot n^\varepsilon$$

ist. Damit folgt mit  $c'' = c' \cdot \left( \frac{c}{\varepsilon} \right)^c$ , dass  $g(n) \leq c'' \cdot n^\varepsilon$  ist und somit  $g(n) \in O(n^\varepsilon)$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $\log^c n \leq \left( \frac{c}{\varepsilon} \right)^c \cdot n^\varepsilon$  ist. Für  $k = \frac{c}{\varepsilon} > 0$  folgt aus unserer Behauptung und der Monotonität der Wurzelfunktion auf  $\mathbb{R}^+$

$$\log^c n = (\log^{\frac{c}{\varepsilon}} n)^\varepsilon \leq \left( \left( \frac{c}{\varepsilon} \right)^{\frac{c}{\varepsilon}} \cdot n \right)^\varepsilon = \left( \frac{c}{\varepsilon} \right)^c \cdot n^\varepsilon.$$

□

5.  $10n \in \Omega(n)$

**Beweis:**

Zu zeigen: Es gibt  $c, n_0 > 0$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  es

$$10n \geq c \cdot n$$

gilt. Wähle  $n_0 = 1$  und  $c = 1$ . Dann ist  $10n \geq n$  für alle  $n \geq n_0$  erfüllt.

□

6.  $1000n \notin \Omega(n^2)$

**Beweis:**

Zu zeigen: Für allen Konstanten  $c, n_0 > 0$  gibt es eine  $n \geq n_0$  mit

$$1000n < c \cdot n^2.$$

Seien also  $c, n_0$  beliebige Konstanten. Wähle

$$n = \max \left\{ \frac{1001}{c}, n_0 \right\}.$$

Dann gilt  $n \geq n_0$  und

$$c \cdot n^2 \geq c \cdot \max \left\{ \frac{1001}{c}, n_0 \right\} \cdot n \geq c \cdot \frac{1001}{c} \cdot n = 1001n > 1000n.$$

□

7.  $f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$

**Beweis:**

" $\Rightarrow$ " Sei  $f(n) \in \Omega(g(n))$ . Dann gibt es  $c, n_0 > 0$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Damit gilt auch

$$g(n) \leq \frac{1}{c} \cdot f(n) = c' \cdot f(n)$$

für alle  $n \geq n_0$  mit  $c' = \frac{1}{c} > 0$ , und somit  $g(n) \in O(f(n))$ .

" $\Leftarrow$ " Sei  $g(n) \in O(f(n))$ . Dann gibt es  $c, n_0 > 0$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$g(n) \leq c \cdot f(n)$$

Damit gilt auch

$$f(n) \geq \frac{1}{c} \cdot g(n) = c' \cdot g(n)$$

für alle  $n \geq n_0$  mit  $c' = \frac{1}{c} > 0$ , und somit  $f(n) \in \Omega(g(n))$ .

□

8.  $n^{1-\sin(\pi n/2)} \notin \Theta(n)$

**Beweis:**

Wenn  $f(n) = n^{1-\sin(\pi n/2)} \in \Theta(n)$  wäre, dann wäre  $f(n) \in \Omega(n)$  und  $f(n) \in O(n)$ . Das ist äquivalent zu  $\exists c', c'', n'_0, n''_0 > 0$ , sodass  $f(n) \geq c' \cdot n$  und  $f(n) \leq c'' \cdot n$  für alle reellen Zahlen  $n \geq \max \{n'_0, n''_0\}$  ist.

Wir wissen, dass die Funktion  $f(n)$  periodisch mit Periode  $2\pi$  ist, und dass  $\sin x \in [-1, 1]$  gilt. Außerdem gilt dass  $\sin(\pi n/2) = 1$  ist, wenn  $n = 1 \pmod{4}$  ist, und  $\sin(\pi n/2) = -1$ , wenn  $n = 3 \pmod{4}$  ist. Damit gilt  $f(n) = n^0 = 1$  für alle  $n$  mit  $n = 1 \pmod{4}$  und  $f(n) = n^2$  für alle  $n$  mit  $n = 3 \pmod{4}$ .

Seien  $c', c'', n'_0, n''_0 > 0$  Konstanten definiert wie im ersten Paragraph. Dann gilt  $f(n) \leq c' \cdot n$  für jedes  $n \geq n_0$  mit  $n = 1 \pmod{4}$ , was ein Widerspruch ist. (Ebenso gilt  $f(n) \geq c'' \cdot n$  für jedes  $n \geq \max \{n_0, c''\}$  mit  $n = 3 \pmod{4}$ . Dies ist ebenfalls ein Widerspruch.) □