technische universität dortmund

SoSe 2017

C. Sohler
A. Krivošija, A. Rey, H. Sandvoß

DAP2 – Präsenzübung 2

Besprechung: 02.05.2017 — 03.05.2017

Präsenzaufgabe 2.1: (Schleifeninvariante und Korrektheitsbeweis)

Betrachten Sie das folgende Programme, das als Eingabe eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ erhält.

```
BerechneWert(n):
1  x ← 1
2  if n > 0 then
3      z ← 1
4      for i ← 1 to n do
5          z ← z · i
6      a ← 1
7      b ← z
8      w ← 1
9      j ← 1
10     while j < n do
11         a ← a · j
12         b ← b/(n − j + 1)
13         w ← w + z/(a · b)
14         j ← j + 1
15     x ← w + 1
16 return x
```

Beweisen Sie, dass das Programm für eine Eingabe n den Wert 2^n berechnet. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Formulieren Sie eine Schleifeninvariante $A_1(i)$, die zu Beginn der i. Iteration der *For*-Schleife (Zeilen 4 und 5) für z gilt, und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

b) Verwenden Sie diese Schleifeninvariante, um den Wert von z nach Schleifenaustritt zu bestimmen.

c) Formulieren Sie eine Schleifeninvariante $A_2(j)$, die zu Beginn der j. Iteration der *While*-Schleife (Zeilen 10 bis 14) für w gilt, und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

d) Verwenden Sie diese Schleifeninvariante, um zu zeigen, dass das Programm für eine Eingabe n den Wert 2^n ausgibt.

Hinweis: Sie können hierfür die Gleichheit $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ voraussetzen.

Lösung:

a) Die gesuchte Schleifeninvariante für die For-Schliefe lautet:

$$A_1(i)\text{: Es gilt } z = (i-1)! \text{ zu Beginn der } i\text{-ten Iteration der Schleife.}$$

Wir beweisen dies mittels vollständiger Induktion über i.

Induktionsanfang Für $i = 1$, also zur Initialisierung, enthält z den Wert $1 = 0!$, da dies in Zeile 3 zugewiesen wird.

Induktionsvoraussetzung Für ein festes $i_0 \leq n$ gelte zu Beginn des Schleifendurchlaufs i_0 die Invariante, d. h., $z = (i_0 - 1)!$ sei erfüllt.

Induktionsschritt Zu zeigen ist die Aussage zu Beginn von Schleifendurchlauf $i = i_0+1$, also nachdem Zeile 5 in Durchlauf i_0 ausgeführt wurde. Zu Beginn der Schleife i_0 gilt $z = (i_0 - 1)!$ nach Induktionsvoraussetzung. In Zeile 5 wird dann z auf $z \cdot i_0 = (i_0 - 1)! \cdot i_0 = i_0! = (i-1)!$ gesetzt. Das heißt Invariante $A_1(i)$ ist erfüllt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung der Schleifeninvariante zu Beginn jeder Schleifeniteration und vor dem Schleifenaustritt.

b) Nach Aufgabenteil (a) ist A_1 erfüllt, insbesondere gilt nach Schleifenaustritt $A_1(n+1)$, also $z = (n+1-1)! = n!$.

c) Die gesuchte Schleifeninvariante für die While-Schleife lautet:

$$A_2(j)\text{: Zu Beginn der } j\text{-ten Iteration der Schleife gilt } w = \textstyle\sum_{k=0}^{j-1} \binom{n}{k}.$$

Darüber hinaus benötigen wir gleichzeitig folgende Aussagen über die Variablen a und b: Zu Beginn des j-ten Schleifendurchlaufs gelten $a = (j-1)!$ und $b = (n-j+1)!$.

Wir beweisen auch dies mittels vollständiger Induktion über j.

Induktionsanfang Für $j = 1$, also zur Initialisierung (denn in Zeile 9 erhält j den Wert 1), ist $w = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} = 1$. Dies wird in Zeile 9 zugewiesen. Es gelten außerdem $a = 1$ (Zeile 6) und $b = z$ (Zeile 7), was nach Aufgabenteil (c) $n!$ ist.

Induktionsvoraussetzung Für ein festes $j_0 \leq n$ gelte zu Beginn des Schleifendurchlaufs j_0 die Invariante, d. h., $w = \sum_{k=0}^{j_0-1} \binom{n}{k}$ sei erfüllt. Es gelten außerdem $a = (j_0 - 1)!$ und $b = (n - j_0 + 1)!$.

Induktionsschritt Zu zeigen ist die Aussage zu Beginn von Schleifendurchlauf $j = j_0+1$, also nachdem Zeilen 11 bis 14 in Durchlauf j_0 ausgeführt wurde. Zu Beginn der Schleife j_0 gelten nach Induktionsvoraussetzung $w = \sum_{k=0}^{j_0-1} \binom{n}{k}$, $a = (j_0 - 1)!$ und $b = (n - j_0 + 1)!$. In Zeile 11 wird a auf $a \cdot j_0 = (j_0 - 1)! \cdot j_0 = j_0! = (j-1)!$, in Zeile (12) b auf $(n-j_0+1)!/(n-j_0+1) = (n-j_0)! = (n-j+1)!$ und nach Zeile (13) ist

$$w = \left(\sum_{k=0}^{j_0-1} \binom{n}{k}\right) + \frac{z}{a \cdot b} = \left(\sum_{k=0}^{j_0-1} \binom{n}{k}\right) + \frac{n!}{j_0! \cdot (n-j_0)!} = \sum_{k=0}^{j_0} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{n}{k}.$$

Das heißt Invariante $A_2(j)$ ist erfüllt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung der Schleifeninvariante zu Beginn jeder Schleifeniteration und vor dem Schleifenaustritt.

d) Wir zeigen nun, dass das gesamte Programm für eine Eingabe n den Wert 2^n zurückgibt. Falls $n = 0$ ist, ist die Bedingung in Zeile 2 nicht erfüllt, das heißt, das direkt in Zeile 16 der in Zeile 1 dem x zugewiesene Wert $1 = 2^0$ zurückgegeben wird.

   Falls $n > 0$ ist, gelten die Schleifeninvarianten aus den vorherigen Teilaufgaben, insbesondere $A_2(n)$ nach Schleifenaustritt aus der While-Schleife. Das heißt, $w = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$. Mit $\binom{n}{n} = 1$ erhält x in Zeile 15 den Wert $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, der in Zeile 16 zurückgegeben wird. Wir setzen laut Aufgabenstellung voraus, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ gilt. Der Beweis hierzu bietet eine zusätzliche Übung zum Prinzip der vollständigen Induktion. $\square$

Präsenzaufgabe 2.2: (Induktionsbeweise: Fibonacci-Zahlen)

Die Fibonacci-Zahlen sind folgendermaßen definiert:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n > 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} f(n+1) & f(n) \\ f(n) & f(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen gleich der $(n+2)$-ten Fibonacci-Zahl minus 1 ist, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = f(n+1) - 1.$$

c) Der sogenannte goldene Schnitt ϕ is definiert als $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $f(n) = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$ ist.

Lösung:

a) **Induktionsanfang** Für $n = 1$ ist die Behauptung korrekt, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} f(2) & f(1) \\ f(2) & f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Induktionsvoraussetzung Die Behauptung gelte für ein festes n.

   Induktionsschluss Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{I.V.}}{=} \begin{pmatrix} f(n+1) & f(n) \\ f(n) & f(n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 \cdot f(n+1) + 1 \cdot f(n) & 1 \cdot f(n+1) + 0 \cdot f(n) \\ 1 \cdot f(n) + 1 \cdot f(n-1) & 1 \cdot f(n) + 0 \cdot f(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(n+2) & f(n+1) \\ f(n+1) & f(n) \end{pmatrix}.$$

b) **Induktionsanfang** Für $n = 1$ gilt $f(0) = 0 = f(2) - 1$.

Induktionsvoraussetzung Die Behauptung gelte für ein festes n.

Induktionsschluss Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \overset{\text{I.V.}}{=} f(n) + f(n+1) - 1 = f(n+2) - 1.$$

Somit gilt die Behauptung auch für $n + 1$.

c) **Induktionsanfang** Für $n = 0$ ist die Behauptung korrekt, da $\frac{\phi^0 - (1-\phi)^0}{\sqrt{5}} = 0 = f(0)$ gilt.
Für $n = 1$ ist die Behauptung auch korrekt, da

$$\frac{\phi^1 - (1-\phi)^1}{\sqrt{5}} = \frac{2\phi - 1}{\sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}} = 1 = f(1).$$

Induktionsvoraussetzung Sei $n > 1$ beliebig. Die Behauptung gelte für alle $n' < n$.

Induktionsschluss Es gilt

$$\begin{aligned} f(n) = f(n-1) + f(n-2) &\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{\phi^{n-1} - (1-\phi)^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-2} - (1-\phi)^{n-2}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^{n-2}(\phi+1) - (1-\phi)^{n-2}(1-\phi+1)}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$(1) \quad \phi + 1 = \phi^2 \quad \text{und} \quad (2) \quad (2 - \phi) = (1 - \phi)^2.$$

Es gelten

$$(1)\ \ \phi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \phi^2;$$

$$(2)\ \ (2-\phi) = \frac{4-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = (1-\phi)^2.$$