DAP2 – Präsenzübung 14

Besprechung: 26.07.2017 — 28.07.2017

Präsenzaufgabe 14.1: (Knotengrade und Eulerkreise)

a) Zeigen Sie, dass es in einem ungerichteten Graph mit einer ungeraden Knotenanzahl immer einen Knoten mit geradem Knotengrad gibt.

b) Ein *Eulerkreis* ist ein Kreis, der alle Kanten eines Graphen genau einmal besucht. Finden Sie eine Bedingung, die ein ungerichteter, zusammenhängender Graph genau dann erfüllt, wenn er einen Eulerkreis besitzt. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Ein ungerichteter Graph heißt *regulär*, wenn jeder Knoten den gleichen Knotengrad hat. Zeigen Sie mit Hilfe der Aussagen aus den Aufgabenteilen a) und b), dass ein zusammenhängender, regulärer Graph mit einer ungeraden Knotenanzahl immer einen Eulerkreis besitzt.

Lösung:

a) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $n = |V|$ ungerade. Angenommen, alle Knoten haben einen ungeraden Knotengrad, d. h., für alle $v \in V$ gibt es ein $k_v \in \mathbb{N}$, sodass $d(v) = 2k_v + 1$ gilt. Die Summe der Knotengrade aller Knoten im Graphen $D = \sum_{v \in V} d(v)$ ist gerade, da es für jede Kante genau zwei Knoten gibt, zu deren Knotengrad sie beiträgt. Allerdings gilt:
$$D = \sum_{v \in V} (2k_v + 1) = 2 \cdot k + n \cdot 1,$$
für $k = \sum_{v \in V} k_v$. Da n ungerade ist, ist D also ungerade; ein Widerspruch. Also war die Annahme falsch, und es gibt einen Knoten mit geradem Knotengrad.

b) Ein ungerichteter, zusammenhängender Graph besitzt einen Eulerkreis genau dann, wenn jeder Knoten einen geraden Knotengrad hat.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph. Angenommen, G besitzt einen Eulerkreis. Dann gilt für jeden Knoten $v \in V$: Der Eulerkreis durchläuft alle an v anliegenden Kanten. Für jede Kante, die auf dem Eulerkreis zu v hinführt, gibt es also auch eine Kante auf diesem Eulerkreis, die wieder von v wegführt. Also muss die Anzahl der anliegenden Kanten, d. h. der Knotengrad, gerade sein.

Angenommen, alle Knoten in V haben einen geraden Knotengrad. Sei $v_1 \in V$ ein beliebiger Startknoten. Betrachten wie eine beliebige Kante (v_1, v_2) inzident zu v_1, gibt es da v_2 einen geraden Knotengrad hat, eine weitere zu v_2 inzident Kante. Betrachten wir fortlaufend solche neuen Kanten, erhalten wir einen Weg, der in v_1 endet. Falls bereits alle Kanten besucht wurden, ist dies ein Eulerkreis. Ansonsten betrachten wir den Graphen, der durch alle bisher nicht durchlaufenen Kanten induziert wird. Da für jeden Knoten eine gerade Anzahl an Kanten entfernt wurde, besitzt jeder Knoten im neuen Graphen wieder eine gerade Anzahl Knoten. Wir können also für jede Zusammenhangskomponente sukzessive weitere Kreise finden, der von einem Startknotenbis alle Kanten besucht wurden. Da der jeweils ursprüngliche Graph zusammenhängend war, können wir einen Startknoten wählen, der auf dem urspünglichen Kreis lag. Dadurch lassen sich die Kreise so kombinieren, dass sie insgesamt einen Eulerkreis ergeben. Auf diesem Prinzip basiert auch ein Algorithmus, der linear in der Kantenanzahl einen Eulerkreis findet.

Alternativ sind natürlich auch andere Aussagen korrekt, z. B.: Ein ungerichteter Graph besitzt einen Eulerkreis genau dann, wenn die Kantenmenge des Graphen die Vereinigung von Kanten aus paarweise disjunkten Kreisen ist.

c) Sei G ein ungerichteter regulärer Graph mit einer ungeraden Knotenanzahl n. Nach Aufgabenteil a) enthält G mindestens einen Knoten mit geradem Knotengrad. Da G regulär ist, ist dies der Knotengrad jedes Knoten. Da also alle Knoten einen geraden Knotengrad haben, folgt nach Aufgabenteil b), dass G einen Eulerkreis besitzt.

Präsenzaufgabe 14.2: (Approximationsalgorithmus für Matchings)

Ein *Matching* M in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge der Kantenmenge, wobei keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten haben. Ein Matching M heißt *Maximum-Matching*, falls es kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt. Mit $\textsc{Match}(G) = |M|$ bezeichnen wir die Größe eines Maximum-Matchings in G.

Sie haben in der Vorlesung bereits das Knotenübderdeckungsproblem kennengelernt. Zur Erinnerung: Eine Menge $U \subseteq V$ heißt Knotenüberdeckung, wenn für jede Kante $(u, v) \in E$ mindestens einer der Endpunkte u, v in U enthalten ist. Mit $\textsc{Cover}(G) = |U|$ bezeichnen wir die Größe einer minimalen Knotenüberdeckung in G.

Ein Matching M heißt *inklusionsmaximal*, falls es keine Kante $e \in E \setminus M$ gibt, so dass $M \cup \{e\}$ ein gültiges Matching ist.

a) Zeigen Sie, dass $\textsc{Cover}(G) \geq \textsc{Match}(G)$ für alle Graphen G gilt.

b) Entwerfen Sie eine Algorithmus, der in einem Graphen $G = (V, E)$ ein inklusionsmaximales Matching berechnet und dessen Laufzeit durch $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ beschränkt ist. Nehmen Sie hierfür an, dass der Graph in der Adjazenzlistendarstellung gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass die Größe eines inklusionsmaximalen Matchings eine 2-Approximation für die Größe eines Maximum-Matchings ist und geben Sie einen Graphen an, in dem ein inklusionsmaximales Matching existiert, das diesen Approximationsfaktor erreicht.

Lösung:

a) Jede Kante in einem Matching kann von höchstens einem Knoten aus einer Knotenüberdeckung abgedeckt werden. Ansonsten wäre die Matchingeigenschaft verletzt. Somit gilt die Behauptung.

b) Wir initialisieren unser Matching $M = \emptyset$. In einem Array A der Länge $|V|$ speichern wir uns, welche Knoten bereits von M abgedeckt sind. Wir iterieren durch alle Knoten $v \in V$. Falls v noch nicht von M abgedeckt ist ($A[v] = 0$), suchen wir nach einen Nachbarn u, der auch noch nicht von M abgedeckt ist. Dann fügen wir (u, v) zu M hinzu und setzen $A[u] = A[v] = 1$. Jeder Knoten wird genau einmal in der Schleife angeschaut und jede Kante wird maximal zweimal betrachtet. Somit ist die Laufzeit beschränkt durch $O(|V| + |E|)$.

c) Sei M ein inklusionsmaximales Matching in $G = (V, E)$. Da jede Kante in E mindestens einen Knoten gemeinsam mit einer Kante aus M hat, sind die $2 \cdot |M|$ Knoten, die inzident zu den Kanten von M sind, auch eine Knotenüberdeckung in G. Nach 14.1. a) gilt somit $2 \cdot |M| \geq \textsc{Cover}(G) \geq \textsc{Match}(G)$ und damit ist $\textsc{Match}(G)/|M| \leq 2$.

Ein einfaches Beispiel besteht aus 4 Knoten a, b, c, d und den drei Kanten $(a, b), (b, c), (c, d)$. Die Kante $\{(b, c)\}$ ist ein inklusionsmaximales Matching, wohingegen die Größe des Maximum-Matchings $\{(a, b), (c, d)\}$ zwei ist.