DAP2 – Präsenzübung 7

Besprechung: 07.06.2017 — 09.06.2017

Präsenzaufgabe 7.1: (Dynamische Programmierung)

In einer Ballettschule möchte die Verwaltung die ganze Fläche einer Wand der Breite $W \in \mathbb{N}$ und Höhe h mit Spiegeln bedecken. Dafür sollten die Vorräte der Spiegel auf Lager einer Glaserei genutzt werden. Es sind n Spiegelstückbreiten vorhanden, jede der Höhe h und je einmal auf Lager vorhanden. Die Breite der Spiegelstücke sind im Array $B[1..n]$ gespeichert, und die Preise dieser Spiegelstücke sind $P[1..n]$. Es gilt $B[i], P[i] \in \mathbb{N}$, für $1 \leq i \leq n$.

Beim Einbau des Spiegels darf man die Spiegelstücke kürzen, muss aber den ganzen Preis bezahlen. Wir wollen die Gesamtkosten für die Spiegel minimieren, um die Gesamtbreite der Wand mit Spiegeln zu bedecken.

a) Seien $K[i, w]$ die minimalen Kosten für die Bedeckung einer Wand der Breite w, $0 \leq w \leq W$, wobei die Spiegelstücke der Breite $B[1], \ldots, B[i]$ verwendet werden dürfen. Geben Sie eine rekursive Formulierung für die Berechnung von $K(i, w)$ an.

b) Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode als dynamisches Programm an, welcher die rekursive Formulierung aus Aufgabenteil 7.1.a) umsetzt und den Wert der minimalen Kosten für die Wand der Breite W mit allen Spiegelstücken der Breiten $B[1], \ldots, B[n]$ zurückgibt. Welche Spiegelstücke verwendet werden, muss dabei nicht berechnet werden.

c) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer rekursiven Form.

Lösung:

Unsere Problemstellung kann wie folgt beschrieben werden:

Gegeben: Die Breite W den Galerie und die Breiten $B[1], \ldots, B[n]$ und die Preise $P[1], \ldots, P[n]$ der n verfügbaren Spiegelstücke, in den zwei Arrays B und P gespeichert.

Ziel: Gesucht: Ein minimale Preis der verwendeten Spiegelstücke, deren Breiten sich zu mindestens W aufaddieren, wobei jede Spiegel nur einmal verwendet werden dürfen.

a) Wir können den minimalen Preis von Spiegeln $K(i, w)$ für eine Wand der Breite w wenn jeweils ein Stück der Spiegel mit Breiten $B[1], \ldots, B[i]$ verfügbar ist, in der folgenden Weise rekursiv berechnen:

$$K(i, w) = \begin{cases} 0 & \text{falls } w \leq 0 \\ +\infty & \text{falls } i = 0 \text{ und } w > 0 \\ \min\{K[i-1, w], P[i] + K[i-1, w - B[i]]\} & \text{falls } i > 0 \end{cases}$$

Die Werte $+\infty$ stellen den unmöglichen Fall dar. Wenn wir den Spiegel i betrachten, können wir entweder diese verwenden ($P[i] + K[i-1, w-B[i]]$) und die verbliebene Länge ist $w - B[i]$; oder nicht verwenden ($K[i-1, w]$), wenn wir gleichen Problem haben, aber ohne den Spiegel i. Der letzte verwendete Spiegel kann gekürzt werden, deswegen ist $K[i, w] = 0$ wenn $w \leq 0$ ist.

b) Auf der Basis der rekursiven Definition ergibt sich das folgende dynamische Programm zur Berechnung von K für die Wandbreite W, wobei alle Spiegel $1, \dots n$ verfügbar sind:

```
Spiegel(Array B, Array P, int W:
n ← length(B)
K ← new Array K[0..n, 0..W]
K[0] ← 0
for w ← 1 to W do
    K[0, w] ← +∞
for i ← 1 to n do
    K[i, 0] ← 0
    for w ← 1 to W do
        if w ≥ B[i] then
            K[i, w] ← min{K[i − 1, w], P[i] + K[i − 1, w − B[i]]}
        else
            K[i, w] ← min{K[i − 1, w], P[i]}
return K[n, W]
```

Das dynamische Programm setzt die rekursive Definition von K direkt um. Da nur auf schon berechnete Matrixelemente $K[i, w]$ zugegriffen wird, folgt die Korrektheit des Algorithmus aus der Korrektheit der rekursiven Definition von K.

c) Wir zeigen die Korrektheit der rekursiven Form mittels Induktion.

Behauptung: $K[i, w]$ enthält den minimalen Preis der verwendeten Spiegel $1..i$ um die Wandbreite w auzulegen, für alle natürlichen Zahlen i und w. Dabei sei die Induktionsvariable i.

Induktionsanfang Wenn wir keinen Spiegel verwenden dürfen ($i = 0$), ist offensichtlich der Preis für die Breiten $w \leq 0$ gleich 0 ($K[0, w] = 0$ für $w \leq 0$), aber für alle positiven Breiten ist die Abdeckung der Wand ohne Spiegel unmöglich, d.h. $K[0, w] = +\infty$ für $w \geq 1$.

Induktionsvoraussetzung Für alle $i' < i$ und alle w berechnet $K[i, w]$ den minimalen Preis für Abdeckung der Wand der Breite w mit den Spiegeln $1, \dots i'$ korrekt.

Induktionsschluss Wir betrachten den Fall mit den Spiegeln $1, \dots, i$ und wir beweisen dass es für alle w gilt.

Für $w \leq 0$ müssen wir keinen Spiegel verwenden und der Preis ist $K[i, 0] = 0$ und $K[i, w] = 0$ wenn $w < 0$. Sei $w > 0$ beliebig ausgewählt. Falls $K[i, w]$ keine optimale Abdeckung wäre, sondern gäbe es eine $v < K[i, w]$, sodass v die Kosten der Abdeckung der Breite w mit den Spiegeln $1, \dots, i$ darstellt, können folgende zwei Fälle gelten:

Fall 1. Spiegel i wird in Abdeckung v genutzt. Dann $v - P[i] < K[i-1, w-B[i]]$ und man muss nur noch die Breite $w - B[i] < w$ abdecken, wobei die Spiegel $1, \dots i-1$

verwendet werden. Das ist aber in der I.V. angenommen, dass $K[i-1, w-B[i]]$ optimalen Wert enthält, und $v - P[i]$ nicht die Kosten solcher Abdeckung sein können. Deswegen kann nicht eine solche Abdeckung v existieren.

Fall 2. Spiegel i wird nicht in Abdeckung v genutzt. Denn gilt $v < K[i-1, w]$ und v ist die Abdeckung der Breite w mit den Spiegeln $1, \ldots, i-1$. Wir haben schon in der I.V. angenommen, dass $K[i-1, w]$ optimalen Preis in diesen Fall enthält, und v kann nicht besser davon sein.

Somit kann nicht eine bessere Abdeckung als $\min\{K[i-1, w], P[i]+K[i-1, w-B[i]]\}$ existieren und $K[i, w]$ ist optimal für den Fall der Breite w, wenn wir nur die Spiegel $1, \ldots, i$ verwenden dürfen.

Die Behauptung gilt nach dem Induktionsprinzip für alle natürlichen i und w, und deswegen gilt auch für $i = n$ und $w = W$, womit der berechnete Preis $K[n, W]$ optimal ist.

Anmerkung: Es ist leicht zu sehen, dass die Laufzeit des Algorithmus in $O(nW)$ ist.

□

Präsenzaufgabe 7.2: (Dynamische Programmierung)

In der Ballettschule aus Aufgabe 7.1 kam das Angebot einer anderen Glaserei, die die gleiche Spiegelbreiten $B[1..n]$ mit gleichen Preisen $P[1..n]$ anbieten kann, aber von jeder Spiegelbreite können beliebig viele Stücke bestellt werden. Der Rest der Bedingungen bleibt unberührt.

a) Geben Sie eine rekursive Form an, die die minimalen Kosten der Spiegel beschreibt.

b) Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode als dynamisches Programm an, welcher die rekursive Formulierung aus Aufgabenteil 7.2.a) umsetzt und den Wert der minimalen Kosten für die Wand der Breite W mit allen Spiegelstücken der Breiten $B[1]. \ldots, B[n]$ zurückgibt. Welche Spiegelstücke verwendet werden, muss dabei nicht berechnet werden.

c) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer rekursiven Form.

Lösung:

Diese Lösung lehnt sich auf der Lösung der Aufgabe 7.1. an.

a) Wir können den minimalen Preis von Spiegeln $K(i, w)$ für eine Wand der Breite w wenn die Spiegel mit Breiten $B[1], \ldots, B[i]$ verfügbar sind, in der folgenden Weise rekursiv berechnen:

$$K(i, w) = \begin{cases} 0 & \text{falls } w \leq 0 \\ +\infty & \text{falls } i = 0 \text{ und } w > 0 \\ \min\{K[i-1, w], P[i] + K[i, w-B[i]]\} & \text{falls } i > 0 \end{cases}$$

Die Werte $+\infty$ stellen den unmöglichen Fall dar. Der letzte verwendete Spiegel kann gekürzt werden, deswegen ist $K[i, w] = 0$ wenn $w \leq 0$ ist.

Einziger Unterschied zur Aufgabe 7.1 ist: wenn wir den Spiegel i betrachten, können wir entweder diese verwenden $(P[i] + K[i, w - B[i]])$ und die verbliebene Länge ist $w - B[i]$, wobei den Spiegel i können wir weiter nehmen; oder nicht verwenden $(K[i - 1, w])$, wenn wir gleichen Problem haben, aber ohne den Spiegel i.

b) Auf der Basis der rekursiven Definition ergibt sich das folgende dynamische Programm zur Berechnung von K für die Wandbreite W, wobei alle Spiegel $1, \ldots, n$ beliebig oft verfügbar sind:

Spiegel(Array B, Array P, int W:

```
n ← length(B)
K ← new Array K[0..n, 0..W]
K[0] ← 0
for w ← 1 to W do
    K[0, w] ← +∞
for i ← 1 to n do
    K[i, 0] ← 0
    for w ← 1 to W do
        if w ≥ B[i] then
            K[i, w] ← min{K[i − 1, w], P[i] + K[i, w − B[i]]}
        else
            K[i, w] ← min{K[i − 1, w], P[i]}
return K[n, W]
```

ALT

c) Wir zeigen dass die obige rekursive Form den optimalen Preis für Abdeckung der Wand der Breite w mit Spiegeln $1, \ldots, i$ darstellt, mittels Induktion für alle i und alle Breiten w. Dabei läuft die äußere Induktion über i.

I.A.1. Wenn $i = 0$ ist (kein Spiegel vorhanden), denn ist im Fall $w \leq 0$ (Breite 0 oder kleiner) der minimale Preis der verwendeten Spiegel $K[0, w] = 0$, ansonsten $(w > 0)$ ist die Wand nicht zu abdecken, was durch ∞ korrekt bezeichnet ist.

I.V.1. Sei der minimale Preis $K(i', w)$ wenn die Spiegel $1, \ldots, i'$ zur Verfügung stehen, für beliebiges aber festes $i' < i$ und für alle Wandbreiten w korrekt berechnet.

I.S.1. Hier müssen wir zeigen, dass die Behauptung gilt für nächste i **und alle** w. Dabei müssen wir die verschachtelte Induktion über w einsetzen.

I.A.2. Wenn $w = 0$ (und also $w < 0$), ist der Preis die Wand abzudecken gleich 0, da man keinen Spiegel nutzen muss. Somit gilt die Behauptung im Induktionsanfang.

I.V.2 Sei $K[i, w']$ der minimale Preis für alle $w' < w$ korrekt berechnet.

I.S.2. Nehmen wir an, dass die Wand der Breite w abdeckbar mit den Spiegeln $1, \ldots, i$ mit dem Preis $v < K[i, w] = \min\{K[i - 1, w], P[i] + K[i, w - B[i]]\}$ ist. Denn betrachten wir wieder zwei Fälle:

Spiegel i wird nicht verwendet. Denn haben wir die Abdeckung der Wande der Breite w mit Spiegeln $1, \ldots, i - 1$ mit dem Preis $v < K[i - 1, w]$, was widerspricht der I.V.1.

Spiegel i wird verwendet. Denn wäre es auch möglich, mit dem Preis $v - P[i]$ die Wand der Breite $w - B[i]$ abzudecken, und es würde gelten, dass $v - P[i] < K[i, w - B[i]]$. Das widerspricht der I.V.2, da $w - B[i] < w$.

Somit gilt die Behauptung, dass $K[i, w]$ der minimale Preis für Abdeckung der Wand der Breite w mit Spiegeln $1, \dots, w$ enthält, für gegebene i und für alle w.

Damit haben wir bewiesen, dass der minimale Preis für Abdeckung der Wand der Breite w mit Spiegeln $1, \dots, i$ durch $K[i, w]$ korrekt berechnet wurde, für alle i und alle w, was wir beweisen wollten.

$\square$