Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

Graphalgorithmen

Darstellung von Graphen

- Adjazenzlisten (dünne Graphen, $|E| \ll |V|^2$)
- Adjazenzmatrix (dichte Graphen, $|E|$ nah an $|V|^2$)

Arten von Graphen

- Ungerichtet, gerichtet
- Ungewichtet, gewichtet

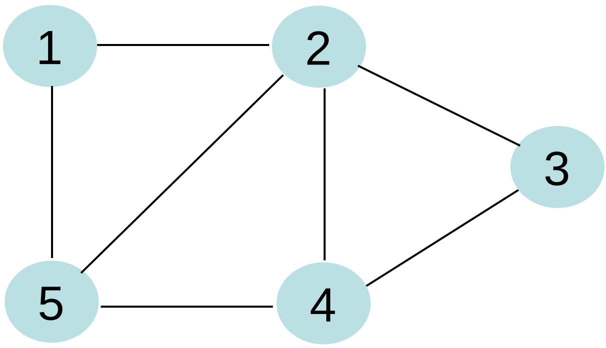
Graphalgorithmen

Adjazenzmatrixdarstellung

- Knoten sind nummeriert von 1 bis $|V|$
- $|V| \times |V|$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit
- $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (i,j) \in E \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$
- Bei ungerichteten Graphen gilt $A = A^T$

Graphalgorithmen

Beispiel



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Graphalgorithmen

Adjazenzlistendarstellung

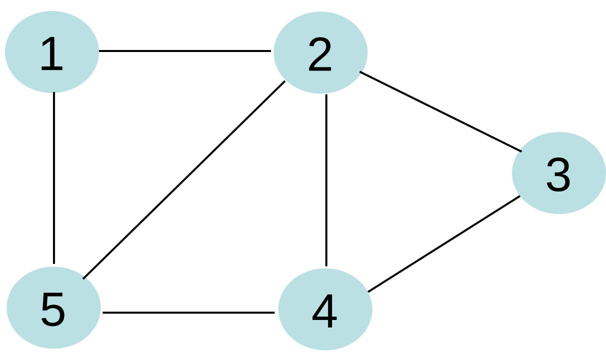
- Feld Adj mit $|V|$ Listen (eine pro Knoten)
- Für Knoten v enthält $\mathrm{Adj}[v]$ eine Liste aller Knoten u mit $(v,u) \in E$
- Die Knoten in $\mathrm{Adj}[u]$ heißen zu u adjazent
- Ist G ungerichtet, so gilt: $v \in \mathrm{Adj}[u] \Leftrightarrow u \in \mathrm{Adj}[v]$

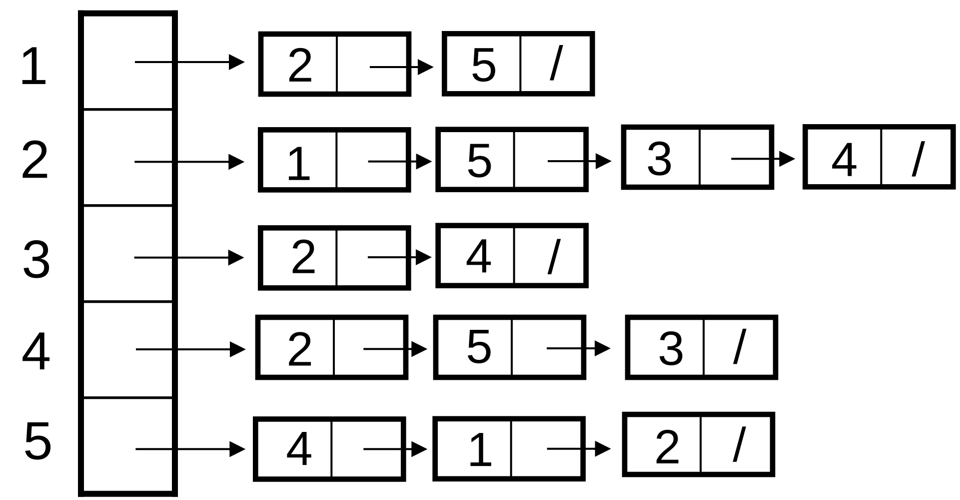
Gewichtete Graphen

- Kanten haben Gewicht gegeben durch Funktion $w\colon E \to \mathbb{R}$
- Gewicht $w(u,v)$ von Kante (u,v) wird mit Knoten v in u's Adjazenzliste gespeichert

Graphalgorithmen

Beispiel

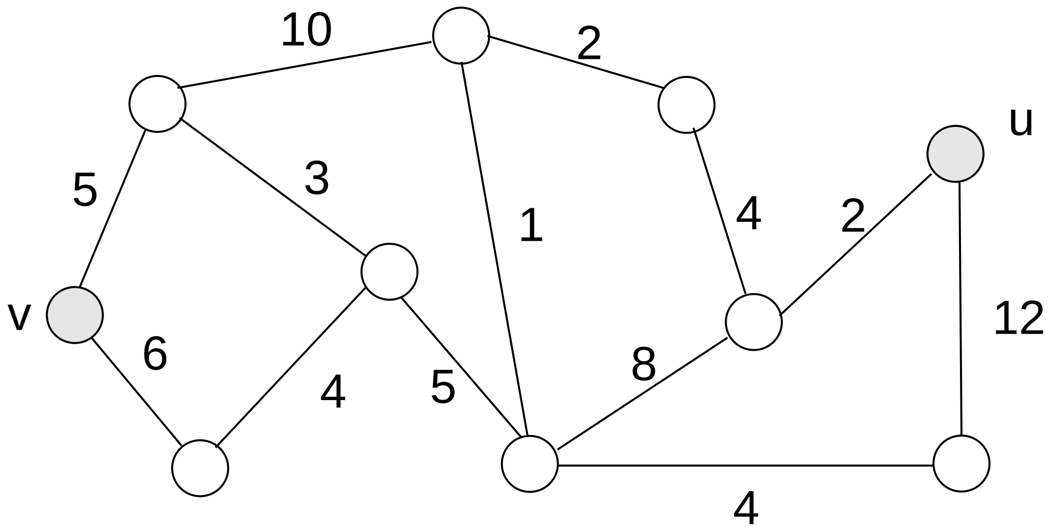




Graphalgorithmen

Kürzeste Wege in Graphen

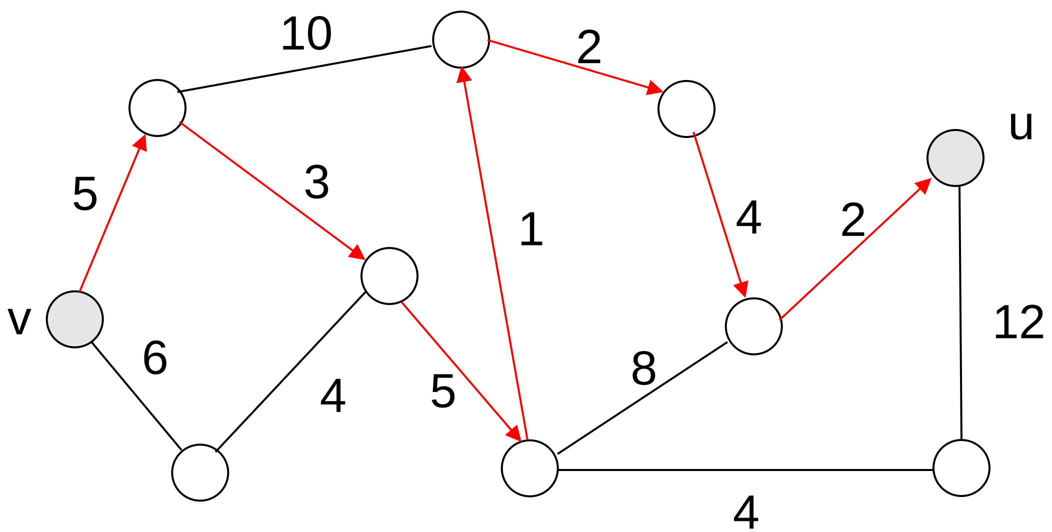
- Gegeben (möglicherweise gewichteter) Graph $G = (V, E)$
- Frage: Was ist der kürzeste Weg Knoten v nach Knoten u?
- Länge des Weges: Summe der Kantengewichte
  (bzw. Anzahl Kanten, wenn ungewichtet)



Graphalgorithmen

Kürzeste Wege in Graphen

- Gegeben (möglicherweise gewichteter) Graph $G = (V, E)$
- Frage: Was ist der kürzeste Weg Knoten v nach Knoten u?
- Länge des Weges: Summe der Kantengewichte
  (bzw. Anzahl Kanten, wenn ungewichtet)



Graphalgorithmen

Single Source Shortest Path (SSSP)

- Startknoten s
- Aufgabe: Berechne kürzeste Wege von s zu allen anderen Knoten

All Pairs Shortest Path (APSP)

- Aufgabe: Berechne kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren

SSSP in ungewichteten Graphen (Breitensuche)

- Graph in Adjazenzlistendarstellung
- Startknoten s
- Nutze Kanten von G, um alle Knoten zu finden, die von s aus erreichbar sind
- Finde kürzeste Distanz (Anzahl Kanten) zu jedem anderen Knoten

Graphalgorithmen

Breitensuche

- Löst SSSP auf ungewichteten Graphen
- Bearbeitet den Graphen „schichtweise“ nach Entfernung vom Startknoten: Besucht zuerst alle Knoten mit Entfernung 1; dann alle mit Entfernung 2; usw.

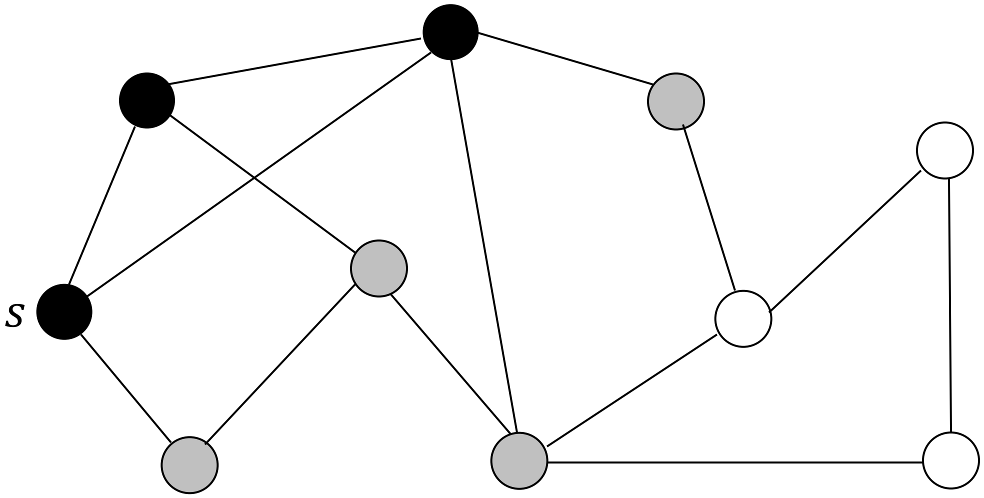
Graphalgorithmen

Technische Invariante (Breitensuche)

- Knoten haben 3 Farben: weiß, grau und schwarz
- Zu Beginn: Alle Knoten sind weiß
- Ein nicht-weißer Knoten heißt „entdeckt"
- Unterscheidung grau-schwarz dient zur Steuerung des Algorithmus
- Wenn $(u, v) \in E$ ist und u ist schwarz, dann sind seine adjazenten Knoten grau oder schwarz
- Graue Knoten können adjazente weiße Knoten haben

Graphalgorithmen

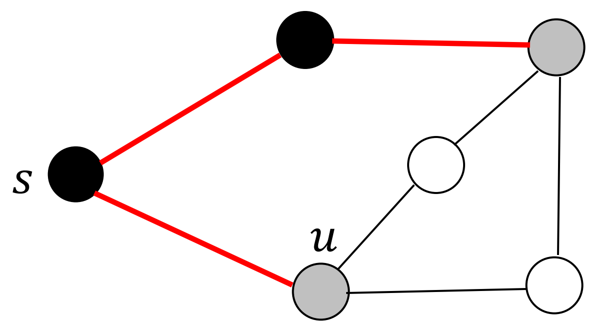
Beispiel (mögl. Zustand bei einer Breitensuche)



Graphalgorithmen

Breitensuche

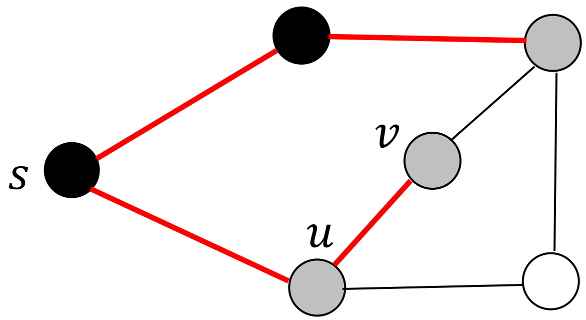
- Baut Breitensuche Baum (BFS Baum)
- Zu Beginn enthält der Baum nur die Wurzel, nämlich s
- Wenn weißer Knoten beim Durchsuchen der Adjazenzliste eines entdeckten Knotens entdeckt wird, dann werden v und (u, v) dem Baum hinzugefügt
- u ist dann Vaterknoten von v



Graphalgorithmen

Breitensuche

- Baut Breitensuche Baum (BFS Baum)
- Zu Beginn enthält der Baum nur die Wurzel, nämlich s
- Wenn weißer Knoten beim Durchsuchen der Adjazenzliste eines entdeckten Knotens entdeckt wird, dann werden v und (u, v) dem Baum hinzugefügt
- u ist dann Vaterknoten von v



Knoten v wird von Knoten u aus entdeckt

Graphalgorithmen

Datenstruktur Schlange

- Operationen: $\mathrm{head}, \mathrm{enqueue}, \mathrm{dequeue}$
- head: Gibt Referenz auf das erste in der Schlange gespeicherte Element zurück
- $\mathrm{enqueue}$: Fügt neues Element ans Ende der Schlage
- $\mathrm{dequeue}$: Entfernt Kopf der Schlange

Wir verwenden

- Doppelt verkettete Liste
- Zusätzlich halten wir Zeiger auf das letzte Element aufrecht
- Alle Operationen in $\mathbf{O}(1)$ Zeit

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow \mathrm{head}[Q]$
    for each $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
        if $\mathrm{color}[v] = \mathrm{weiß}$ **then**
            $\mathrm{color}[v] \leftarrow \mathrm{grau}$
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
            $\mathrm{enqueue}(Q, v)$
    $\mathrm{dequeue}(Q)$
    $\mathrm{color}[u] \leftarrow \mathrm{schwarz}$

Graphalgorithmen

$d[u]$: Abstand zu s (zu Beginn ∞)
$\pi[u]$: Vaterknoten von u (zu Beginn **nil**)

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $u \leftarrow \text{head}[Q]$
4.   **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5.   **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\text{enqueue}(Q, v)$
9. $\text{dequeue}(Q)$
10. $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

```
„initialisiere BFS“
while Q ≠ ∅ do
    u ← head[Q]
    for each v ∈ Adj[u] do
        if color[v] = weiß then
            color[v] ← grau
            d[v] ← d[u] + 1; π[v] ← u
            enqueue(Q, v)
    dequeue(Q)
    color[u] ← schwarz
```

Für jeden Knoten u:
- $\text{color}[u] = \text{weiß}$
- $d[u] = \infty$
- $\pi[u] = \textbf{nil}$

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow \text{head}[Q]$
    for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
        if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
            $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
            $\text{enqueue}(Q, v)$
    $\text{dequeue}(Q)$
    $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

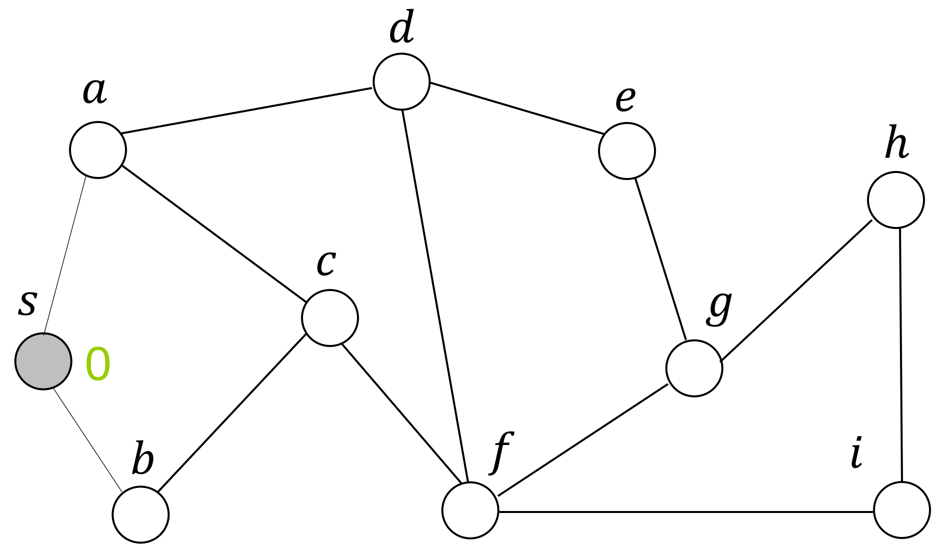
<u>Für jeden Knoten u:</u>
- $\text{color}[u] = \text{weiß}$
- $d[u] = \infty$
- $\pi[u] = \textbf{nil}$

<u>Für Knoten s:</u>
- $\text{color}[s] = \text{grau}$
- $d[s] = 0$
- $\pi[s] = \textbf{nil}$
- s wird in Schlange Q eingefügt

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

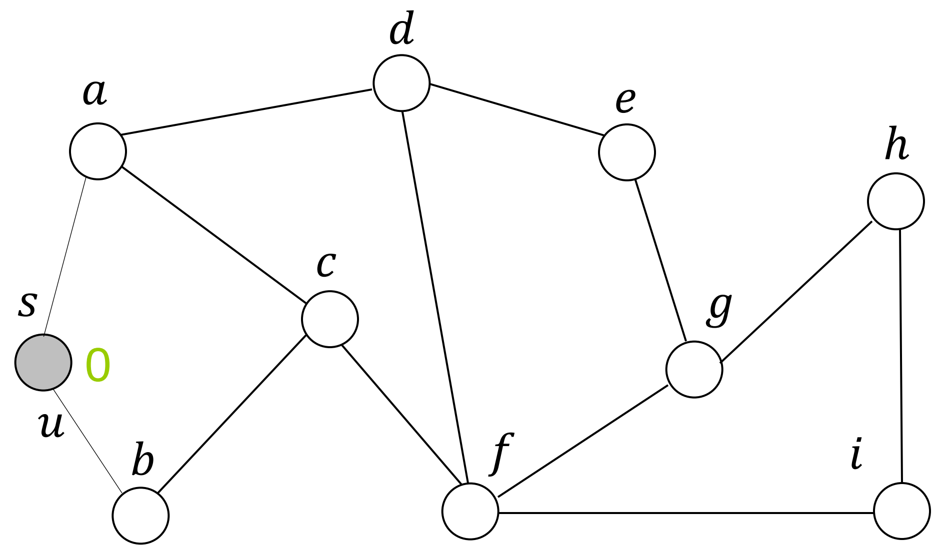
1. „initialisiere BFS“
2. $\boxed{\textbf{while } Q \neq \emptyset \textbf{ do}}$
3. $\quad u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. $\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. $\quad\quad$ **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\quad\quad\quad \text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\quad\quad\quad \text{enqueue}(Q, v)$
9. $\quad \text{dequeue}(Q)$
10. $\quad \text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: s

Graphalgorithmen

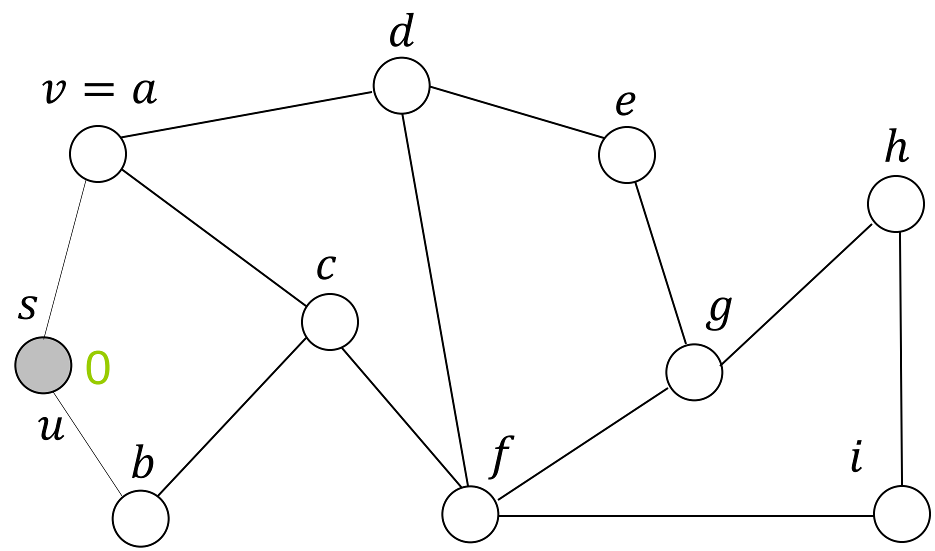
BFS(G, s)
„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  $\boxed{u \leftarrow \text{head}[Q]}$
  for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
    if color$[v]$ = weiß **then**
      color$[v] \leftarrow$ grau
      $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
      enqueue(Q, v)
  dequeue(Q)
  color$[u] \leftarrow$ schwarz



Q: s

Graphalgorithmen

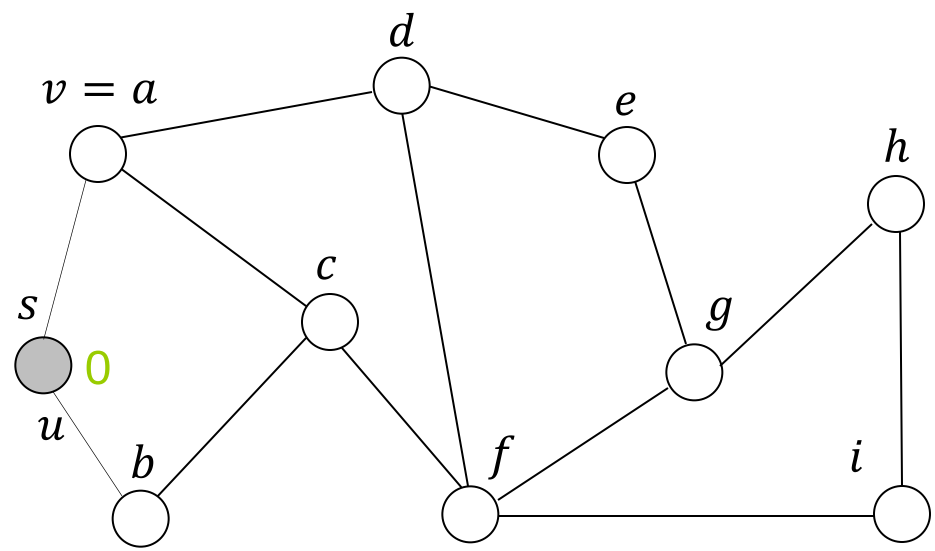
BFS(G, s)
1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $\quad u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. $\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. $\quad\quad$ **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\quad\quad\quad \text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\quad\quad\quad \text{enqueue}(Q, v)$
9. $\quad \text{dequeue}(Q)$
10. $\quad \text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: s

Graphalgorithmen

```
BFS(G, s)
„initialisiere BFS“
while Q ≠ ∅ do
    u ← head[Q]
    for each v ∈ Adj[u] do
        if color[v] = weiß then
            color[v] ← grau
            d[v] ← d[u] + 1; π[v] ← u
            enqueue(Q, v)
    dequeue(Q)
    color[u] ← schwarz
```

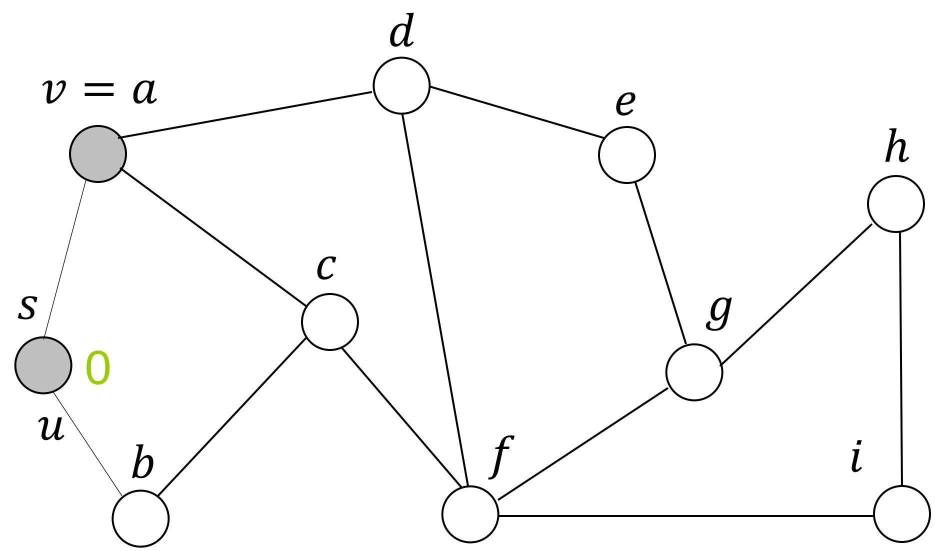


Q: s

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $\quad u \leftarrow \mathrm{head}[Q]$
4. $\quad$ **for each** $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
5. $\quad\quad$ **if** $\mathrm{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\quad\quad\quad \boxed{\mathrm{color}[v] \leftarrow \mathrm{grau}}$
7. $\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\quad\quad\quad \mathrm{enqueue}(Q, v)$
9. $\quad \mathrm{dequeue}(Q)$
10. $\quad \mathrm{color}[u] \leftarrow \mathrm{schwarz}$

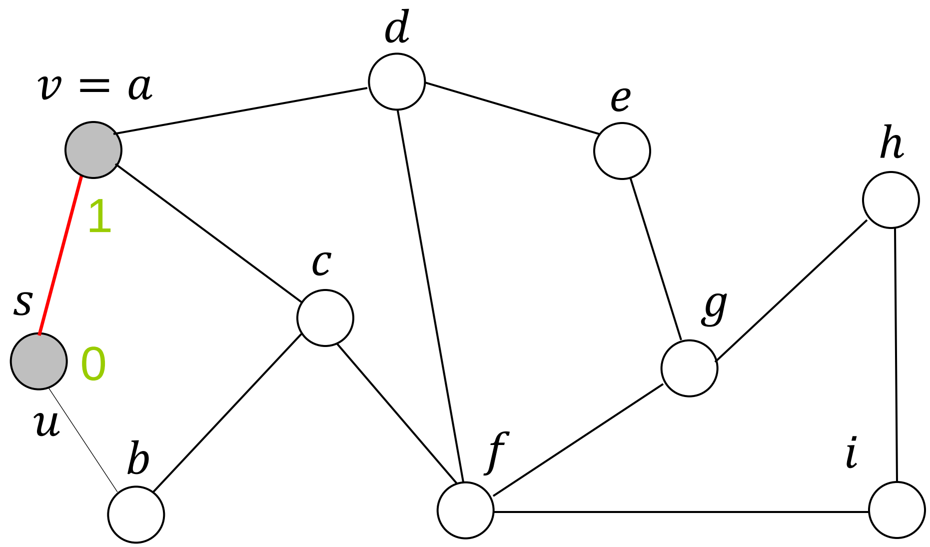


Q: s

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow \text{head}[Q]$
    for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
        if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
            $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
            $\boxed{d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u}$
            $\text{enqueue}(Q, v)$
    $\text{dequeue}(Q)$
    $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: s

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $u \leftarrow \text{head}[Q]$

  for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**

    if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**

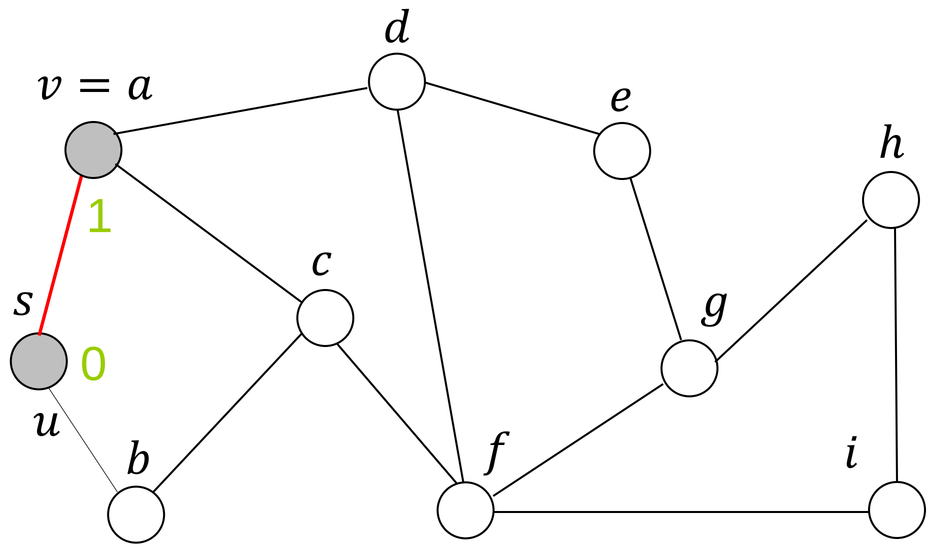
      $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$

      $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$

      $\boxed{\text{enqueue}(Q, v)}$

  $\text{dequeue}(Q)$

  $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

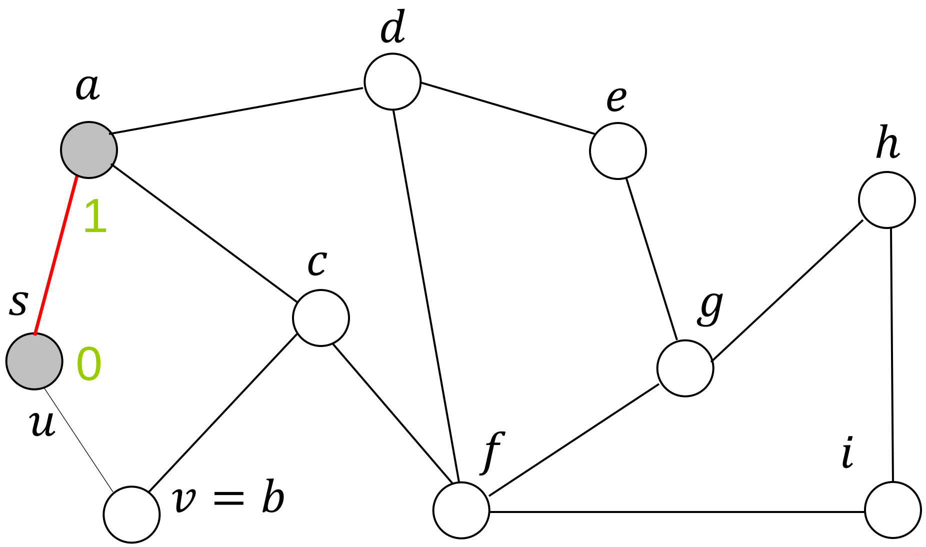


Q: s, a

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow \text{head}[Q]$
    for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
        if color$[v]$ = weiß **then**
            color$[v] \leftarrow$ grau
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
            enqueue(Q, v)
    dequeue(Q)
    color$[u] \leftarrow$ schwarz



Q: s, a

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $u \leftarrow \text{head}[Q]$

  for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**

    if color$[v]$ = weiß **then**

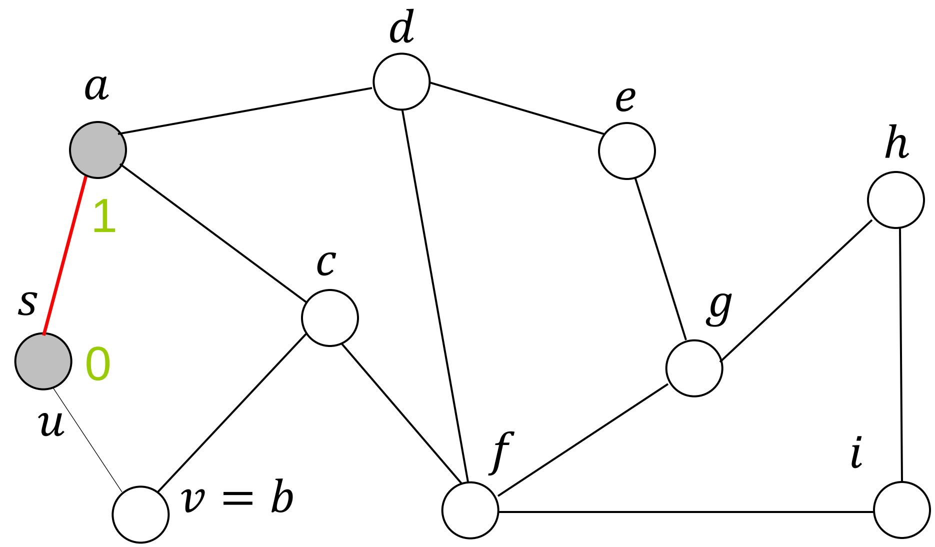
      color$[v] \leftarrow$ grau

      $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$

      enqueue(Q, v)

  dequeue(Q)

  color$[u] \leftarrow$ schwarz



Q: s, a

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $u \leftarrow \text{head}[Q]$

  for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**

    if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**

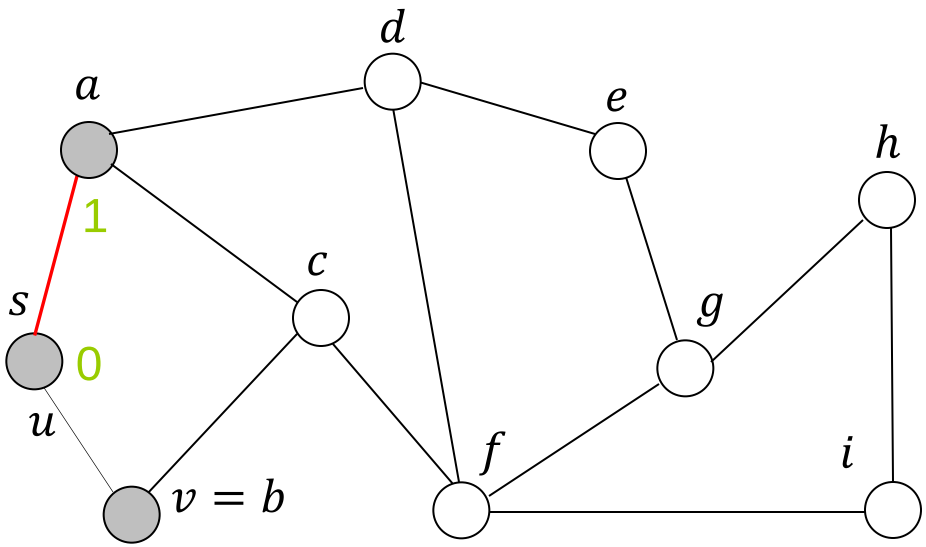
      $\boxed{\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}}$

      $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$

      $\text{enqueue}(Q, v)$

  $\text{dequeue}(Q)$

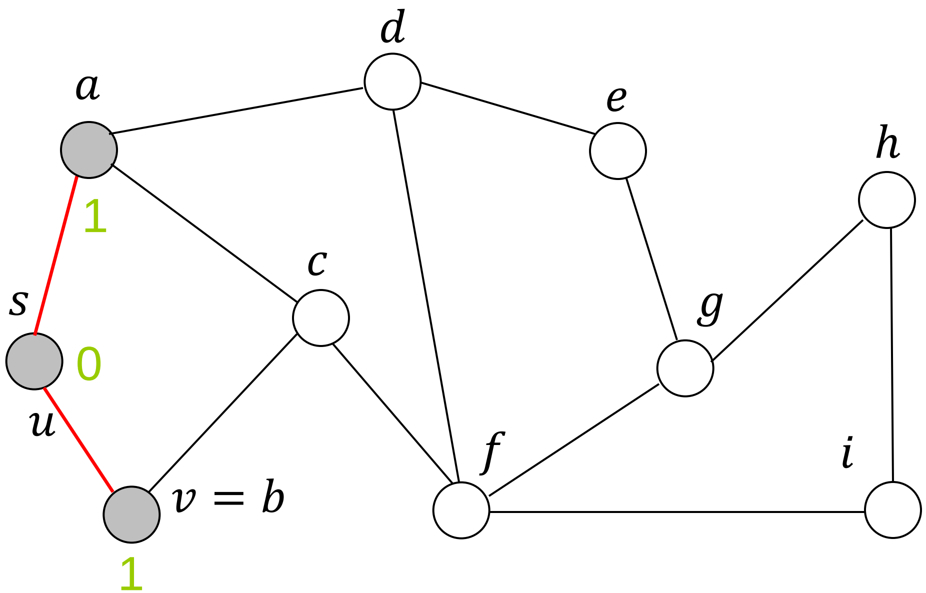
  $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: s, a

Graphalgorithmen

BFS(G, s)
1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $\boxed{d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u}$
8. $\text{enqueue}(Q, v)$
9. $\text{dequeue}(Q)$
10. $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

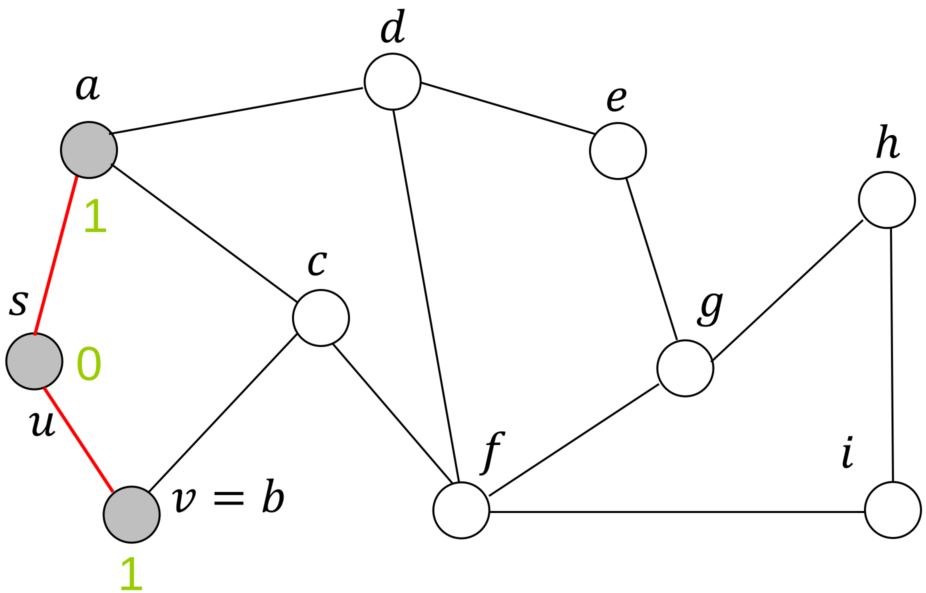


Q: s, a

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $\quad u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. $\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. $\quad\quad$ **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\quad\quad\quad \text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\quad\quad\quad \boxed{\text{enqueue}(Q, v)}$
9. $\quad \text{dequeue}(Q)$
10. $\quad \text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

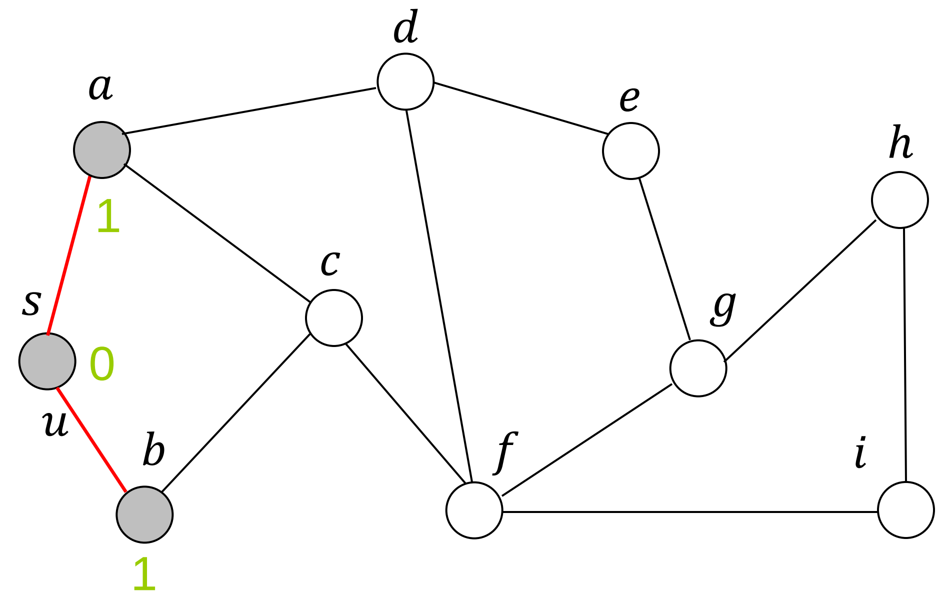


Q: s, a, b

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

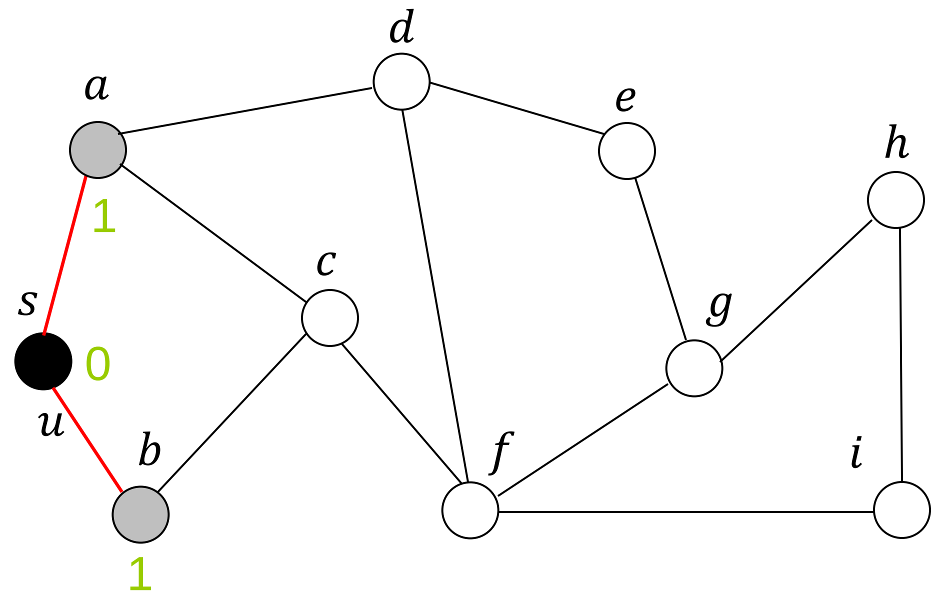
```
„initialisiere BFS“
while Q ≠ ∅ do
    u ← head[Q]
    for each v ∈ Adj[u] do
        if color[v] = weiß then
            color[v] ← grau
            d[v] ← d[u] + 1; π[v] ← u
            enqueue(Q, v)
    dequeue(Q)
    color[u] ← schwarz
```



Q: a, b

Graphalgorithmen

```
BFS(G, s)
„initialisiere BFS“
while Q ≠ ∅ do
    u ← head[Q]
    for each v ∈ Adj[u] do
        if color[v] = weiß then
            color[v] ← grau
            d[v] ← d[u] + 1; π[v] ← u
            enqueue(Q, v)
    dequeue(Q)
    color[u] ← schwarz
```

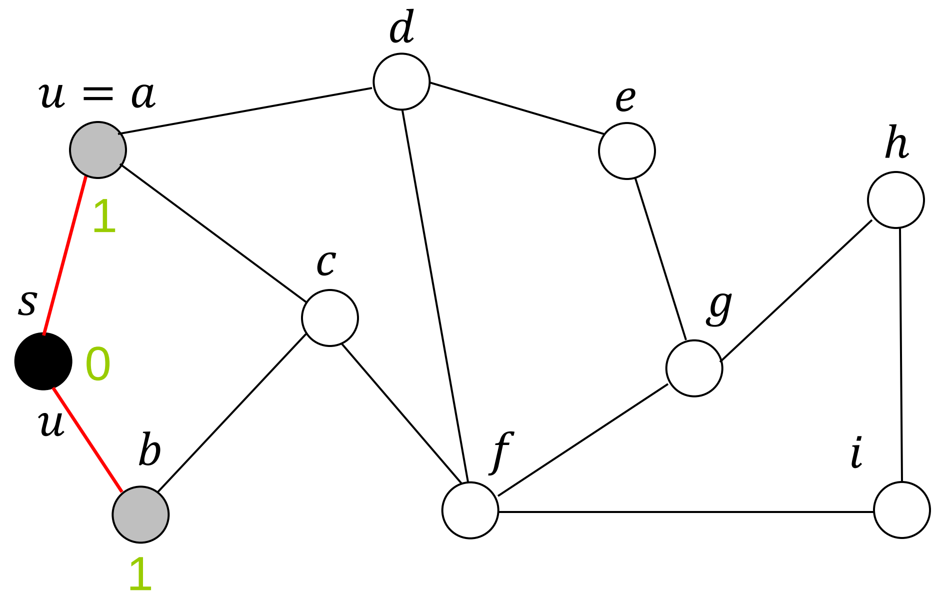


Q: a, b

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $\boxed{u \leftarrow \text{head}[Q]}$
4. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. **if** color$[v]$ = weiß **then**
6. color$[v] \leftarrow$ grau
7. $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. enqueue(Q, v)
9. dequeue(Q)
10. color$[u] \leftarrow$ schwarz



Q: a, b

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $u \leftarrow \text{head}[Q]$

  for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**

    if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**

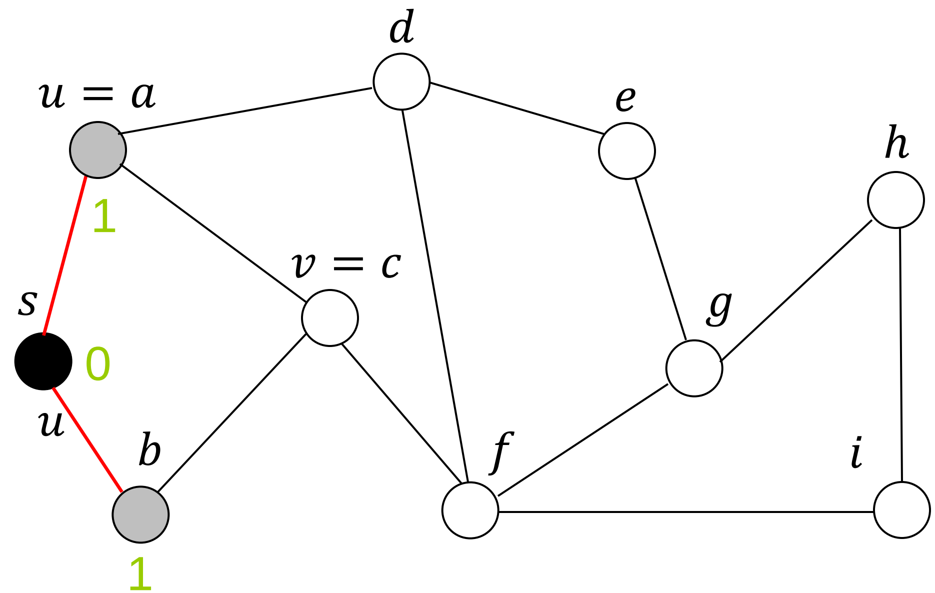
      $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$

      $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$

      $\text{enqueue}(Q, v)$

  $\text{dequeue}(Q)$

  $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: a, b

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $u \leftarrow \text{head}[Q]$

  for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**

    if color$[v]$ = weiß **then**

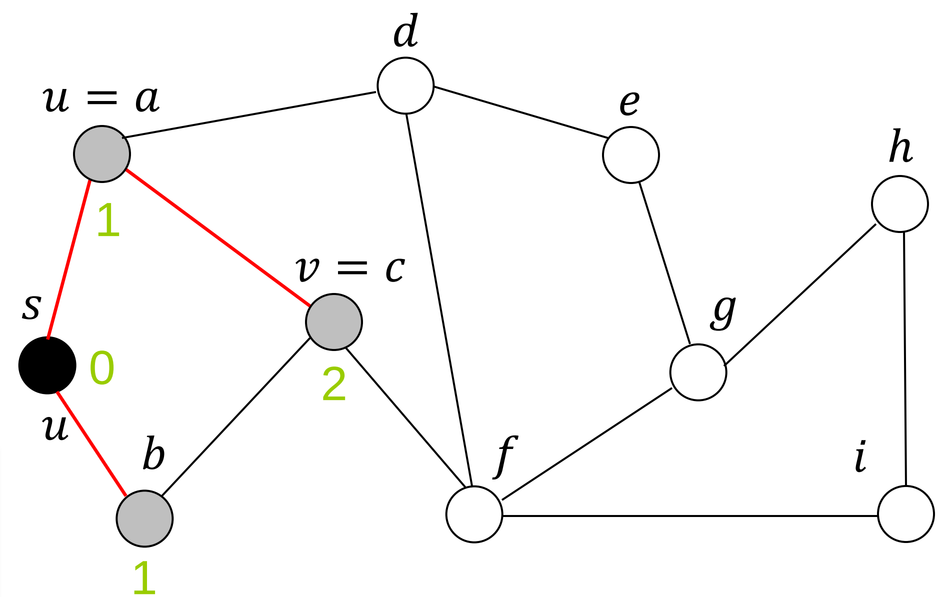
      color$[v] \leftarrow$ grau

      $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$

      enqueue(Q, v)

  dequeue(Q)

  color$[u] \leftarrow$ schwarz

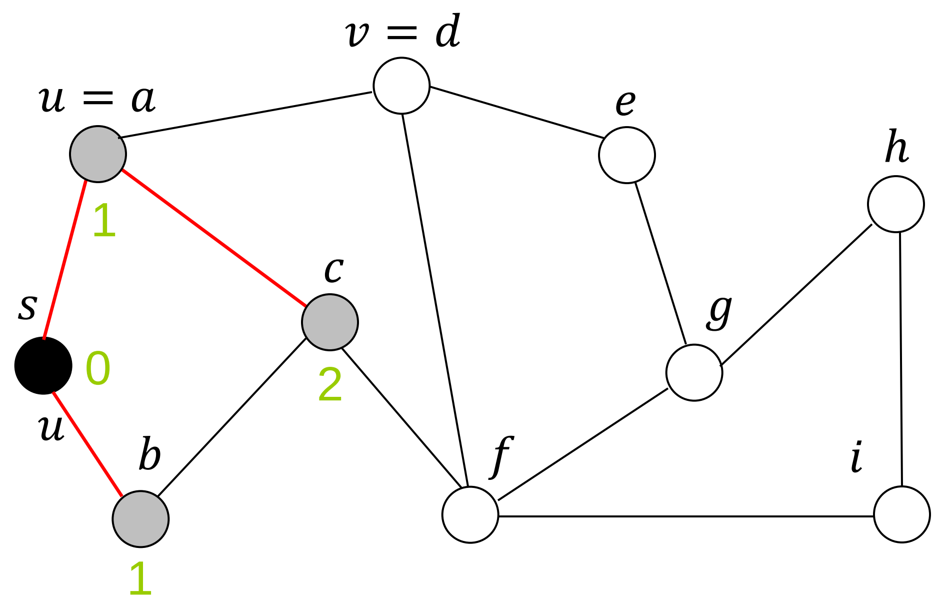


Q: a, b, c

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. $\boxed{\textbf{for each } v \in \text{Adj}[u] \textbf{ do}}$
5. **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\text{enqueue}(Q, v)$
9. $\text{dequeue}(Q)$
10. $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

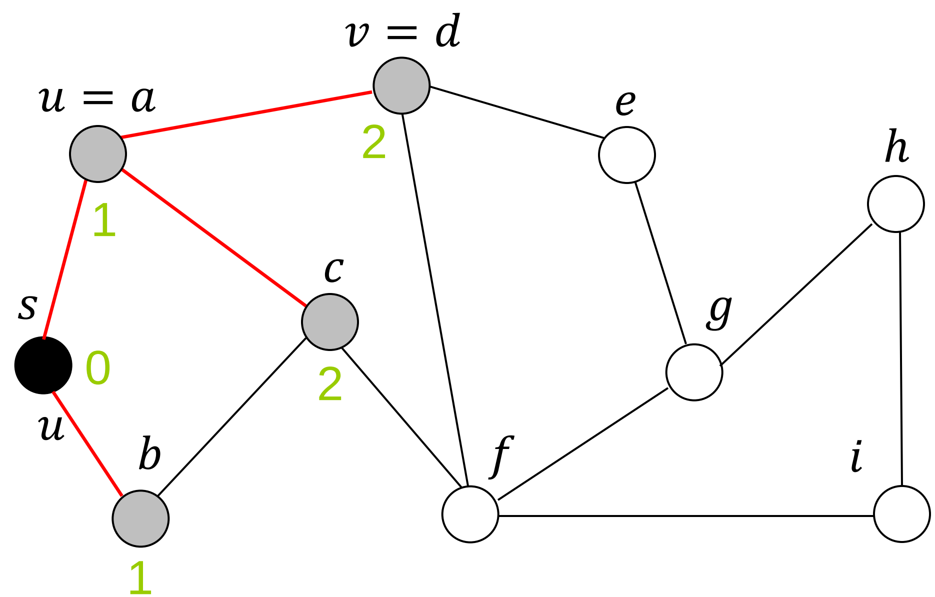


Q: a, b, c

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

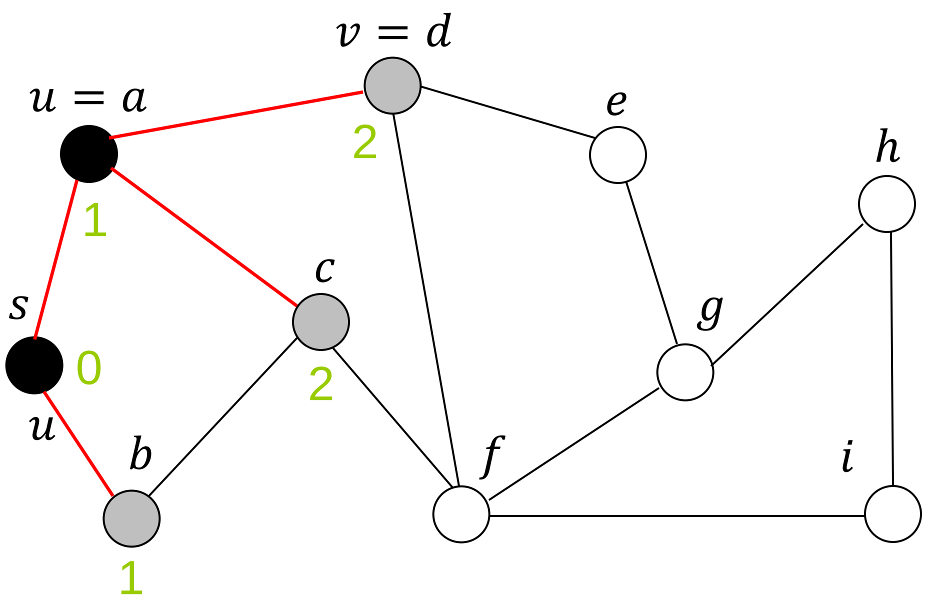
1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $\quad u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. $\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. $\quad\quad$ **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\quad\quad\quad \text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\quad\quad\quad \text{enqueue}(Q, v)$
9. $\quad \text{dequeue}(Q)$
10. $\quad \text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: a, b, c, d

Graphalgorithmen

BFS(G,s)
1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\text{enqueue}(Q, v)$
9. $\text{dequeue}(Q)$
10. $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: b, c, d

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$\boxed{u \leftarrow \text{head}[Q]}$

for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**

if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**

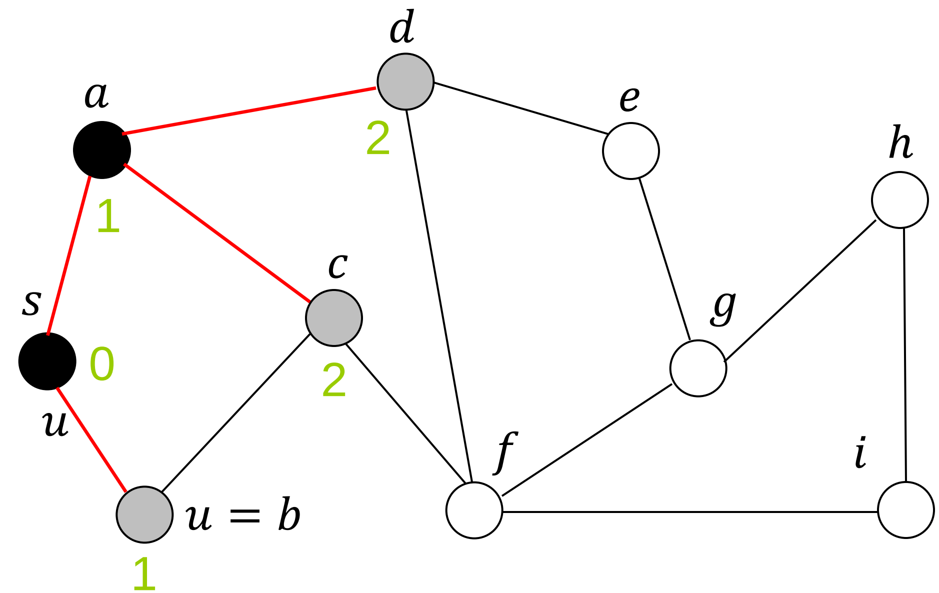
$\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$

$d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$

$\text{enqueue}(Q, v)$

$\text{dequeue}(Q)$

$\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

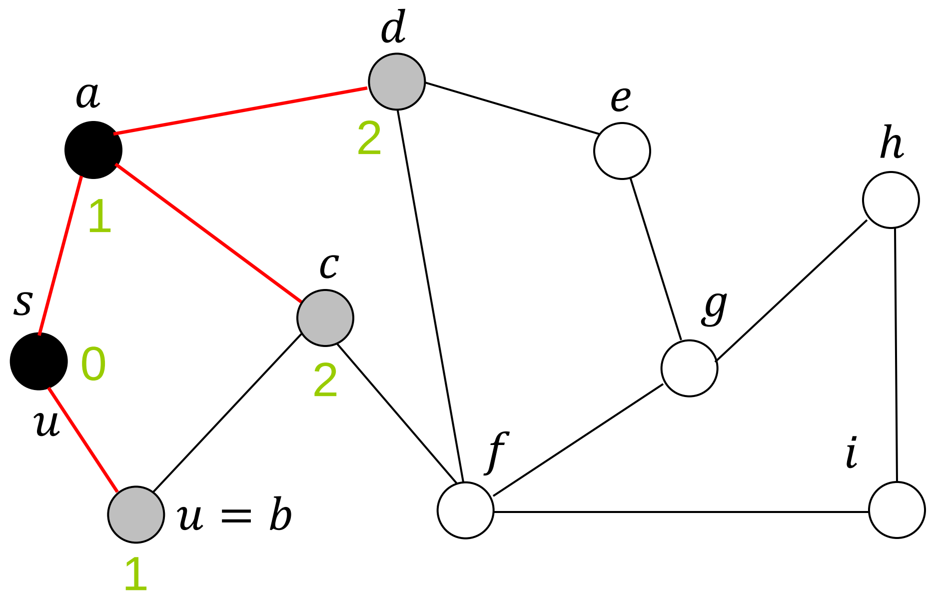


Q: b, c, d

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\text{enqueue}(Q, v)$
9. $\text{dequeue}(Q)$
10. $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

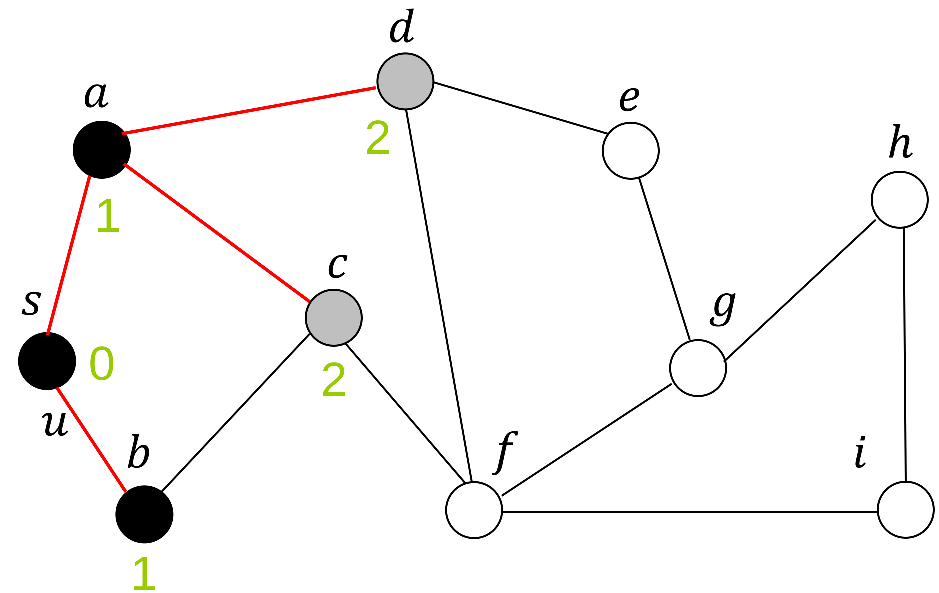


Q: b, c, d

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow \text{head}[Q]$
    for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
        if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
            $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
            $\text{enqueue}(Q, v)$
    $\boxed{\text{dequeue}(Q)}$
    $\boxed{\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}}$

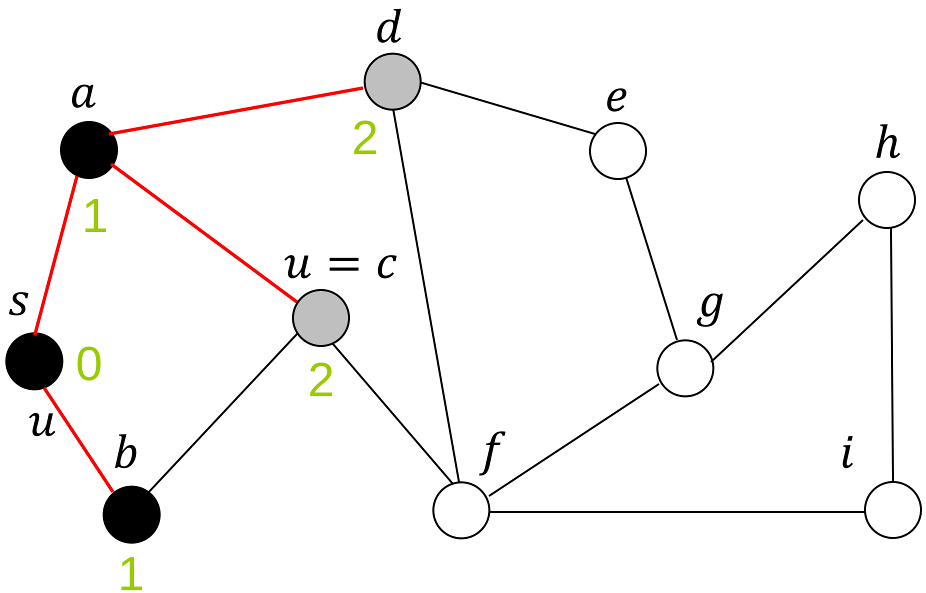


Q: c, d

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $\boxed{u \leftarrow \text{head}[Q]}$
4. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\text{enqueue}(Q, v)$
9. $\text{dequeue}(Q)$
10. $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: c, d

Graphalgorithmen

$\mathrm{BFS}(G, s)$

„initialisiere BFS“

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$\quad u \leftarrow \mathrm{head}[Q]$

$\quad$ **for each** $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**

$\quad\quad$ **if** $\mathrm{color}[v] = \text{weiß}$ **then**

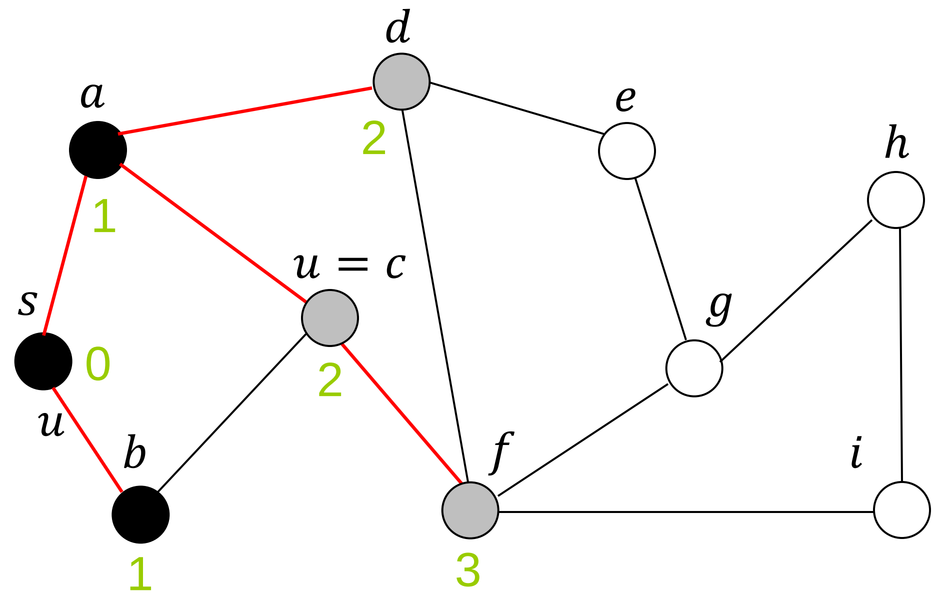
$\quad\quad\quad \mathrm{color}[v] \leftarrow \mathrm{grau}$

$\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$

$\quad\quad\quad \mathrm{enqueue}(Q, v)$

$\quad \mathrm{dequeue}(Q)$

$\quad \mathrm{color}[u] \leftarrow \mathrm{schwarz}$

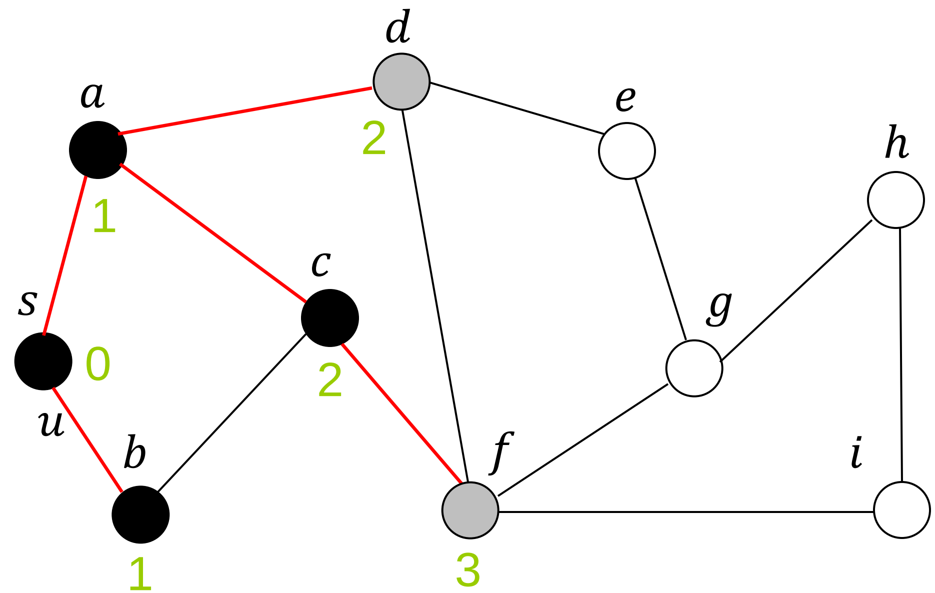


Q: c, d, f

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  $u \leftarrow \text{head}[Q]$
  for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
    if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
      $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
      $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
      $\text{enqueue}(Q, v)$
  $\text{dequeue}(Q)$
  $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

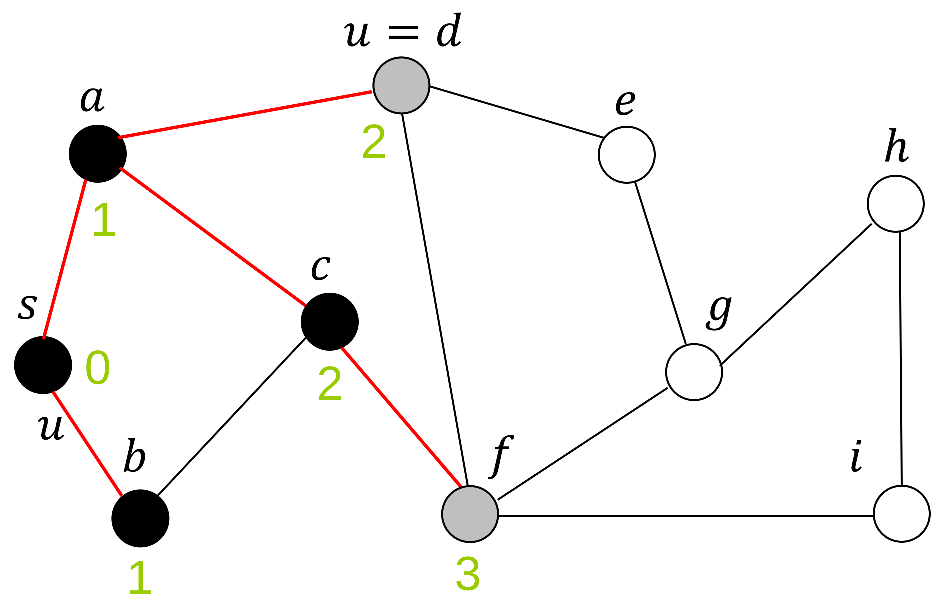


Q: d, f

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS"
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $\quad$ $\boxed{u \leftarrow \text{head}[Q]}$
4. $\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. $\quad\quad$ **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\quad\quad\quad$ $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $\quad\quad\quad$ $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\quad\quad\quad$ $\text{enqueue}(Q, v)$
9. $\quad$ $\text{dequeue}(Q)$
10. $\quad$ $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

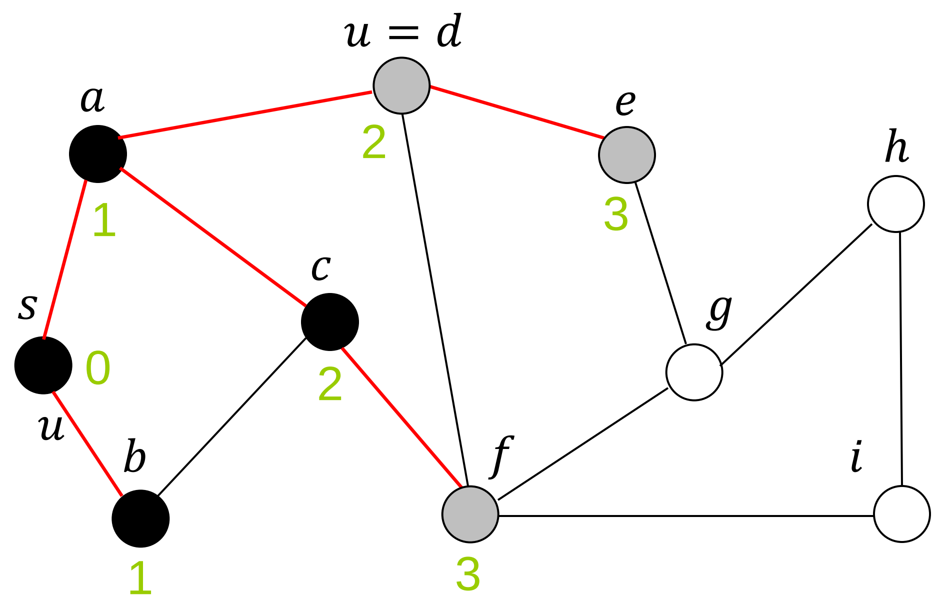


Q: d, f

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

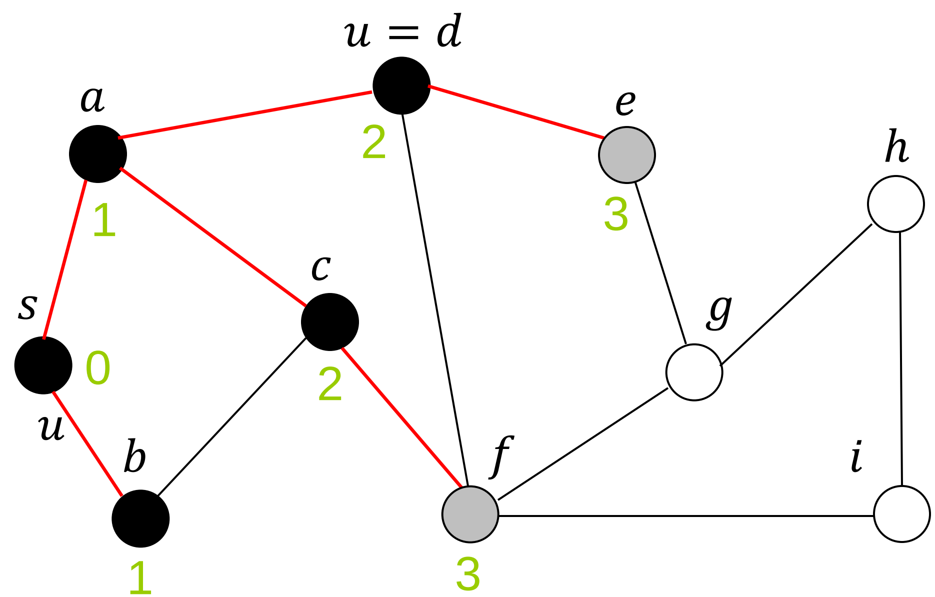
„initialisiere BFS"
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow \text{head}[Q]$
    for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
        if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
            $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
            $\text{enqueue}(Q, v)$
    $\text{dequeue}(Q)$
    $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: d, f, e

Graphalgorithmen

```
BFS(G, s)
  „initialisiere BFS“
  while Q ≠ ∅ do
      u ← head[Q]
      for each v ∈ Adj[u] do
          if color[v] = weiß then
              color[v] ← grau
              d[v] ← d[u] + 1; π[v] ← u
              enqueue(Q, v)
      dequeue(Q)
      color[u] ← schwarz
```

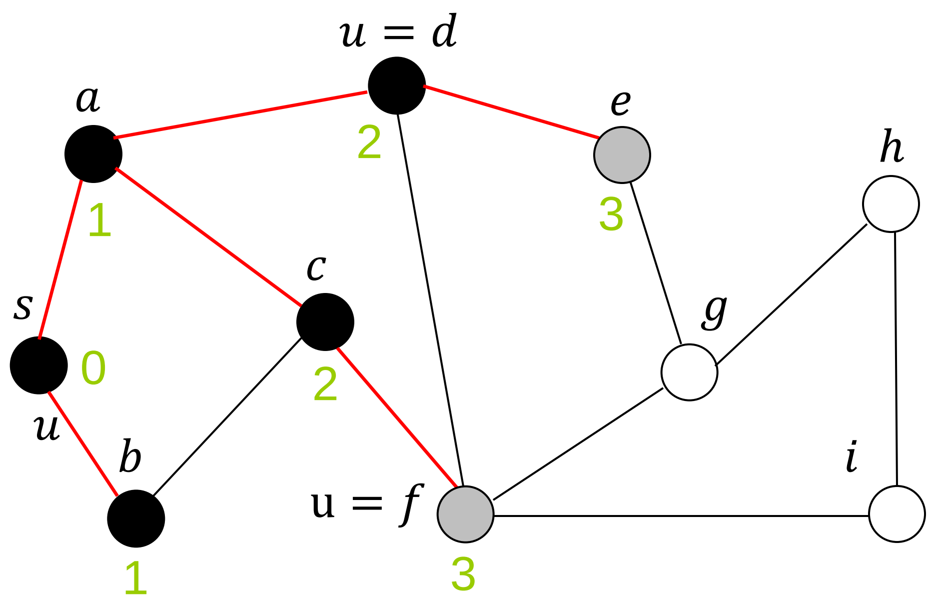


Q: f, e

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $\boxed{u \leftarrow \text{head}[Q]}$
    for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
        if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
            $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
            $\text{enqueue}(Q, v)$
    $\text{dequeue}(Q)$
    $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

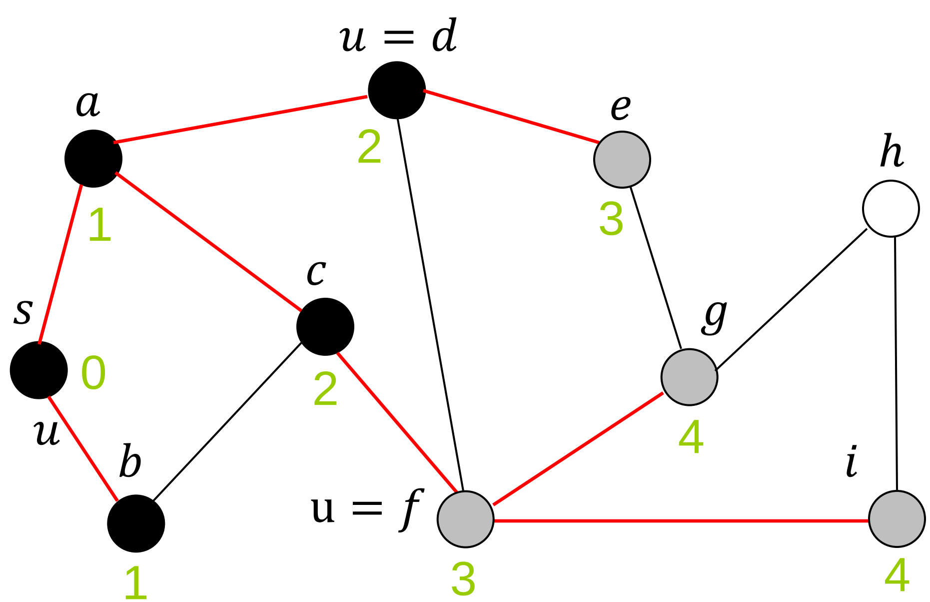


Q: f, e

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow \mathrm{head}[Q]$
    for each $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
        if $\mathrm{color}[v] = \mathrm{weiß}$ **then**
            $\mathrm{color}[v] \leftarrow \mathrm{grau}$
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
            $\mathrm{enqueue}(Q, v)$
    $\mathrm{dequeue}(Q)$
    $\mathrm{color}[u] \leftarrow \mathrm{schwarz}$

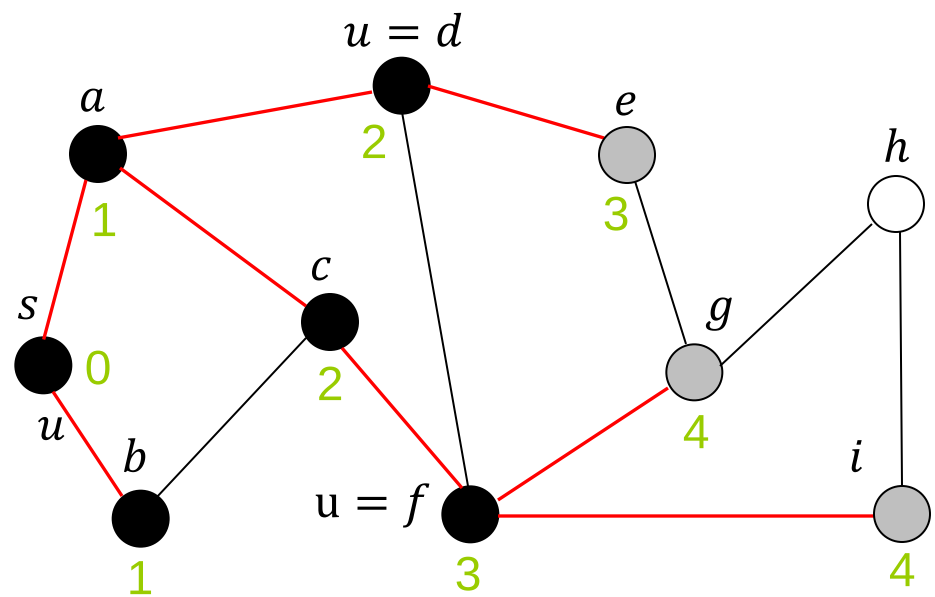


Q: f, e, g, i

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\text{enqueue}(Q, v)$
9. $\text{dequeue}(Q)$
10. $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

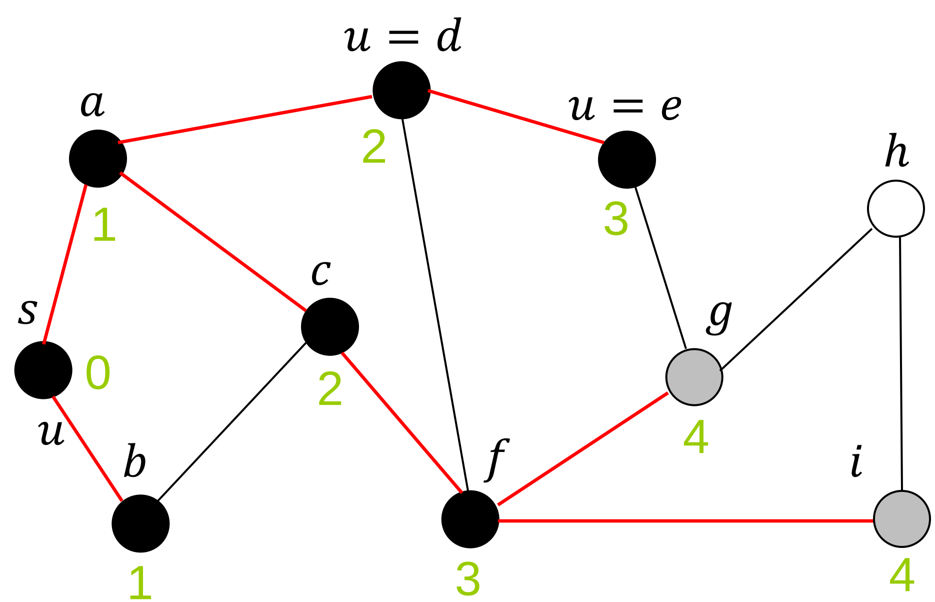


Q: e, g, i

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow \text{head}[Q]$
    for each $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
        if $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
            $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
            $\text{enqueue}(Q, v)$
    $\text{dequeue}(Q)$
    $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$



Q: g, i

Graphalgorithmen

$\mathrm{BFS}(G, s)$

„initialisiere BFS“

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$u \leftarrow \mathrm{head}[Q]$

for each $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**

if $\mathrm{color}[v] = \mathrm{weiß}$ **then**

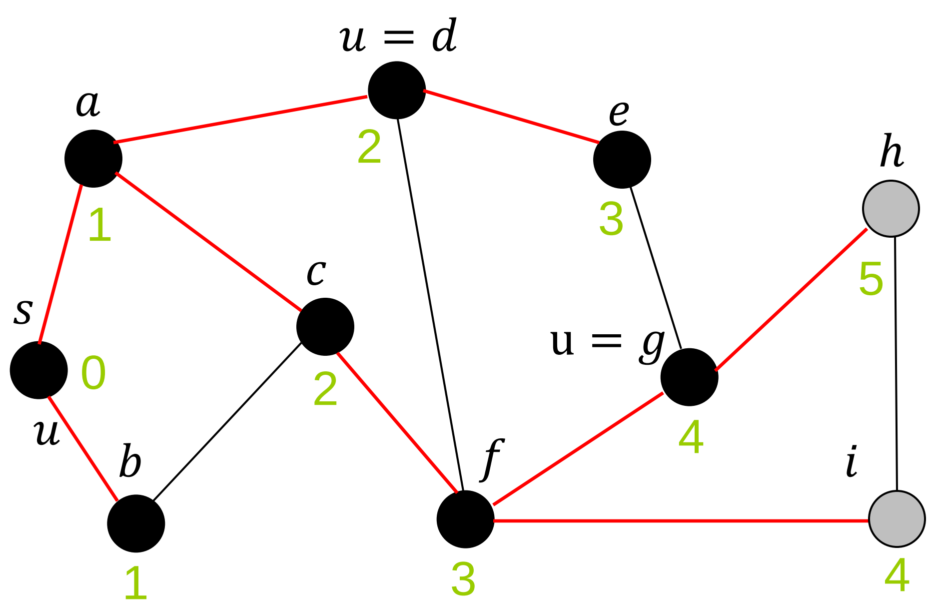
$\mathrm{color}[v] \leftarrow \mathrm{grau}$

$d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$

$\mathrm{enqueue}(Q, v)$

$\mathrm{dequeue}(Q)$

$\mathrm{color}[u] \leftarrow \mathrm{schwarz}$

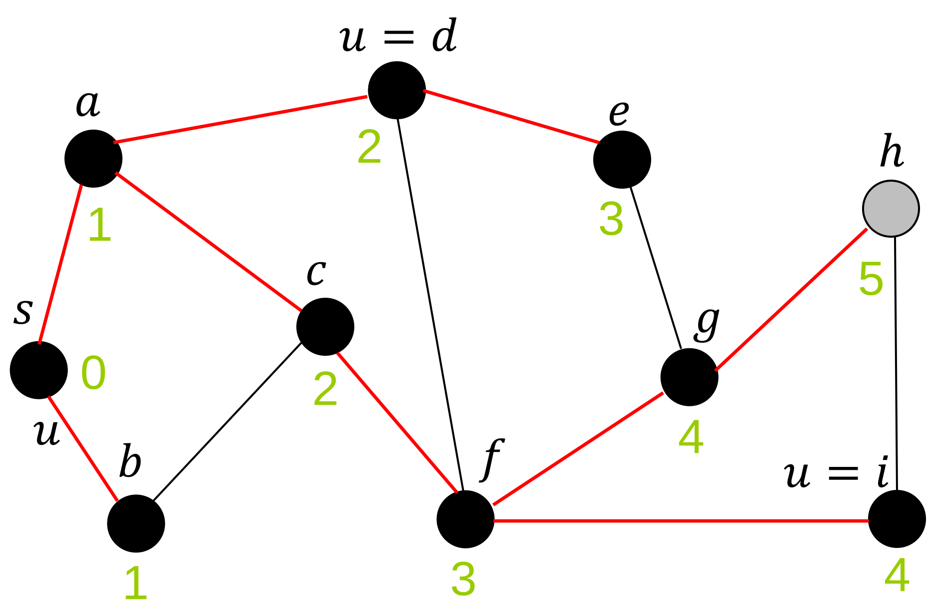


Q: i, h

Graphalgorithmen

$\mathrm{BFS}(G, s)$

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $u \leftarrow \mathrm{head}[Q]$
4. **for each** $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
5. **if** $\mathrm{color}[v] = \mathrm{weiß}$ **then**
6. $\mathrm{color}[v] \leftarrow \mathrm{grau}$
7. $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\mathrm{enqueue}(Q, v)$
9. $\mathrm{dequeue}(Q)$
10. $\mathrm{color}[u] \leftarrow \mathrm{schwarz}$

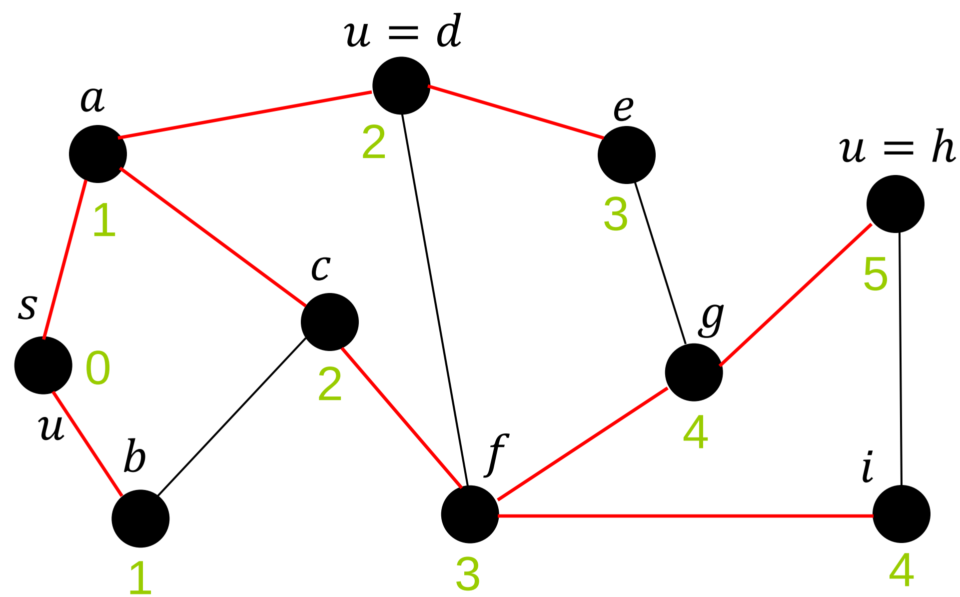


Q: h

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

1. „initialisiere BFS“
2. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
3. $u \leftarrow \text{head}[Q]$
4. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
5. **if** $\text{color}[v] = \text{weiß}$ **then**
6. $\text{color}[v] \leftarrow \text{grau}$
7. $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
8. $\text{enqueue}(Q, v)$
9. $\text{dequeue}(Q)$
10. $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$

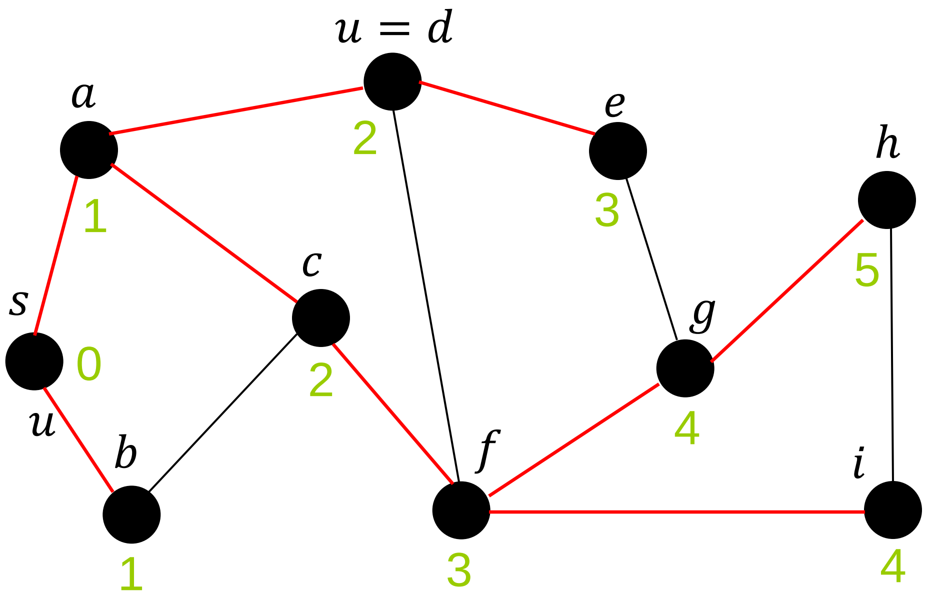


Q:

Graphalgorithmen

BFS(G, s)

„initialisiere BFS“
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    $u \leftarrow \mathrm{head}[Q]$
    for each $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
        if $\mathrm{color}[v] = \mathrm{weiß}$ **then**
            $\mathrm{color}[v] \leftarrow \mathrm{grau}$
            $d[v] \leftarrow d[u] + 1;\ \pi[v] \leftarrow u$
            $\mathrm{enqueue}(Q, v)$
    $\mathrm{dequeue}(Q)$
    $\mathrm{color}[u] \leftarrow \mathrm{schwarz}$



Graphalgorithmen

Satz 44

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Laufzeit des Algorithmus BFS beträgt $\mathbf{O}(|V| + |E|)$.

Graphalgorithmen

Satz 44

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Laufzeit des Algorithmus BFS beträgt $\mathbf{O}(|V| + |E|)$.

Beweis

- Laufzeit Initialisierung: $\mathbf{O}(|V|)$

Graphalgorithmen

Satz 44

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Laufzeit des Algorithmus BFS beträgt $\mathbf{O}(|V| + |E|)$.

Beweis

- Laufzeit Initialisierung: $\mathbf{O}(|V|)$
- Nach der Initialisierung wird kein Knoten weiß gefärbt

Graphalgorithmen

Satz 44

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Laufzeit des Algorithmus BFS beträgt $\mathbf{O}(|V| + |E|)$.

Beweis

- Laufzeit Initialisierung: $\mathbf{O}(|V|)$
- Nach der Initialisierung wird kein Knoten weiß gefärbt
- Daher ist jeder Knoten nur einmal in der Schlange

Graphalgorithmen

Satz 44

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Laufzeit des Algorithmus BFS beträgt $\mathbf{O}(|V| + |E|)$.

Beweis

- Laufzeit Initialisierung: $\mathbf{O}(|V|)$
- Nach der Initialisierung wird kein Knoten weiß gefärbt
- Daher ist jeder Knoten nur einmal in der Schlange
- $\Rightarrow$ Zeit für Schlangenoperationen ist $\mathbf{O}(|V|)$

Graphalgorithmen

Satz 44

Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Die Laufzeit des Algorithmus BFS beträgt $\mathbf{O}(|V|+|E|)$.

Beweis

- Laufzeit Initialisierung: $\mathbf{O}(|V|)$
- Nach der Initialisierung wird kein Knoten weiß gefärbt
- Daher ist jeder Knoten nur einmal in der Schlange
- $\Rightarrow$ Zeit für Schlangenoperationen ist $\mathbf{O}(|V|)$
- Adjazenzliste jedes Knotens wird nur durchlaufen, wenn er aus der Schlange entfernt wird

Graphalgorithmen

Satz 44

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Laufzeit des Algorithmus BFS beträgt $\mathbf{O}(|V| + |E|)$.

Beweis

- Laufzeit Initialisierung: $\mathbf{O}(|V|)$
- Nach der Initialisierung wird kein Knoten weiß gefärbt
- Daher ist jeder Knoten nur einmal in der Schlange
- $\Rightarrow$ Zeit für Schlangenoperationen ist $\mathbf{O}(|V|)$
- Adjazenzliste jedes Knotens wird nur durchlaufen, wenn er aus der Schlange entfernt wird
- Damit wird jede Adjazenzliste maximal einmal durchlaufen (d.h. jede Kante maximal zweimal) $\Rightarrow$ Laufzeit für Liste: $\mathbf{O}(|V| + |E|)$

Graphalgorithmen

Satz 44

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Laufzeit des Algorithmus BFS beträgt $\mathbf{O}(|V| + |E|)$.

Beweis

- Laufzeit Initialisierung: $\mathbf{O}(|V|)$
- Nach der Initialisierung wird kein Knoten weiß gefärbt
- Daher ist jeder Knoten nur einmal in der Schlange
- $\Rightarrow$ Zeit für Schlangenoperationen ist $\mathbf{O}(|V|)$
- Adjazenzliste jedes Knotens wird nur durchlaufen, wenn er aus der Schlange entfernt wird
- Damit wird jede Adjazenzliste maximal einmal durchlaufen (d.h. jede Kante maximal zweimal) $\Rightarrow$ Laufzeit für Liste: $\mathbf{O}(|V| + |E|)$
- Gesamtlaufzeit: $\mathbf{O}(|V| + |E|)$

Graphalgorithmen

Satz 44

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Laufzeit des Algorithmus BFS beträgt $\mathbf{O}(|V| + |E|)$.

Beweis

- Laufzeit Initialisierung: $\mathbf{O}(|V|)$
- Nach der Initialisierung wird kein Knoten weiß gefärbt
- Daher ist jeder Knoten nur einmal in der Schlange
- $\Rightarrow$ Zeit für Schlangenoperationen ist $\mathbf{O}(|V|)$
- Adjazenzliste jedes Knotens wird nur durchlaufen, wenn er aus der Schlange entfernt wird
- Damit wird jede Adjazenzliste maximal einmal durchlaufen (d.h. jede Kante maximal zweimal) $\Rightarrow$ Laufzeit für Liste: $\mathbf{O}(|V| + |E|)$
- Gesamtlaufzeit: $\mathbf{O}(|V| + |E|)$

Graphalgorithmen

Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

- Sei $\delta(s,t)$ die minimale Anzahl Kanten in einem s-t-Weg
- Ein s-t-Weg der Länge $\delta(s,t)$ heißt kürzester Weg
- Wollen zeigen, dass BFS korrekt kürzeste Wege berechnet

Graphalgorithmen

Lemma 45

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$$

Graphalgorithmen

Lemma 45

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$$

Beweis

- Ist u erreichbar von s, dann ist es auch v

Graphalgorithmen

Lemma 45

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$$

Beweis

- Ist u erreichbar von s, dann ist es auch v
- Der kürzeste Weg von s nach v kann nicht länger sein, als der kürzeste Weg von s nach u gefolgt von der Kante (u, v). Damit gilt die Ungleichung.

Graphalgorithmen

Lemma 45

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$$

Beweis

- Ist u erreichbar von s, dann ist es auch v
- Der kürzeste Weg von s nach v kann nicht länger sein, als der kürzeste Weg von s nach u gefolgt von der Kante (u, v). Damit gilt die Ungleichung.
- Ist u nicht erreichbar von s, dann ist $\delta(s, u) = \infty$ und die Ungleichung gilt.

Graphalgorithmen

Lemma 45

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ ein beliebiger Knoten. Dann gilt für jede Kante $(u, v) \in E$:

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$$

Beweis

- Ist u erreichbar von s, dann ist es auch v
- Der kürzeste Weg von s nach v kann nicht länger sein, als der kürzeste Weg von s nach u gefolgt von der Kante (u, v). Damit gilt die Ungleichung.
- Ist u nicht erreichbar von s, dann ist $\delta(s, u) = \infty$ und die Ungleichung gilt.

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Induktion über Anzahl von Zeitpunkten, an denen ein Knoten in Q eingefügt wird

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Induktion über Anzahl von Zeitpunkten, an denen ein Knoten in Q eingefügt wird
- (I.A.) Nach Initialisierung gilt $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ und $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$ für alle $v \in V - \{s\}$

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Induktion über Anzahl von Zeitpunkten, an denen ein Knoten in Q eingefügt wird
- (I.A.) Nach Initialisierung gilt $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ und $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$ für alle $v \in V - \{s\}$
- (I.V.) Aussage gilt nach m Einfügeoperationen

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Induktion über Anzahl von Zeitpunkten, an denen ein Knoten in Q eingefügt wird
- (I.A.) Nach Initialisierung gilt $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ und $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$ für alle $v \in V - \{s\}$
- (I.V.) Aussage gilt nach m Einfügeoperationen
- (I.S.) Betrachte nach m Einfügeoperationen den nächsten weißen Knoten v, der während einer Suche von u entdeckt wird. Nach (I.V.) gilt $d[u] \geq \delta(s, u)$.

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Induktion über Anzahl von Zeitpunkten, an denen ein Knoten in Q eingefügt wird
- (I.A.) Nach Initialisierung gilt $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ und $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$ für alle $v \in V - \{s\}$
- (I.V.) Aussage gilt nach m Einfügeoperationen
- (I.S.) Betrachte nach m Einfügeoperationen den nächsten weißen Knoten v, der während einer Suche von u entdeckt wird. Nach (I.V.) gilt $d[u] \geq \delta(s, u)$.
- Zeile 7: $d[v]$ wird auf $d[u] + 1$ gesetzt

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Induktion über Anzahl von Zeitpunkten, an denen ein Knoten in Q eingefügt wird
- (I.A.) Nach Initialisierung gilt $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ und $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$ für alle $v \in V - \{s\}$
- (I.V.) Aussage gilt nach m Einfügeoperationen
- (I.S.) Betrachte nach m Einfügeoperationen den nächsten weißen Knoten v, der während einer Suche von u entdeckt wird. Nach (I.V.) gilt $d[u] \geq \delta(s, u)$.
- Zeile 7: $d[v]$ wird auf $d[u] + 1$ gesetzt
- Es gilt: $d[v] = d[u] + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$ nach Lemma 45

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Induktion über Anzahl von Zeitpunkten, an denen ein Knoten in Q eingefügt wird
- (I.A.) Nach Initialisierung gilt $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ und $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$ für alle $v \in V - \{s\}$
- (I.V.) Aussage gilt nach m Einfügeoperationen
- (I.S.) Betrachte nach m Einfügeoperationen den nächsten weißen Knoten v, der während einer Suche von u entdeckt wird. Nach (I.V.) gilt $d[u] \geq \delta(s, u)$.
- Zeile 7: $d[v]$ wird auf $d[u] + 1$ gesetzt
- Es gilt: $d[v] = d[u] + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$ nach Lemma 45

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Knoten v wird dann in die Schlange eingefügt und grau gefärbt

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Knoten v wird dann in die Schlange eingefügt und grau gefärbt
- Damit ändert sich $d[v]$ im Laufe des Algorithmus nicht mehr und die Aussage des Lemmas bleibt erhalten

Graphalgorithmen

Lemma 46

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und es laufe die Breitensuche von einem Startknoten $s \in V$. Während der Breitensuche gilt für jeden Knoten v, dass $d[v] \geq \delta(s, v)$ ist.

Beweis

- Knoten v wird dann in die Schlange eingefügt und grau gefärbt
- Damit ändert sich $d[v]$ im Laufe des Algorithmus nicht mehr und die Aussage des Lemmas bleibt erhalten

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \dots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \le d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \le d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \dots, r-1.$$

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \ldots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \ldots, r-1.$$

Beweis

- Induktion über die Anzahl Schlangenoperationen

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \dots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \dots, r-1.$$

Beweis

- Induktion über die Anzahl Schlangenoperationen
- (I.A.) Die Schlange enthält nur s, damit gilt das Lemma

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \ldots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \ldots, r-1.$$

Beweis

- Induktion über die Anzahl Schlangenoperationen
- (I.A.) Die Schlange enthält nur s, damit gilt das Lemma
- (I.V.) Das Lemma gilt nach m Schlangenoperationen

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \ldots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \ldots, r-1.$$

Beweis

- Induktion über die Anzahl Schlangenoperationen
- (I.A.) Die Schlange enthält nur s, damit gilt das Lemma
- (I.V.) Das Lemma gilt nach m Schlangenoperationen
- (I.S.) Wir müssen zeigen, dass das Lemma immer noch nach $m + 1$ Schlangenoperationen gilt. Die $(m+1)$ste Schlangenoperation ist entweder eine enqueue oder dequeue Operation

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \ldots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \ldots, r-1.$$

Beweis

- Induktion über die Anzahl Schlangenoperationen
- (I.A.) Die Schlange enthält nur s, damit gilt das Lemma
- (I.V.) Das Lemma gilt nach m Schlangenoperationen
- (I.S.) Wir müssen zeigen, dass das Lemma immer noch nach $m + 1$ Schlangenoperationen gilt. Die $(m + 1)$ste Schlangenoperation ist entweder eine $\mathrm{enqueue}$ oder $\mathrm{dequeue}$ Operation

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \dots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1, 2, \dots, r-1.$$

Beweis

- dequeue:
- Wird v_1 aus der Schlange entfernt, so wird v_2 der neue Kopf

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \ldots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \le d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \le d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \ldots, r-1.$$

Beweis

- dequeue:
- Wird v_1 aus der Schlange entfernt, so wird v_2 der neue Kopf
- Dann gilt aber sicherlich $d[v_r] \le d[v_1] + 1 \le d[v_2] + 1$

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \ldots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \ldots, r-1.$$

Beweis

- dequeue:
- Wird v_1 aus der Schlange entfernt, so wird v_2 der neue Kopf
- Dann gilt aber sicherlich $d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1$
- Alle anderen Ungleichungen sind nicht betroffen, also gilt das Lemma

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \dots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \le d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \le d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \dots, r-1.$$

Beweis

- dequeue:
- Wird v_1 aus der Schlange entfernt, so wird v_2 der neue Kopf
- Dann gilt aber sicherlich $d[v_r] \le d[v_1] + 1 \le d[v_2] + 1$
- Alle anderen Ungleichungen sind nicht betroffen, also gilt das Lemma

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \ldots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \le d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \le d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \ldots, r-1.$$

Beweis

- enqueue:
- Wird in Zeile 8 ein Knoten v eingefügt (und damit zu v_{r+1}), so ist v_1 der Knoten u, von dem aus v entdeckt wurde

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \dots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \dots, r-1.$$

Beweis

- enqueue:
- Wird in Zeile 8 ein Knoten v eingefügt (und damit zu v_{r+1}), so ist v_1 der Knoten u, von dem aus v entdeckt wurde
- Es gilt: $d[v_{r+1}] = d[v] = d[u] + 1 = d[v_1] + 1$

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \dots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \le d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \le d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \dots, r-1.$$

Beweis

- enqueue:
- Wird in Zeile 8 ein Knoten v eingefügt (und damit zu v_{r+1}), so ist v_1 der Knoten u, von dem aus v entdeckt wurde
- Es gilt: $d[v_{r+1}] = d[v] = d[u] + 1 = d[v_1] + 1$
- Außerdem: $d[v_r] \le d[v_1] + 1 = d[u] + 1 = d[v] = d[v_{r+1}]$

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \ldots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \ldots, r-1.$$

Beweis

- enqueue:
- Wird in Zeile 8 ein Knoten v eingefügt (und damit zu v_{r+1}), so ist v_1 der Knoten u, von dem aus v entdeckt wurde
- Es gilt: $d[v_{r+1}] = d[v] = d[u] + 1 = d[v_1] + 1$
- Außerdem: $d[v_r] \leq d[v_1] + 1 = d[u] + 1 = d[v] = d[v_{r+1}]$
- Die anderen Ungleichungen bleiben erhalten; Also gilt das Lemma

Graphalgorithmen

Lemma 47

Sei $< v_1, \dots, v_r >$ der Inhalt der Schlange Q während eines Durchlaufs der Breitensuche auf einem Graph $G = (V, E)$, wobei v_1 Kopf und v_r Ende der Schlange ist. Dann gilt

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \text{ und } d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ für } i = 1,2, \dots, r-1.$$

Beweis

- $\mathrm{enqueue}$:
- Wird in Zeile 8 ein Knoten v eingefügt (und damit zu v_{r+1}), so ist v_1 der Knoten u, von dem aus v entdeckt wurde
- Es gilt: $d[v_{r+1}] = d[v] = d[u] + 1 = d[v_1] + 1$
- Außerdem: $d[v_r] \leq d[v_1] + 1 = d[u] + 1 = d[v] = d[v_{r+1}]$
- Die anderen Ungleichungen bleiben erhalten; Also gilt das Lemma

Graphalgorithmen

Satz 48

Sei $G=(V,E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ Startknoten der Breitensuche. Dann entdeckt die Breitensuche alle Knoten $\mathrm{v} \in V$, die von s aus erreichbar sind und nach Terminierung gilt $d[v]=\delta(s,v)$ für alle $v \in V$. Außerdem gilt für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$, dass ein kürzester Weg von s nach $\pi[v]$ gefolgt von der Kante $(\pi[v],v)$ ein kürzester s-v-Weg ist.

Graphalgorithmen

Satz 48

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ Startknoten der Breitensuche. Dann entdeckt die Breitensuche alle Knoten $\mathrm{v} \in V$, die von s aus erreichbar sind und nach Terminierung gilt $d[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$. Außerdem gilt für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$, dass ein kürzester Weg von s nach $\pi[v]$ gefolgt von der Kante $(\pi[v], v)$ ein kürzester s-v-Weg ist.

Beweis

- Fall 1 (v nicht erreichbar von s):

Graphalgorithmen

Satz 48

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ Startknoten der Breitensuche. Dann entdeckt die Breitensuche alle Knoten $\mathrm{v} \in V$, die von s aus erreichbar sind und nach Terminierung gilt $d[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$. Außerdem gilt für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$, dass ein kürzester Weg von s nach $\pi[v]$ gefolgt von der Kante $(\pi[v], v)$ ein kürzester s-v-Weg ist.

Beweis

- Fall 1 (v nicht erreichbar von s):
- Nach Lemma 46 gilt $d[v] \geq \delta(s, v) = \infty$

Graphalgorithmen

Satz 48

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ Startknoten der Breitensuche. Dann entdeckt die Breitensuche alle Knoten $v \in V$, die von s aus erreichbar sind und nach Terminierung gilt $d[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$. Außerdem gilt für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$, dass ein kürzester Weg von s nach $\pi[v]$ gefolgt von der Kante $(\pi[v], v)$ ein kürzester s-v-Weg ist.

Beweis

- Fall 1 (v nicht erreichbar von s):
- Nach Lemma 46 gilt $d[v] \geq \delta(s, v) = \infty$
- Es kann keinen ersten Knoten geben, dessen d-Wert in Zeile 7 auf ∞ gesetzt wird

Graphalgorithmen

Satz 48

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ Startknoten der Breitensuche. Dann entdeckt die Breitensuche alle Knoten $\mathrm{v} \in V$, die von s aus erreichbar sind und nach Terminierung gilt $d[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$. Außerdem gilt für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$, dass ein kürzester Weg von s nach $\pi[v]$ gefolgt von der Kante $(\pi[v], v)$ ein kürzester s-v-Weg ist.

Beweis

- Fall 1 (v nicht erreichbar von s):
- Nach Lemma 46 gilt $d[v] \geq \delta(s, v) = \infty$
- Es kann keinen ersten Knoten geben, dessen d-Wert in Zeile 7 auf ∞ gesetzt wird
- Somit wird v nie entdeckt

Graphalgorithmen

Satz 48

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter oder ungerichteter Graph und sei $s \in V$ Startknoten der Breitensuche. Dann entdeckt die Breitensuche alle Knoten $\mathrm{v} \in V$, die von s aus erreichbar sind und nach Terminierung gilt $d[v] = \delta(s, v)$ für alle $v \in V$. Außerdem gilt für jeden von s erreichbaren Knoten $v \neq s$, dass ein kürzester Weg von s nach $\pi[v]$ gefolgt von der Kante $(\pi[v], v)$ ein kürzester s-v-Weg ist.

Beweis

- Fall 1 (v nicht erreichbar von s):
- Nach Lemma 46 gilt $d[v] \geq \delta(s, v) = \infty$
- Es kann keinen ersten Knoten geben, dessen d-Wert in Zeile 7 auf ∞ gesetzt wird
- Somit wird v nie entdeckt

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 2 (v erreichbar von s):

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 2 (v erreichbar von s):
- Sei $V_k = \{v \in V : \delta(s,v) = k\}$

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 2 (v erreichbar von s):
- Sei $V_k = \{v \in V : \delta(s,v) = k\}$
- Wir zeigen per Induktion über k:
- Es gibt genau einen Zeitpunkt, zu dem jeder Knoten $v \in V_k$
  (a) grau gefärbt wird
  (b) $d[v] = k$ gesetzt wird
  (c) wenn $v \neq s$, dann $\pi[v]$ auf u gesetzt wird für ein $u \in V_{k-1}$
  (d) v in Schlange Q eingefügt wird

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 2 (v erreichbar von s):
- Sei $V_k = \{v \in V : \delta(s,v) = k\}$
- Wir zeigen per Induktion über k:
- Es gibt genau einen Zeitpunkt, zu dem jeder Knoten $v \in V_k$
  (a) grau gefärbt wird
  (b) $d[v] = k$ gesetzt wird
  (c) wenn $v \neq s$, dann $\pi[v]$ auf u gesetzt wird für ein $u \in V_{k-1}$
  (d) v in Schlange Q eingefügt wird

- Da nur zur Initialisierung Knoten weiß gefärbt werden, gibt es maximal einen solchen Zeitpunkt

Graphalgorithmen

Beweis

- Fall 2 (v erreichbar von s):
- Sei $V_k = \{v \in V : \delta(s,v) = k\}$
- Wir zeigen per Induktion über k:
- Es gibt genau einen Zeitpunkt, zu dem jeder Knoten $v \in V_k$
  (a) grau gefärbt wird
  (b) $d[v] = k$ gesetzt wird
  (c) wenn $v \neq s$, dann $\pi[v]$ auf u gesetzt wird für ein $u \in V_{k-1}$
  (d) v in Schlange Q eingefügt wird

- Da nur zur Initialisierung Knoten weiß gefärbt werden, gibt es maximal einen solchen Zeitpunkt

Graphalgorithmen

Beweis

- (I.A.) $V_0 = \{s\}$. Während der Initialisierung wird s grau gefärbt, $d[s]$ auf 0 gesetzt, und s in Q eingefügt. Somit gilt die Aussage.

Graphalgorithmen

Beweis

- (I.A.) $V_0 = \{s\}$. Während der Initialisierung wird s grau gefärbt, $d[s]$ auf 0 gesetzt, und s in Q eingefügt. Somit gilt die Aussage.
- (I.V.) Aussage gilt für alle Knoten aus V_{k-1}

Graphalgorithmen

Beweis

- (I.A.) $V_0 = \{s\}$. Während der Initialisierung wird s grau gefärbt, $d[s]$ auf 0 gesetzt, und s in Q eingefügt. Somit gilt die Aussage.
- (I.V.) Aussage gilt für alle Knoten aus V_{k-1}
- (I.S.) Q ist nie leer bis Algorithmus terminiert.

Graphalgorithmen

Beweis

- (I.A.) $V_0 = \{s\}$. Während der Initialisierung wird s grau gefärbt, $d[s]$ auf 0 gesetzt, und s in Q eingefügt. Somit gilt die Aussage.
- (I.V.) Aussage gilt für alle Knoten aus V_{k-1}
- (I.S.) Q ist nie leer bis Algorithmus terminiert.
- Nachdem v in Q eingefügt wurde, ändern sich $d[v]$ und $\pi[v]$ nicht mehr

Graphalgorithmen

Beweis

- (I.A.) $V_0 = \{s\}$. Während der Initialisierung wird s grau gefärbt, $d[s]$ auf 0 gesetzt, und s in Q eingefügt. Somit gilt die Aussage.
- (I.V.) Aussage gilt für alle Knoten aus V_{k-1}
- (I.S.) Q ist nie leer bis Algorithmus terminiert.
- Nachdem v in Q eingefügt wurde, ändern sich $d[v]$ und $\pi[v]$ nicht mehr
- Nach Lemma 47 sind die d-Werte monoton steigend, wenn Knoten in die Schlage eingefügt werden

Graphalgorithmen

Beweis

- (I.A.) $V_0 = \{s\}$. Während der Initialisierung wird s grau gefärbt, $d[s]$ auf 0 gesetzt, und s in Q eingefügt. Somit gilt die Aussage.
- (I.V.) Aussage gilt für alle Knoten aus V_{k-1}
- (I.S.) Q ist nie leer bis Algorithmus terminiert.
- Nachdem v in Q eingefügt wurde, ändern sich $d[v]$ und $\pi[v]$ nicht mehr
- Nach Lemma 47 sind die d-Werte monoton steigend, wenn Knoten in die Schlage eingefügt werden
- Betrachte nun $v \in V_k,\ k > 0$.
  Monotonie mit $d[v] \geq k$ (Lemma 46) und (I.V.): wenn v entdeckt wird, dann erst nachdem alle Knoten aus V_{k-1} in die Schlange eingefügt wurden

Graphalgorithmen

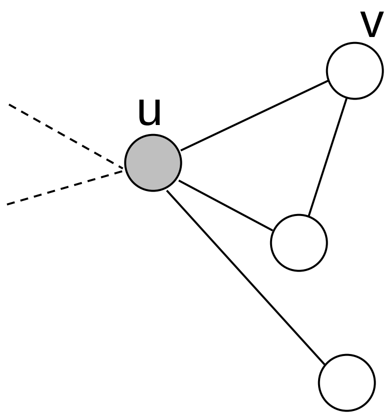
Beweis

- (I.A.) $V_0 = \{s\}$. Während der Initialisierung wird s grau gefärbt, $d[s]$ auf 0 gesetzt, und s in Q eingefügt. Somit gilt die Aussage.
- (I.V.) Aussage gilt für alle Knoten aus V_{k-1}
- (I.S.) Q ist nie leer bis Algorithmus terminiert.
- Nachdem v in Q eingefügt wurde, ändern sich $d[v]$ und $\pi[v]$ nicht mehr
- Nach Lemma 47 sind die d-Werte monoton steigend, wenn Knoten in die Schlage eingefügt werden
- Betrachte nun $v \in V_k,\ k > 0$.
  Monotonie mit $d[v] \geq k$ (Lemma 46) und (I.V.): wenn v entdeckt wird, dann erst nachdem alle Knoten aus V_{k-1} in die Schlange eingefügt wurden

Graphalgorithmen

Beweis

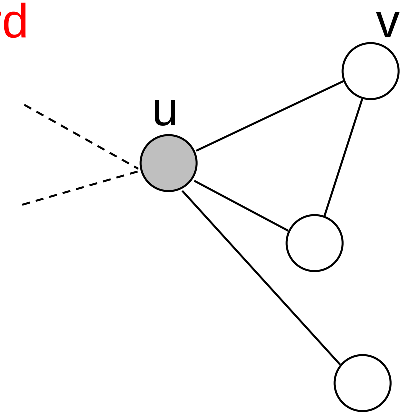
- Da $\delta(s,v)=k$ gibt es Pfad mit k Kanten von s nach v und Knoten u mit $(u,v)\in E$ und $u\in V_{k-1}$



Graphalgorithmen

Beweis

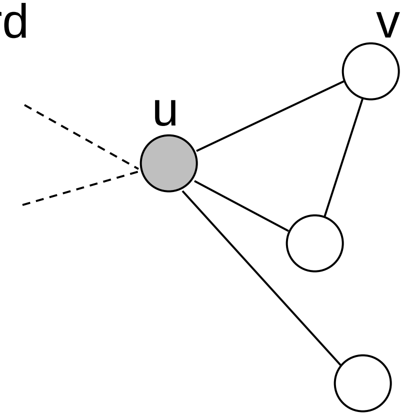
- Da $\delta(s,v)=k$ gibt es Pfad mit k Kanten von s nach v und Knoten u mit $(u,v)\in E$ und $u \in V_{k-1}$
- ObdA. Sei u der erste solche Knoten, der grau gefärbt wird (existiert wegen I.V.)



Graphalgorithmen

Beweis

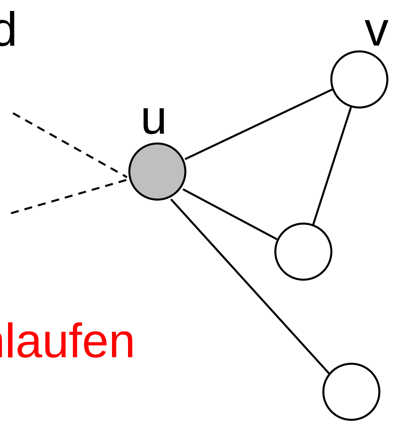
- Da $\delta(s,v)=k$ gibt es Pfad mit k Kanten von s nach v und Knoten u mit $(u,v) \in E$ und $u \in V_{k-1}$
- ObdA. Sei u der erste solche Knoten, der grau gefärbt wird (existiert wegen I.V.)
- Wird Knoten grau gefärbt, so wird er auch in Schlange eingefügt und muss irgendwann als Kopf der Schlange auftauchen



Graphalgorithmen

Beweis

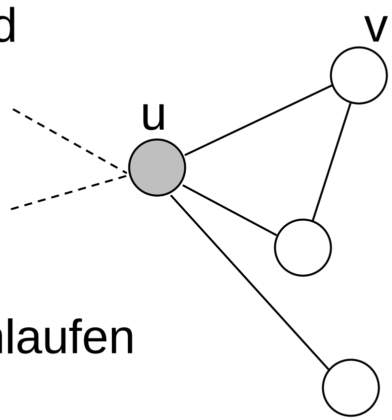
- Da $\delta(s,v) = k$ gibt es Pfad mit k Kanten von s nach v und Knoten u mit $(u,v) \in E$ und $u \in V_{k-1}$
- ObdA. Sei u der erste solche Knoten, der grau gefärbt wird (existiert wegen I.V.)
- Wird Knoten grau gefärbt, so wird er auch in Schlange eingefügt und muss irgendwann als Kopf der Schlange auftauchen
- Ist u Kopf der Schlange, so wird seine Adjazenzliste durchlaufen und v in Zeile 4 entdeckt



Graphalgorithmen

Beweis

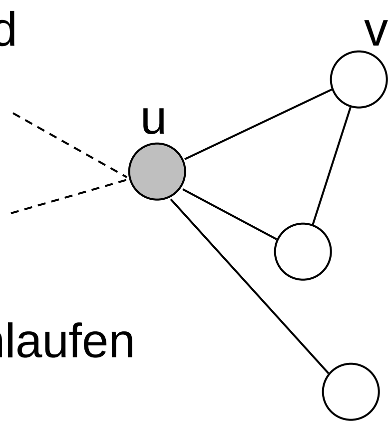
- Da $\delta(s,v)=k$ gibt es Pfad mit k Kanten von s nach v und Knoten u mit $(u,v)\in E$ und $u\in V_{k-1}$
- ObdA. Sei u der erste solche Knoten, der grau gefärbt wird (existiert wegen I.V.)
- Wird Knoten grau gefärbt, so wird er auch in Schlange eingefügt und muss irgendwann als Kopf der Schlange auftauchen
- Ist u Kopf der Schlange, so wird seine Adjazenzliste durchlaufen und v in Zeile 4 entdeckt
- Dann wird v in Zeile 6 grau gefärbt und Zeile 7 setzt $d[v]=k$ und $\pi[v]=u$.



Graphalgorithmen

Beweis

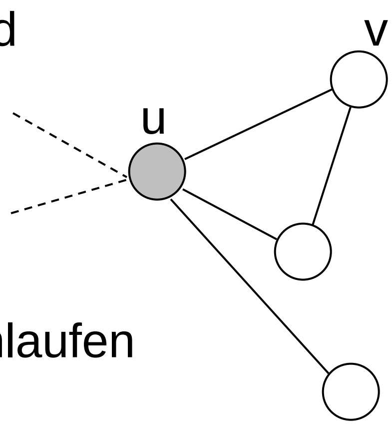
- Da $\delta(s, v) = k$ gibt es Pfad mit k Kanten von s nach v und Knoten u mit $(u, v) \in E$ und $u \in V_{k-1}$
- ObdA. Sei u der erste solche Knoten, der grau gefärbt wird (existiert wegen I.V.)
- Wird Knoten grau gefärbt, so wird er auch in Schlange eingefügt und muss irgendwann als Kopf der Schlange auftauchen
- Ist u Kopf der Schlange, so wird seine Adjazenzliste durchlaufen und v in Zeile 4 entdeckt
- Dann wird v in Zeile 6 grau gefärbt und Zeile 7 setzt $d[v] = k$ und $\pi[v] = u$.
- Zeile 8 fügt v in die Schlange ein



Graphalgorithmen

Beweis

- Da $\delta(s,v) = k$ gibt es Pfad mit k Kanten von s nach v und Knoten u mit $(u,v) \in E$ und $u \in V_{k-1}$
- ObdA. Sei u der erste solche Knoten, der grau gefärbt wird (existiert wegen I.V.)
- Wird Knoten grau gefärbt, so wird er auch in Schlange eingefügt und muss irgendwann als Kopf der Schlange auftauchen

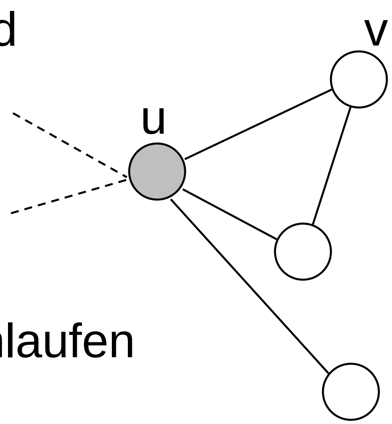


- Ist u Kopf der Schlange, so wird seine Adjazenzliste durchlaufen und v in Zeile 4 entdeckt
- Dann wird v in Zeile 6 grau gefärbt und Zeile 7 setzt $d[v] = k$ und $\pi[v] = u$.
- Zeile 8 fügt v in die Schlange ein
- Damit folgt unsere Aussage per Induktion für alle V_k

Graphalgorithmen

Beweis

- Da $\delta(s,v)=k$ gibt es Pfad mit k Kanten von s nach v und Knoten u mit $(u,v) \in E$ und $u \in V_{k-1}$
- ObdA. Sei u der erste solche Knoten, der grau gefärbt wird (existiert wegen I.V.)
- Wird Knoten grau gefärbt, so wird er auch in Schlange eingefügt und muss irgendwann als Kopf der Schlange auftauchen



- Ist u Kopf der Schlange, so wird seine Adjazenzliste durchlaufen und v in Zeile 4 entdeckt
- Dann wird v in Zeile 6 grau gefärbt und Zeile 7 setzt $d[v]=k$ und $\pi[v]=u$.
- Zeile 8 fügt v in die Schlange ein
- Damit folgt unsere Aussage per Induktion für alle V_k

Graphalgorithmen

Beweis

- Abschließend beobachten wir, dass wenn $v \in V_k$ ist, dann ist $\pi[v]$ in V_{k-1}

Graphalgorithmen

Beweis

- Abschließend beobachten wir, dass wenn $v \in V_k$ ist, dann ist $\pi[v]$ in V_{k-1}
- Damit können wir einen kürzesten Weg von s nach v bekommen, indem wir einen kürzesten Weg von s nach $\pi[v]$ nehmen und der Kante $(\pi[v], v)$ folgen

Graphalgorithmen

Beweis

- Abschließend beobachten wir, dass wenn $v \in V_k$ ist, dann ist $\pi[v]$ in V_{k-1}
- Damit können wir einen kürzesten Weg von s nach v bekommen, indem wir einen kürzesten Weg von s nach $\pi[v]$ nehmen und der Kante $(\pi[v], v)$ folgen

Graphalgorithmen

Zusammenfassung (Breitensuche)

- Die Breitensuche kann dazu genutzt werden, um das SSSP Problem in ungewichteten Graphen zu lösen
- Die Laufzeit der Breitensuche ist $\mathbf{O}(|V| + |E|)$