technische universität dortmund

SoSe 2017

C. Sohler
A. Krivošija, A. Rey, H. Sandvoß

DAP2 – Heimübung 2

Ausgabedatum: 21.4.17 — Abgabedatum: Fr. 28.4.17 (Di. 2.5. für Gruppen 27-32) 12 Uhr

Abgabe:

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben! Beweise sind nur dort notwendig, wo explizit danach gefragt wird. Eine Begründung der Antwort wird allerdings *immer* verlangt.

Scheine:

Für Studierende in den Bachelor-Studiengängen ist die Erbringung von Studienleistungen Voraussetzung für die Teilnahme an der Modulprüfung (Klausur)[1]. Die Studienleistung für die DAP2-Übungen wird erbracht durch

- Erreichen von mindestens 50 % der Punkte, die in den Heimarbeitsübungsaufgaben erreichbar sind, und
- Erreichen von 50 % der Punkte in mindestens einem der beiden Übungstests.

Die Heimübungen dürfen in Gruppen von maximal drei Studierenden abgegeben werden. Die gemeinsame Bearbeitung in solchen Gruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 2.1 (5 Punkte): (Laufzeitanalyse)

Führen Sie eine exakte Worst-Case Laufzeitanalyse für den unten gegebenen Algorithmus **BearbeiteArray** bei Eingabe eines Arrays der Länge n durch, d.h. finden Sie eine Funktion $f(n)$, deren Wert die Worst-Case Laufzeit diesen Algorithmus ist.

```
BearbeiteArray(Array A):
n ← length[A]
for i ← n downto 1 do
    for j ← 1 to i − 1 do
        if A[j + 1] < A[j] then
            temp ← A[j]
            A[j] ← A[j + 1]
            A[j + 1] ← temp
```

Geben Sie außerdem Antworten auf folgenden Fragen:

a) Was macht dieser Algorithmus?

[1] In anderen Studiengängen ist die Erbringung der Studienleistung möglicherweise ebenfalls Pflicht. Bitte überprüfen Sie Ihre jeweilige Prüfungsordnung bzw. das jeweilige Modulhandbuch.

b) Führen Sie die asymptotische Worst-Case Laufzeitanalyse für diesen Algorithmus durch, d.h. finden Sie eine möglichst kleine Funktion $g(n)$, sodass $f(n) \in O(g(n))$.

Lösung:

Beh.: Es handelt sich hier über bekannte BubbleSort Algorithmus, der sortiert das eingegebene Array aufsteigend, und benötigt im Worst-Case $T(n) = \frac{5}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2$ Rechenschritte.

Beweis: Wir gehen Zeile für Zeile durch den Pseudocode und geben jeweils an, wie viele Rechenschritte die Zeile benötigt:

1. Eine Zuweisung benötigt einen Rechenschritt.
2. $n+1$ Rechenschritte, weil nach n Iterationen noch einmal die Abbruchbedingung geprüft werden muss.
3. Aufgrund der äußeren Schleife wird dieser Schleifenkopf n mal (für Abbruchbedingungen) ausgeführt. In Iteration i der äußeren Schleife iteriert die innere Schleife über die Werte 1 bis $i-1$. Dies ergibt also $i-1$ Durchläufe. Die innere Schleife erzeugt also $\sum_{i=1}^{n}(i-1)$ Rechenschritte. Insgesamt erhalten wir also $n + \sum_{i=1}^{n}(i-1)$.
4. Die Bedingung der Verzweigung wird $\sum_{i=1}^{n}(i-1)$ mal überprüft.

5-7. Diese Zuweisungen werden nur aufgerufen, falls die Bedingung in Zeile 4 wahr ist. Da wir eine Worst-Case Analyse durchführen, können wir annehmen, dass sie bei jeder Auswertung wahr ist. Daher werden diese Zeilen jeweils $\sum_{i=1}^{n}(i-1)$ mal aufgerufen. Insgesamt ergibt sich also ein Beitrag von $3\sum_{i=1}^{n}(i-1)$.

Nun summieren wir alle ermittelten Beiträge zu

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + (n+1) + \left(n + \sum_{i=1}^{n}(i-1)\right) + \left(4\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right) = 2n + 2 + 5\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= 2n + 2 - 5n + 5\sum_{i=1}^{n} i = 2 - 3n + 5\left(\frac{n^2+n}{2}\right) = \frac{5}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2. \end{aligned}$$

Asymptotisch gilt es dass $\frac{5}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2 \in O(n^2)$ ist.

□

Aufgabe 2.2 (5 Punkte): (Landau–Notation)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

a) $4n^4 \in O\left(4^n\right)$

b) $\left(5\ln n^5\right)^5 \in o\left(\frac{1}{5}\sqrt[5]{n}\right)$

c) $\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[3]{n^4} \in \Omega\left(\frac{4}{3}n\right)$

d) $n^4 \in \omega\left(\frac{1}{2}n^4 + n^3 \log^3 n\right)$

e) $n^3 - 5n^2 \in \Theta\left(n^3 + 5n\sqrt{n}\right)$

Geben Sie in allen Fällen einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an, um Ihre Antwort zu begründen. Sie dürfen die Ergebnisse benutzen, die in der Vorlesung bewiesen wurden. Nutzen Sie dabei die Definitionen der Landau-Symbole aus der Vorlesung.

Lösung:

1. Korrekt. In der Vorlesung ist gegeben, dass $n^\ell \in O(2^n)$ für alle $\ell \geq 2$ ist, somit existieren $c > 0$ und $n_0 > 0$ sodass für alle $n \geq n_0$ $n^4 \leq c \cdot 2^n = \frac{4c}{4} \cdot 2^n$ gilt. Außerdem gilt es $2 \leq 4 \Rightarrow 2^n \leq 4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und deswegen gilt es dass $4n^4 \leq 4c \cdot 4^n$ für alle $n \geq n_0$ und $c' = 4c > 0$. Deswegen folgt $4n^4 \in O(4^n)$.

2. Korrekt. Es gilt dass $\left(5 \ln n^5\right)^5 = \left(5^2 \ln n\right)^5 = 5^{10} \ln^5 n$ ist. Es ist aus der Hierarchie aus der Vorlesung bekannt, dass $\ln n \in o\left(n^\ell\right)$ für $\ell > 0$ ist. D.h. für $\ell = \frac{1}{25}$ gilt: $\ln n < c' \cdot n^{1/25}$ $(\forall c' >)(\exists n_0 > 0)$ sodass die Aussage für alle $n \geq n_0$ gilt. Daher gilt $\left(5 \ln n^5\right)^5 = 5^{10} \ln^5 n < 5^{10} \cdot \left(c' \cdot n^{1/25}\right)^5 = (5^{10} \cdot (c')^5) \cdot n^{1/5} = (5^{11} \cdot (c')^5) \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt[5]{n}$. Für $c = 5^{11} \cdot (c')^5$ haben wir die gewünschte Aussage.

3. Korrekt. Nach der Vorlesung ist $\frac{4}{3}n \in O\left(n^{4/3}\right)$, was äquivalent zu in $n^{4/3} \in \Omega\left(\frac{4}{3}n\right)$ ist. Dies bedeutet dass $(\exists c > 0, n_0 > 0)(\forall n > n_0)$ $n^{4/3} \geq c \cdot \frac{4}{3}n$ gilt. Da $\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[3]{n^4} \geq n^{4/3}$ ist, folgt es für diese c und n_0 dass $\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[3]{n^4} \geq c \cdot \frac{4}{3}n$ für alle $n > n_0$ ist.

4. Nicht korrekt. Wenn diese Aussage gültig wäre, müsste es gelten dass $n^4 > c \cdot \left(\frac{1}{2}n^4 + n^3 \log^3 n\right)$ für alle $c > 0$ und $n > n_0$ ist, wobei es existiert eine solche $n_0 > 0$. Es gilt zwar, dass $n^4 \in \omega\left(n^3 \log^3 n\right)$ ist, d.h. $(\forall c' > 0)(\exists n_0 > 0)$ sodass für alle $n > n_0$ es $n^4 > c' \cdot n^3 \log^3 n$ ist (aus Vorlesung ist bekannt, dass $\log^\ell n \in o(n) \Leftrightarrow n \in \omega(\log^\ell n)$ für alle $\ell > 0$ ist).

   Es gilt aber nicht, dass $n^4 \in \omega(\frac{1}{2}n^4)$ ist. Es müsste für alle $c'' > 0$ eine $n_0 > 0$ existieren, sodass $n^4 > c'' \cdot \frac{1}{2}n^4 \Leftrightarrow c'' < 2$ ist. Für alle $c'' \geq 2$ gibt es keine n_0, sodass $n^4 > c'' \cdot \frac{1}{2}n^4$ für alle $n > n_0$ ist. Somit haben wir, dass für keine $c'' \geq 2$ es gilt: $n^4 > c'' \cdot \frac{1}{2}n^4$. Da $\frac{1}{2}n^4 \leq \frac{1}{2}n^4 + n^3 \log^3 n$ ist, kann auch für keine Konstante $c'' \geq 2$ gelten, dass es einen Wert $n_0 > 0$ gibt, sodass $n^4 > c'' \cdot \left(\frac{1}{2}n^4 + n^3 \log^3 n\right)$ für alle $n > n_0$ ist.

5. Korrekt. Es muss gelten dass $n^3 - 5n^2 \in O\left(n^3 + 5n\sqrt{n}\right)$ und $n^3 - 5n^2 \in \Omega\left(n^3 + 5n\sqrt{n}\right)$ ist. Die erste Aussage ist klar, da $n^3 - 5n^2 \leq n^3 \leq 1 \cdot (n^3 + 5n\sqrt{n})$ für alle $n > 0$ (und $c' = 1$) ist.

   Um $n^3 - 5n^2 \in \Omega\left(n^3 + 5n\sqrt{n}\right)$ zu zeigen, sollen wir die Existenz einer Konstante $c'' > 0$ zeigen, sodass $n^3 - 5n^2 \geq c'' \cdot (n^3 + 5n\sqrt{n})$ für alle $n > n_0 > 0$ ist. Es gilt dass $n^3 - 5n^2 \geq \frac{1}{2}n^3$ für alle $n \geq 10$ ist. Außerdem gilt $n^3 + 5n\sqrt{n} \leq 2n^3 \Leftrightarrow 5n\sqrt{n} \leq n^3 \Leftrightarrow 25 \leq n^3 \Leftrightarrow n \geq \sqrt[3]{25}$. Da $3 = \sqrt[3]{27}$ ist, gilt es $n^3 + 5n\sqrt{n} \leq 2n^3$ für alle $n \geq 3$. Jetzt haben wir: $n^3 - 5n^2 \geq \frac{1}{2}n^3 = \frac{1}{4} \cdot 2n^3 \geq \frac{1}{4} \cdot (n^3 + 5n\sqrt{n})$. Für $c'' = \frac{1}{4}$ und $n > n = 10$ folgt die gewünschte Aussage.

$\square$