technische universität
dortmund

LS 2 /
Informatik

Datenstrukturen, Algorithmen und Programmierung 2 (DAP2)

Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $\quad u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. $\quad$ **if** $\text{color}[u] = \text{weiß}$ **then**
6. $\quad\quad \text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$
7. $\quad\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. $\quad\quad\quad$ **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $\quad\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. $\quad\quad\quad\quad \text{DecreaseKey}(v, d[v])$

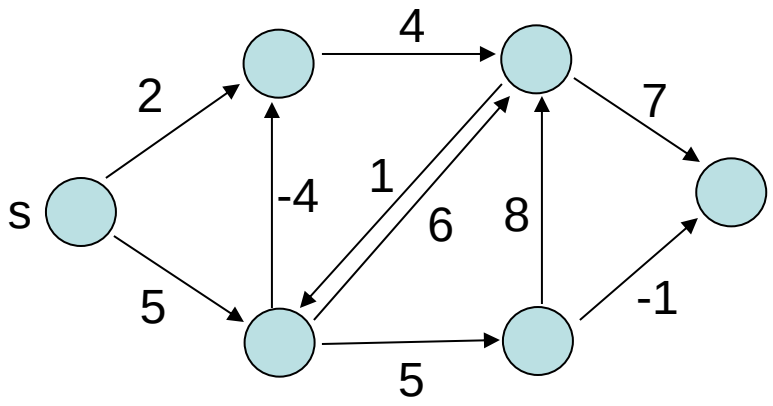
Graphalgorithmen

Single Source Shortest Path (SSSP)

- Eingabe: Gewichteter Graph $G = (V, E)$ und Startknoten s
- Ausgabe: Für jeden Knoten $u \in V$ seine Distanz zu s
  sowie einen kürzesten Weg

Heute

- Negative Kantengewichte



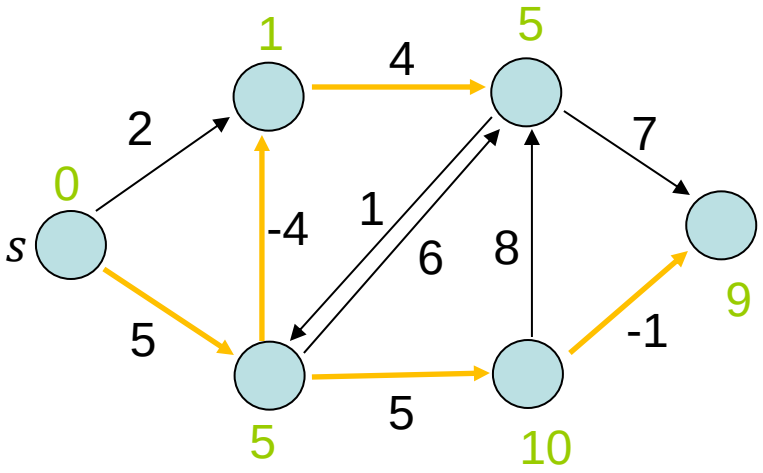
Graphalgorithmen

Single Source Shortest Path (SSSP)

- Eingabe: Gewichteter Graph $G = (V, E)$ und Startknoten s
- Ausgabe: Für jeden Knoten $u \in V$ seine Distanz zu s
  sowie einen kürzesten Weg

Heute

- Negative Kantengewichte

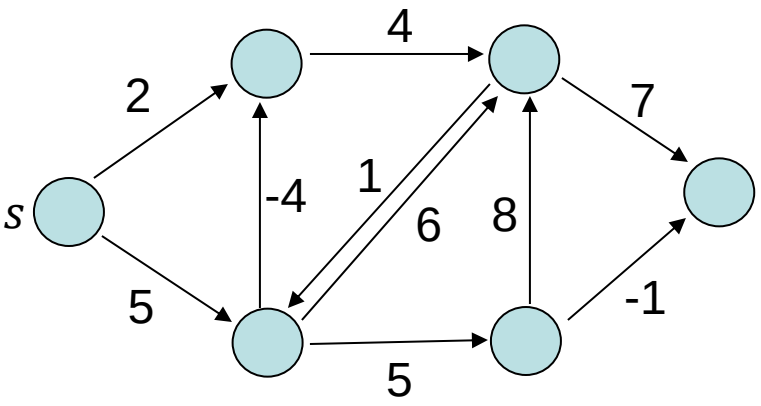


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $\quad u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. $\quad$ **if** $\text{color}[u] = \text{weiß}$ **then**
6. $\quad\quad \text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$
7. $\quad\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. $\quad\quad\quad$ **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $\quad\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. $\quad\quad\quad\quad \text{DecreaseKey}(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

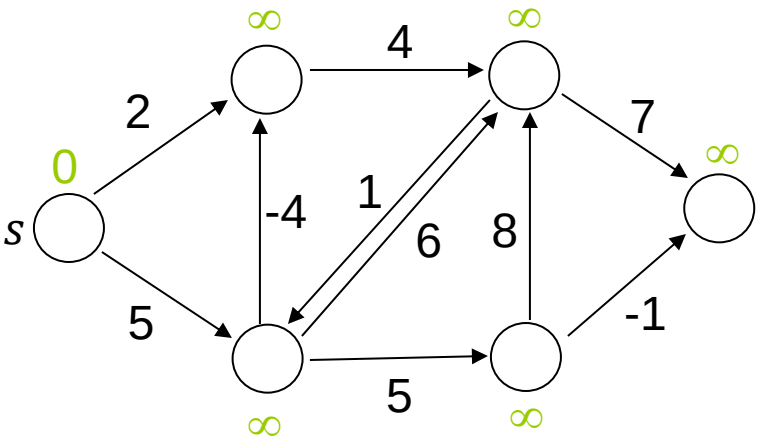


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $\quad u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. $\quad$ **if** color$[u] =$ weiß **then**
6. $\quad\quad$ color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. $\quad\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. $\quad\quad\quad$ **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $\quad\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. $\quad\quad\quad\quad \text{DecreaseKey}(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

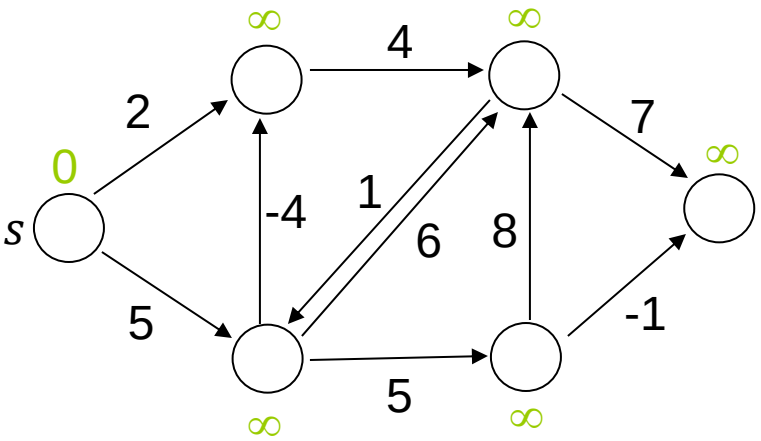


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $\quad u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. $\quad$ **if** color$[u] =$ weiß **then**
6. $\quad\quad$ color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. $\quad\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. $\quad\quad\quad$ **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $\quad\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. $\quad\quad\quad\quad \text{DecreaseKey}(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

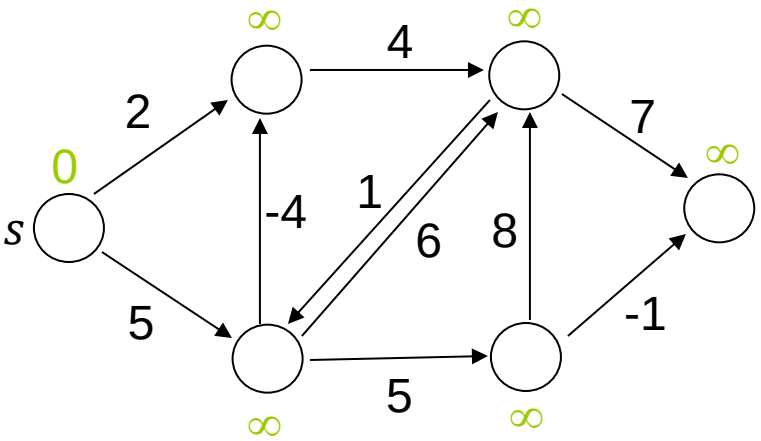


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

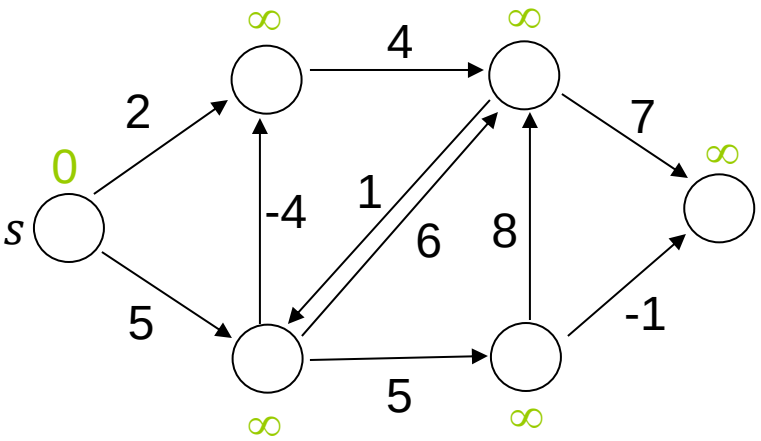


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

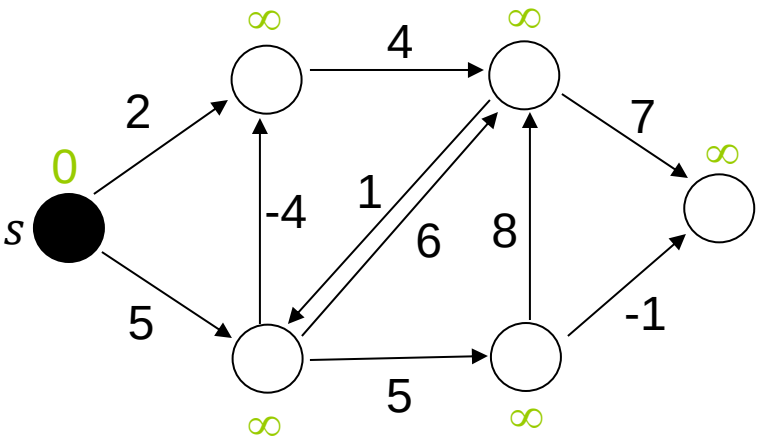


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

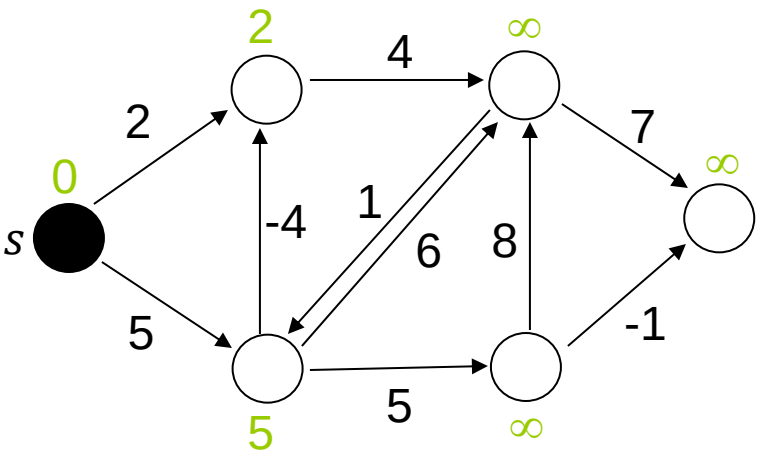


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** $\text{color}[u] = \text{weiß}$ **then**
6. $\text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. $\text{DecreaseKey}(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

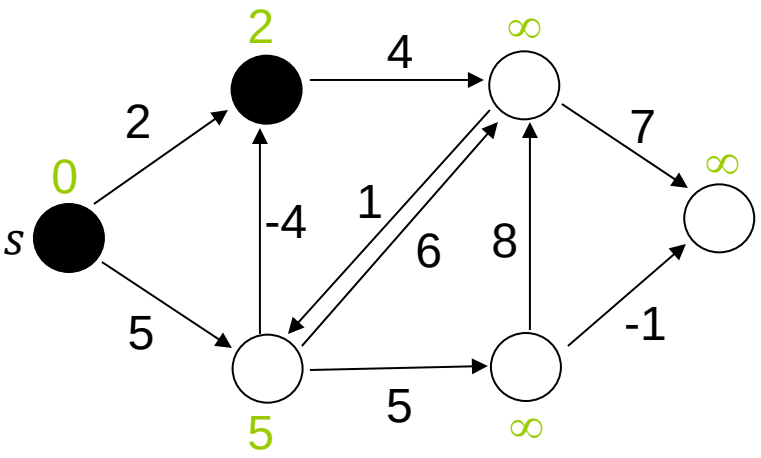


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

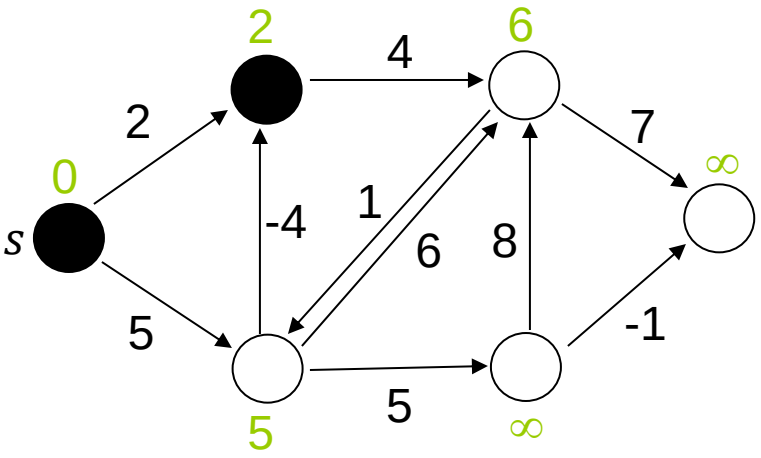


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

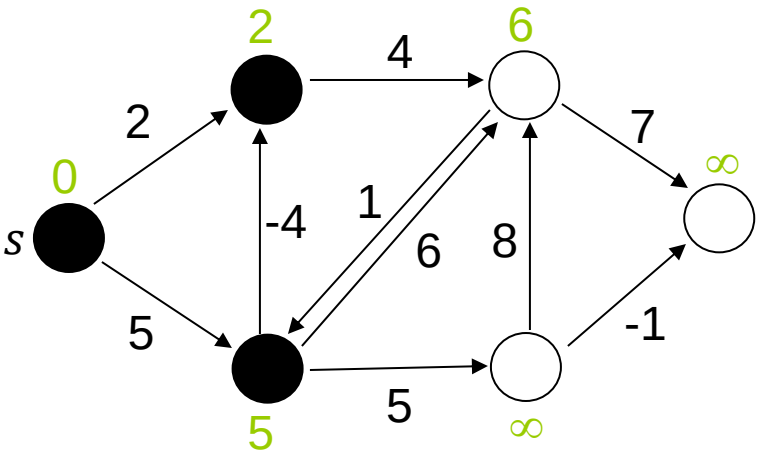


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

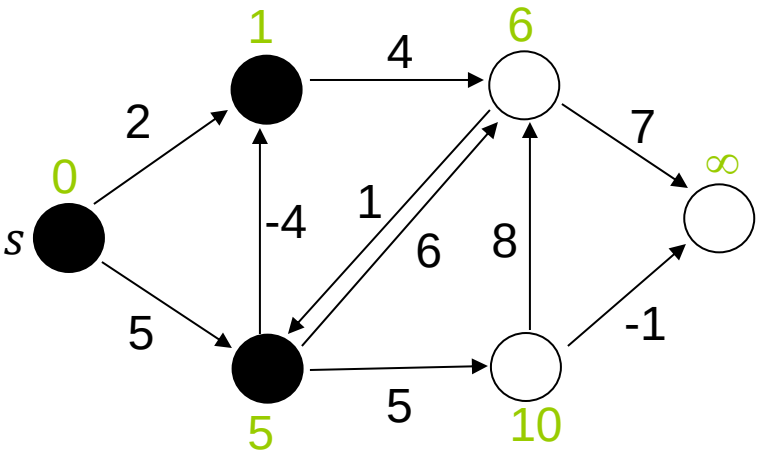


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

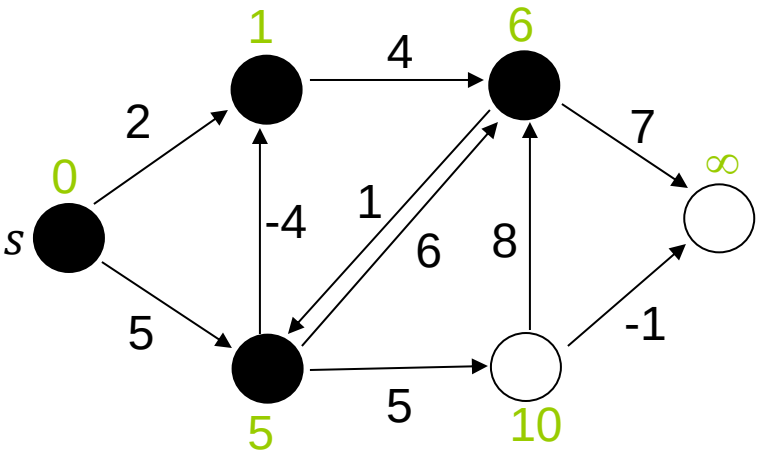


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

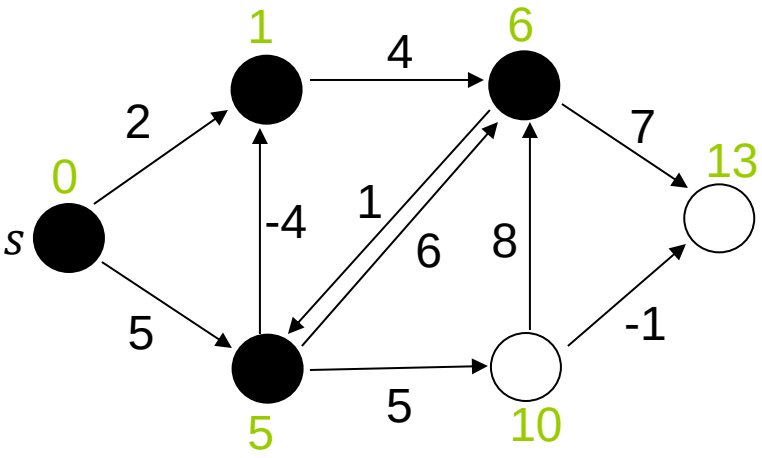


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

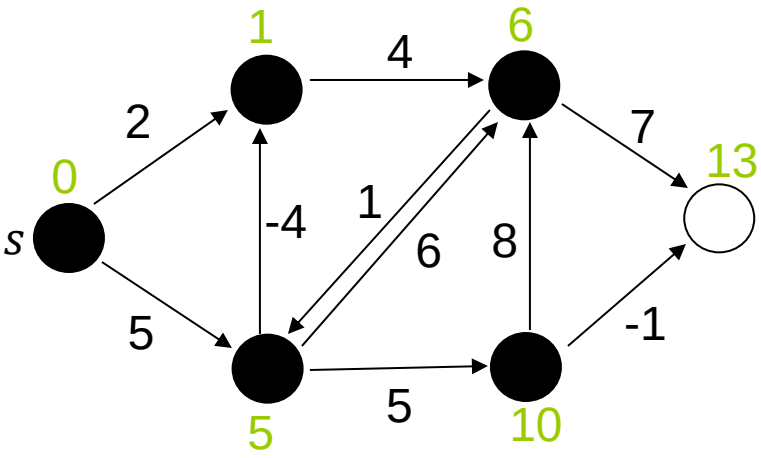


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

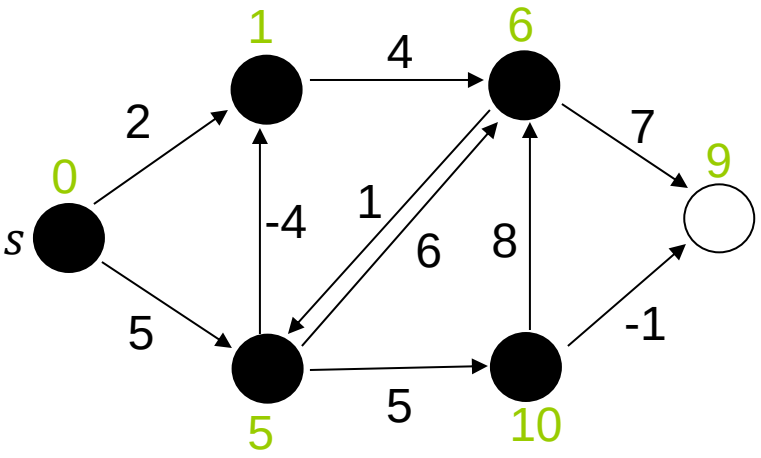


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. **if** color$[u]$ = weiß **then**
6. color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. DecreaseKey$(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

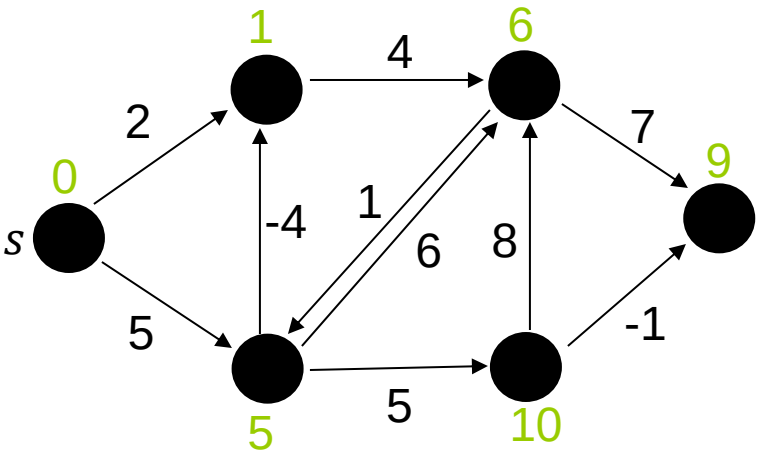


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $\quad u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. $\quad$ **if** $\text{color}[u] = \text{weiß}$ **then**
6. $\quad\quad \text{color}[u] \leftarrow \text{schwarz}$
7. $\quad\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. $\quad\quad\quad$ **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $\quad\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. $\quad\quad\quad\quad \text{DecreaseKey}(v, d[v])$

Was berechnet Dijkstras Algorithmus?

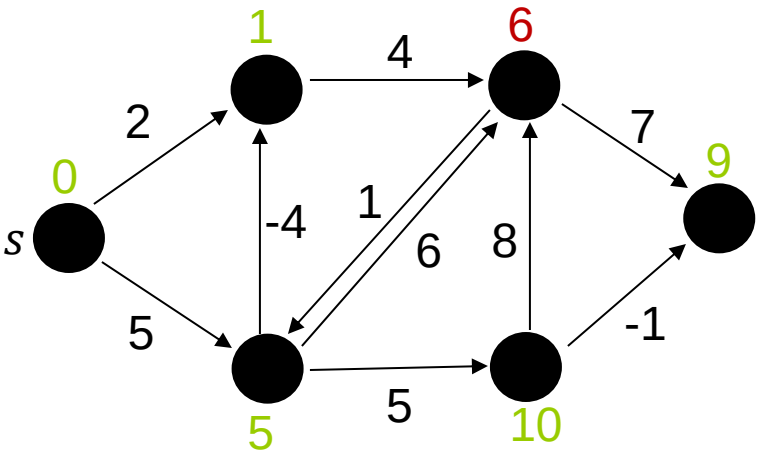


Graphalgorithmen

Dijkstras Algorithmus(G, w, s)

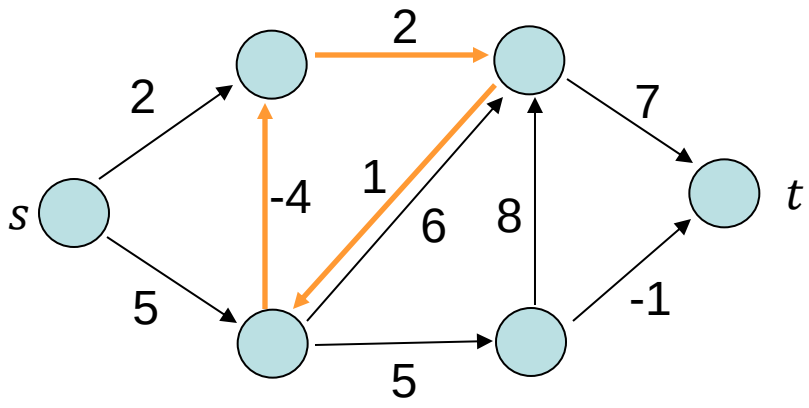
1. Initialisiere SSSP
2. $Q \leftarrow V[G]$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
4. $\quad u \leftarrow \text{ExtractMin}(Q)$
5. $\quad$ **if** color$[u] =$ weiß **then**
6. $\quad\quad$ color$[u] \leftarrow$ schwarz
7. $\quad\quad$ **for each** $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
8. $\quad\quad\quad$ **if** $d[u] + w(u, v) < d[v]$ **then**
9. $\quad\quad\quad\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
10. $\quad\quad\quad\quad \text{DecreaseKey}(v, d[v])$

Problem: Die Veränderung durch die negative Kante wird nicht mehr durch den Graphen propagiert.



Graphalgorithmen

Negative Zyklen



Problem

- Kann Weg mit beliebig kleinen Kosten finden
- Hier z.B. von s nach t

Graphalgorithmen

Unser Ansatz

- Betrachte zunächst nur Eingaben ohne negative Zyklen
- Dynamische Programmierung
- Frage: Wie formuliert man das Problem rekursiv?

Graphalgorithmen

Lemma 53

Wenn G keine negativen Zyklen hat und t von s aus erreichbar ist, dann gibt es einen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.

Beweis

- Annahme: Es gibt keinen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.

Graphalgorithmen

Lemma 53

Wenn G keine negativen Zyklen hat und t von s aus erreichbar ist, dann gibt es einen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.

Beweis

- Annahme: Es gibt keinen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.
- Dann kommt in jedem kürzesten s-t-Weg ein Knoten zweimal vor.

Graphalgorithmen

Lemma 53

Wenn G keine negativen Zyklen hat und t von s aus erreichbar ist, dann gibt es einen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.

Beweis

- Annahme: Es gibt keinen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.
- Dann kommt in jedem kürzesten s-t-Weg ein Knoten zweimal vor.
- Betrachte den kürzesten s-t-Weg P mit der geringsten Kantenanzahl.

Graphalgorithmen

Lemma 53

Wenn G keine negativen Zyklen hat und t von s aus erreichbar ist, dann gibt es einen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.

Beweis

- Annahme: Es gibt keinen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.
- Dann kommt in jedem kürzesten s-t-Weg ein Knoten zweimal vor.
- Betrachte den kürzesten s-t-Weg P mit der geringsten Kantenanzahl.
- In P kommt mindestens ein Knoten zweimal vor. Sei dies Knoten v.

Graphalgorithmen

Lemma 53

Wenn G keine negativen Zyklen hat und t von s aus erreichbar ist, dann gibt es einen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.

Beweis

- Annahme: Es gibt keinen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.
- Dann kommt in jedem kürzesten s-t-Weg ein Knoten zweimal vor.
- Betrachte den kürzesten s-t-Weg P mit der geringsten Kantenanzahl.
- In P kommt mindestens ein Knoten zweimal vor. Sei dies Knoten v.
- Wir können den Teil von v nach v entfernen, da jeder Kreis nichtnegative Länge hat und erhalten einen kürzesten s-t-Weg mit weniger Kanten.

Graphalgorithmen

Lemma 53

Wenn G keine negativen Zyklen hat und t von s aus erreichbar ist, dann gibt es einen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.

Beweis

- Annahme: Es gibt keinen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.
- Dann kommt in jedem kürzesten s-t-Weg ein Knoten zweimal vor.
- Betrachte den kürzesten s-t-Weg P mit der geringsten Kantenanzahl.
- In P kommt mindestens ein Knoten zweimal vor. Sei dies Knoten v.
- Wir können den Teil von v nach v entfernen, da jeder Kreis nichtnegative Länge hat und erhalten einen kürzesten s-t-Weg mit weniger Kanten.
- Widerspruch zur Wahl von P!

Graphalgorithmen

Lemma 53

Wenn G keine negativen Zyklen hat und t von s aus erreichbar ist, dann gibt es einen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.

Beweis

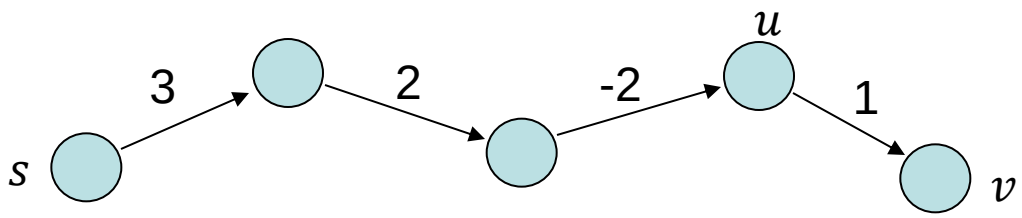
- Annahme: Es gibt keinen kürzesten s-t-Weg in G, in dem kein Knoten doppelt vorkommt.
- Dann kommt in jedem kürzesten s-t-Weg ein Knoten zweimal vor.
- Betrachte den kürzesten s-t-Weg P mit der geringsten Kantenanzahl.
- In P kommt mindestens ein Knoten zweimal vor. Sei dies Knoten v.
- Wir können den Teil von v nach v entfernen, da jeder Kreis nichtnegative Länge hat und erhalten einen kürzesten s-t-Weg mit weniger Kanten.
- Widerspruch zur Wahl von P!

Graphalgorithmen

Eine rekursive Problemformulierung

- $\mathrm{Opt}(i, v)$ sei Länge eines optimalen s-v-Wegs, der maximal i Kanten benutzt
- Sei P ein optimaler s-v-Weg mit max. i Kanten

$$\mathrm{Opt}(i,v) = \begin{cases} \mathrm{Opt}(i-1,v) & \text{, falls } P \text{ weniger als } i \text{ Kanten benutzt} \\ \mathrm{Opt}(i-1,u) + w(u,v) & \text{, falls } P \text{ genau } i \text{ Kanten benutzt und } (u,v) \text{ die letzte Kante bezeichnet} \end{cases}$$



Graphalgorithmen

Die Rekursion

- Für $i > 0$ gilt

$$\mathrm{Opt}(i, v) = \min\left\{\mathrm{Opt}(i-1, v), \min_{(u,v)\in E}\left(\mathrm{Opt}(i-1, u) + w(u, v)\right)\right\}$$

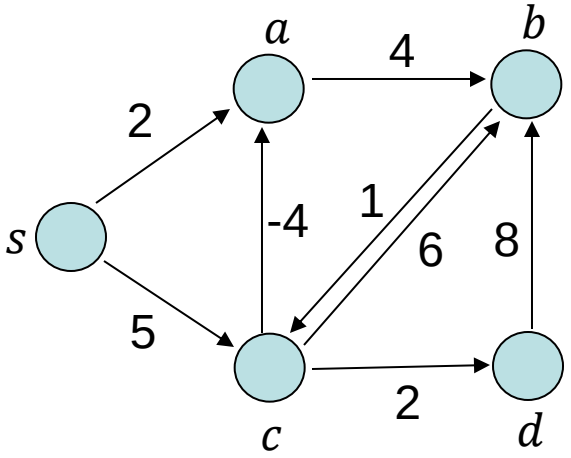
- Für $i = 0$ gilt

$$\mathrm{Opt}(0, s) = 0 \text{ und } \mathrm{Opt}(0, v) = \infty \text{ für } v \neq s$$

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

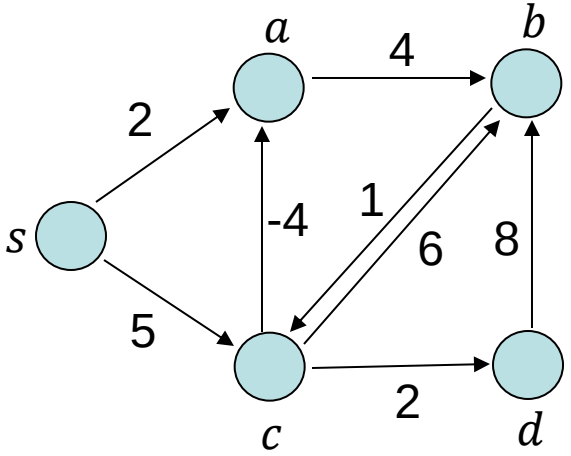


	s	a	b	c	d
0					
1					
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

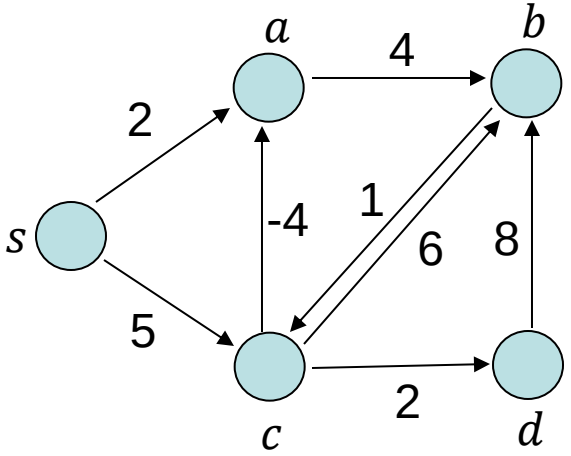


	s	a	b	c	d
0	∞	∞	∞	∞	∞
1					
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

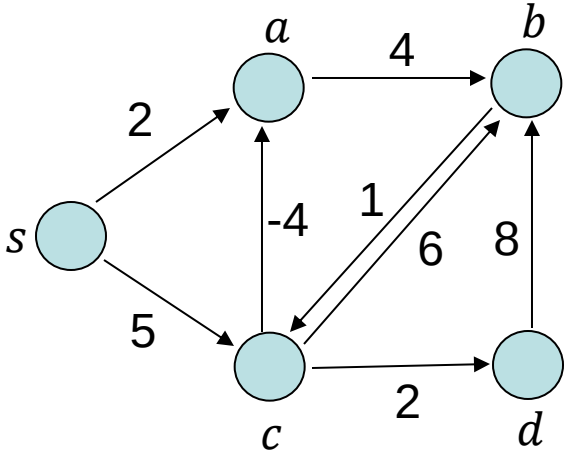


	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1					
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

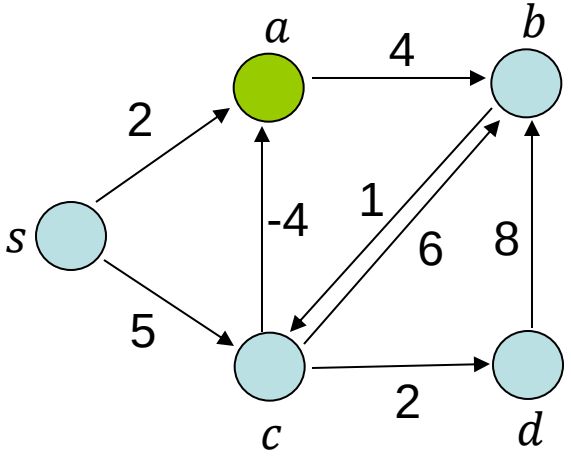
Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M



i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1					
2					
3					
4					

Graphalgorithmen



Bellman-Ford(G, s)

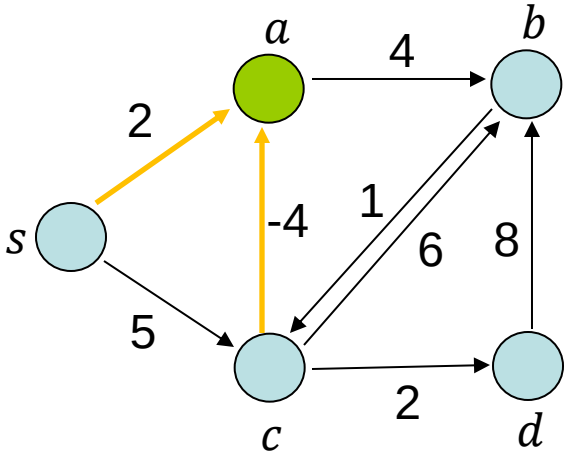
1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1					
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

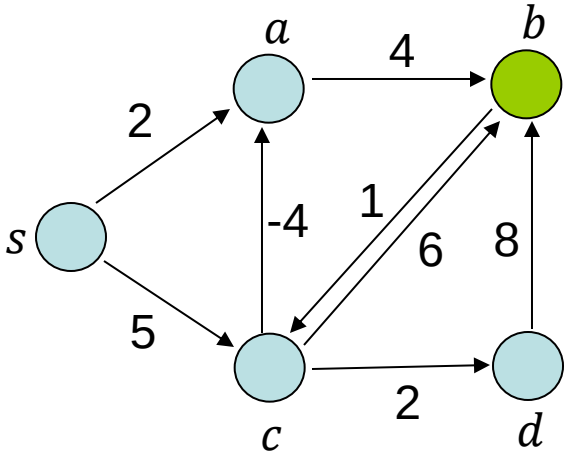
Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M



i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1		2			
2					
3					
4					

Graphalgorithmen



Bellman-Ford(G, s)

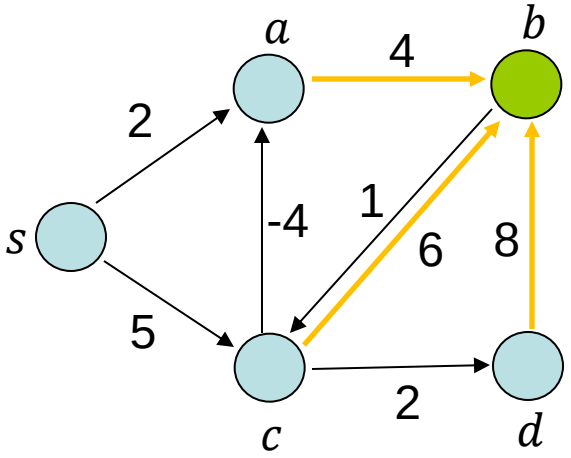
1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1		2			
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

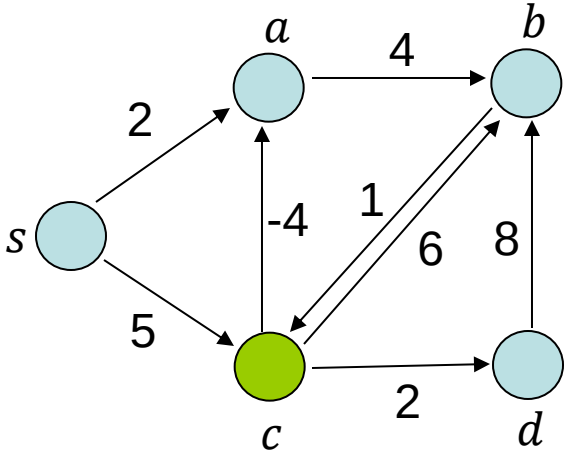
Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M



i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1		2	∞		
2					
3					
4					

Graphalgorithmen



Bellman-Ford(G, s)

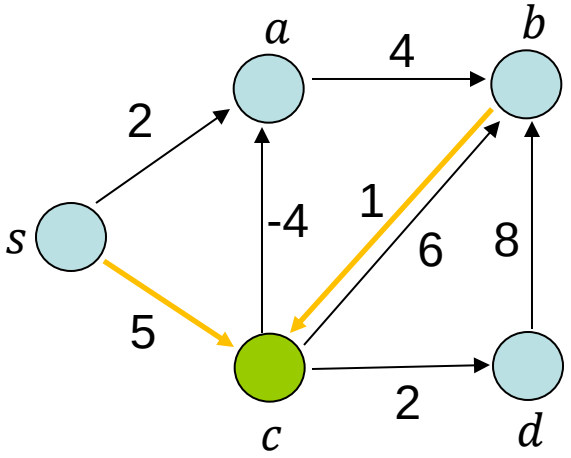
1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1		2	∞		
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

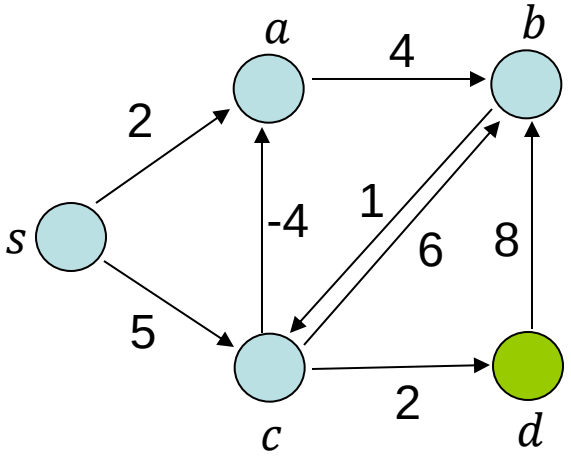
Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M



i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1		2	∞	5	
2					
3					
4					

Graphalgorithmen



Bellman-Ford(G, s)

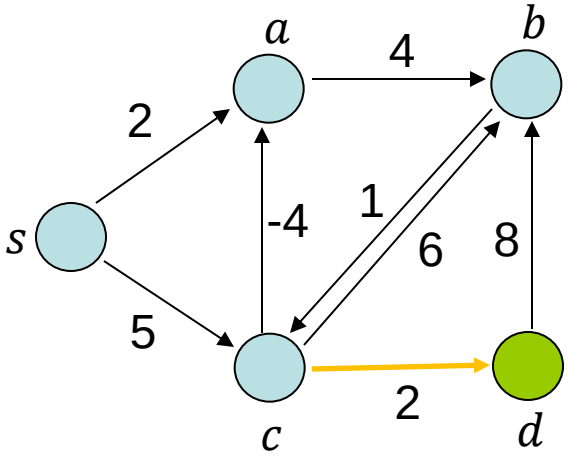
1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1		2	∞	5	
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

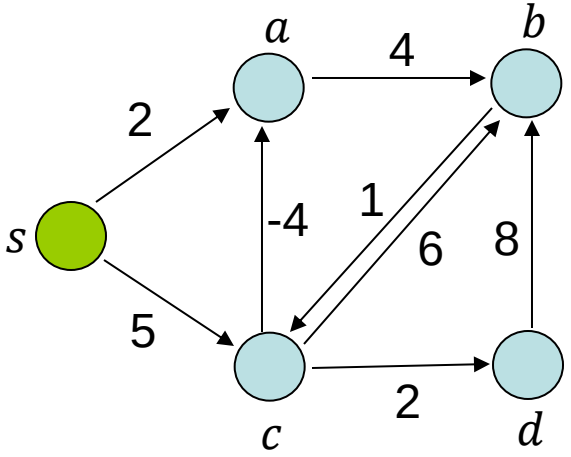
Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M



i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1		2	∞	5	∞
2					
3					
4					

Graphalgorithmen



Bellman-Ford(G, s)

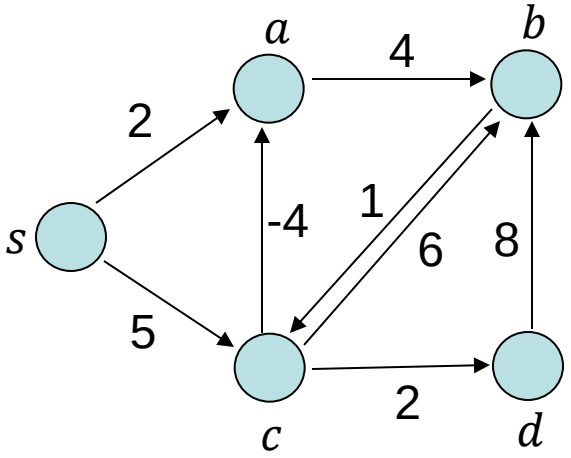
1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1		2	∞	5	∞
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

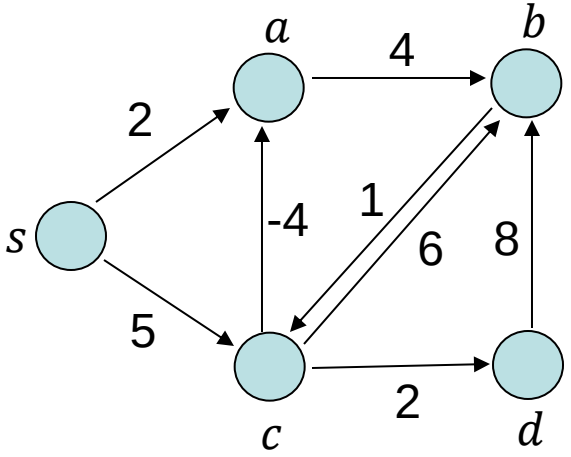


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

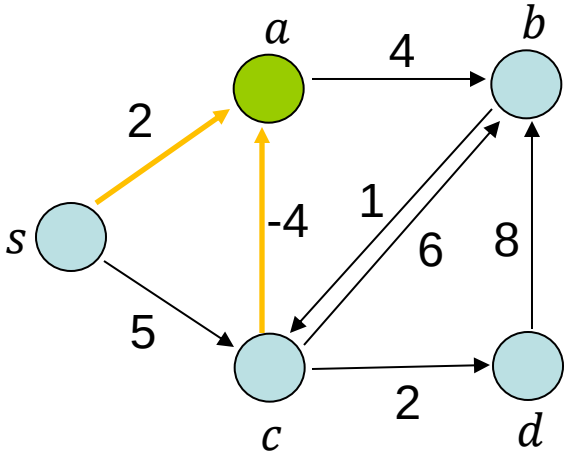


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2					
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

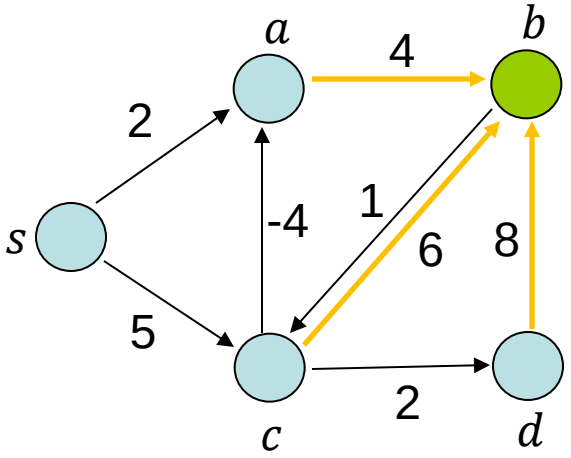


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2		1			
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

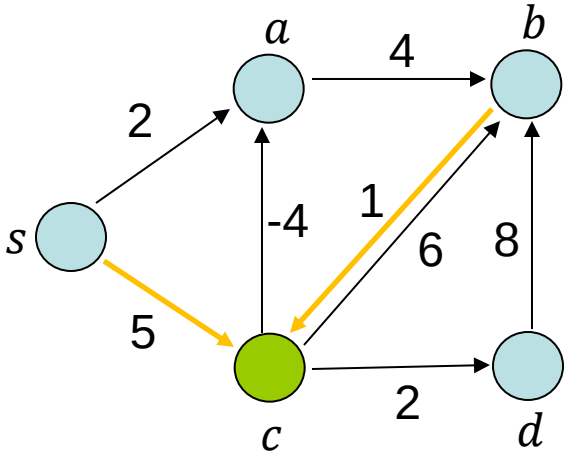


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2		1	6		
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

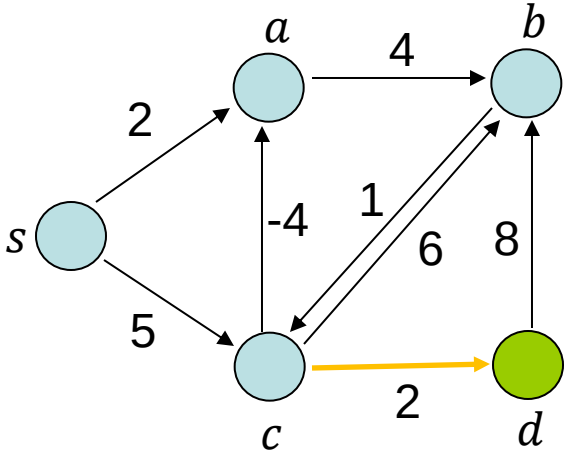


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2		1	6	5	
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

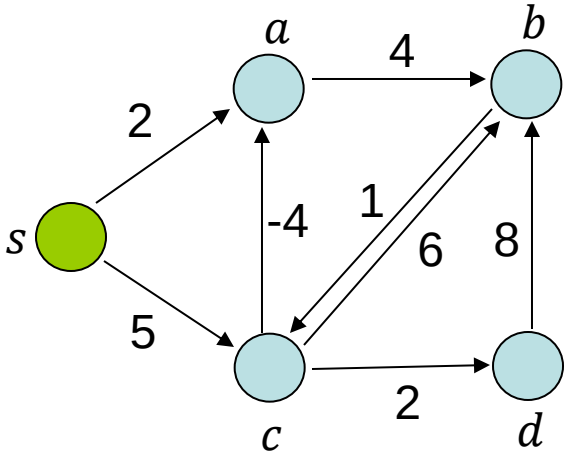


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2		1	6	5	7
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

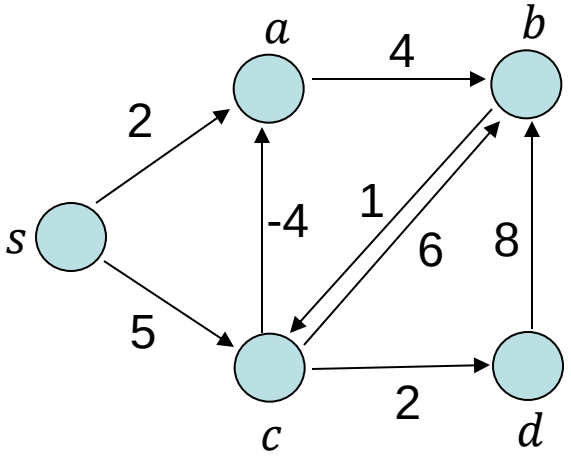


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

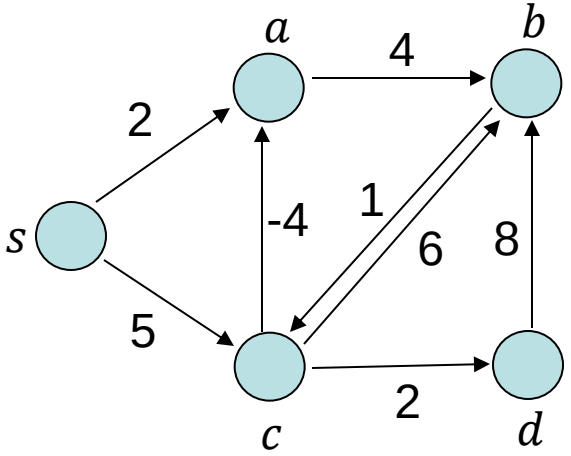


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

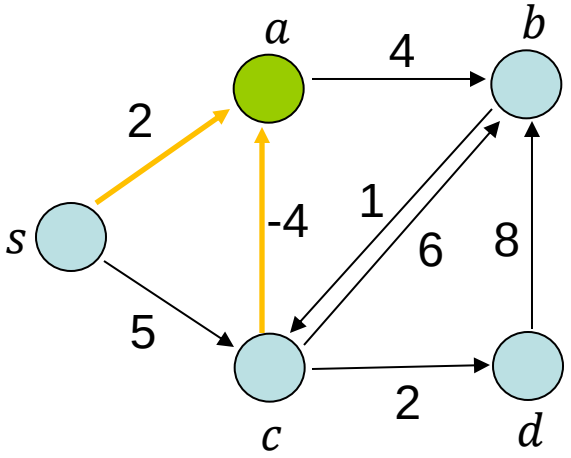


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3					
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

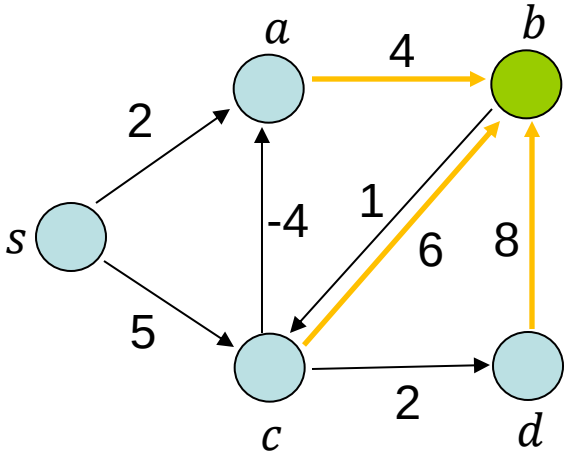


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3		1			
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

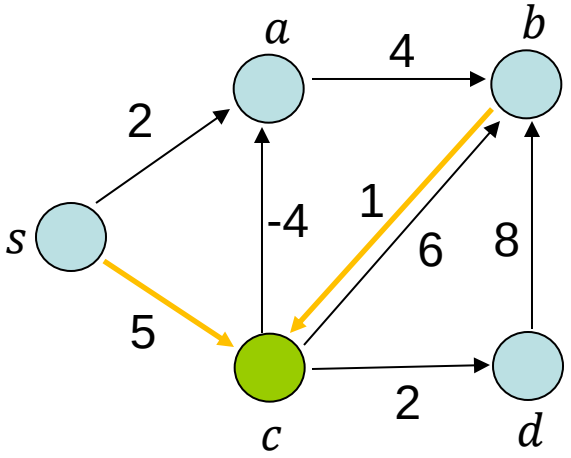


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3		1	5		
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

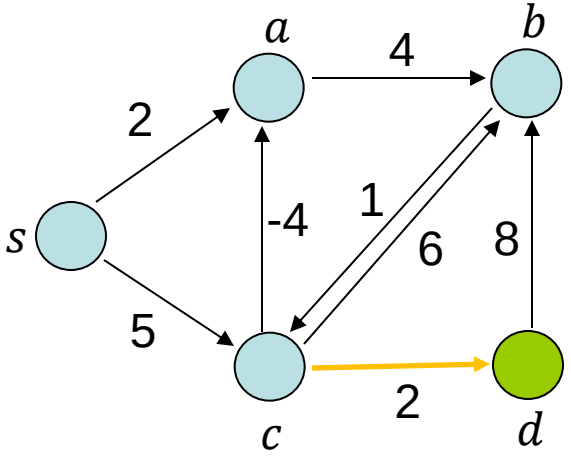


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3		1	5	5	
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

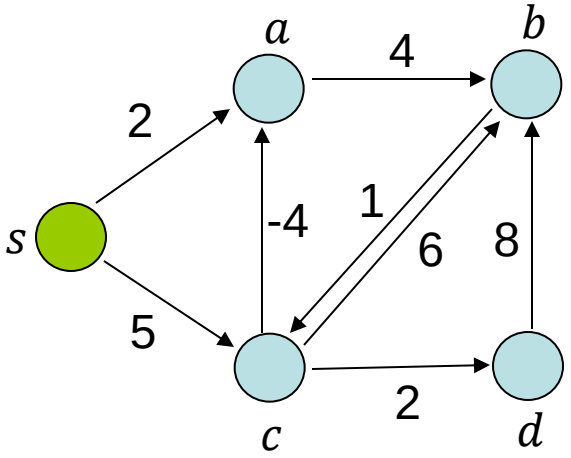


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3		1	5	5	7
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

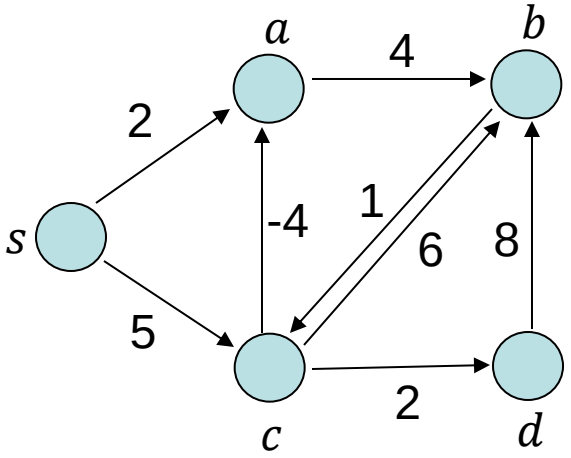


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3	0	1	5	5	7
4					

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

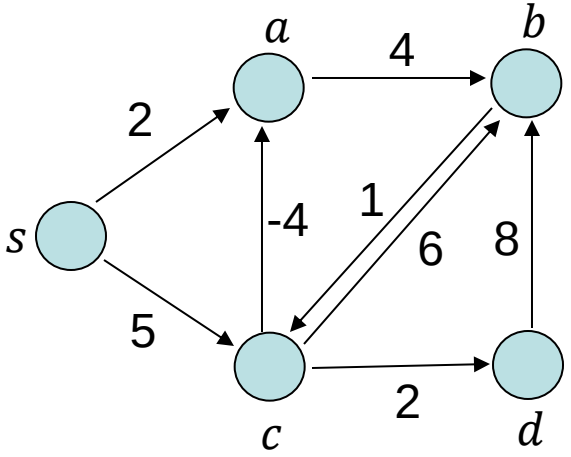


i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3	0	1	5	5	7
4	0	1	5	5	7

Graphalgorithmen

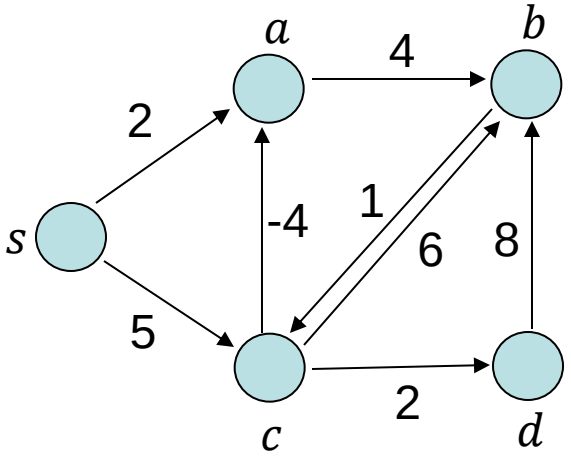
Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M



i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3	0	1	5	5	7
4	0	1	5	5	7

Graphalgorithmen



Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

i	s	a	b	c	d
0	0	∞	∞	∞	∞
1	0	2	∞	5	∞
2	0	1	6	5	7
3	0	1	5	5	7
4	0	1	5	5	7

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$ — $\mathbf{O}(|V|)$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$ — $\mathbf{O}(1)$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do** — $\mathbf{O}(|V|)$
4. **for each** $v \in V$ **do** — $\mathbf{O}(|V|^2)$
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung — $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$
6. **return** M — $\mathbf{O}(1)$

Laufzeit: $\mathbf{O}(|V|^2)$ für Init. von M

$\mathbf{O}(|V|^2(|V| + |E|))$

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- Korrektheit per Induktion. Sei $\mathrm{Opt}(i, v)$ die Länge eines kürzesten Weges mit i Kanten von s nach v. Wir zeigen: $M(i, v) = \mathrm{Opt}(i, v)$.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- Korrektheit per Induktion. Sei $\mathrm{Opt}(i, v)$ die Länge eines kürzesten Weges mit i Kanten von s nach v. Wir zeigen: $M(i, v) = \mathrm{Opt}(i, v)$.
- (I.A.) $M(0, v) = \mathrm{Opt}(0, v)$, da $M(0, s) = 0 = \mathrm{Opt}(0, s)$ und $M(0, v) = \infty = \mathrm{Opt}(0, v)$ für $v \neq s$.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- Korrektheit per Induktion. Sei $\mathrm{Opt}(i, v)$ die Länge eines kürzesten Weges mit i Kanten von s nach v. Wir zeigen: $M(i, v) = \mathrm{Opt}(i, v)$.
- (I.A.) $M(0, v) = \mathrm{Opt}(0, v)$, da $M(0, s) = 0 = \mathrm{Opt}(0, s)$ und $M(0, v) = \infty = \mathrm{Opt}(0, v)$ für $v \neq s$.
- (I.V.) Die Aussage gilt für $i - 1$.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- Korrektheit per Induktion. Sei $\mathrm{Opt}(i, v)$ die Länge eines kürzesten Weges mit i Kanten von s nach v. Wir zeigen: $M(i, v) = \mathrm{Opt}(i, v)$.
- (I.A.) $M(0, v) = \mathrm{Opt}(0, v)$, da $M(0, s) = 0 = \mathrm{Opt}(0, s)$ und $M(0, v) = \infty = \mathrm{Opt}(0, v)$ für $v \neq s$.
- (I.V.) Die Aussage gilt für $i - 1$.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (I.S.) Wir zeigen $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$ und $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$. Damit folgt die Gleichheit.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (I.S.) Wir zeigen $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$ und $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$. Damit folgt die Gleichheit.
- (1) $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$: Nach (I.V.) enthält $M(i-1,v)$ die Länge eines kürzesten Weges mit maximal $i-1$ Kanten von s nach v.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (I.S.) Wir zeigen $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$ und $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$. Damit folgt die Gleichheit.
- (1) $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$: Nach (I.V.) enthält $M(i-1,v)$ die Länge eines kürzesten Weges mit maximal $i-1$ Kanten von s nach v. $M(i-1,u)+w(u,v)$ gibt nach (I.V.) die Länge eines Weges mit maximal $i-1$ Kanten von s nach u gefolgt von der Kante (u,v) an.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (I.S.) Wir zeigen $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$ und $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$. Damit folgt die Gleichheit.
- (1) $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$: Nach (I.V.) enthält $M(i-1,v)$ die Länge eines kürzesten Weges mit maximal $i-1$ Kanten von s nach v. $M(i-1,u)+w(u,v)$ gibt nach (I.V.) die Länge eines Weges mit maximal $i-1$ Kanten von s nach u gefolgt von der Kante (u,v) an. Damit handelt es sich um die Länge eines Weges mit maximal i Kanten von s nach v.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (I.S.) Wir zeigen $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$ und $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$. Damit folgt die Gleichheit.
- (1) $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$: Nach (I.V.) enthält $M(i-1,v)$ die Länge eines kürzesten Weges mit maximal $i-1$ Kanten von s nach v. $M(i-1,u)+w(u,v)$ gibt nach (I.V.) die Länge eines Weges mit maximal $i-1$ Kanten von s nach u gefolgt von der Kante (u,v) an. Damit handelt es sich um die Länge eines Weges mit maximal i Kanten von s nach v. Da $M(i,v)$ als die Länge eines kürzesten Weges aus einer Menge von Wegen mit maximal i Kanten gewählt wird, gilt (1).

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (I.S.) Wir zeigen $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$ und $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$. Damit folgt die Gleichheit.
- (1) $\mathrm{Opt}(i,v) \leq M(i,v)$: Nach (I.V.) enthält $M(i-1,v)$ die Länge eines kürzesten Weges mit maximal $i-1$ Kanten von s nach v. $M(i-1,u)+w(u,v)$ gibt nach (I.V.) die Länge eines Weges mit maximal $i-1$ Kanten von s nach u gefolgt von der Kante (u,v) an. Damit handelt es sich um die Länge eines Weges mit maximal i Kanten von s nach v. Da $M(i,v)$ als die Länge eines kürzesten Weges aus einer Menge von Wegen mit maximal i Kanten gewählt wird, gilt (1).

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (2) $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$:

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (2) $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$:
- Betrachte den kürzesten Weg mit i Kanten von s nach v. Hat dieser weniger als i Kanten, so folgt nach (I.V.) $M(i,v) \leq M(i-1,v) = \mathrm{Opt}(i-1,v) = \mathrm{Opt}(i,v)$.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (2) $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$:
- Betrachte den kürzesten Weg mit i Kanten von s nach v. Hat dieser weniger als i Kanten, so folgt nach (I.V.) $M(i,v) \leq M(i-1,v) = \mathrm{Opt}(i-1,v) = \mathrm{Opt}(i,v)$.
- Hat der Weg genau i Kanten, so betrachte die letzte Kante des Weges, sagen wir (u,v). Wegen $M(i,v) \leq M(i-1,u) + w(u,v)$ gilt (2) auch in diesem Fall.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (2) $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$:
- Betrachte den kürzesten Weg mit i Kanten von s nach v. Hat dieser weniger als i Kanten, so folgt nach (I.V.) $M(i,v) \leq M(i-1,v) = \mathrm{Opt}(i-1,v) = \mathrm{Opt}(i,v)$.
- Hat der Weg genau i Kanten, so betrachte die letzte Kante des Weges, sagen wir (u,v). Wegen $M(i,v) \leq M(i-1,u) + w(u,v)$ gilt (2) auch in diesem Fall.
- Es folgt: $\mathrm{Opt}(i,v) = M(i,v)$.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- (2) $\mathrm{Opt}(i,v) \geq M(i,v)$:
- Betrachte den kürzesten Weg mit i Kanten von s nach v. Hat dieser weniger als i Kanten, so folgt nach (I.V.) $M(i,v) \leq M(i-1,v) = \mathrm{Opt}(i-1,v) = \mathrm{Opt}(i,v)$.
- Hat der Weg genau i Kanten, so betrachte die letzte Kante des Weges, sagen wir (u,v). Wegen $M(i,v) \leq M(i-1,u) + w(u,v)$ gilt (2) auch in diesem Fall.
- Es folgt: $\mathrm{Opt}(i,v) = M(i,v)$.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- Da es nach Lemma 53 in einem Graph ohne negativen Zyklen immer einen kürzesten Weg mit maximal $n-1$ Kanten gibt, ist $\mathrm{Opt}(n-1,v)$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- Da es nach Lemma 53 in einem Graph ohne negativen Zyklen immer einen kürzesten Weg mit maximal $n-1$ Kanten gibt, ist $\mathrm{Opt}(n-1,v)$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v.
- Wie bereits gezeigt, ist die Laufzeit $\mathbf{O}(|V|^2(|V|+|E|))$. Der Speicherbedarf für das $|V| \times |V|$ Feld ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Graphalgorithmen

Satz 54

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v aus G die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der ersten Version des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2|E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Beweis

- Da es nach Lemma 53 in einem Graph ohne negativen Zyklen immer einen kürzesten Weg mit maximal $n-1$ Kanten gibt, ist $\mathrm{Opt}(n-1, v)$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach v.
- Wie bereits gezeigt, ist die Laufzeit $\mathbf{O}(|V|^2(|V|+|E|))$. Der Speicherbedarf für das $|V| \times |V|$ Feld ist $\mathbf{O}(|V|^2)$.

Graphalgorithmen

Lemma 55

$M(n, v) = M(n-1, v)$ gilt für alle Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V, E)$ genau dann, wenn G keinen negativen Zyklus enthält.

Beweis

- „⇒“ Gilt $M(n, v) = M(n-1, v)$ so folgt wegen der Rekursion auch $M(m, v) = M(n, v)$ für jedes $m > n$. Außerdem gilt nach dem Beweis von Satz 54: $M(m, v) = \mathrm{Opt}(m, v)$.

Graphalgorithmen

Lemma 55

$M(n,v) = M(n-1,v)$ gilt für alle Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V,E)$ genau dann, wenn G keinen negativen Zyklus enthält.

Beweis

- „⇒“ Gilt $M(n,v) = M(n-1,v)$ so folgt wegen der Rekursion auch $M(m,v) = M(n,v)$ für jedes $m > n$. Außerdem gilt nach dem Beweis von Satz 54: $M(m,v) = \mathrm{Opt}(m,v)$.
- Annahme: Es gibt negativen Zyklus C und $M(m,v) = M(n,v)$ für alle $m > n$. Sei c die Anzahl Kanten in C. Dann ist sicher, dass für jeden Knoten v aus C gilt: $\mathrm{Opt}(n,v) > \mathrm{Opt}(n+c,v)$.

Graphalgorithmen

Lemma 55

$M(n,v) = M(n-1,v)$ gilt für alle Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V,E)$ genau dann, wenn G keinen negativen Zyklus enthält.

Beweis

- „⇒“ Gilt $M(n,v) = M(n-1,v)$ so folgt wegen der Rekursion auch $M(m,v) = M(n,v)$ für jedes $m > n$. Außerdem gilt nach dem Beweis von Satz 54: $M(m,v) = \mathrm{Opt}(m,v)$.
- Annahme: Es gibt negativen Zyklus C und $M(m,v) = M(n,v)$ für alle $m > n$. Sei c die Anzahl Kanten in C. Dann ist sicher, dass für jeden Knoten v aus C gilt: $\mathrm{Opt}(n,v) > \mathrm{Opt}(n+c,v)$. Dies ist richtig, da man zunächst einmal um C laufen kann und dann den Weg mit maximal n Kanten und Kosten $\mathrm{Opt}(n,v)$ nimmt.

Graphalgorithmen

Lemma 55

$M(n,v) = M(n-1,v)$ gilt für alle Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V,E)$ genau dann, wenn G keinen negativen Zyklus enthält.

Beweis

- „⇒“ Gilt $M(n,v) = M(n-1,v)$ so folgt wegen der Rekursion auch $M(m,v) = M(n,v)$ für jedes $m > n$. Außerdem gilt nach dem Beweis von Satz 54: $M(m,v) = \mathrm{Opt}(m,v)$.
- Annahme: Es gibt negativen Zyklus C und $M(m,v) = M(n,v)$ für alle $m > n$. Sei c die Anzahl Kanten in C. Dann ist sicher, dass für jeden Knoten v aus C gilt: $\mathrm{Opt}(n,v) > \mathrm{Opt}(n+c,v)$. Dies ist richtig, da man zunächst einmal um C laufen kann und dann den Weg mit maximal n Kanten und Kosten $\mathrm{Opt}(n,v)$ nimmt.
- Widerspruch, denn $M(n+c,v) = \mathrm{Opt}(n+c,v) < \mathrm{Opt}(n,v) = M(n,v)$.

Graphalgorithmen

Lemma 55

$M(n,v) = M(n-1,v)$ gilt für alle Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V,E)$ genau dann, wenn G keinen negativen Zyklus enthält.

Beweis

- „⇒“ Gilt $M(n,v) = M(n-1,v)$ so folgt wegen der Rekursion auch $M(m,v) = M(n,v)$ für jedes $m > n$. Außerdem gilt nach dem Beweis von Satz 54: $M(m,v) = \mathrm{Opt}(m,v)$.
- Annahme: Es gibt negativen Zyklus C und $M(m,v) = M(n,v)$ für alle $m > n$. Sei c die Anzahl Kanten in C. Dann ist sicher, dass für jeden Knoten v aus C gilt: $\mathrm{Opt}(n,v) > \mathrm{Opt}(n+c,v)$. Dies ist richtig, da man zunächst einmal um C laufen kann und dann den Weg mit maximal n Kanten und Kosten $\mathrm{Opt}(n,v)$ nimmt.
- Widerspruch, denn $M(n+c,v) = \mathrm{Opt}(n+c,v) < \mathrm{Opt}(n,v) = M(n,v)$.

Graphalgorithmen

Lemma 55

$M(n, v) = M(n-1, v)$ gilt für alle Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V, E)$ genau dann, wenn G keinen negativen Zyklus enthält.

Beweis

- „⇐“ Hat G keinen negativen Zyklus so gibt es nach Lemma 53 für jeden Knoten v einen kürzesten s-v-Weg mit maximal $n-1$ Kanten.

Graphalgorithmen

Lemma 55

$M(n, v) = M(n-1, v)$ gilt für alle Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V, E)$ genau dann, wenn G keinen negativen Zyklus enthält.

Beweis

- „⇐“ Hat G keinen negativen Zyklus so gibt es nach Lemma 53 für jeden Knoten v einen kürzesten s-v-Weg mit maximal $n-1$ Kanten. Daher enthält $\mathrm{Opt}(n-1, v)$ bereits die Längen der kürzesten Wege und somit dieselben Werte wie $\mathrm{Opt}(n, v)$.

Graphalgorithmen

Lemma 55

$M(n,v) = M(n-1,v)$ gilt für alle Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V,E)$ genau dann, wenn G keinen negativen Zyklus enthält.

Beweis

- „⇐“ Hat G keinen negativen Zyklus so gibt es nach Lemma 53 für jeden Knoten v einen kürzesten s-v-Weg mit maximal $n-1$ Kanten. Daher enthält $\mathrm{Opt}(n-1,v)$ bereits die Längen der kürzesten Wege und somit dieselben Werte wie $\mathrm{Opt}(n,v)$. Es folgt nach dem Beweis von Satz 54: $M(n,v) = \mathrm{Opt}(n,v) = \mathrm{Opt}(n-1,v) = M(n-1,v)$.

Graphalgorithmen

Lemma 55

$M(n,v) = M(n-1,v)$ gilt für alle Knoten $v \in V$ eines Graphen $G = (V,E)$ genau dann, wenn G keinen negativen Zyklus enthält.

Beweis

- „⇐“ Hat G keinen negativen Zyklus so gibt es nach Lemma 53 für jeden Knoten v einen kürzesten s-v-Weg mit maximal $n-1$ Kanten. Daher enthält $\mathrm{Opt}(n-1,v)$ bereits die Längen der kürzesten Wege und somit dieselben Werte wie $\mathrm{Opt}(n,v)$. Es folgt nach dem Beweis von Satz 54: $M(n,v) = \mathrm{Opt}(n,v) = \mathrm{Opt}(n-1,v) = M(n-1,v)$.

Graphalgorithmen

Verbesserung der Laufzeit

- Vor Beginn des Algorithmus berechne in $\mathbf{O}(|V| + |E|)$ Zeit eine „umgedrehte Adjazenzliste“
- Jeder Knoten v hat eine Liste $\mathrm{In}[v]$ der eingehenden Kanten

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. Berechne $M[i, v]$ nach Rekursionsgleichung
6. **return** M

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. $\min \leftarrow M[i-1][v]$
6. **for each** $(u, v) \in \mathrm{In}[v]$ **do**
7. **if** $M[i-1][u] + w(u, v) < \min$ **then** $\min \leftarrow M[i-1][u] + w(u, v)$
8. $M[i][v] \leftarrow \min$
9. **return** M

Graphalgorithmen

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[0][s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. $\min \leftarrow M[i-1][v]$
6. **for each** $(u, v) \in \mathrm{In}[v]$ **do**
7. **if** $M[i-1][u] + w(u, v) < \min$ **then** $\min \leftarrow M[i-1][u] + w(u, v)$
8. $M[i][v] \leftarrow \min$
9. **return** M

Laufzeit $\mathbf{O}(|V|^2 + |V| \cdot |E|)$, da in Zeile 6 und 7 jede Kante einmal durchlaufen wird.

Graphalgorithmen

Verbesserung des Speicherbedarfs

- Wir speichern nur einen Wert $M[v]$ ab
- Dieser speichert die Länge des kürzesten Wegs nach v, den wir bisher gefunden haben
- Wir führen jetzt nur das Update $M[v] = \min\big(M[v], \min\big(M[u] + w(u,v)\big)\big)$ durch

Beobachtung 56

- (1) $M[v]$ ist immer die Länge irgendeines Wegs von s nach v und
- (2) nach i Runden ist $M[v]$ höchstens so groß wie die Länge des kürzesten Wegs mit i Kanten.

Graphalgorithmen

Speicherbedarf: $\mathbf{O}(|V|)$

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. $\min \leftarrow M[v]$
6. **for each** $(u, v) \in \text{In}[v]$ **do**
7. **if** $M[u] + w(u, v) < \min$ **then** $\min \leftarrow M[u] + w(u, v)$
8. $M[v] \leftarrow \min$
9. **return** M

Graphalgorithmen

Speicherbedarf: $\mathbf{O}(|V|)$

Bellman-Ford(G, s)

1. **for each** $v \in V$ **do** $M[0][v] = \infty$
2. $M[s] \leftarrow 0$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$ **do**
4. **for each** $v \in V$ **do**
5. **for each** $(u, v) \in \text{In}[v]$ **do**
6. **if** $M[u] + w(u, v) < M[v]$ **then** $M[v] \leftarrow M[u] + w(u, v)$
7. **return** M

Graphalgorithmen

Satz 57

Sei G ein Graph ohne negative Zyklen. Die verbesserte Implementierung des Algorithmus $\mathrm{Bellman\text{-}Ford}$ berechnet für jeden Knoten v die Kosten eines kürzesten s-v-Pfads. Laufzeit der verbesserten Implementierung des Algorithmus ist $\mathbf{O}(|V|^2 + |V| \cdot |E|)$ und Speicherbedarf ist $\mathbf{O}(|V|)$.

Beweis

- Die Korrektheit folgt aus Satz 54 zusammen mit Beobachtung 56.
- Die Laufzeit haben wir im Wesentlichen analysiert.

- Hinweis: Wenn der Graph mind. $|V|$ Kanten hat, so ist die Laufzeit $\mathbf{O}(|V| \cdot |E|)$.

Graphalgorithmen

Negative Zyklen

- Wir können negative Zyklen daran erkennen, dass sich für mindestens einen Knoten v der Wert $M[v]$ noch nach n Iterationen ändert
- Wir können uns die Wege über ein Feld π merken, ähnlich wie bei der Breitensuche

Graphalgorithmen

Zusammenfassung

- Bellman-Ford für allgemeine Kantengewichte; Laufzeit $\mathbf{O}(|V|^2 + |V| \cdot |E|)$
- Negative Zyklen können erkannt werden