Chapter 1

《微分几何初步》第一章-下

1.1 局部标准型

我们知道研究曲线局部性质的时候, 利用Frenet标架来处理会方便很多. 取(无一阶奇点)弧长参数化曲线$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, 由Taylor展开, $\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + R$, $R = o(s^3)$. 我们知道$\alpha'(0) = t$, $\alpha''(0) = kn$, $\alpha'''(0) = (kn)' = k'n + kn' = k'n - k^2t - k\tau b$.

整理得到$\alpha(s) - \alpha(0) = (s - \frac{k^2s^3}{6})t + (\frac{s^2k}{2} + \frac{s^3k'}{6})n - \frac{s^3}{6}k\tau b + R$, 从而我们便得到在Frenet标架下曲线的(高阶)局部近似坐标:

$$\begin{cases} x(s) = s - \dfrac{k^2s^3}{6} + R_x \\ y(s) = \dfrac{k}{2}s^2 + \dfrac{k's^3}{6} + R_y \\ z(s) = -\dfrac{k\tau}{6}s^3 + R_z \end{cases}$$

上式称为曲线α在零点邻域的局部标准型. 用一阶视角来看, 只能看到切向量t, 即只有x方向上的信息; 而用三阶视角来看, 就能看到在$\mathbb{R}^3$中的更多信息, 比如曲线的转向(n方向), 爬升(b方向)等等.

由此看出一些几何性质: 当挠率为负时, 局部来看曲线是上穿密切平面(osculating)的; 而正挠率的曲线是下穿的. 从切平面(rectifying)可以在某邻域内将曲线划分在一侧($k \neq 0$).

关于密切平面的一个重要信息是, 它是距离曲线最近(最致密)的一个平面. 用数学语言说明即, 它是s点处切线和$s + h$点决定的平面在$h \to 0$时的极限. 不妨设$s = 0$, 由Frenet标架与局部标准型, 可记该平面为$z = cy$(从切平面$y = 0$排除). 那么计算$c = \frac{z(h)}{y(h)} = \frac{-\frac{k\tau}{6}h^3 + o(h^3)}{\frac{k}{2}h^2 + o(h^2)} = -\frac{\tau h}{3} + o(h)$. 从而平面趋于$z = 0$, 即密切平面.

注记 1 *有的书中可能会将挠率定义为$b' = -\tau n$, 需要注意.*

来做几道练习. 我们提到从切平面可以在P点某邻域内将曲线划分在一侧, 事实上任意含P点切线的平面, 除了密切平面都可以. 只需考察将曲线沿x轴(切方向)投影在法平面, 那

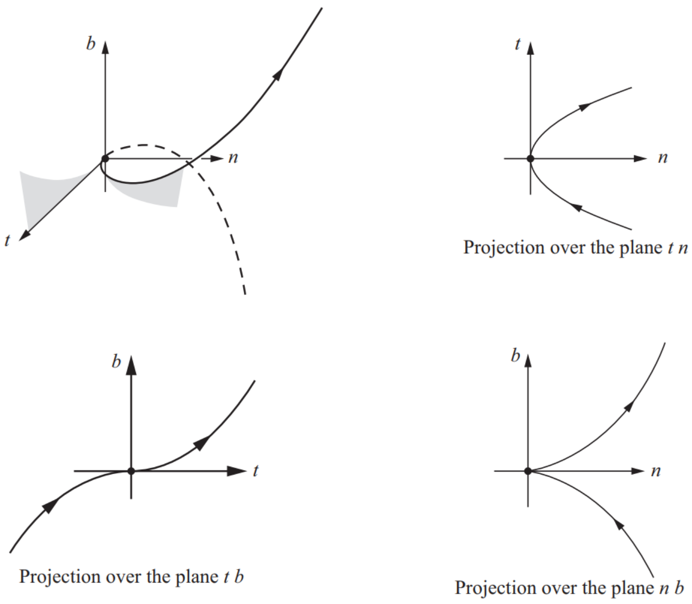

图 1.1: 局部标准型

么前面的$z = cy$即为该曲线零点和h点的割线, 割线的斜率趋于零. 所以对于任意给定的平面$z = c_0 y$, $c_0 \neq 0$, 总能找到足够小的邻域使得割线斜率小于c_0, 从而投影曲线保持在$z = c_0 y$直线下方, 也就是原曲线保持在平面一侧.

密切平面也可以由其他的方式确定, 比如$\alpha(s), \alpha(s+h_1), \alpha(s+h_2)$三点所确定的平面在$h_1, h_2 \to 0$时的极限. 同样取局部标准型, 那么平面可记为$ax+by+cz = 0$. 取$F(s) = ax(s)+by(s)+cz(s)$, 那么$F'(0) = a$, $F''(0) = bk$. 这里a, b为关于h_1, h_2的函数. 由于$F(0), F(h_1), F(h_2) = 0$, 由中值定理即知$a, b \to 0$. 从而平面趋于$z = 0$, 即密切平面.

一个经典的结论是曲线在P点的曲率与投影在P点密切平面曲线在该点的曲率是一致的. 这是因为由局部标准型, P点$(s = 0)$曲率可由$\lim\limits_{s \to 0} \frac{2y(s)}{x^2(s)}$决定, 与$z$无关.

1.2 平面曲线整体性质

接下来讨论一些平面曲线的整体微分性质. 第五章会更系统地讨论, 感兴趣的同学可以之后看一下.

做一些简单的回顾, 平面闭曲线$\alpha : [a, b] \to R^2$在要求$\alpha(a) = \alpha(b)$的同时, 还要求高阶导数一致. 它是**简单**的, 如果该闭曲线不自交. 一般也是做弧长参数化的, 同时平面曲线的曲率会出现正负号.

我们说平面内的简单闭曲线会框住一个内部区域, 这可由Jordan曲线定理得到, 参见第五章. 若沿曲线参数增加的方向看, 内部始终保持在曲线左侧, 则称曲线是**正定向**的.

1.2.1 等周不等式

这是微分几何中最古老的整体问题. 等长的简单闭曲线何时围住最大面积? Weierstrass最早给出了变分方法的证明, 但比较繁琐. 这里介绍Schmidt于1939年给出的证明. 对于曲线所围的区域, 由Green公式, 我们有面积计算公式:

$$A = -\int_a^b yx'dt = \int_a^b xy'dt = \frac{1}{2}\int_a^b xy' - yx'dt.$$

或者如书中通过初等方法来证明, 但方法实质类似Green公式的初等证明, 且需要承认一些结论(能够找到一条直线, 使得曲线关于该直线的距离函数有有限多个极值点).

定理 2 (等周不等式) *设C为长度为l的平面简单闭曲线, A为C所围面积, 则$l^2 - 4\pi A \geq 0$, 等号成立当且仅当C为圆周.*

证: 如图所示, 取合适的平行线L, L'卡住曲线C. 在下方取一个半径为r同样被卡住的圆S^1, 以圆心为原点, 垂直L, L'方向为x轴, 沿L, L'方向为y轴建系. 对C做弧长参数化$\alpha(s) = (x(s), y(s))$. 设S^1曲线为$\bar{\alpha}(s) = (x(s), \bar{y}(s))$, 即$x$方向两曲线同步.

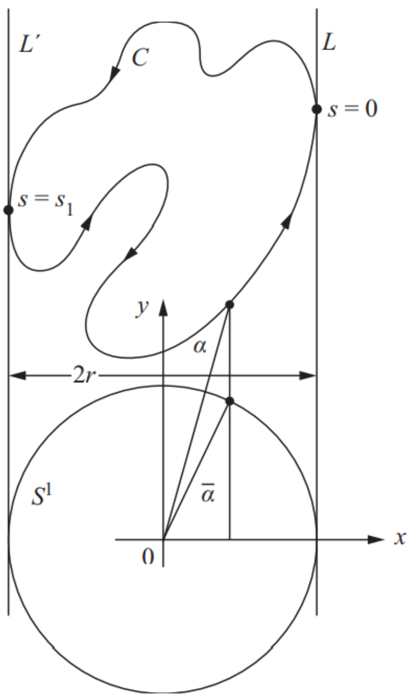

Figure 1-24

图 1.2: 图示

由面积公式, 我们有:

$$A + \pi r^2 = \int_0^l (xy' - \bar{y}x')ds \leq \int_0^l \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} \cdot \sqrt{y'^2 + x'^2} ds = lr.$$

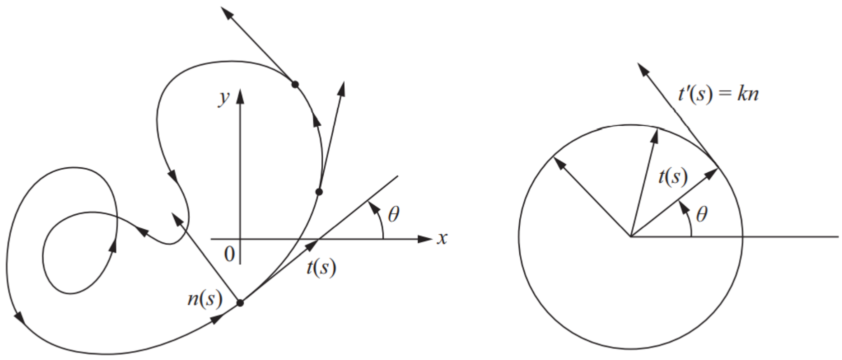

Figure 1-26

图 1.3: 切线标线图示

从而由几何平均值$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \le \frac{1}{2}(A+\pi r^2) \le \frac{1}{2}lr$, $4\pi A r^2 \le l^2 r^2$, 即$l^2 - 4\pi A \ge 0$. (注意与r无关.)

当等号成立时, 所有不等式取等. 由几何平均不等式, $A = \pi r^2$. 从而$l = 2\pi r$, 且任意旋转L, L'方向, 间距仍为$2r$. 同时$(x, \bar{y}) = \lambda(y', -x')$, 由模长关系知$|\lambda| = r$, 从而$x = \pm r y'$. 将$L, L'$旋转90度, 又得到$y = \pm r x'$. 于是$x^2 + y^2 = r^2(x'^2 + y'^2) = r^2$, 即$C$为圆周.

注记 3 *易见等周不等式对C^1简单闭曲线即成立, 对分段C^1的也自然成立. (未加说明时, 默认光滑.)*

1.2.2 四顶点定理

对弧长参数化后的闭曲线$\alpha(s) = (x(s), y(s))$, 引入切线标线$t(s) = (x'(s), y'(s))$. 其轨迹落在单位圆周上, 且速度向量为kn. 记$\theta(s)$为$t(s)$与x轴交角, 若限制其落在$[0, 2\pi)$上, 则θ不见得连续. 由于其可局部用反三角函数定义($\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)}(+\pi)$), 它是可微的.

由$t(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, 速度向量$t' = \theta' n$, 即$\theta' = k$. 从而可以整体地重新定义连续函数$\theta(s) = \int_0^s k(s)ds$. 它与原先的函数相差$2k\pi$. 该函数描述了切向量的总旋转角度, 由于闭曲线始末切向量相同, 旋转角度是2π的整数倍. 记$\int_0^l k(s)ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I$, 称整数$I$为曲线$\alpha$的**旋转指标**. 注意由于$k$是带符号的, 旋转指标$I$也是. 当简单闭曲线正定向时, 旋转指标也是正的.

我们有如下定理, 于5.7节定理2中给出证明:

定理 4 (旋转指标定理) *简单闭曲线的旋转指标为± 1, 正负号取决于曲线的定向.*

接下来引入曲线顶点的概念. 称正则平面曲线$\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$是**凸**的, 若$\forall t \in [a, b]$, α的轨迹始终落在t点切线一侧. 而平面曲线的**顶点**, 定义为使得$k'(t) = 0$的全体点t, 即曲率的全体驻点(部分书中会更精确地定义为极值点). 举例来说, 椭圆恰有四个顶点. 有趣的是, 任意简单凸的闭曲线都至少有四个顶点.

首先证明一个引理.

引理 5 *记$\alpha(s)=(x(s),y(s)):[0,l]\to\mathbb{R}^2$为弧长参数化平面闭曲线. 则$\forall A,B,C\in\mathbb{R}$, $\int_0^l(Ax+By+C)k'ds=0$.*

证: 由开头定义的θ函数, 我们有$(x',y')=(\cos\theta,\sin\theta)$, $k=\theta'$且$x''=-ky'$, $y''=kx'$. 从而对于闭曲线, 有$\int_0^l k'ds=0$, $\int_0^l xk'ds=-\int_0^l kx'ds=-\int_0^l y''ds=0$, $\int_0^l yk'ds=-\int_0^l ky'ds=\int_0^l x''ds=0$. 从而引理得证.

定理 6 (四顶点定理) *简单凸的闭曲线至少有四个顶点.*

证: 将曲线弧长参数化, 只需考察$[0,l]$上连续函数$k(s)$的行为. 由于其为周期函数, 最大值点和最小值点都是驻点. 因此我们已经找到了两个顶点p,q. 这两点划分出两端弧, 过p,q作直线L, 首先需要说明每段弧保持在L的一侧.

不然, 假设某段弧还与L相交于点r, 那么对于L上三点p,q,r, 选取中间的点不妨为p. p点切线必须恰为L, 不然q,r在切线两侧, 与凸性矛盾. 然而即使p点切线为L, p点附近的切线也仍会将q,r划分在切线两侧, 与凸性矛盾, 除非p点附近保持为直线, 到q,r为止. 这时在p,q最值点处$k=0$, 这说明$k\equiv0$, 不可能为闭曲线.

另一方面, 若两端弧保持在L的同一侧, 则由凸性类似可得某段弧退化为直线, 同理矛盾. 因此两端弧在L的两侧. 记$Ax+By+C=0$为直线L的方程. 如果不再有其它顶点, 那么k'在两段弧上分别恒负, 恒正. 进而可调整符号使得C上除p,q点外$(Ax+By+C)k'$恒正. 这与前面的引理矛盾, 从而可以找到第三个顶点位于某段弧上, 且在该点k'改变符号. 由于弧连接了$k(s)$的最小值点和最大值点, $k'(s)$符号改变偶数次, 因此在这段弧上必能找到第四个顶点.

四顶点定理一直是许多研究的课题, 事实上该定理对简单闭曲线即成立, 但证明要复杂一些, 可查看参考文献. 前面一直提到简单凸的闭曲线, 但事实上有些多余. 5.7节命题1将证明平面闭曲线是凸的当且仅当它是简单的, 且存在定向使得曲率非负. 因此可以如下更精确地表述四顶点定理:

定理 7 (四顶点定理') *存在定向使得闭凸曲线曲率函数非负, 且(严格)极大值点和极小值点分别至少有两个, 或曲率恒为常数(此时曲线即为圆周).*

一个自然的问题是, 对于任意给定的周期函数$k:[a,b]\to\mathbb{R}$, 若其满足四顶点定理的结论, 是否能够找到一个简单闭曲线使得k成为其曲率函数? 也就是四顶点定理的逆命题. 这类似于三维空间中的曲线论基本定理.

对于函数严格正的情况, H.Gluck于1971年给出了肯定的答案. B.Dahlberg于1997年得到了完整的逆定理. 四顶点定理及其逆定理这一专题于2005经过编辑与整合发表了一篇非常详尽的论文, 感兴趣的同学可以查看一下.

1.2.3 Cauchy-Crofton公式

我们先直接给出这一有趣的定理, 后面只给出定理的证明思路:

定理 8 (Cauchy-Crofton公式) *令C为长度为l的平面正则曲线, 则所有与C有交点的(带重数的)直线全体测度为$2l$.*

这里需要说明两点, 首先重数指直线与曲线C的交点个数, 即若某直线与曲线C有n个交点, 那么该直线在集合中记n次. 其次需要说明测度是什么. 取垂直于直线的单位向量$v = (\cos\theta, \sin\theta)$, 记$p$为直线上任一点与$v$的内积, 那么直线完全由这两个参数决定. 记直线全体为$\mathcal{L} = \{(p,\theta) \in \mathbb{R}^2; (p,\theta) \sim (-p, \theta+\pi)\}$, 我们说明其上可以唯一定义合理的测度. 这里合理即指我们希望测度在刚性变换下保持不变. 首先有如下简单的命题:

命题 9 *记$f(x,y)$为$\mathbb{R}^2$上连续函数, 对集合$S \subset \mathbb{R}^2$, 定义其面积$A(S) = \iint_S f(x,y)dxdy$. 若$A$为刚性变换不变量, 则$f$必为常数.*

证: 记刚性变换为F. 由于刚性变换Jacobian为1, 我们有$A(F(S)) = \iint_S f(F(x,y))dxdy = \iint_S f(x,y)dxdy = A(S)$. 由于对任意$S$成立, $f \circ F = f$. 又由刚性变换在$\mathbb{R}^2$是可迁的, 即$\forall p, q \in \mathbb{R}^2$, $\exists$刚性变换F使得$F(p) = q$, 即知$f = \text{const}$.

对于$\mathcal{L}$中曲线$x\cos\theta + y\sin\theta = p$, 其在刚性变换$\begin{cases} \bar{x} = a + x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ \bar{y} = b + x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$下, 参数变为$\begin{cases} \bar{\theta} = \theta + \varphi \\ \bar{p} = p + a\cos(\theta+\varphi) + b\sin(\theta+\varphi) \end{cases}$. 易见该变换在$(p,\theta)$坐标下Jacobian也为1, 同时该作用在直线全体$\mathcal{L}$上显然是可迁的, 因此同理可知测度可相差常数倍地唯一定义为$\mu(\mathcal{G}) = \iint_{\mathcal{G}} dpd\theta$, 这一测度被称为kinematic(运动学上的)测度. 接下来我们给出定理证明的大体思路.

证: 对于l长的直线段C, 由于测度在刚性变换下不变, 不妨设C以原点为中心, 落在x轴上. 那么所求集合的测度为:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{|\cos\theta| l/2} dpd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{l}{2} |\cos\theta| d\theta = 2l.$$

接下来, 对于由有限多个线段拼成的折线C, 将每个线段对应的直线的测度做和, 即可得到带重数的所求集合的测度为$\iint n(p,\theta)dpd\theta = 2\sum_i l_i = 2l$. 最后取极限, 我们可以期望如上公式对任意正则曲线均适用, 这就证明了定理.

需要注意的一点是, 对于直线段, 其实会出现重数为无穷的直线, 但它在kinematic测度下零测. 对于书上的证明, 将取极限的过程精确描述较为繁琐. 一个更为具体的证明如下:

证: 对(p,θ)对应的直线, 也可将其转为更常见的先确定点$Z(s) = (x(s), y(s)) \in C$, 再确定角度$\eta$. 即将$(p,\theta)$坐标转换为$(s,\eta)$坐标. 这里令$\theta = \eta$, 几何意义相同. 那么$p = x(s)\cos\eta + y(s)\sin\eta$. 注意到$(x', y')$可表示为$(\cos\phi, \sin\phi)$, 那么Jacobian为$|\cos(\phi(s) - \eta)|$.

从而由Fubini定理, 所求测度为:

$$\begin{aligned}
\int_{\{L:L\cap C\neq\varnothing\}} ndpd\theta &= \int_{\{L:L\cap C\neq\varnothing\}} (\sum_{Z\in L\cap C} 1)dpd\theta \\
&= \int_{\{Z:Z\in C\}} \int_{\{L:Z\in L\}} dpd\theta \\
&= \int_0^l \int_0^\pi |\cos(\phi(s)-\eta)|d\eta ds \\
&= \int_0^l 2ds = 2l.
\end{aligned}$$

这一主题的基本思想归于Integral Geometry这一分支. 一个Cauchy-Crofton公式的有趣应用是用来估计曲线长度. 取一族等间距r的直线, 再等角度地α地旋转扫过整个平面, 则$l = \frac{1}{2}\int ndpd\theta \approx \frac{1}{2}nr\alpha$, n为曲线与这些直线的总交点数(记重数), 即将积分离散化. 书中提到这在生物学等领域中有所应用, 如估计DNA分子长度.