10.2 初值问题的基本概念

•一阶常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y'=f(x,y) & a\le x\le b \quad (1) \\ y(a)=\alpha & \quad (2) \end{cases}$$

其中$f(x,y)$是已知的xy平面上某个区域D上连续函数，式（1）是微分方程，有无穷多解，式（2）是确定解的初始条件。

如一元函数$y(x)$ 对一切$a\le x\le b$ 满足

（1） $(x,y(x))\in D$

（2） $y(a)=\alpha$

（3） y' 存在，且 $y'(x)=f(x,y(x))$

则称 $y(x)$ 是初值问题（1.1）、（1.2）在$[a,b]$上的解。

定义1 如果存在正常数 L>0，使得对一切$x\in[a,b]$及y_1、$y_2\in[c,d]$ 有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \qquad (3)$$

则称 $f(x,y)$ 满足对y的lipschitz（李普希滋）条件，其中L称为lipschitz常数。

关于初值问题解的存在，唯一性有如下定理：

定理1 设 $f(x,y)$ 是定义在D={(x,y) | $a\le x\le b, y\in R$} 上的连续函数，其中a,b为有限实数，而且$f(x,y)$满足对y 的lipschitz条件，则初值问题 $\begin{cases} y'(x)=f(x,y) & a\le x\le b \\ y(a)=\alpha \end{cases}$
在$[a,b]$上存在唯一的连续可微解 $y(x)$.

定理2 设 $f(x,y)$定义在凸集D={(x,y) | $a\le x\le b, y\in R$}上，其中a,b为有限实数，如果存在正常数 L>0，使得

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\le L, \forall (x,y)\in D$$

则$f(x,y)$在D中满足对 y 的lipschitz条件。

定理1 设 $f(x,y)$ 是定义在D={(x,y) | $a\le x\le b, y\in R$} 上的连续函数，其中a,b为有限实数，而且$f(x,y)$满足对y 的lipschitz条件，则初值问题 $\begin{cases} y'(x)=f(x,y) & a\le x\le b \\ y(a)=\alpha \end{cases}$
在$[a,b]$上存在唯一的连续可微解 $y(x)$.

例1 给定初值问题 $\begin{cases} y'(x)=1+x\sin(xy), & (x,y)\in D \\ y(0)=0 \end{cases}$

$$D=\{(x,y)|0\le x\le 2, -\infty<y<\infty\}$$

以后在总假设$f(x,y)$满足定理2中条件.

问：初值问题是否有唯一解。

解：因为 $f(x,y)=1+x\sin(xy)$在D中连续，且

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|=\left|x^2\cos(xy)\right|\le 4, \forall (x,y)\in D$$

由定理2 $f(x,y)$在D中满足对y 的lipschitz条件，由定理1，所给初值问题在[0,2]存在唯一的连续可微解$y(x)$。

初值问题数值解的基本概念

所谓初值问题的数值解法，就是求解$y(x)$在某些离散点x_i 处的近似值y_i，y_i称为数值解。

若要求初值问题(1), (2)在$[a,b]$ 上的数值解，在$[a,b]$ 上引入点列{x_k}，其中

$$x_k=x_{k-1}+h_{k-1}, \quad k=1, 2, 3\ldots.$$

x_k称为节点，h_k称为步长。

通常，步长h不变，取为等距步长 $h_k=h=(b-a)/n$ ，n为整数.

节点变为等距节点，此时有

$$x_k=x_{k-1}+h=a+kh, \quad k=1, 2, \ldots n$$

初值问题的解$y(x)$在节点x_k 的近似值y_k （k=0, 1, 2..., n）

就是所求的数值解。

初值问题的数值解法 $\begin{cases} \text{单步法} \\ \text{多步法 } (n\ge k-1) \end{cases}$

函数φ是连续函数，称为增量函数。

初值问题的数值解法

- 单步法 $\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h), & \text{(显式)} \\ y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,y_{n+1},h) & \text{(隐式)} \end{cases}$
- 多步法 $(n\ge k-1)$ $$y_{n+1}=\sum_{j=1}^{k} a_{k-j}y_{n+1-j}+h\sum_{j=0}^{k} b_{k-j}f_{n-j+1}$$ $f_{n-j+1}=f(x_{n-j+1},y_{n-j+1})$, 线性 k步法

单步法：计算y_{n+1}时，只用到前一步y_n的结果。

例： $y_1=y_0+h\varphi(x_0,y_0,h)$，或，$y_1=y_0+h\varphi(x_0,y_0,y_1,h)$

$y_2=y_1+h\varphi(x_1,y_1,h)$,或，$y_2=y_1+h\varphi(x_1,y_1,y_2,h)$

$$y_0=y(x_0)=y(a)=\alpha$$

单步法的求解是逐步进行的，即按公式由已知的 y_n,求 y_{n+1}。显格式按递推公式求解，隐格式每一步需求解一个方程。

10.3 简单单步法

（1）Euler 方法 设有初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) & a\le x\le b \quad (1) \\ y(a)=\alpha & \quad (2) \end{cases}$

•微分方程离散化：化导数为差商的方法

设$x_k=a+kh, (k=0,1,\ldots,n)$,在$x_k$点，方程（1）为

$$y'(x_k)=f(x_k,y(x_k)) \qquad (3)$$

由向前差商

$$y'(x_k)\approx\frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h}$$

方程（3）离散化为

$$\frac{y(x_k+h)-y(x_k)}{h}\approx f(x_k,y(x_k))$$

$$\Leftrightarrow y(x_k+h)\approx y(x_k)+hf(x_k,y(x_k)), k=0,1,\ldots,n-1$$

$$y(x_k+h)\approx y(x_k)+hf(x_k,y(x_k)),\ k=0,1,\dots,n-1$$

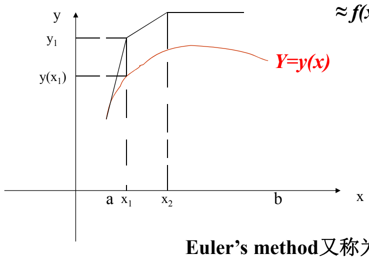
设$y_k\approx y(x_k)$, 令其满足方程：$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$, 得初值问题的数值求解方法：

$$\begin{cases} y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)\ (k=0,1,\dots,n-1) & (4) \\ y_0=y(a)=\alpha \end{cases}$$

上式称为欧拉公式(Euler's method),（4）称为差分方程。
Euler's method 是显式方法

$y_{k+1}=y_k+h\varphi(x_k,y_k,h)$, $\varphi(x_k,y_k,h)=f(x_k,y_k)$

Euler公式的几何意义



$y'(x_k)=f(x_k,y(x_k))$
$\approx f(x_k,y_k)$

Euler's method又称为折线法。

用类似的方法，可导出向后欧拉公式，将导数$y'(x_k)$用向后差商近似，得

$$y'(x_k)\approx\frac{y(x_k)-y(x_k-h)}{h}$$

由（3）有：$\dfrac{y(x_k)-y(x_k-h)}{h}\approx f(x_k,y(x_k))$

$$\Leftrightarrow y(x_k)\approx y(x_k-h)+hf(x_k,y(x_k)),\ k=1,\dots,n$$

设$y_k\approx y(x_k)$, 令其满足方程：$y_k=y_{k-1}+hf(x_k,y_k)$, 得初值问题的数值求解方法：

$$\begin{cases} y_k=y_{k-1}+hf(x_k,y_k) & (5) \\ y_0=\alpha\ (k=1,\dots,n) \end{cases}$$

（5）称为 Backward Euler's Method 。向后欧拉公式是隐式方法。

（2）梯形公式 采用数值积分方法

将$y'=f(x,y)$ 在$[x_k,x_{k+1}]$积分，得

$$y(x_{k+1})-y(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x,y(x))dx$$

对右端的定积分用数值积分方法做离散化，可得计算公式，如用矩形公式可得欧拉公式，若用梯形法可得梯形公式：

$$y(x_{k+1})-y(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x,y(x))\,dx$$

$$\approx\frac{h}{2}(f(x_k,y(x_k))+f(x_{k+1},y(x_{k+1})))$$

梯形公式是隐式方法。

$$\begin{cases} y_{k+1}=y_k+\dfrac{h}{2}(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})) & (6) \\ y_0=\alpha & \text{梯形公式} \end{cases}$$

梯形公式可采用不动点迭代法并用显式欧拉公式提供迭代初值$y_k^{(0)}$.

其不动点迭代公式为：

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)}=y_k+hf(x_k,y_k) \\ y_{k+1}^{(i+1)}=y_k+\dfrac{h}{2}(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1}^{(i)})),\ i=0,1,\dots \end{cases}$$

反复迭代，直到

$$\left|y_k^{(i+1)}-y_k^{(i)}\right|<\varepsilon$$

$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$
$y_{k+1}=y_k+(h/2)[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})]$

例题1：分别用Euler公式、梯形公式求下列初值问题的数值解(取步长h=0.1计算到y_3)：

1） $\begin{cases} y'=-2y-4x \\ y(0)=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'=-2xy^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$

解：1） 本题中，$f(x,y)=-2y-4x$， Euler公式与梯形公式分别为

$$y_{k+1}=y_k-h(2y_k+4x_k),\quad Euler\text{公式}$$

$$y_{k+1}=y_k-\frac{h}{2}(2y_k+4x_k+2y_{k+1}+4x_{k+1}),\quad \text{梯形公式}$$

$f(x,y)=-2y-4x$ 是 y 的线性函数，因此，梯形公式都可以改写成显格式.

$$y_{k+1}=y_k-\frac{h}{2}(2y_k+4x_k+2y_{k+1}+4x_{k+1})$$

$$\Rightarrow\ y_{k+1}=\frac{1}{1+h}[y_k-h(y_k+2(x_k+x_{k+1}))],\quad \text{梯形公式}$$

$$y_{k+1}=y_k-h(2y_k+4x_k),\quad Euler\text{公式}$$

$$y_{k+1}=\frac{1}{1+h}[y_k-h(y_k+2(x_k+x_{k+1}))],\quad \text{梯形公式}$$

$$y_{k+1}=y_k-h(2y_k+4x_k),\quad Euler\text{公式}$$

$$y_{k+1}=\frac{1}{1+h}[y_k-h(y_k+2(x_k+x_{k+1}))],\quad \text{梯形公式}$$

取 h=0.1, 初始条件 y(0)=2，计算如下

x_k	0.0	0.1	0.2	0.3
Euler	2	1.6000	1.2550	0.9363
梯形	2	1.6182	1.2699	0.9484
精确解	2	1.6187	1.2703	0.9488

精确解为 $y=e^{-2x}-2x+1$,比较2种方法的误差 $|y_3-y(0.3)|$,分别是 1.25×10^{-2}, 4×10^{-4}, 梯形公式较准确。

解：2) 由欧拉公式 $\begin{cases} y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)=y_k-2hx_ky_k^2 \\ y_0=1\end{cases}$,

这里， $x_0=0$, $x_k=x_0+kh$, $h=0.1$ *计算如下:* $y(x)=1/(1+x^2)$

$y_1=y_0-2hx_0y_0^2=1$ $\quad y(0.1)=0.9901$

$y_2=y_1-2hx_1y_1^2=1-2\cdot0.1\cdot0.1\cdot1^2=0.98$ $\quad y(0.2)=0.9615$

$y_3=y_2-2hx_2y_2^2=1-2\cdot0.1\cdot0.2\cdot0.98^2=0.9416$ $\quad y(0.3)=0.9174$

本题中，$f(x,y)=-2xy^2$ 不是 y 的线性函数，因此，梯形公式不可以改写成显格式:

$$\boxed{y_{k+1}=y_k-0.1(x_ky_k^2+x_{k+1}y_{k+1}^2)}$$

隐格式求解，每一步需求解一个方程。通常采用迭代法求解。

梯形公式的迭代格式为：

$$\boxed{\begin{cases} y_{k+1}^{(0)}=y_k-0.2x_ky_k^2 \\ y_{k+1}^{(i+1)}=y_k-0.1[x_ky_k^2+x_{k+1}(y_{k+1}^{(i)})^2],i=0,1,\ldots\end{cases}}$$

取 $y_0=y(0)=1$,ε=10^{-3},反复迭代，直到 $\left|y_k^{(i+1)}-y_k^{(i)}\right|<\varepsilon$

x_k	0.1	0.2	0.3
梯形公式	0.9902	0.9619	0.9181
精确解	**0.9901**	**0.9615**	**0.9174**

1. $\begin{cases} y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k) \\ y_0=\alpha \qquad Euler\text{公式}\end{cases}$

2. $\begin{cases} y_{k+1}=y_k+\dfrac{h}{2}(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})) \\ y_0=\alpha \qquad \text{梯形公式}\end{cases}$

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)}=y_k+hf(x_k,y_k) \\ y_{k+1}^{(i+1)}=y_k+\dfrac{h}{2}(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1}^{(i)})),i=0,1,\ldots\end{cases}$$

反复迭代，直到 $\left|y_k^{(i+1)}-y_k^{(i)}\right|<\varepsilon$

（3）改进欧拉公式

隐格式求解，每一步需采用迭代法求解。比较烦琐。对于隐格式通常采用预测-校正技术（predictor-corrector method).

先用显式方法计算，预测一个值 y_{k+1}^p,为隐格式提供一个好的初值，然后用隐格式迭代一次，进行校正，得到 y_{k+1}, 称为预测-校正技术。如显式欧拉公式预测，梯形公式校正，即

$$\boxed{\begin{cases} y_{k+1}^p=y_k+hf(x_k,y_k) \\ y_{k+1}=y_k+\dfrac{h}{2}(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1}^p))\end{cases}}$$

先用显式方法计算，预测一个值y_{k+1}^p,为隐格式提供一个好的初值，然后用隐格式迭代一次，进行校正，得到y_{k+1},称为预测-校正技术。如显式欧拉公式预测，梯形公式校正，即

$$\begin{cases} y_{k+1}^p = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^p)) \end{cases}$$

与上式等价的显式公式为

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))]$$

称为改进欧拉公式(Modified Euler Method)。

例题2：用改进的Euler公式求初值问题的数值解(取步长h=0.1计算到y_3)：$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$

解：由改进欧拉公式

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))]$$

得：$y_{k+1}=y_k-0.1[x_k y_k^2+x_{k+1}(y_k-0.2x_k y_k^2)^2]$， 计算如下

x_k	0.0	0.1	0.2	0.3
Euler	1	1	0.9800	0.9416
改进 Euler	1	0.9900	0.9614	0.9173
梯形公式	1	0.9902	0.9619	0.9181
精确解	1	0.9901	0.9615	0.9174

不同的方法具有不同的精度，下面讨论方法的误差、稳定性。

10.4 单步法的误差与稳定性

数值方法的误差

误差 $\begin{cases}\text{局部截断误差(Local truncation error)} \\ \text{总体截断误差(Global truncation error)}\end{cases}$

(1)单步法的误差与阶

Euler公式、向后Euler公式、梯形公式、改进Euler公式均是单步法，它们可以统一记为

$y_{i+1}=y_i+h\varphi(x_i,y_i,h)$, (explicit ,显) （7）

$y_{i+1}=y_i+h\varphi(x_i,y_i, y_{i+1},h)$ (implicit, 隐) （8）

单步法

$y_{i+1}=y_i+h\varphi(x_i,y_i,h)$, (explicit ,显) （7）

$y_{i+1}=y_i+h\varphi(x_i,y_i, y_{i+1},h)$ (implicit, 隐) （8）

单步法局部截断误差

定义1 设$y(x)$是初值问题(1).(2)的精确解，单步显式（7）在x_{i+1} $(i=0,1,\ldots,n-1)$处的局部截断误差为

$T_{i+1}(h)=y(x_{i+1})-y(x_i)-h\varphi(x_i,y(x_i),h)$ (9)

单步隐式（8）在x_{i+1} 处的局部截断误差为

$T_{i+1}(h)=y(x_{i+1})-y(x_i)-h\varphi(x_i,y(x_i), y(x_{i+1}),h)$ (10)

定义2：若一种数值方法的局部截断误差$T_{i+1}(h)= O(h^{p+1})$，则称相应数值方法是 p 阶方法，其中p为正整数。

定义3：若一个p阶方法的局部截断误差为，

$T_{i+1}(h)=g(x_i,y(x_i))h^{p+1}+ O(h^{p+2})$

则第一个非零项：$g(x_i,y(x_i))h^{p+1}$,称为该方法的局部截断误差主项。

Euler 法的局部截断误差 $\begin{cases} y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k) \ (k=0,1,\ldots,n-1) \ (4) \\ y_0= y(a)=\alpha \end{cases}$

此处，$\varphi(x_i,y(x_i),h) =f(x_i, y(x_i))=y'(x_i)$，由（9）

$T_{i+1}(h)= y(x_{i+1}) - y(x_i) - hf(x_i, y(x_i))$ 局部截断误差主项

$= y(x_{i+1}) - y(x_i) - hy'(x_i)=(h^2/2)y''(x_i)+O(h^3)$

注意：$y(x_{i+1}) =y(x_i+h)=y(x_i)+hy'(x_i)+(h^2/2) y''(x_i) +O(h^3)$

Euler's method是一阶方法。

梯形公式的局部截断误差 $\begin{cases} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})) \\ y_0 = \alpha \quad \text{梯形公式} \end{cases}$

梯形公式是单步隐式，由(10)

$T_{i+1}(h)=y(x_{i+1})-y(x_i)-h\varphi(x_i,y(x_i), y(x_{i+1}),h)$

此处，$\varphi(x_i,y(x_i), y(x_{i+1}),h) =(f(x_i, y(x_i))+ f(x_{i+1}, y(x_{i+1})))/2$
$=(y'(x_i)+y'(x_{i+1}))/2$

$T_{i+1}(h)=y(x_{i+1})-y(x_i)-h\varphi(x_i,y(x_i), y(x_{i+1}),h)$
$=hy'(x_i)+(h^2/2)y''(x_i)+(h^3/3!)y^{(3)}(x_i)+ O(h^4) -h(y'(x_i)+y'(x_{i+1}))/2$

$= \cancel{hy'(x_i)}+\cancel{(h^2/2)y''(x_i)}+(h^3/3!)y^{(3)}(x_i)+ O(h^4) -h(\cancel{y'(x_i)}+ \cancel{y'(x_i)}+\cancel{hy''(x_i)}+(h^2/2)y^{(3)}(x_i)+ O(h^3))/2=(-h^3/12) y^{(3)}(x_i)+O(h^4)$

梯形公式是2阶方法。

后面将推出：改进Euler's method也是2阶方法。

定义4 设$y(x)$是初值问题(1),(2)的精确解，y_i表示用某种数值方法算出的数值解，

$$e_i(h)=y(x_i)-y_i,$$

称为该方法在x_i $(i=1,\dots n)$的总体截断误差。 P334

局部截断误差只考虑本步的误差，假设以前各步没有误差；
总体截断误差不仅考虑本步的误差，还考虑以前各步的误差。

结论：若一种数值方法的局部截断误差$T_i(h)=O(h^{p+1})$，则其总体截断误差 $e_i(h)=O(h^p)$。

总体截断误差总比局部截断误差低 1 阶。

总体截断误差的阶即为方法的阶。

(2)单步法的稳定性 P338

稳定性是用以刻画方法在控制误差传播时的概念．误差传播有两种情况：一种是当步长 $h\to 0$ 时，初始误差对以后计算结果的影响；一种是步长h固定时，初始误差对以后计算结果的影响．前者称公式关于初值是稳定的；后者称公式对步长h和复数λ是绝对稳定的。

I. 关于初值稳定

定义1 给定公式 $y_{n+1}=y_n+h\Phi(x_n,y_n,h)$ (1)

若存在常数c和h_0，当$h<h_0$时，公式(1)对任意两个初值α和β的解y_n，z_n满足，

$$|y_n-z_n|<c|\alpha-\beta|,nh<b-a$$

则称公式(1)关于初值是稳定的．

定理1 设数值公式(1)中的增量函数 $\Phi(x,y,h)$ 是x, y, h的连续函数，关于y满足Lipschitz 条件，则数值方法(1)关于初值是稳定的． P338

II绝对稳定性与绝对稳定域 P338

求解初值问题的数值方法，当给定不同步长计算时结果的舍入误差影响差别很大，如果舍入误差不增长算法就是数值稳定的，若舍入误差增长很快算法就不稳定。

定义5 用一个数值方法求解微分方程

实验方程

$$y'=\lambda y \qquad \lambda\text{是复数} \qquad (11)$$

对给定的步长h ,在计算y_n时引起的误差ε_n，若这个误差在计算后面的y_{n+k}中所引起的误差ε_{n+k}满足:

$$|\varepsilon_{n+k}|<|\varepsilon_n| \qquad (k=1,2,\dots)$$

就说这个数值方法对步长h和复数λ是绝对稳定的,使得数值方法是绝对稳定的 H= λh 在复平面上的允许范围称为数值方法的绝对稳定域.

Euler's method: $y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$ 的绝对稳定域.

用Euler's method求解实验方程: $y'=\lambda y$，得

$$y_{k+1}=y_k+\lambda h\, y_k=(1+\lambda h)\, y_k$$

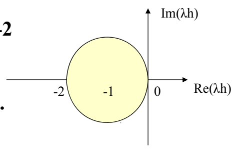
设 $y_k=\tilde{y}_k+\varepsilon_k$，且$\tilde{y}_k$满足方程 $\tilde{y}_{k+1}=(1+\lambda h)\tilde{y}_k$

则误差 ε_k满足方程: $\varepsilon_{k+1}=(1+\lambda h)\varepsilon_k$

要使 $|\varepsilon_{k+1}|<|\varepsilon_k|$，必须 $|1+\lambda h|<1$

Euler's method的绝对稳定域为 $|1+\lambda h|<1$（条件稳定）

在例1.1)中, λ=-2
由| 1-2h|<1,得
0<h<1.
h=0.1是合适的.



在一般方程中,取

$$\lambda=\frac{\partial f}{\partial y}$$

例题4 用Euler法求解初值问题 $\begin{cases} y'=-e^x y+x+1, & 0\le x\le 1 \\ y(0)=1 \end{cases}$

问, 步长h=? 算法绝对稳定。

解: $f(x,y)=-e^x y+x+1$，$\lambda=\dfrac{\partial f}{\partial y}=-e^x<0,\quad 0\le x\le 1$

$$|1+\lambda h|<1,\Rightarrow |1-he^x|<1,\quad 0<he^x<2$$

$$\because\quad 1<e^x<e,\therefore \text{只要}\quad 0<eh<2,$$

$$\text{即},0<h<2/e$$

求此初值问题，当0<h<2/e 时， Euler算法绝对稳定。

梯形公式 $y_{k+1}=y_k+\dfrac{h}{2}(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1}))$

的绝对稳定域.

用梯形公式求解实验方程：$y'=\lambda y$，得

$y_{k+1}=y_k+\lambda h(y_k+y_{k+1})/2$, 整理得:

$$y_{k+1}=\frac{1+\lambda h/2}{1-\lambda h/2}y_k \qquad (13)$$

设 $y_k=\tilde{y}_k+\varepsilon_k$，且$\tilde{y}_k$满足方程 (13)

则误差 ε_k满足方程： $\varepsilon_{k+1}=\dfrac{1+\lambda h/2}{1-\lambda h/2}\varepsilon_k$

要使 $|\varepsilon_{k+1}|<|\varepsilon_k|$，必须 $\left|\dfrac{1+\lambda h/2}{1-\lambda h/2}\right|<1$

$$\left|\frac{1+\lambda h/2}{1-\lambda h/2}\right|<1 \Leftrightarrow \left|\frac{1+\lambda h/2}{1-\lambda h/2}\right|^2<1$$

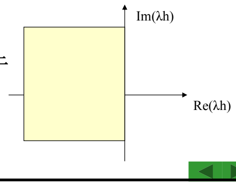
$$\Leftrightarrow \frac{1+\mathrm{Re}(\lambda h)+(1/4)h^2|\lambda|^2}{1-\mathrm{Re}(\lambda h)+(1/4)h^2|\lambda|^2}<1$$

当Re(λh)<0 时, 上式成立 .

梯形公式的绝对稳定域为: Re(λh)<0　A-稳定

(包含λh复平面的左半平面)

一个数值方法的绝对稳定域越大越好.一般的隐格式的绝对稳定域大于显格式的绝对稳定域.



作业

习题 10

P362:

4 (对所给步长h, 所用方法绝对稳定吗？),**7.**

补充：求下列求解格式的局部截断误差与绝对稳定域：

$y_{k+1}=y_k+hf(x_{k+1},y_{k+1})$