摄动理论及其应用

Abstract: 介绍相关的摄动理论

Keywords: 小参数

1 Introduction

当一个天体绕另一个天体沿二体问题的轨道运行时，因受到其他天体的吸引或其他因素的影响，天体的运动会偏离原来的轨道，这种偏离现象称为摄动.而实际问题中归纳、总结出来的数学物理问题往往比较复杂，很难用通常的数学方法得到解析解，于是人们经常采用各种近似解法和数值解法. 摄动方法就是经常被采用的而且是行之有效的方法，它是一种渐近的分析方法，可以对微分方程解的全局性行为进行系统的分析. 它的优点是能够给出正确的解的解析结构用来对物理问题的定性和近似定量讨论. 这种优点是数值解所不具有的. 其主要思想是通过分析小参数或大参数，将问题的解表示成渐近级数表达式，而这个渐近级数的前几项(往往是前一、二项)就能揭示解的重要特征，而以后的步骤只给出很小的修正. 因此摄动理论受到学术界的重视，逐步形成了较完整的理论. 海王星、冥王星的发现就是摄动理论的杰作.对于摄动方法，关键性的一点是在方程表达式中含有小参数，而利用小参数进行展开，一般分为正则摄动和奇异摄动。

对于正则摄动，下面我们首先通过一个含有小参数的数学问题来进行说明。

例：

$$x'' = -\frac{1}{(\varepsilon x + 1)^2} \tag{1.1}$$

边界条件是

$$x(0) = 0, x'(0) = 1, \tag{1.2}$$

我们假设其解表达式为

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i(t), \tag{1.3}$$

其假设表达式类似于泰勒公式，小参数ε类似于泰勒公式中的$x - x_0$.

把上述表达式带入到原方程中可以得到如下的表达式：

$$(x_0''(t) + \varepsilon x_1''(t) + o(\varepsilon^2))(\varepsilon x_0''(t) + \varepsilon^2 x_1''(t) + o(\varepsilon^3) + 1)^2 = -1 \tag{1.4}$$

展开并且把的ε同次项合并在一起可以得到：

$$x_0''(t) + \varepsilon(x_1''(t) + 2x_0''(t)) + o(\varepsilon^2) = -1 \tag{1.5}$$

这样，可以得到如下的表达式，即：

$$x_0''(t) = -1, x_1''(t) + 2x_0''(t) = 0 \tag{1.6}$$

其边界条件是如何确定呢？把式(1.3)带入到边界条件中，可知

$$x_0(0) = 0, x_0'(0) = 1, x_i(0) = 0, x_i'(0) = 0, (i = 1, 2, 3 \cdots) \tag{1.7}$$

根据以上边界条件可以得到

$$x_0 = -\frac{t^2}{2} + t.x_1(t) = ... \tag{1.8}$$

把原来的无量纲量再反代回去，可以得到：

$$x = -g\frac{t^2}{2} + vt \tag{1.9}$$

这就是我们所求得的距离和加速度、速度之间的关系表达式。而且我们只需要计算一阶就得到我们的精确的表达式。

为了研究U_{235}的扩散问题，Berman建立了如下模型：在矩形管道内，假设该管道的长度和宽度足够大，两平面之间的距离远小于其长度和宽度。两平面存在相同的渗透速度(v_w)，由于壁面的渗透，流体不断渗透到管道中推动管道内的流体的流动。描述这一问题的模型可以用Navier-Stokes 方程表达：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
&u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\
&u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2})
\end{aligned} \tag{1.10}$$

边界条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0, v=0, y=0;$$
$$u=0, v=v_w, y=a \tag{1.11}$$

这是经典的Berman问题。引入如下的变换$\psi = xf(\eta), \eta = \frac{y}{a}$,这里$a$ 表示壁面到中心的距离,ψ为流函数，满足如下关系表达式。$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$.

则上述方程可以变换为一个4阶的非线性常微分方程，表达如下：

$$\begin{aligned} &f'''' + Re(ff''' - f'f'') = 0 \\ &f(0) = f''(0) = f'(1) = 0, f(1) = 1 \end{aligned} \tag{1.12}$$

这里$Re=\frac{av_w}{\nu}$ 为雷诺数，是一个无量纲的值，用来衡量速度的大小的值。

对于这一问题，我们分为以下几种情况来进行讨论，Re是小参数或者是大参数的情况。如果$\varepsilon = Re$为小参数，则函数f的表达式表示为：

$$f=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i f_i(\eta), \tag{1.13}$$

把上式带入到原微分方程中，可以得到ε^0所对应的首项的表达式

$$f''''=0 \Rightarrow f=a+b\eta+c\eta^2+d\eta^3 \Rightarrow f=-\frac{1}{2}\eta^3+\frac{3}{2}\eta \tag{1.14}$$

同样，进一步可以求解$\varepsilon, \varepsilon^2$对应的各项的系数，带入进去可以得到不同参数影响下的表达式。

摄动方法也可以用来处理偏微分方程问题。

小振幅的弱水波扩散模型：

$$u_{tt}-u_{xx}=\varepsilon(u_{xx}-3u^2)_{xx}, x\in(-\infty,+\infty), t\geq 0 \tag{1.15}$$

边界条件

$$u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=-f(x) \tag{1.16}$$

这里当$|x|\to\infty$时，$f(x)\to 0$。

因为该方程中存在小的参数ε, 这样把解以小参数的形式展开成如下形式：

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i u_i(x,t), \tag{1.17}$$

带入到以上微分方程可得：

$$u_{0tt}-u_{0xx}+\varepsilon\{u_{1tt}-u_{1xx}-[u_{0xx}-3u_0^2]_{xx}\}+\cdots=0 \tag{1.18}$$

这样可以得到如下的方程，

$$u_{0tt}-u_{0xx}=0, u_{1tt}-u_{1xx}-[u_{0xx}-3u_0^2]_{xx}=0 \tag{1.19}$$

边界条件为：

$$u_0(x,0)=f(x), u_{0t}=-f(x); u_i(x,0)=0, u_{it}=0, i=1,2,\cdots \tag{1.20}$$

对于第一个方程，这时经典的波动方程，利用分离变量的方法可以得到其解的一般形式是

$$u_0=F(x-t)+G(x+t), \tag{1.21}$$

这里F, G是任意的函数。把初始条件带入到以上方程，则可得

$$u_0=f(x-t) \tag{1.22}$$

对于第二个方程，引入特征变量：

$$\xi=x-t, \eta=x+t, \tag{1.23}$$

这样可以得到如下的微分算子

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}; \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \eta}; \tag{1.24}$$

关于函数u_1的方程可以表示成：

$$-4u_{1\xi\eta}=f^{iv}(\xi)-6(f(\xi)f'(\xi))' \tag{1.25}$$

对该式进行积分可以得到：

$$u_1=\eta(\frac{3}{2}f(\xi)f'(\xi)-\frac{1}{4}f'''(\xi))+J(\xi)+K(\eta). \tag{1.26}$$

这里J, K同样是两个任意的函数。

把初始条件带入可得：

$$
\begin{aligned}
&x(\frac{3}{2}f(x)f'(x)-\frac{1}{4}f'''(x))+J(x)+K(x)=0\\
&K'(x)-J'(x)+\frac{3}{2}f(x)f'(x)-\frac{1}{4}f'''(x)-x(\frac{3}{2}f(x)f'(x)-\frac{1}{4}f'''(x))'=0
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

对上式中的2式进行积分可得：

$$
K(x)-J(x)+\frac{3}{2}f(x)^2-\frac{1}{2}f''(x)-x(\frac{3}{2}f(x)f'(x)-\frac{1}{4}f'''(x))=2A \tag{1.28}
$$

这样根据上式可以计算出K,J:

$$
u_1=2t(\frac{3}{2}f(\xi)f'(\xi)-\frac{1}{4}f'''(\xi))+\frac{3}{4}(f^2(\xi)-f^2(\eta))+\frac{1}{4}(f''(\eta)-f''(\xi)) \tag{1.29}
$$

这样，就计算出该方程的解

$$
u=f(x-t)+\varepsilon u_1 \tag{1.30}
$$

这时就有这么一个问题，如果方程中不存在小的参数，那么对于这样的微分方程如何处理：

$$
u''+(1+\beta)u=0, \tag{1.31}
$$

边界条件为

$$
u(0)=a,u'(0)=0 \tag{1.32}
$$

在非线性项引入小参数ε,则以上方程可以表示为：

$$
u''+(\varepsilon+\beta)u=0, \tag{1.33}
$$

令

$$
u=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i u_i(\eta) \tag{1.34}
$$

把上式带入到原方程中去，则

$$
u_0''+\beta u_0+\varepsilon(u_1''+\beta u_1+u_0)+o(\varepsilon^2)=0, \tag{1.35}
$$

这里

$$
u_0(0)=a,u_0'(0)=0,u_1(0)=0,u_1'(0)=0. \tag{1.36}
$$

可以得到

$$u_0 = a\cos\sqrt{\beta}x, u_1 = -\frac{a}{2\sqrt{\beta}}x\sin(\sqrt{\beta}x) \tag{1.37}$$

则原方程的解为

$$u = a\cos\sqrt{\beta}x - \frac{a}{2\sqrt{\beta}}x\sin(\sqrt{\beta}x) \tag{1.38}$$

而这时方程的精确解为$u = a\cos(\sqrt{1+\beta}x)$

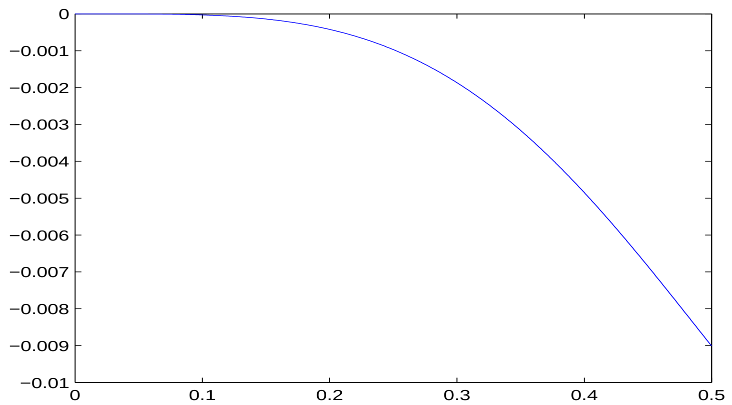

Figure 1: 摄动解和精确解之间的误差（自变量在小范围（0-0.5））

从以上的计结果可以看出，在较小的一个范围内其解吻合较好，但是随着范围的增大，其解的误差逐渐增大。如何对该工作做进一步的改进，使得其精确值的范围增大。这时我们可以做进一步工作，对公式中的参数β同样做类似的展开，假设

$$\beta = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\beta_i, \tag{1.39}$$

把该式同样带入到以上的公式中。同样合并具有同样的小参数次数的项。但是我们容易发现，由于引入了新的未知参数，原来的边界条件就不足以把所有的未知的变量求解出来。但是恰恰由于新的变量的引入，使得其解具有很大的自由度来确定。其表达式如下：

$$u_0'' + \beta_0 u_0 + \varepsilon(u_1'' + \beta_0 u_1 + u_0(1+\beta_1)) + o(\varepsilon^2) = 0, \tag{1.40}$$

可以得到：

$$u_0 = a\cos\sqrt{\beta_0}x \tag{1.41}$$

而根据

$$u_1'' + \beta_0 u_1 + u_0(1+\beta_1) = 0 \tag{1.42}$$

为了得到最简单的解，取$\beta_1 = -1$,则$u_1 = 0$ 则$u = u_0 + u_1 = a\cos\sqrt{\beta_0}x = a\cos\sqrt{\beta+1}x$. 这

恰好是方程的精确解。

奇异摄动方法：也就是对于含有小参数的问题，用正则摄动不能对原来的问题进行求解或者在计算的过程中出现新的问题。仍然以上面的流动方程为例：

$$\begin{aligned} &f'''' + Re(f'f'' - ff''') = 0 \\ &f(0) = f''(0) = f'(1) = 0, f(1) = 1 \end{aligned} \tag{1.43}$$

这时如果Re是一个大的参数，那么如何用把原来的问题变成小参数,实际上只需要取原来的大参数的倒数。则上述问题可以变成：

$$\varepsilon f''' + (f'^2 - ff'') = k \tag{1.44}$$

这里$\varepsilon = 1/Re$ 这里既然k是积分常数，则对任意的函数值都成立。不妨假设

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i, \tag{1.45}$$

把该式带入到原表达式中，则

$$(f_0'^2 - f_0 f_0'') + \varepsilon(f_0''' + 2f_0'f_1' - f_0 f_1'' - f_1 f_0'') + o(\varepsilon^2) = \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i'''(0) + (\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i'(0))^2, \tag{1.46}$$

令

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \beta_i = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i'(0) = \beta, \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sigma_i = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i'''(0) = \sigma, \tag{1.47}$$

令两边的ε 同样次数的的项合并在一起，可以得到如下的表达式：

$$\begin{aligned} &f_0'^2 - f_0 f_0'' = \beta_0^2, f_0(0) = f_0''(0) = 0, \Rightarrow f_0 = \beta_0 \eta \\ &f_0''' + 2f_0'f_1' - f_0 f_1'' - f_1 f_0'' = \sigma_0 + 2\beta_0\beta_1, f_1(0) = f_1''(0) = 0 \Rightarrow f_1 = \beta_1 \eta \end{aligned} \tag{1.48}$$

这里有两个未知的变量，要想确定他们，我们需要同内解作匹配，来确定这两个未知的参数。这里需要考虑的是方程的内解和外解。外解可以理解是方程的边界层之外的解，我们可以这样理解是一个宏观的解。而其内解是边界层内的解，而在边界层内解的变化很大，边界层外解的变换不如其内解变化剧烈，这样如果需要两解进行匹配，就需要把边界层内的解进行放大。从方程上来看，是把边界层进行拉伸，即自变量的拉伸变换。

$$\tau = (1 - \eta)\varepsilon^{-1} \tag{1.49}$$

这样，我们就可以把方程表达式表示成为如下形式：

$$-g'''(\tau)+(g'(\tau)^2-g(\tau)g''(\tau))=\varepsilon^3\sigma+\varepsilon^2\beta^2 \tag{1.50}$$

边界条件为

$$g'(0)=0,g(0)=1 \tag{1.51}$$

同样，我们把函数$g(\tau)$ 同样展开(但是以什么形式展开，即ε的多少次方展开是和拉伸变换所对应的ε的次数有关的)：

$$g(\tau)=g_0(\tau)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i g_i(\tau)=1+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i g_i(\tau) \tag{1.52}$$

把这个表达式带入到以上方程中，可以得到如下的表达式

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i g_i'''+(\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i g_i')^2-(1+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i g_i)\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i g_i''=\varepsilon^3\sigma+\varepsilon^2\beta^2 \tag{1.53}$$

比较两边的系数可以得到如下的方程关系表达式：

$$\begin{aligned}&\varepsilon: g_1'''+g_1''=0,g_1'(0)=g_1(0)=0,g_1=A(\tau+1-\exp(-\tau))\\&\varepsilon^2: -g_2'''+g_1'2-g_2''+g_1g_1''=\beta_0^2,g_2'(0)=g_2(0)=0,\Rightarrow g_2=\cdots\end{aligned} \tag{1.54}$$

根据内外解的表达式有如下的形式：

$$\begin{aligned}&f(\eta)=\beta_0\eta+\varepsilon\beta_1\eta=\beta_0(1-\varepsilon\tau)+\varepsilon\beta_1(1-\varepsilon\tau)\\&g(\tau)=1+\varepsilon A(\tau+1-\exp(-\tau))\end{aligned} \tag{1.55}$$

在边界层内，令$\varepsilon\to 0$,则变量$\tau\to\infty$,内解中的自变量趋向于无穷大，则指数小项趋向于0.比较两个函数的系数，可以计算出相对应的系数。可以知道：

$$\beta_0=1,A=-1 \tag{1.56}$$

其他的各项可以依次计算出。