连续性数学模型及其分析

Abstract: 介绍相关的连续性数学模型：吸烟的模型、人口模型、传染病模型

Keywords: 连续性、稳定

1 Introduction

在自然科学中，很多的自然现象由于时间的连续性，都可以描述为连续性的微分方程模型，对于这样的问题的处理，主要是建立起方程等号两边的相等关系以及描述问题的边界条件.

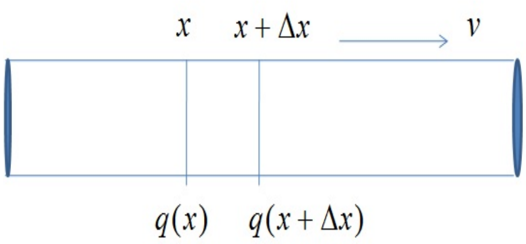
香烟的过滤嘴模型：一般情况下，现在的香烟都有过滤嘴，那么我们知道过滤嘴的主要作用是过滤香烟中的毒素，从而减少毒素进入人体内的数量。直观的来讲，过滤嘴的长度越长，则过滤的毒素的数量越大，与不带过滤嘴的香烟比较，过滤嘴所起的作用究竟有多大？

在吸烟的过程中可以做如下的假设：有害物质基本上均匀的分布在烟草中，吸烟的过程中一部分直接进入到空气中，而另外一部分沿着香烟穿行，在穿行的过程中又部分地被未点燃的烟草和过滤嘴吸收而沉淀下来，剩下的进入了人体。而被烟草吸收而沉淀下来的那一部分有害物质，当香烟燃烧到那儿的时候又有部分通过烟雾部分进入空气中，部分沿香烟穿行，这个过程直到香烟燃烧到过滤嘴为止。

对于这一过程如何进行分析，从香烟中的有害物质而言，主要分为三种情况：部分挥发、吸入人体以及沉淀在过滤嘴中。

对该问题，涉及到的变量，我们做如下假设:香烟烟草和过滤嘴的长度分别为l_1和l_2,$l_1 + l_2 = l$,在点燃的地方进入到空气中的和通过烟草的比例分别为$a-$和a,且$a + a' = 1$,未点燃的烟草和过滤嘴对通过的有毒物质的吸收率分别为b和β, 烟草的燃烧速度和有毒物质的传输速度是u,v. 烟草中的有毒物质的总量为W,假设平均分布.

我们要想计算未点燃的烟草和过滤嘴对通过的有毒物质的吸收率，则首先要知道t时刻单位时间流经x位置处的有毒物质的流量为$q(x, t)$,而在计算的时候我们要想知道进入空气中和进入烟草中的量，首先要确定知道t时刻x位置处单位长度的有毒物质的量$w(x, t)$为多少。



这样，我们要想计算进入到人的体内的有毒物质的量：

$$Q=\int_0^T q(l,t)dt, T=\frac{l_1}{u} \tag{1.1}$$

对于这一问题，关键是计算$q(x,t)|_{x=l}$,要想计算在l处的值，关键如果能计算出在任意位置ut的流量就可以了。

当时间$t=0$时，定义$q(x,0)=q(x)$, 即这时香烟刚点燃，因为有毒物质在香烟中的传播速度远远大于燃烧的速度，则可以计算在x到$x+\Delta x$小段距离所对应的有毒物质的沉淀量。两流量之差等于这一段未点燃的烟草对毒物的吸收量：

$$q(x)-q(x+\Delta x)=\begin{cases} bq(x)\Delta\tau, 0<x<l_1 \\ \beta q(x)\Delta\tau, l_1<x<l, \frac{\Delta x}{v}=\Delta\tau \end{cases} \tag{1.2}$$

移项并对时间$\Delta\tau\to 0$，则可以得到:

$$\frac{dq(x)}{dx}=\begin{cases} -b\frac{q(x)}{v}, 0<x<l_1 \\ \beta\frac{q(x)}{v}, l_1<x<l \end{cases}$$

所对应的边界条件为

$$q(0)=au\frac{W}{l_1}=aH_0 \tag{1.3}$$

从表达式上来看，初始变量表示在烟刚点燃的时候：单位时间*速度*平均的有毒物质, 单位时间内放出的有毒物质的量。

根据连续性及初始条件可以计算出$q(x)$的表达式

$$q(x) = \begin{cases} -aH_0 \exp(-\frac{bx}{v}), 0 < x < l_1 \\ aH_0 \exp(-\frac{bl_1}{v}) \exp(-\frac{\beta(x-l_1)}{v}), l_1 < x < l \end{cases}$$

在t时刻所对应的位置是ut,而该位置的单位长度释放出的有毒物质的量为$H(t) = uw(ut,t)$,则类似于上面的计算表达式，可以计算t时刻所对应的在x处的有毒物质的流量：

因为现在烟草燃烧到$x = ut$处，则在此位置点燃的烟草单位时间放出的有毒物质的量为$H(t)$,

$$H(t) = uw(ut,t), \tag{1.4}$$

$$q(x,t) = \begin{cases} -aH(t) \exp(-\frac{b(x-ut)}{v}), 0 < x < l_1 \\ aH(t) \exp(-\frac{b(l_1-ut)}{v}) \exp(-\frac{\beta(x-l_1)}{v}), l_1 < x < l, \end{cases}$$

对该问题的处理实际上是把坐标位置进行了平移，由原来的原点移动到$x = ut$.

但是在上式中，我们仍然不知道$w(ut,t)$的表达式。这样我们就需要构造关于$w(x,t)$的关系表达式。

$$w(x,t) - w(x,t+\Delta t) = b\frac{q(x,t)}{v}\Delta t \tag{1.5}$$

两者之差表示单位长度的香烟中的有害物质被吸收的部分。

两边同时令$\Delta t \to 0$,则可以得到如下表达式：

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{b}{v} aw(ut,t) \exp(-\frac{b(x-ut)}{v}) \tag{1.6}$$

边界条件为

$$w(x,0) = \frac{W}{l_1} = w_0 \tag{1.7}$$

这样可以计算出方程的表达式

$$w(ut,t) = \frac{w_0}{1-a}(1 - a\exp\frac{ubt(1-a)}{v}) \tag{1.8}$$

人口模型：假设在t时刻年龄小于x的人口记作$F(x,t)$，称作人口分布函数，时刻t的人口总数，记作$N(t)$. 定义年龄密度函数$p(x,t)$满足$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx = F(x_2,t) - F(x_1,t)$。则$p(x,t)dx$表示在$t$时刻年龄在$[x, x+dx]$的人口数，记$\mu(x,t)$ 为时刻t 年龄x 的人的死亡

率,则$\mu(x,t)p(x,t)dx$表示在t时刻年龄在$[x,x+dx]$的单位时间内死亡的人口数.

这时候我们分析时刻t年龄在$[x,x+dx]$ 内的人到时刻$t+dt$ 的情况，那么他们中活着的那一部分人的年龄变为$[x+dt,x+dx+dt]$,这样：

$$\begin{aligned}&p(x,t)dx-p(x+dt,t+dt)dx=\mu(x,t)p(x,t)dxdt\\&\Rightarrow p(x,t)dx-p(x,t+dt)dx+p(x,t+dt)dx-p(x+dt,t+dt)dx=\mu(x,t)p(x,t)dxdt\end{aligned} \tag{1.9}$$

根据中值定理及函数导数的连续性，可以得到如下的方程表达式：

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}=-\mu(x)p(x,t) \tag{1.10}$$

边界条件为：

$$p(x,0)=p_0(x),p(0,t)=f(t),p(x_r,t)=0 \tag{1.11}$$

引入变换

$$s=x+t,l=-x+t, \tag{1.12}$$

则上式可以变成：

$$\frac{\partial p}{\partial s}=-\mu(\frac{s-l}{2})p(s,l) \tag{1.13}$$

对该方程可以计算,可以得到其在特殊情况下的解：

$$p(r,t)=\begin{cases}p_0(r-t)\exp(-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds),0<t<r\\f(t-r)\exp(-\int_{0}^{r}\mu(s)ds),t>r\end{cases} \tag{1.14}$$

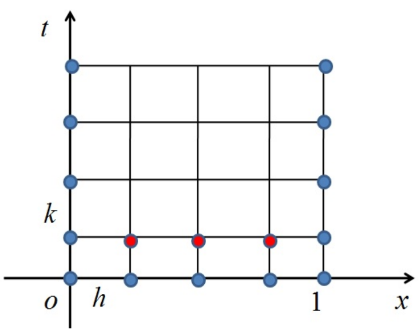


Figure 1: '灰色'已知点, '红色'未知点

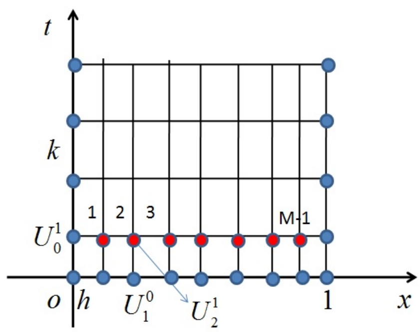


Figure 2: '灰色'已知点, '红色'未知点

定义：把$(0,x_r),(0,t)$分别n和s等分，步长分别为h,k.在空间内任取一个点$p(x_m,t_l)=$

$p_{m,l}$，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x}|_{(x_m,t_l)} &= \frac{p(x_{m+1},t_l)-p(x_{m-1},t_l)}{2h} = \frac{p_{m+1,l}-p_{m-1,l}}{2h};\\
\frac{\partial p}{\partial t}|_{(x_m,t_l)} &= \frac{p(x_m,t_l)-p(x_m,t_{l-1})}{k} = \frac{p_{m,l}-p_{m,l-1}}{k}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

则上式可以表示为

$$\frac{p_{m+1,l}-p_{m-1,l}}{2h}+\frac{p_{m,l}-p_{m,l-1}}{k}=\mu(x_m)p_{m,l} \tag{1.16}$$

把上式展开，整理可以得到：

$$\frac{1}{2h}p_{m+1,l}-\frac{1}{2h}p_{m-1,l}-(\mu(x_m)-\frac{1}{k})p_{m,l}=\frac{1}{k}p_{m,l-1} \tag{1.17}$$

令

$$\begin{aligned}
&m=1,l=1:\frac{1}{2h}p_{2,1}-\frac{1}{2h}p_{0,1}-\frac{1}{k}p_{1,0}-(\mu(x_1)-\frac{1}{k})p_{1,1}=0\\
&\Rightarrow \frac{1}{2h}p_{2,1}-(\mu(x_1)-\frac{1}{k})p_{1,1}=\frac{1}{2h}p_{0,1}+\frac{1}{k}p_{1,0}\\
&m=2,l=1:\frac{1}{2h}p_{3,1}-\frac{1}{2h}p_{1,1}-\frac{1}{k}p_{2,0}-(\mu(x_2)-\frac{1}{k})p_{2,1}=0\\
&\Rightarrow \frac{1}{2h}p_{3,1}-\frac{1}{2h}p_{1,1}-(\mu(x_2)-\frac{1}{k})p_{2,1}=\frac{1}{k}p_{2,0}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
&m=n-1,l=1:\frac{1}{2h}p_{n,1}-\frac{1}{2h}p_{n-2,1}-\frac{1}{k}p_{n-1,0}-(\mu(x_{n-1})-\frac{1}{k})p_{n-1,1}=0\\
&\Rightarrow -\frac{1}{2h}p_{n-2,1}-(\mu(x_{n-1})-\frac{1}{k})p_{n-1,1}=\frac{1}{k}p_{n-1,0}-\frac{1}{2h}p_{n,1}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

用矩阵表示该方程如下：

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
-(\mu(x_1)-\frac{1}{k}) & \frac{1}{2h} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\
-\frac{1}{2h} & -(\mu(x_2)-\frac{1}{k}) & \frac{1}{2h} & \ldots & 0 & 0 & 0\\
\ldots\ldots\ldots & & & & & & \\
 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{1}{2h} & -(\mu(x_{n-1})-\frac{1}{k})
\end{pmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1}\\ p_{2,1}\\ \ldots\\ p_{n-1,1}\end{pmatrix}}_{U^1}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2h}p_{0,1}+\frac{1}{k}p_{1,0}\\ \frac{1}{k}p_{2,0}\\ \ldots\\ \frac{1}{k}p_{n-1,0}-\frac{1}{2h}p_{n,1}\end{pmatrix}}_{U^0} \tag{1.20}$$

或者

$$AU^1=U^0 \tag{1.21}$$

在该模型的计算过程中，我们分析了在不同的年龄段所对应的人口数，这是一个偏微分方程，而对于人口模型也是经历了一个发展过程，马尔萨斯、logistic 模型等。显然对于人口模型，容易分析最基本的人口的发展应该和当前的人口数有关，而对应于人口还有另外一

个量即人口的增长率，而这一个值显然和以前的人口数有关，当然也可能和其他的量有关。首先我们先看一下马尔萨斯模型：假设人口的增长率为r, t时刻的人口数为$x(t)$,则$t+dt$时刻的人口数为$x(t+dt)$,人口的增长量为

$$x(t+dt)-x(t)=rx(t)dt, x(0)=x_0 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=rx \Rightarrow x=x_0\exp(rt) \tag{1.22}$$

该模型在较短的时间内对数据的吻合很好。但是如果纯粹从数学的角度来看，若增长率为正数，则随着时间t的增大，人口数就会趋向于无穷大，若增长率为负数，则随着时间t的增大，人口数会趋向于零。这样该模型就需要进行修正。而且在实际情况中，发现当人口的增长率并不是一个常数，而是一个随着人口的总数变化的一个值。而且随着人口数量的逐渐增大，增长率的值逐渐减少。其原因时由于自然环境的限制导致了人口的增长率的减少。那么这时人口模型如何建立，或者在刚才模型的基础上如何修正：

对于人口的增长率既然是一个人口数量的减函数，则：

$$r(x)=r-sx, \tag{1.23}$$

当人口达到最大值时x_m时，人口增长率变为零($s=\frac{r}{x_m}$).则上式可以表示为$r(x)=r-\frac{r}{x_m}x$.则上述模型修正为

$$\frac{dx}{dt}=r(1-\frac{x}{x_m})x \Rightarrow x=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)\exp(-rt)} \tag{1.24}$$

该模型有如下特点人口的数量呈现逐渐递增的趋势，且增长速度先快后慢。最后达到人口的最大值x_m.从模型的表达式来看，$\frac{dx}{dt}$可以知道当$x\in(0,x_m)$时，导数值恒大于零，且先增大后减少。

以上的模型从表达式上来看，涉及到的自变量可能不止一个，而因变量只有一个，这说明模型要处理的对象只有一个。而在很多的问题中，要研究的对象可能不止一个，而且对象之间可能会相互作用，那么这样的问题如何处理，模型如何建立。例如传染病模型：在这样的问题中，涉及到病人和健康的人两种情况，病人经过治疗后会被治好，而健康的人可能又被感染，这样如何处理这样的两个变化的量。建立起模型后，进一步分析病人会受到那些因素的影响，并且根据所得到的结果，来对疾病进行控制。

传染病模型：假设病人t时刻的数目为$i(t)$,其每个病人每天的有效接触人数是λ.当前的病人数是i_0,分析病人的变化情况。

$$i(t+dt)-i(t)=\lambda i(t)dt, i(0)=i_0 \tag{1.25}$$

从表达式上来看，容易看出，该模型和人口的马尔萨斯模型是同样的表达形式，可以知道随

着时间的增长，病人数会趋向于无穷大。对于该模型来讲，关键是只考虑了病人对健康人的感染率，而没有考虑到人数的有限性,另外病人会再次感染，导致了病人的无限增大。这样我们就需要对模型进行修正，在新的模型中考虑健康的人数和病人的总数是一个有限值。这样修正的模型为：

做如下假设：假设t时刻人口总数为$N(t)$，病人和健康的人在总人数中的所占的比例为$i(t)$和$s(t)$,每个病人每天可以使得$\lambda s(t)$ 个健康人变为病人(可以这样理解：$s(t)$是一个比例，而$s(t)N(t)\lambda_0 = s(t)\lambda$)，这里参数$\lambda$是一个人数，称为日接触率。那么模型可以变成如下的形式

$$N\frac{di}{dt} = \lambda siN, i(0) = i_0 \tag{1.26}$$

对该方程计算，可得

$$i = \frac{1}{1 + (\frac{1}{i_0} - 1)\exp(-\lambda t)} \tag{1.27}$$

这是经典的logistic模型，对于该模型根据其解可以分析出各个量的相互作用。但是随着时间的增大，所有的人都会变成病人，但是这时不会趋向于无穷大。相对于原模型而言，这是一个改进。但是在该模型中没有考虑病人的治愈率，因为病人是可以治好的。那么在新的模型中考虑病人的治愈情况。但是对于不同的传染病治愈情况不一样，有些病治愈后就不再感染，但是对于有些病治愈后仍然可能被感染。这样在下面的模型中就需要把模型分为两种情况：治愈后具有免疫性的和不具有免疫性的。对于治愈后仍然可能感染的，是不具有免疫性的。

$$N\frac{di}{dt} = \lambda siN - \mu iN, i(0) = i_0 \tag{1.28}$$

这里μ类似于上面的感染人数，是病人的治愈率。μ是病人被治愈的占病人总数的比例。显然$\frac{1}{\mu}$是传染病的平均传染周期。例如：病人的治愈率为病人总数的$1/100$，则把所有的人都治愈大概需要100天。通过计算可以得到病人的变化值为：

$$i(t) = \begin{cases} [\frac{\lambda}{\lambda-\mu} + (\frac{1}{i_0} - \frac{\lambda}{\lambda-\mu})\exp(-(\lambda-\mu)t)]^{-1}, \lambda \neq \mu \\ (\lambda t + \frac{1}{i_0})^{-1}, \lambda = \mu \end{cases} \tag{1.29}$$

定义$\sigma = \frac{\lambda}{\mu}$,根据定义可以知道其为传染期内每个病人的有效接触数。

$$i(\infty) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sigma}, \sigma > 1 \\ 0, \sigma \leq 1 \end{cases} \tag{1.30}$$

当$\sigma \leq 1$时，治愈率大于得病率，这样病人的数量就会越来越少，若$\sigma > 1$, 这时病人也不会

一直增加下去，因为总会有一定的病人可以治愈。

另外对于一些传染病，当其治愈后，就不会再次被感染。这样就会从易感人群中移除。对于这样的模型，同样需要建立新的关系：在模型的建立过程中需要考虑健康者、病人和病愈免疫的移出者。三类人群在总人数N中占比例分别为$s(t), i(t)$和$r(t)$。显然三者之和是1.

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

该方程就变成了一个含有两个因变量的方程组，对于这样的方程，可以应用数值的方法直接进行求解(ode45)。

如果纯粹不进行计算，而想对其解进行分析，一般对这样的问题，我们转到上面两个方程做比，可以得到如下表达式：

$$\begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

很容易求出方程的解为

$$i = i_0 + s_0 - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0} \tag{1.31}$$

这是一个相轨线，根据此式并不能直接分析i, s, t随时间的变化趋势。

但是，根据方程组可以知道，病人最终必将全部消失。因为函数

$$\frac{ds}{dt} \leq 0, \frac{dr}{dt} > 0 \tag{1.32}$$

则说明函数$s(t)$ 是随时间变量单调递减的，而且函数$s_0 > s(t) \geq 0$, 则该函数有界。故s_∞ 存在。而r单调递增，同时上界也存在，所以r_∞ 也存在，进而可以知道i_∞ 也存在。但是不能确定$i(t)$的变化趋势。

根据以上的分析确定了$i(t)$的存在性，进一步需要分析其极限值应该为什么。假设$i(\infty) = \varepsilon > 0$，则$r(\infty) - r_0 = \mu i(\xi)\infty$,趋向于无穷大，则只能$i(t_\infty) = 0$.故得以证明。

根据表达式$\frac{1}{\sigma s} - 1 > 0$, 则$s < \frac{1}{\sigma}$. 根据初始条件及解对初值的连续依赖性，则若$s_0 < \frac{1}{\sigma}$,则$i$是$s$的增函数，而$s(t)$ 是随时间变量单调递减的，则$i(t)$ 是随时间变量单调递减的。

若若$s_0 > \frac{1}{\sigma}$,则根据解对初值的连续依赖性，则$i(t)$ 先增加，随着i的增加，健康的人会减少，则$s = \frac{1}{\sigma}$时，病人达到最大值。但是根据上面的分析可以知道，$i(t)$最终趋向于零。

同样也可以分析里面的参数对解的影响。