第五章 动态规划

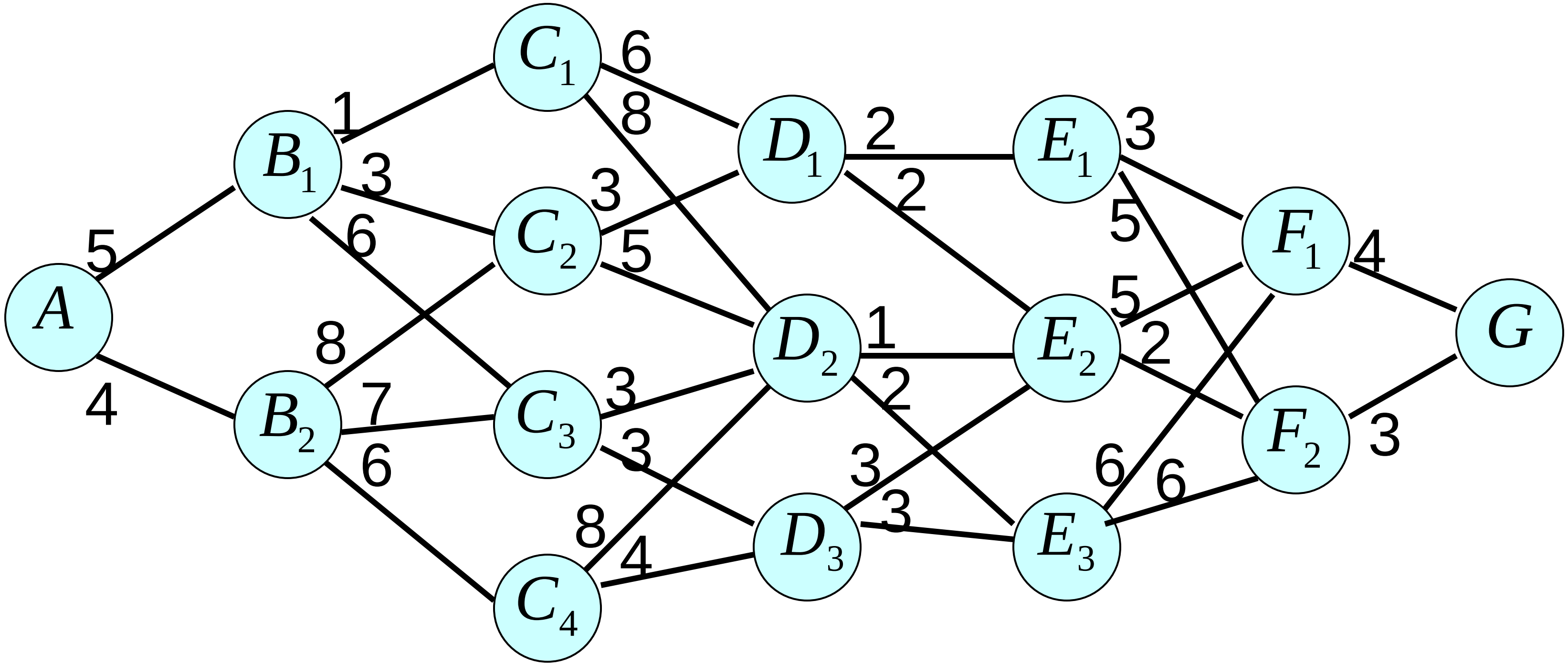
第五节 动态规划的应用

- 最短路问题
- 投资分配问题
- 背包问题
- 多阶段生产安排问题
- 生产与库存问题

一. 最短路问题

例1 下图给出了一个线路网络。从A点要铺设一条管道到G点，其两点间连线上的数字表示两点间的距离。

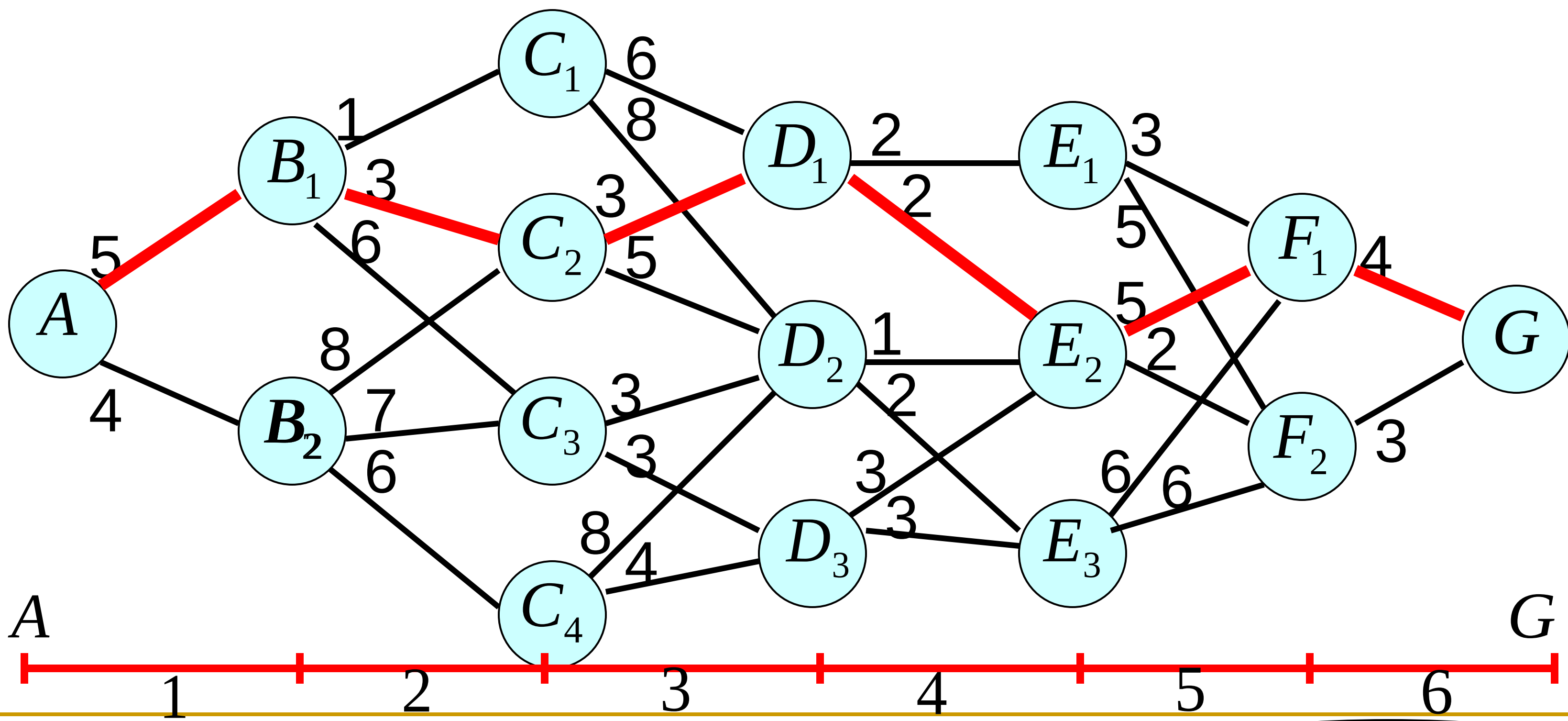
问题： 求一条由A到G的铺管线路使总距离为最短。



一. 最短路问题

例1 最短路问题是一个多阶段决策过程最优化问题。

从A到G分成6个阶段：

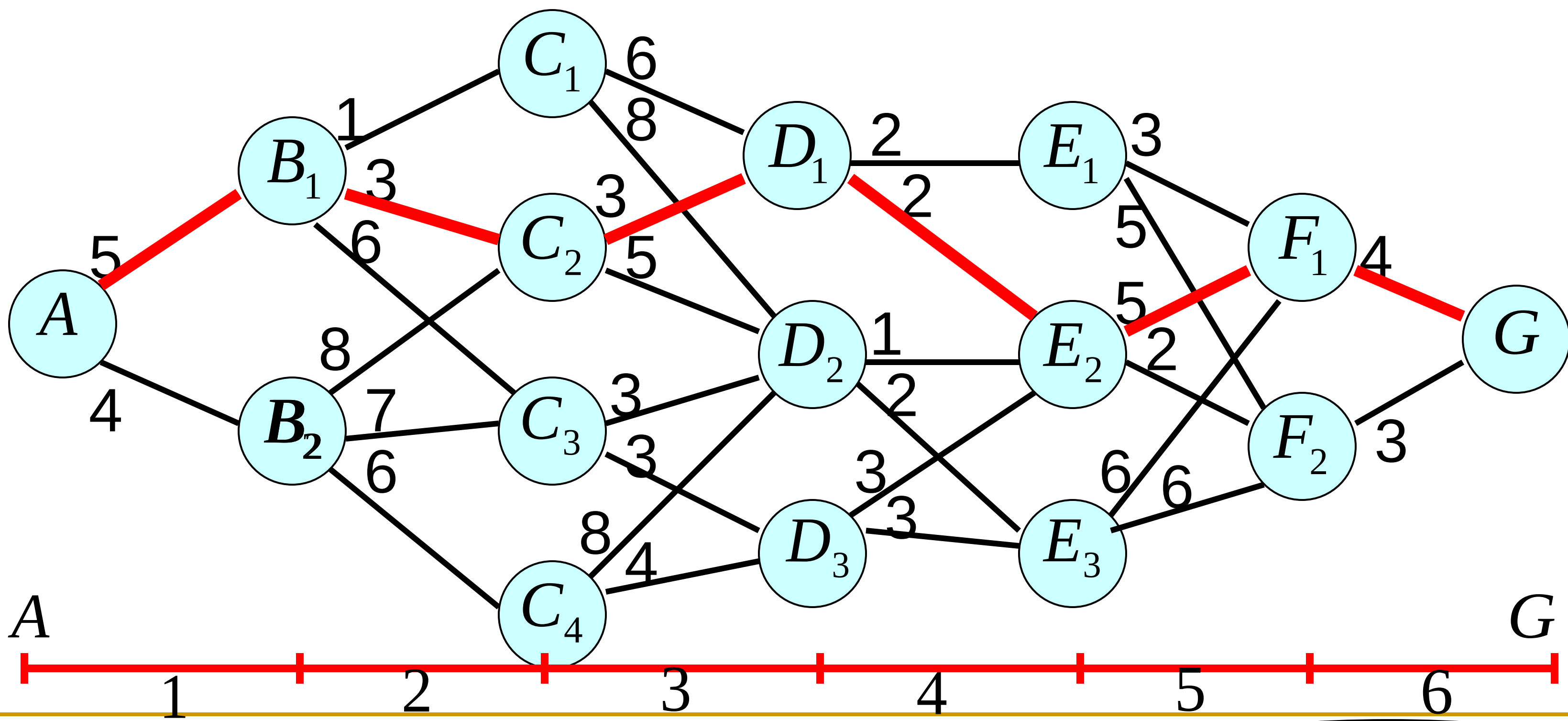


一. 最短路问题

例1 最短路问题是一个多阶段决策过程最优化问题。

可用动态规划的方法求解。

所谓动态规划的方法，其实就是一种递推方法。



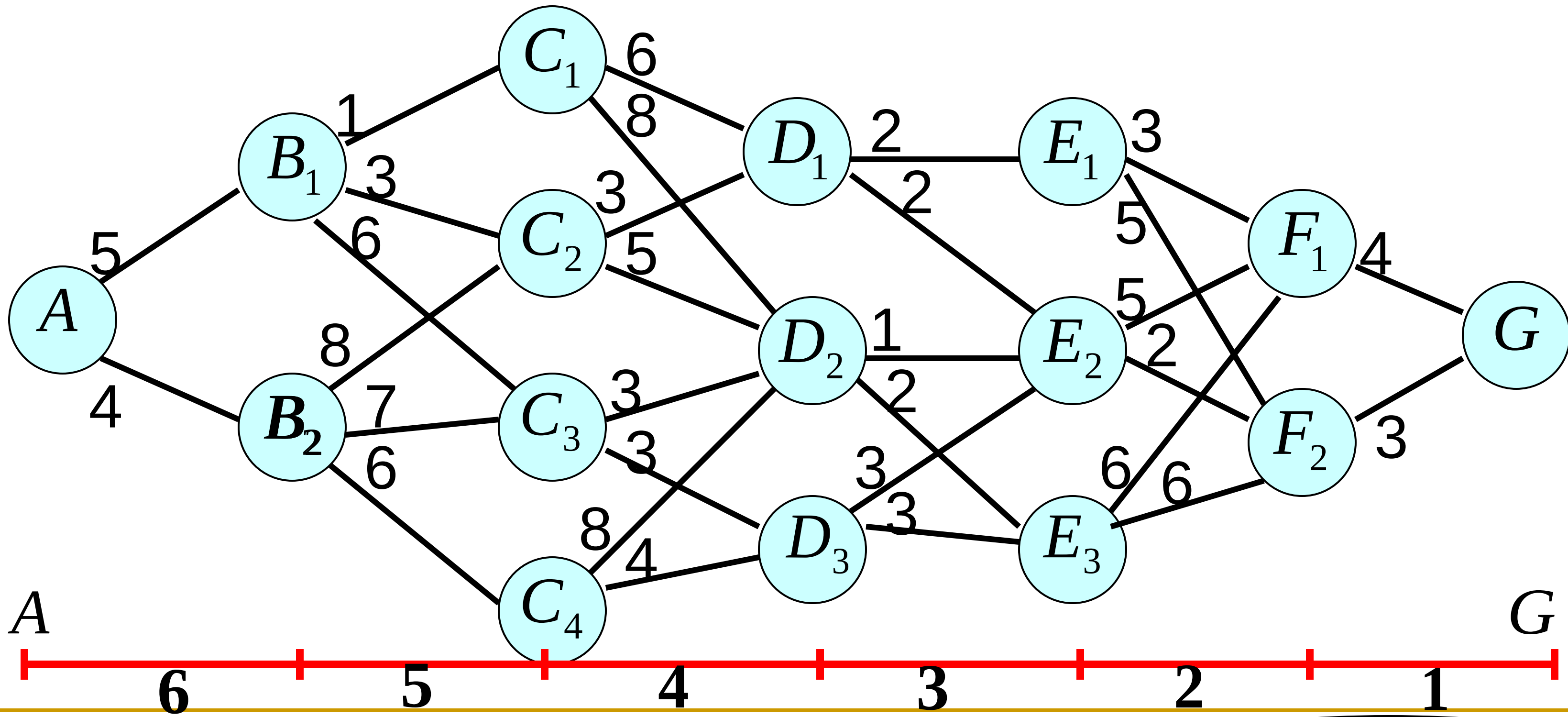
1. 定义符号：

(1) 正整数n：由某点到G点的阶段数；

1. 定义符号：

(1) 正整数n：由某点到G点的阶段数；

例如：由F_1到G点的阶段数为1；由A到G点的阶段数为6；
由C_2到G点的阶段数为4；



1. 定义符号：

(1) 正整数n：由某点到G点的阶段数；

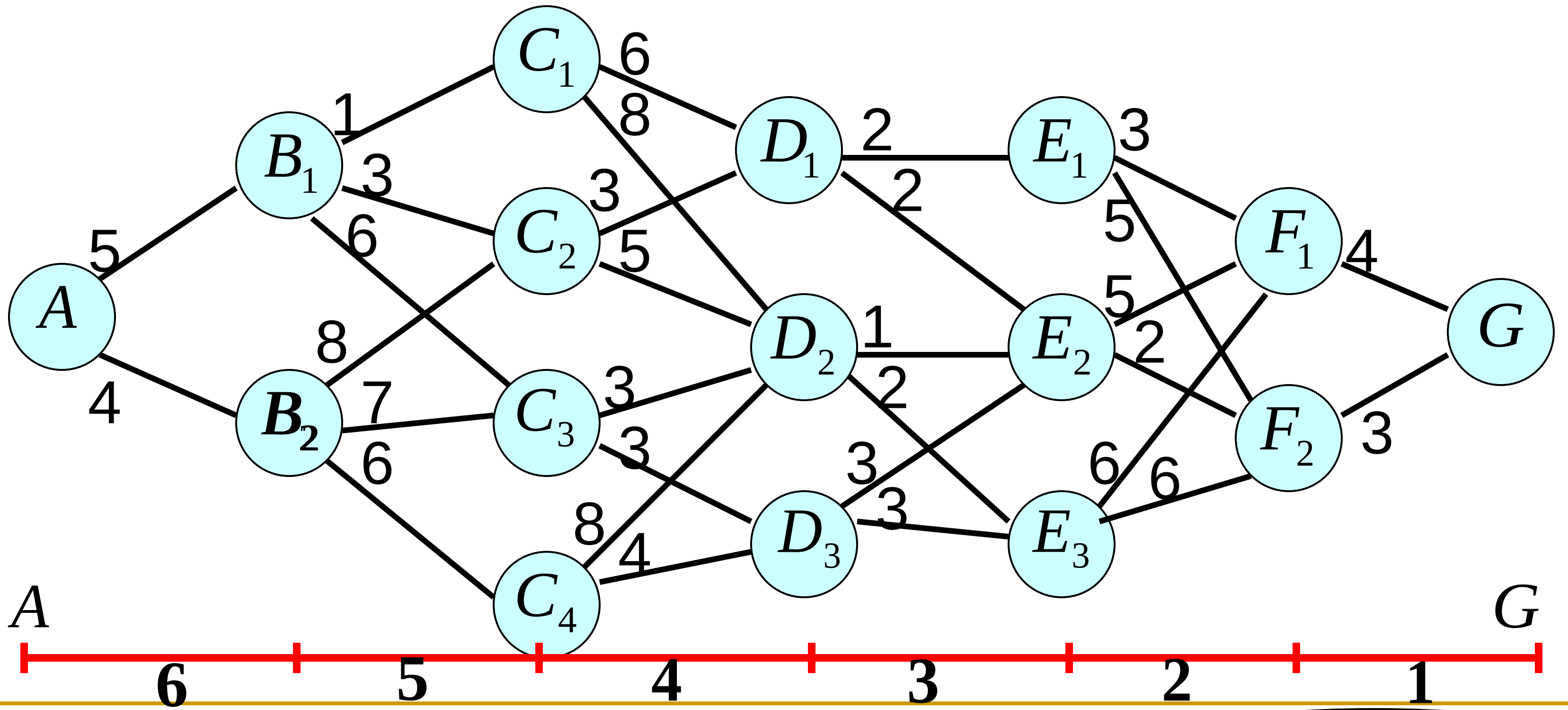
(2) 状态变量S：目前所处的位置；

1. 定义符号：

(1) 正整数n：由某点到G点的阶段数

(2) 状态变量S：目前所处的位置；

例如：S可以是A, B_1, C_2, D_3, E_1, F_2, G ；



1. 定义符号：

(1) 正整数n：由某点到G点的阶段数；

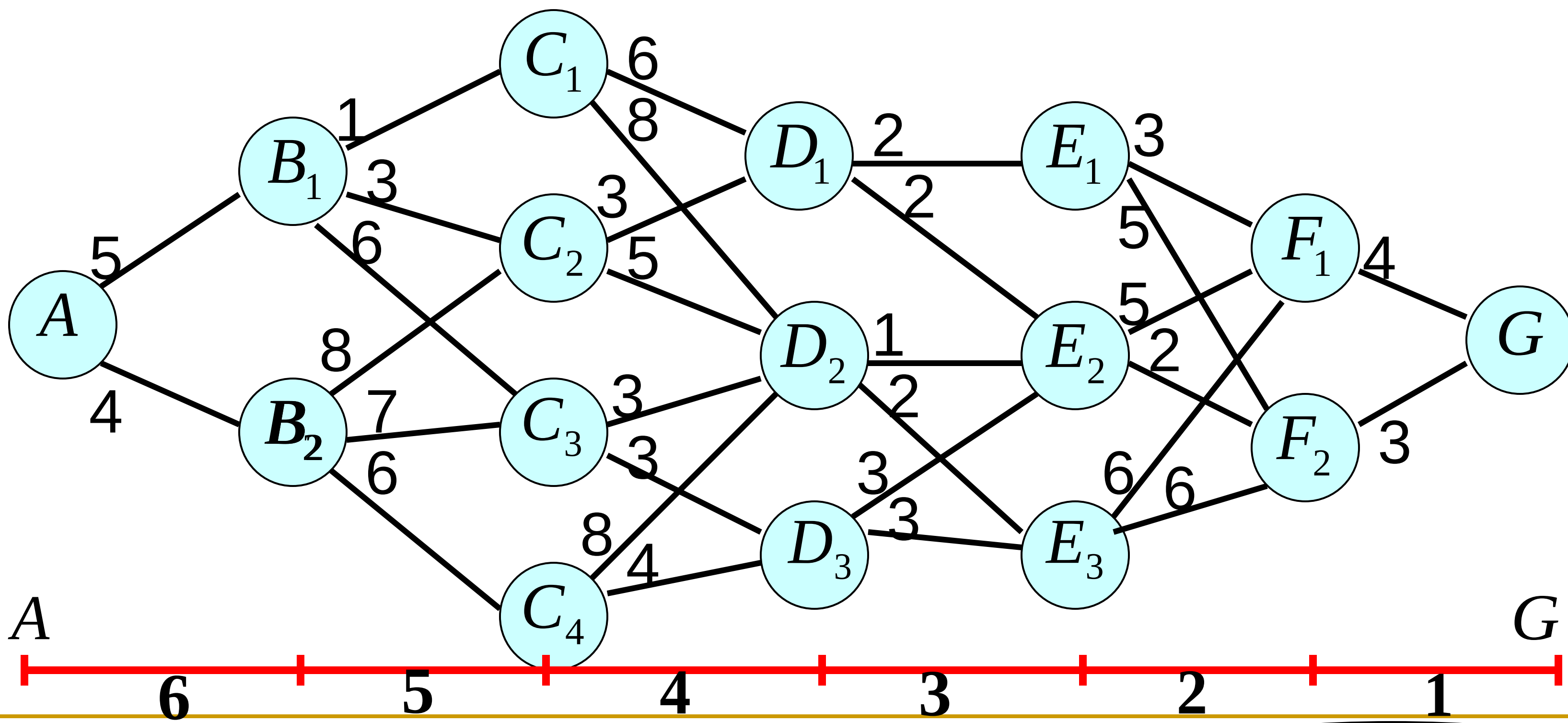
(2) 状态变量S：目前所处的位置；

(3) 决策变量$X_n(S)$：当处于状态S，还有n个阶段到终点G，下一步可选取的地点；

1. 定义符号：

(3) 决策变量$X_n(S)$：当处于状态S，还有n个阶段到终点G，下一步可选取的地点；

例如：$X_5(B_1)=\{C_1,C_2,C_3\}$　　$X_4(C_3)=\{D_2,D_3\}$



1. 定义符号：

(1) 正整数n：由某点到G点的阶段数；

(2) 状态变量S：目前所处的位置；

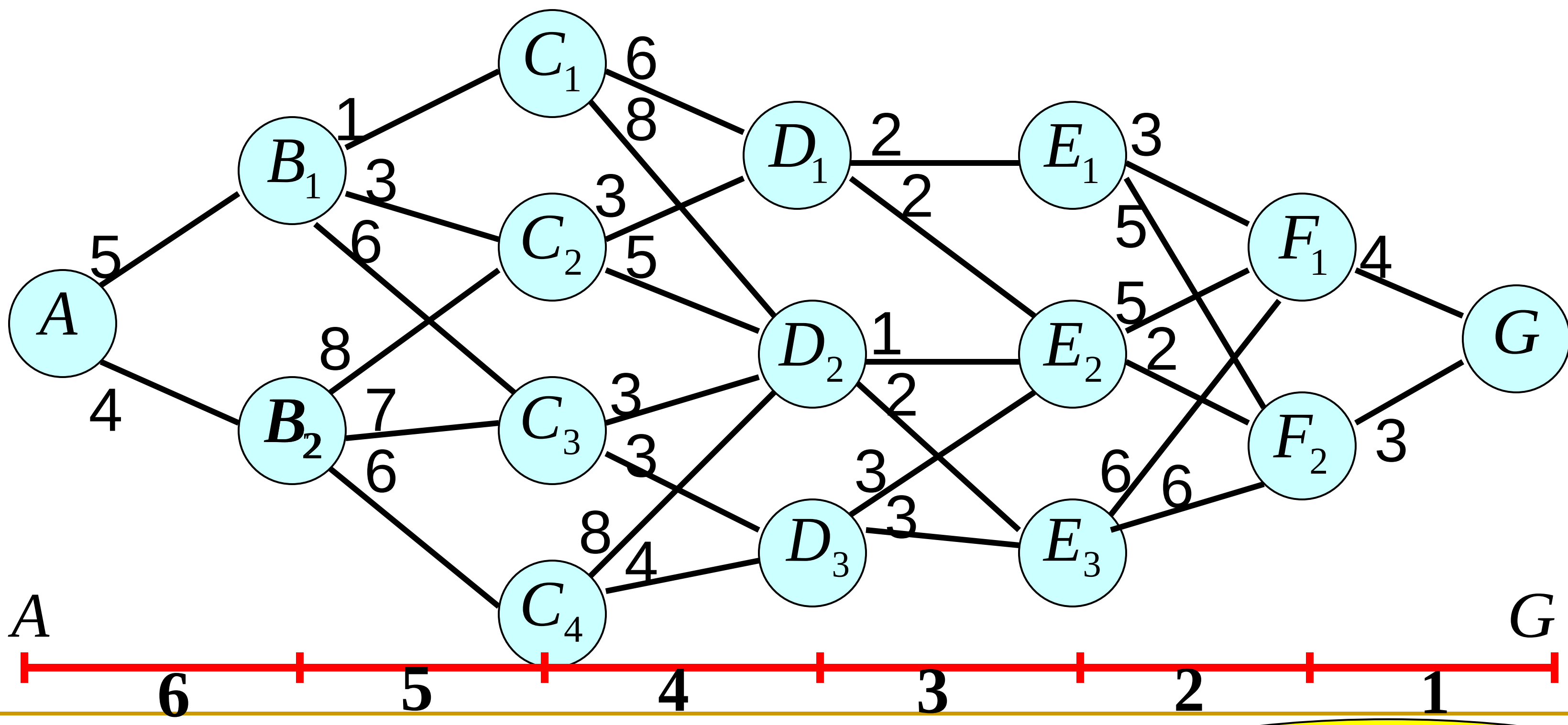
(3) 决策变量$X_n(S)$：当处于状态S, 还有n个阶段到终点G, 下一步可选取的地点；

(4) 最优目标函数值$f_n(S)$：当处于状态S, 还有n个阶段到终点G的最短管道长度；

1. 定义符号：

(4) 最优目标函数值 $f_n(S)$：当处于状态 S, 还有 n 个阶段到终点 G 的最短管道长度；

所求：$f_6(A)$



1. 定义符号：

(1) 正整数n：由某点到G点的阶段数；

(2) 状态变量S：目前所处的位置；

(3) 决策变量$X_n(S)$：当处于状态S，还有n个阶段到终点G，下一步可选取的地点；

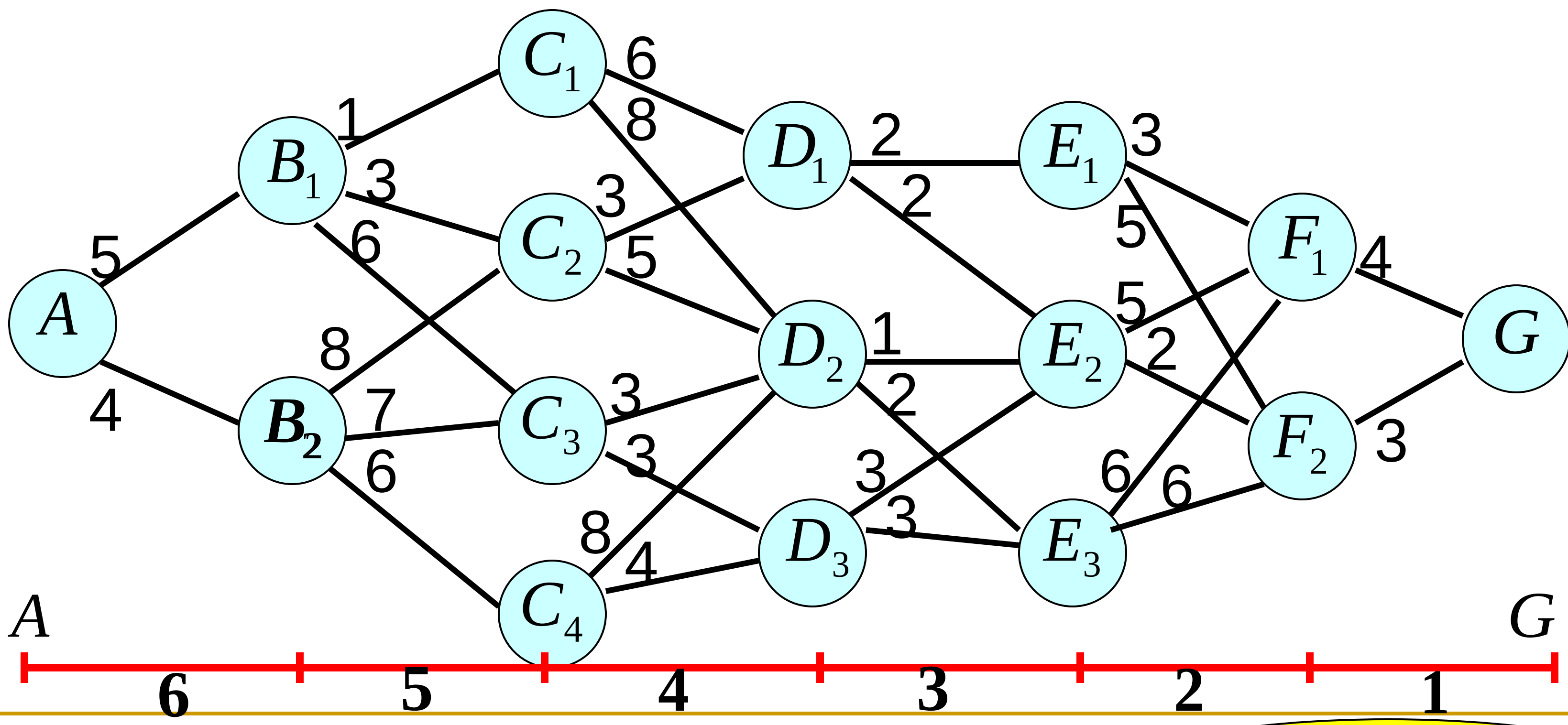
(4) 最优目标函数值$f_n(S)$：当处于状态S，还有n个阶段到终点G的最短管道长度；

(5) $d(S, X_n(S))$：节点S到下一个节点$X_n(S)$的管道长度；

1. 定义符号：

(5) $d(S, X_n(S))$：节点S到下一个节点$X_n(S)$的管道长度；

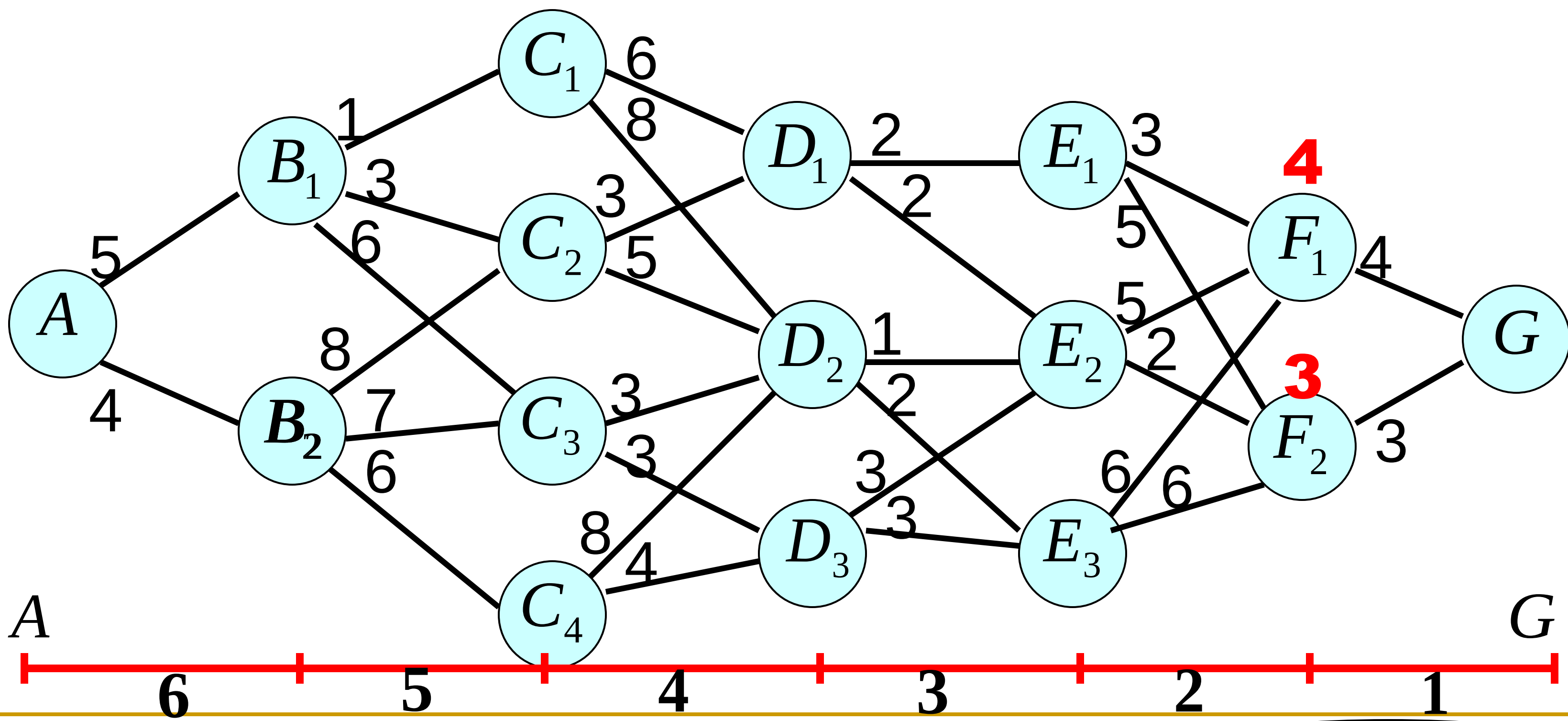
例如：$d(B_1,C_1)=1 \quad d(D_2,E_3)=2$



2. 求解最短路问题：—— 动态规划方法

第一阶段： $f_1(F_1) = 4$

$f_1(F_2) = 3$

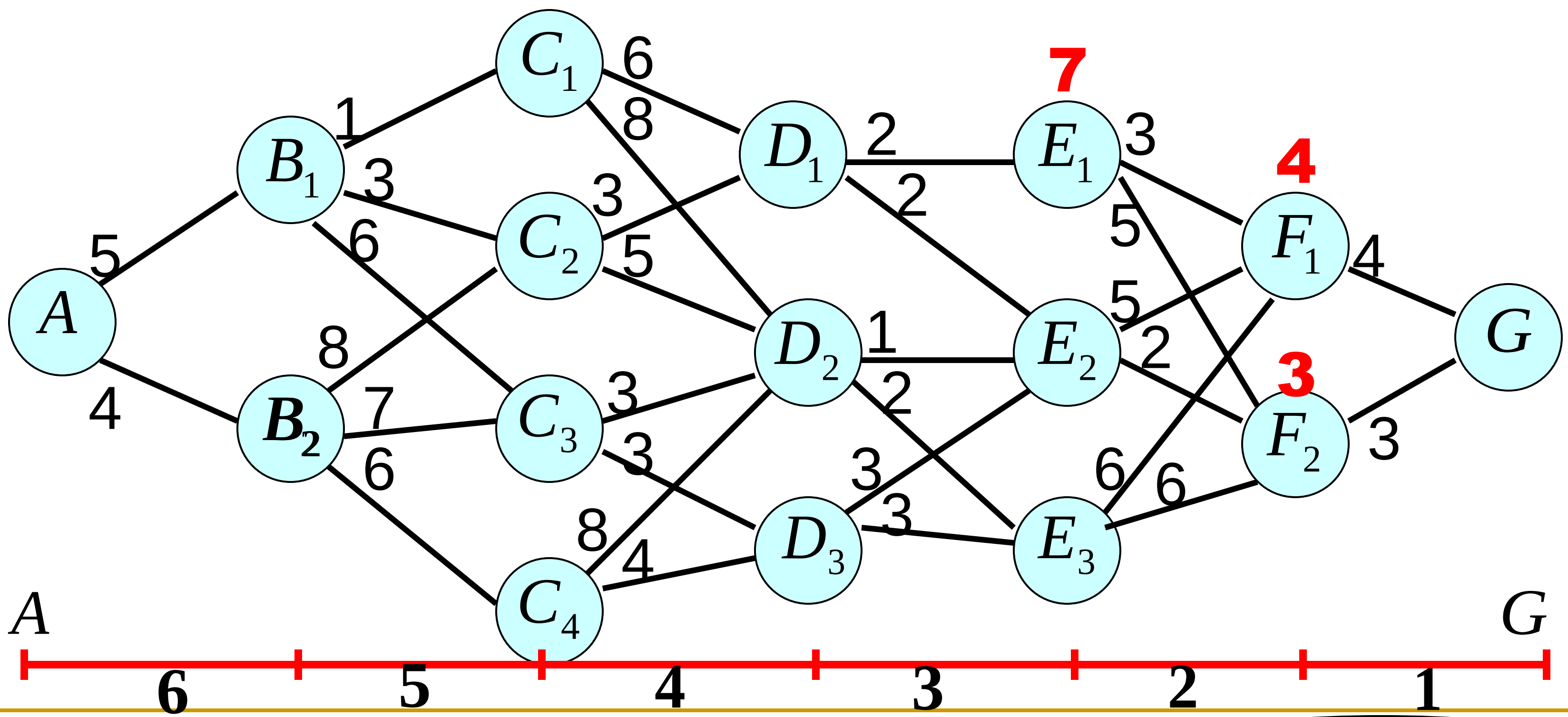


2. 求解最短路问题：

第二阶段：

$$f_2(E_1)=\min\begin{pmatrix} d(E_1,F_1)+f_1(F_1) \\ d(E_1,F_2)+f_1(F_2) \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} 3+4 \\ 5+3 \end{pmatrix}=7$$

最短路径： $E_1 \to F_1 \to G$

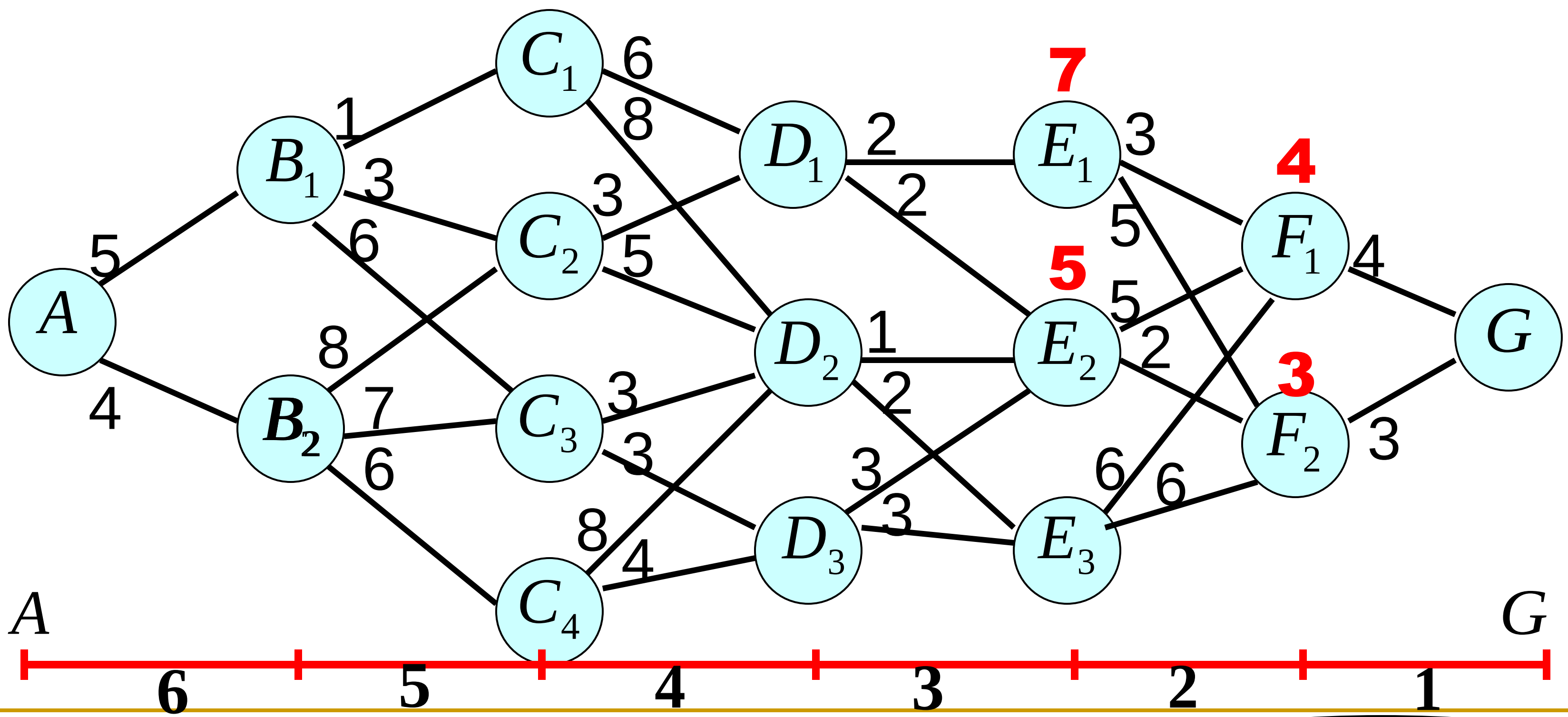


2. 求解最短路问题：

第二阶段：

$$f_2(E_2)=\min\begin{pmatrix} d(E_2,F_1)+f_1(F_1) \\ d(E_2,F_2)+f_1(F_2)\end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix}5+4\\2+3\end{pmatrix}=5$$

最短路径： $E_2 \to F_2 \to G$

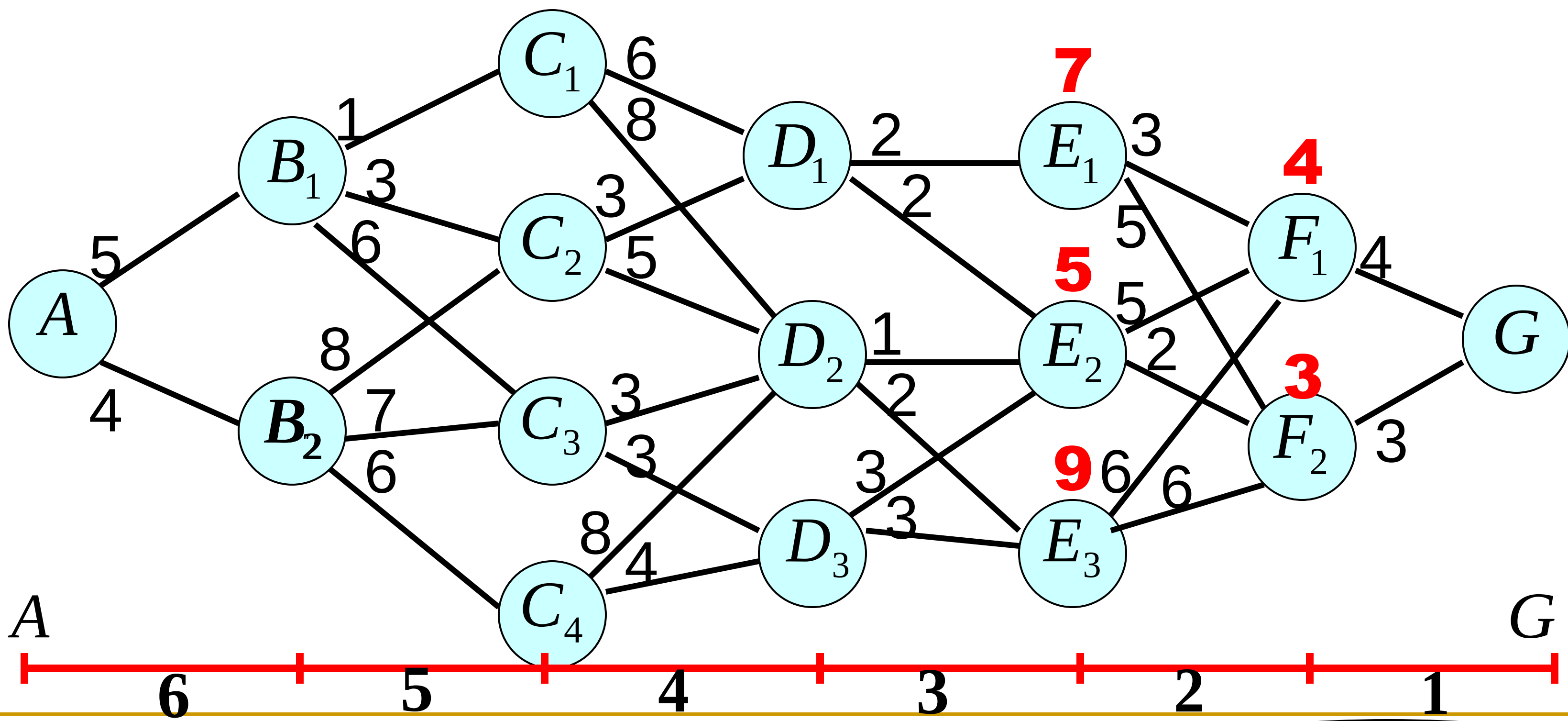


运筹学5-5

2. 求解最短路问题：

第二阶段： $$f_2(E_3) = \min\begin{pmatrix} 6+4 \\ 6+3 \end{pmatrix} = 9$$

最短路径： $E_3 \rightarrow F_2 \rightarrow G$

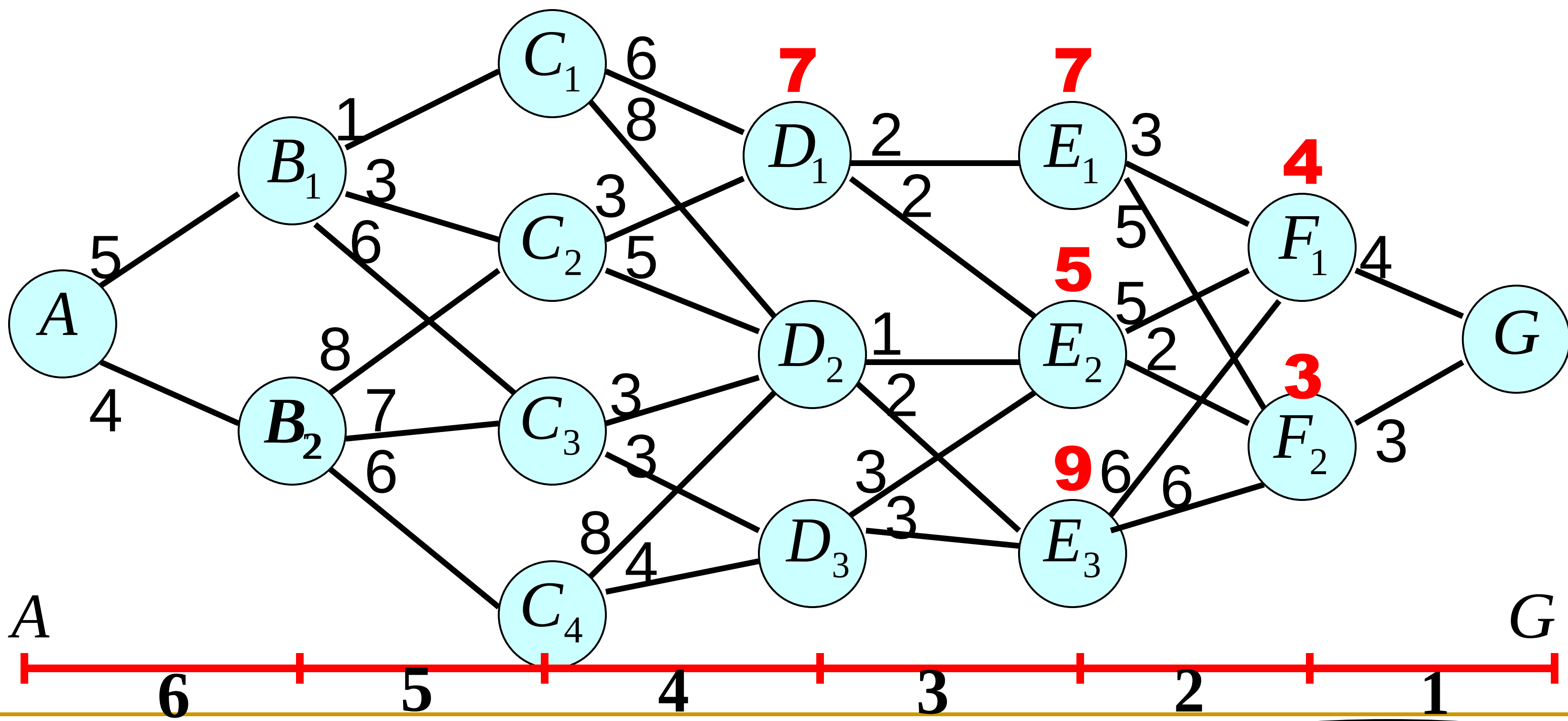


2. 求解最短路问题：

第三阶段：

$$f_3(D_1)=\min\begin{pmatrix} d(D_1,E_1)+f_2(E_1) \\ d(D_1,E_2)+f_2(E_2) \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} 2+7 \\ 2+5 \end{pmatrix}=7$$

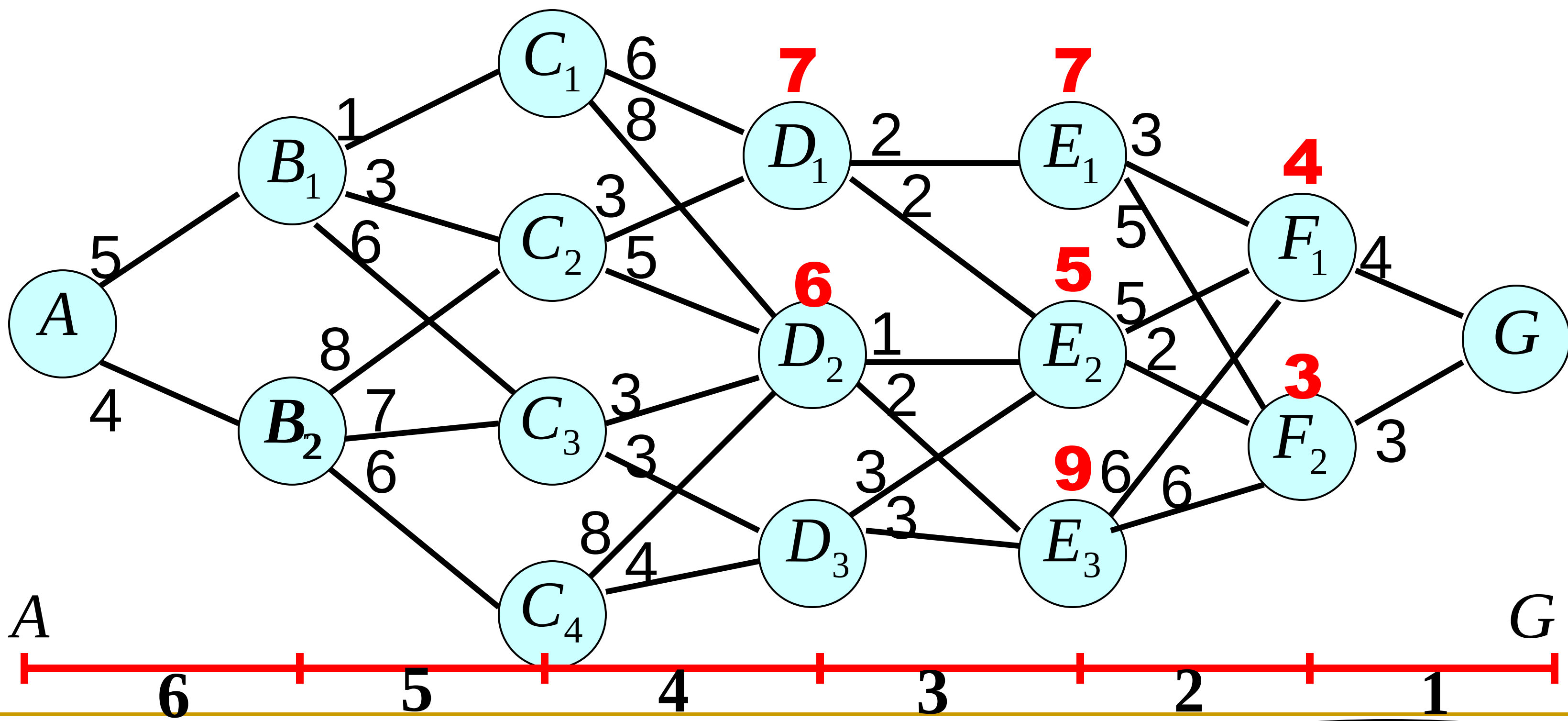
最短路径： $D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$



2. 求解最短路问题：

第三阶段： $f_3(D_2)=\min\begin{pmatrix}1+5\\2+9\end{pmatrix}=6$

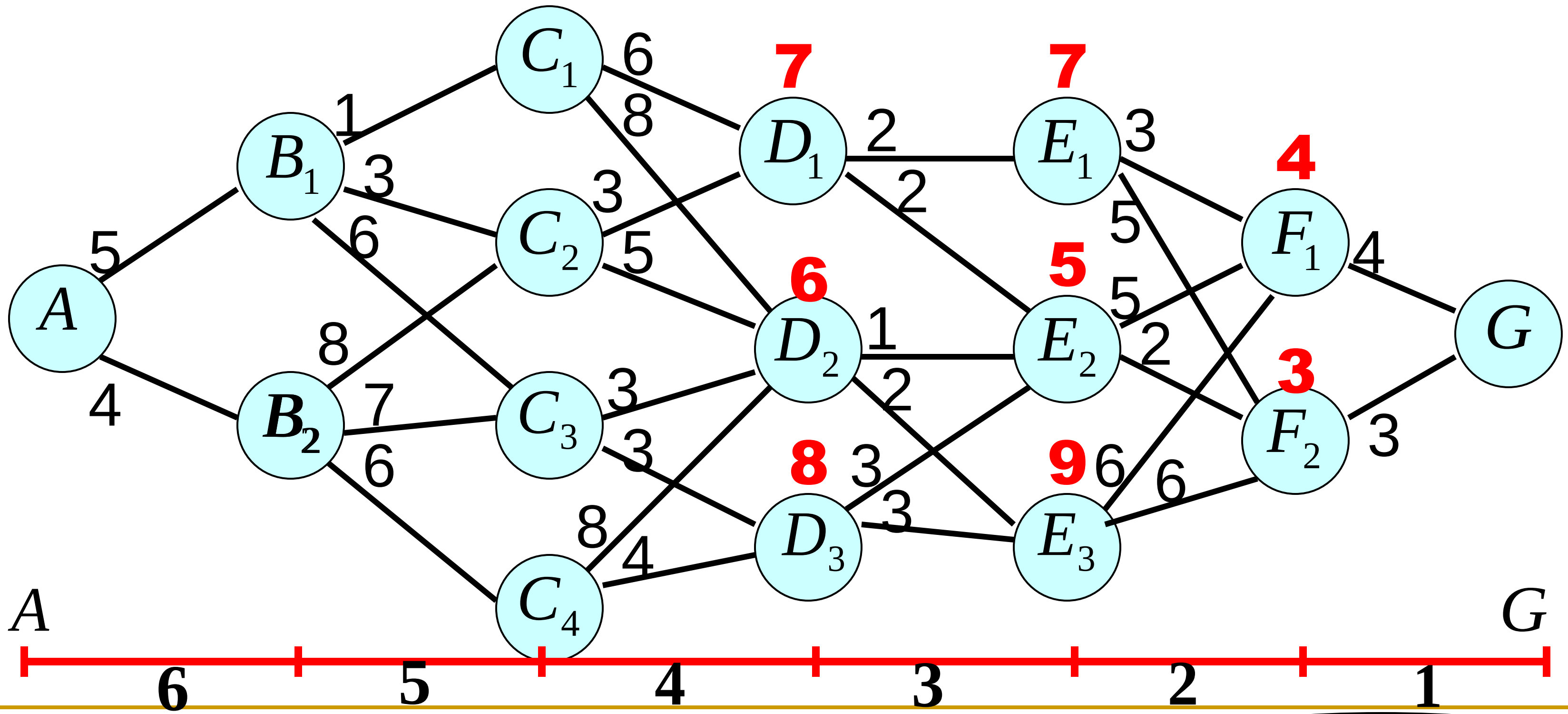
最短路径： $D_2 \to E_2 \to F_2 \to G$



2. 求解最短路问题：

第三阶段： $f_3(D_3) = 8$

最短路径： $D_3 \to E_2 \to F_2 \to G$

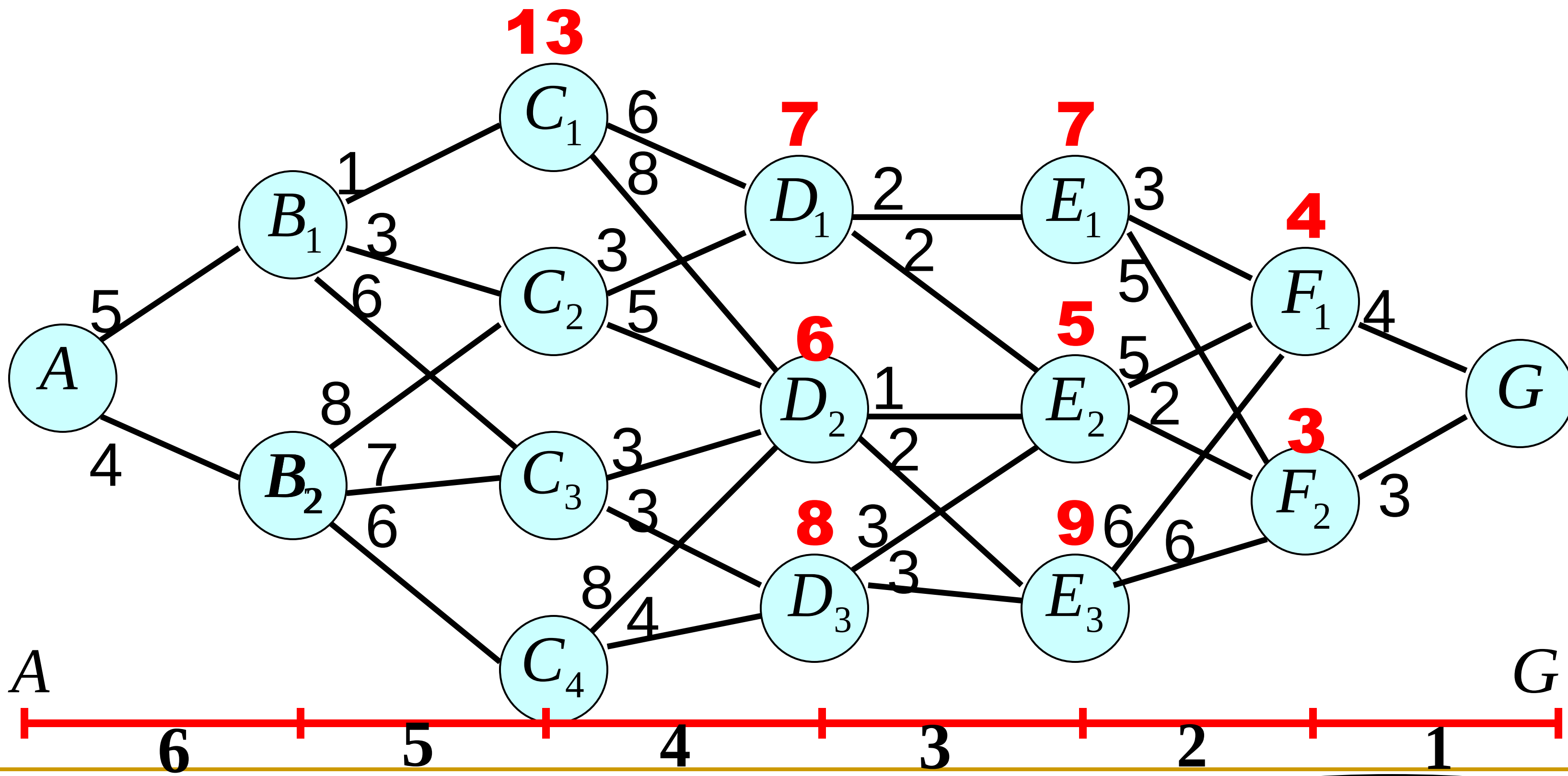


2. 求解最短路问题：

第四阶段：

$$f_4(C_1)=\min\begin{pmatrix} d(C_1,D_1)+f_3(D_1) \\ d(C_1,D_2)+f_3(D_2) \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} 6+7 \\ 8+6 \end{pmatrix}=13$$

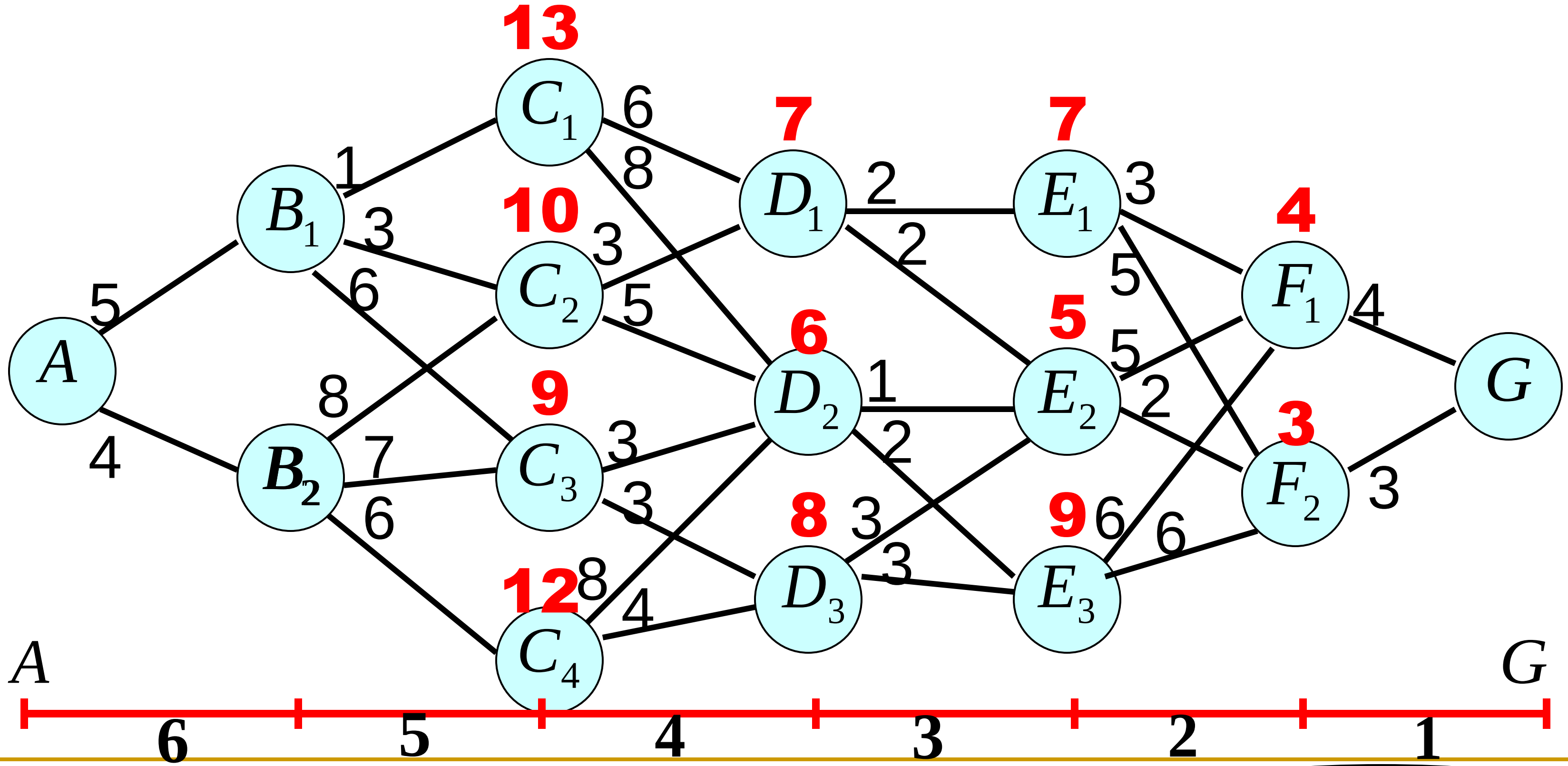
最短路径： $C_1 \to D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$



2. 求解最短路问题：

第四阶段： $f_4(C_2) = 10$

最短路径： $C_2 \to D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$

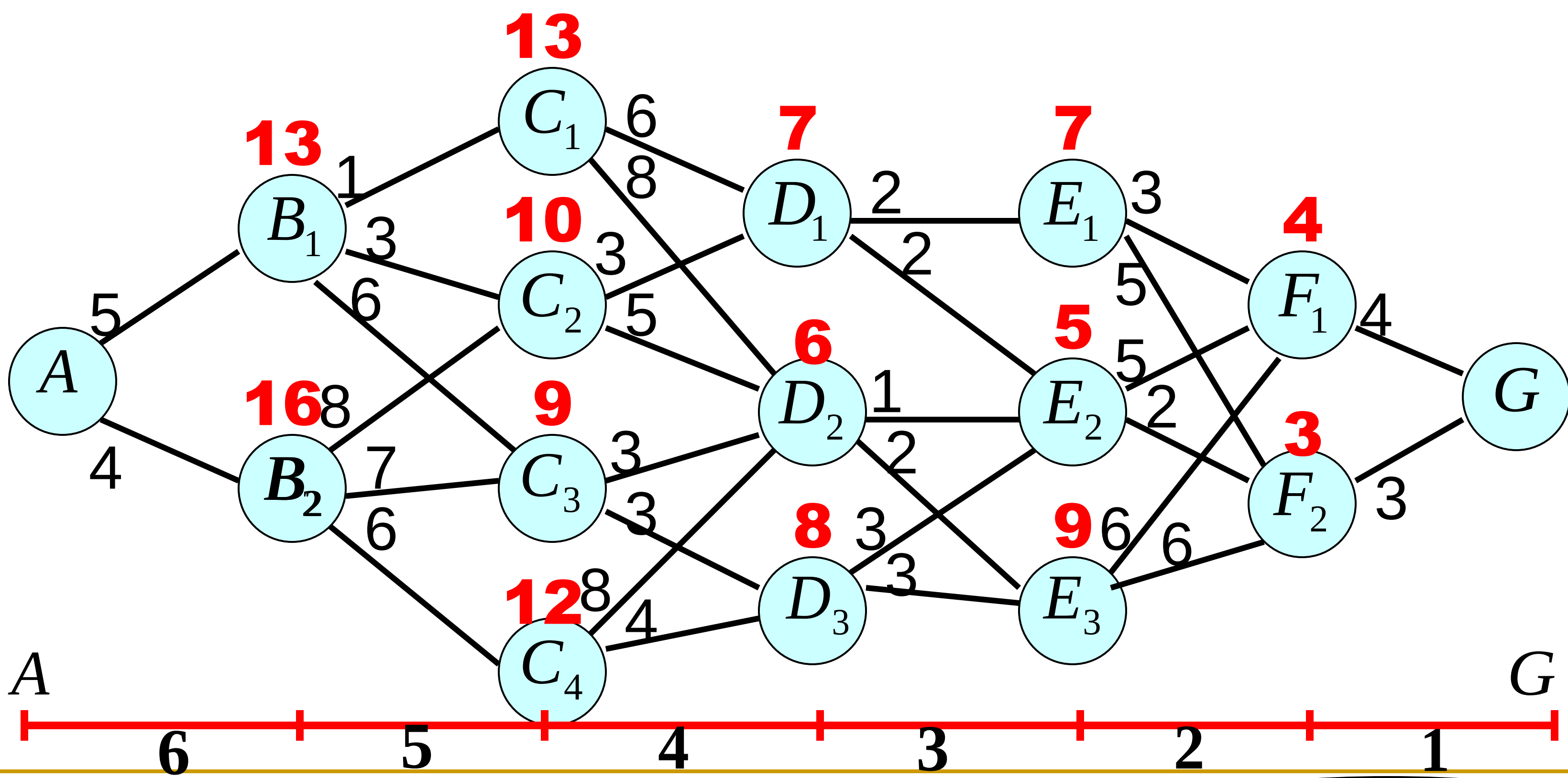


2. 求解最短路问题：

第五阶段：

$$f_5(B_1) = \min\begin{pmatrix} d(B_1,C_1)+f_4(C_1) \\ d(B_1,C_2)+f_4(C_2) \\ d(B_1,C_3)+f_4(C_3) \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} 1+13 \\ 3+10 \\ 6+9 \end{pmatrix} = 13$$

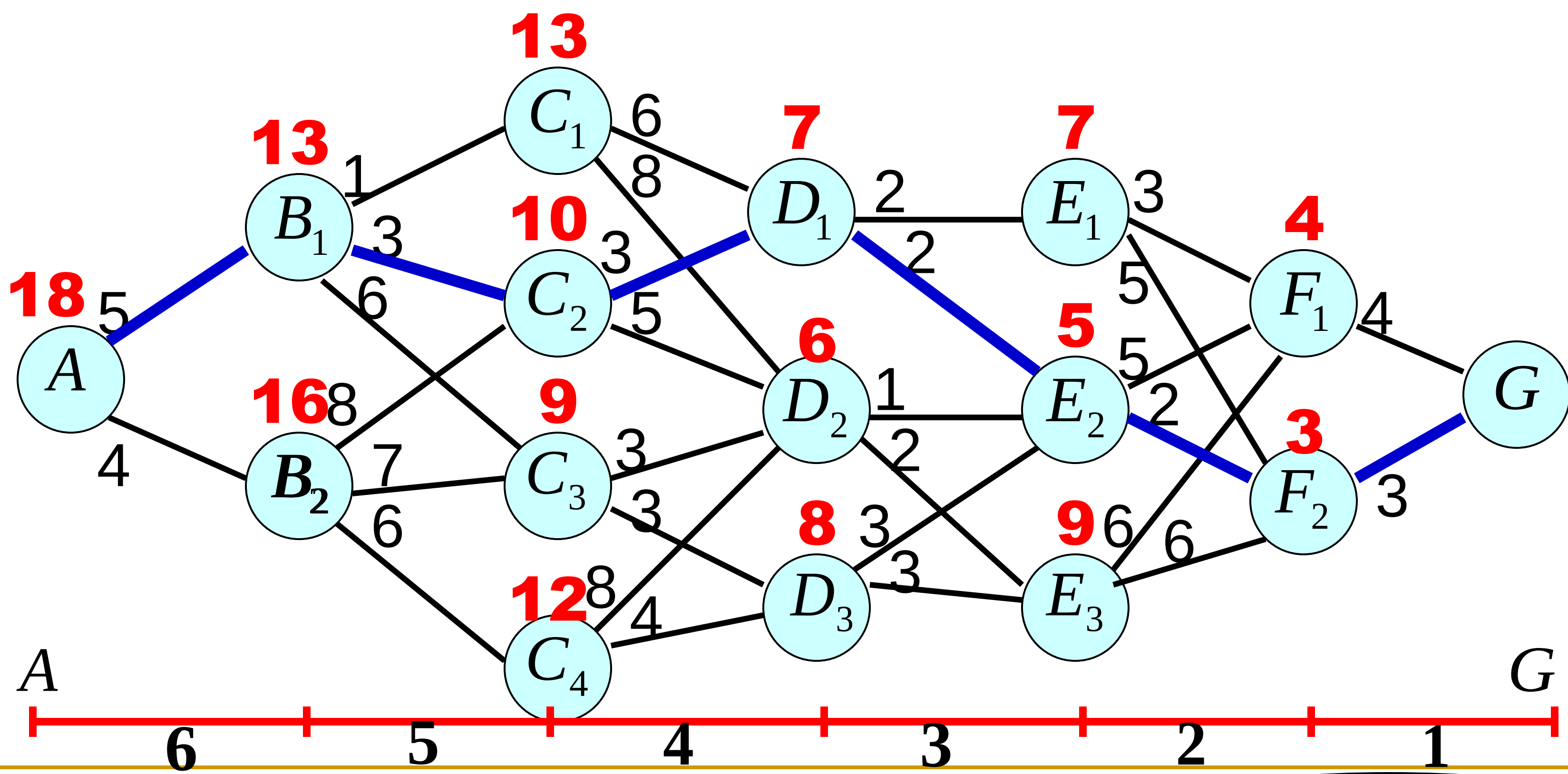
最短路径： $B_1 \to C_2 \to D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$



2. 求解最短路问题：

第六阶段： $f_6(A)=\min\begin{pmatrix} d(A,B_1)+f_5(B_1) \\ d(A,B_2)+f_5(B_2) \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} 5+13 \\ 4+16 \end{pmatrix}=18$

最短路径： $A\to B_1\to C_2\to D_1\to E_2\to F_2\to G$



第五章 动态规划

第五节 动态规划的应用

- 最短路问题
- 投资分配问题
- 背包问题
- 多阶段生产安排问题
- 生产与库存问题

第五节 动态规划的应用

二. 投资分配问题

- 问题的提出
- 建立动态规划基本方程
- 计算举例

二. 投资分配问题

1. 问题的提出

现有数量为a(万元)的资金，计划分配给n个工厂，用于扩大再生产。假设：

x_i = 分配给第i个工厂的资金数(万元)

$g_i(x_i)$ = 第i个工厂得到数量为 x_i (万元)的资金后所提供的利润值(万元)

问题：如何确定各工厂的投资额，使得总的利润达到最大。

二. 投资分配问题

1. 问题的提出

现有数量为a(万元)的资金，计划分配给n个工厂，

x_i = 分配给第i个工厂的资金数(万元)

$g_i(x_i)$ = 第i个工厂得到 x_i(万元)的资金所提供的利润值

问题： 如何确定各工厂的投资额，使得总的利润达到最大。

建立数学模型：

$$\max Z = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_n(x_n)$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(x) =$ 以数量为x(万元)的资金分配给前k个工厂所得到的最大总利润值。

(资金分配以“万元”为单位)

二. 投资分配问题

1. 问题的提出

现有数量为a(万元)的资金，计划分配给n个工厂，用于扩大再生产。假设：

x_i = 分配给第i个工厂的资金数(万元)

$g_i(x_i)$ = 第i个工厂得到数量为 x_i (万元)的资金后所提供的利润值(万元)

问题：如何确定各工厂的资金数，使得总的利润达到最大。

所求： $f_n(a)$

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(x)=$ 以数量为x(万元)的资金分配给前k个工厂所得到的最大总利润值。

(资金分配以“万元”为单位)

分析： 显然：$f_1(x)=g_1(x)$

当 $k\geq 2$ 时，

$$\underbrace{\text{前}k-1\text{个工厂}\qquad\text{第}k\text{个工厂}}_{\text{前}k\text{个工厂}}$$

	前k-1个工厂		第k个工厂
资金x万元	$x-y$		$y\ (y=0,1,2,\cdots x)$
利润(万元)	$f_{k-1}(x-y)$	$+$	$g_k(y)$

$\therefore$ $$f_k(x)=\max_{y=0,1,2,\cdots x}\{g_k(y)+f_{k-1}(x-y)\}\qquad k=2,3,\cdots n$$

$g_i(x_i)=$ 第i个工厂得到数量为 x_i(万元)的资金后所提供的利润值(万元)

3. 计算举例

例2 设国家拨给60(万元)的投资供四个工厂扩建用。每个工厂扩建后的利润与投资额的大小有关，投资后的利润函数如下表：

问题： 如何确定各工厂的投资金额使总利润最大。（投资金额以10万元为单位） 求 $f_4(60)$

	0	10	20	30	40	50	60	
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85	2
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65	4
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115	1
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70	3

例2 第一阶段 求 $f_1(x)$

解法1：$f_1(x) = g_1(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60

例2 第二阶段 求 $f_2(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

$$f_2(60) = \max_{y=0,10,20,\cdots 60}\{g_2(y)+f_1(60-y)\}$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l} \overset{0}{g_2(0)}+\overset{85}{f_1(60)} \\ \overset{20}{g_2(10)}+\overset{85}{f_1(50)} \\ \boxed{\overset{40}{g_2(20)}+\overset{80}{f_1(40)}} \\ \overset{50}{g_2(30)}+\overset{65}{f_1(30)} \\ \overset{55}{g_2(40)}+\overset{50}{f_1(20)} \\ \overset{60}{g_2(50)}+\overset{20}{f_1(10)} \\ \overset{65}{g_2(60)}+\overset{0}{f_1(0)} \end{array}\right\}$$

$$=120 \ (40,20)$$

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$							
最优策略							

$$f_k(x) = \max_{y=0,1,2,\cdots x}\{g_k(y)+f_{k-1}(x-y)\}$$

例2 第二阶段 求 $f_2(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

$$f_2(60) = \max_{y=0,10,20,\cdots 60}\{g_2(y)+f_1(60-y)\}$$

$$= \max\left\{\begin{array}{c} \overset{0}{g_2(0)}+\overset{85}{f_1(60)} \\ \overset{20}{g_2(10)}+\overset{85}{f_1(50)} \\ \boxed{\overset{40}{g_2(20)}+\overset{80}{f_1(40)}} \\ \overset{50}{g_2(30)}+\overset{65}{f_1(30)} \\ \overset{55}{g_2(40)}+\overset{50}{f_1(20)} \\ \overset{60}{g_2(50)}+\overset{20}{f_1(10)} \\ \overset{65}{g_2(60)}+\overset{0}{f_1(0)} \end{array}\right\}$$

$$=120\ (40,20)$$

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$							120
最优策略							40 20

例2 第二阶段 求 $f_2(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

$$f_2(50) = \max_{y=0,10,20,\cdots 50}\{g_2(y)+f_1(50-y)\}$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l} \overset{0}{g_2(0)}+\overset{85}{f_1(50)} \\ \overset{20}{g_2(10)}+\overset{80}{f_1(40)} \\ \boxed{\overset{40}{g_2(20)}+\overset{65}{f_1(30)}} \\ \overset{50}{g_2(30)}+\overset{50}{f_1(20)} \\ \overset{55}{g_2(40)}+\overset{20}{f_1(10)} \\ \overset{60}{g_2(50)}+\overset{0}{f_1(0)} \end{array}\right\}$$

$$=105\ (30,20)$$

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$							120
最优策略							40 20

$$f_k(x) = \max_{y=0,1,2,\cdots x}\{g_k(y)+f_{k-1}(x-y)\}$$

例2 第二阶段 求 $f_2(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

$$f_2(50)$$

$$=\max_{y=0,10,20,\cdots 50}\{g_2(y)+f_1(50-y)\}$$

$$=\max\left\{\begin{array}{l} \overset{0}{g_2(0)}+\overset{85}{f_1(50)} \\ \overset{20}{g_2(10)}+\overset{80}{f_1(40)} \\ \boxed{\overset{40}{g_2(20)}+\overset{65}{f_1(30)}} \\ \overset{50}{g_2(30)}+\overset{50}{f_1(20)} \\ \overset{55}{g_2(40)}+\overset{20}{f_1(10)} \\ \overset{60}{g_2(50)}+\overset{0}{f_1(0)} \end{array}\right\}$$

$$=105\ (30,20)$$

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$						105	120
最优策略						30 20	40 20

例2 第二阶段 求 $f_2(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	0 0	10 0	20 0	20 10	20 20	30 20	40 20

例2 第三阶段 求 $f_3(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

$$f_3(60) = \max_{y=0,10,20,\cdots 60}\{g_3(y)+f_2(60-y)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} \overset{0}{g_3(0)}+\overset{120}{f_2(60)} \\ \overset{25}{g_3(10)}+\overset{105}{f_2(50)} \\ \overset{60}{g_3(20)}+\overset{90}{f_2(40)} \\ \boxed{\overset{85}{g_3(30)}+\overset{70}{f_2(30)}} \\ \overset{100}{g_3(40)}+\overset{50}{f_2(20)} \\ \overset{110}{g_3(50)}+\overset{20}{f_2(10)} \\ \overset{115}{g_3(60)}+\overset{0}{f_2(0)} \end{Bmatrix}$$

$$=155 \ (20,10,30)$$

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	0 0	10 0	20 0	20 10	20 20	30 20	40 20
$f_3(x)$							
最优策略							

$$f_k(x) = \max_{y=0,1,2,\cdots x}\{g_k(y)+f_{k-1}(x-y)\}$$

例2 第三阶段 求 $f_3(x)$

$$f_3(60) = \max_{y=0,10,20,\cdots 60}\{g_3(y)+f_2(60-y)\}$$

$$=\max\left\{\begin{array}{l}
\overset{0}{g_3(0)}+\overset{120}{f_2(60)}\\
\overset{25}{g_3(10)}+\overset{105}{f_2(50)}\\
\overset{60}{g_3(20)}+\overset{90}{f_2(40)}\\
\boxed{\overset{85}{g_3(30)}+\overset{70}{f_2(30)}}\\
\overset{100}{g_3(40)}+\overset{50}{f_2(20)}\\
\overset{110}{g_3(50)}+\overset{20}{f_2(10)}\\
\overset{115}{g_3(60)}+\overset{0}{f_2(0)}
\end{array}\right\}$$

$$=155\ \ (20,10,30)$$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	0 0	10 0	20 0	20 10	20 20	30 20	40 20
$f_3(x)$							155
最优策略							20 10 30

例2 第三阶段 求 $f_3(x)$

$$f_3(50)$$

$$=\max_{y=0,10,20,\cdots 50}\{g_3(y)+f_2(50-y)\}$$

$$=\max\left\{\begin{array}{l} \overset{0}{g_3(0)}+\overset{105}{f_2(50)} \\ \overset{25}{g_3(10)}+\overset{90}{f_2(40)} \\ \overset{60}{g_3(20)}+\overset{70}{f_2(30)} \\ \boxed{\overset{85}{g_3(30)}+\overset{50}{f_2(20)}} \\ \overset{100}{g_3(40)}+\overset{20}{f_2(10)} \\ \overset{110}{g_3(50)}+\overset{0}{f_2(0)} \end{array}\right\}$$

$$=135\ (20,0,30)$$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	0 0	10 0	20 0	20 10	20 20	30 20	40 20
$f_3(x)$							155
最优策略							20 10 30

例2 第三阶段 求 $f_3(x)$

$$f_3(50)$$

$$=\max_{y=0,10,20,\cdots 50}\{g_3(y)+f_2(50-y)\}$$

$$=\max\left\{\begin{array}{l}
\overset{0}{g_3(0)}+\overset{105}{f_2(50)}\\
\overset{25}{g_3(10)}+\overset{90}{f_2(40)}\\
\overset{60}{g_3(20)}+\overset{70}{f_2(30)}\\
\boxed{\overset{85}{g_3(30)}+\overset{50}{f_2(20)}}\\
\overset{100}{g_3(40)}+\overset{30}{f_2(10)}\\
\overset{110}{g_3(50)}+\overset{0}{f_2(0)}
\end{array}\right\}$$

$$=135\ (20,0,30)$$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	0 0	10 0	20 0	20 10	20 20	30 20	40 20
$f_3(x)$						135	155
最优策略						20 0 30	20 10 30

例2 第三阶段 求 $f_3(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	0 0	10 0	20 0	20 10	20 20	30 20	40 20
$f_3(x)$	0	25	60	85	110	135	155
最优策略	0 0 0	0 0 10	0 0 20	0 0 30	20 0 20	20 0 30	20 10 30

例2 第四阶段 求 $f_4(60)$

$$f_4(60) = \max_{y=0,10,20,\cdots 60}\{g_4(y)+f_3(60-y)\}$$

$$=\max\left\{\begin{array}{l}\overset{0}{g_4(0)}+\overset{155}{f_3(60)}\\ \boxed{\overset{25}{g_4(10)}+\overset{135}{f_3(50)}}\\ \overset{40}{g_4(20)}+\overset{110}{f_3(40)}\\ \overset{50}{g_4(30)}+\overset{85}{f_3(30)}\\ \overset{60}{g_4(40)}+\overset{60}{f_3(20)}\\ \overset{65}{g_4(50)}+\overset{25}{f_3(10)}\\ \overset{70}{g_4(60)}+\overset{0}{f_3(0)}\end{array}\right\}$$

$$=160\ (20,0,30,10)$$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	2 0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	4 0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	1 0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	3 0	25	40	50	60	65	70

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	0 0	10 0	20 0	20 10	20 20	30 20	40 20
$f_3(x)$	0	25	60	85	110	135	155
最优策略	0 0 0	0 0 10	0 0 20	0 0 30	20 0 20	20 0 30	20 10 30

$$f_k(x)=\max_{y=0,1,2,\cdots x}\{g_k(y)+f_{k-1}(x-y)\}$$

例2 第一阶段 求 $f_1(x)$

解法2： $f_1(x)=g_1(x)$

第二阶段 求 $f_2(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$g_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

x \ y	$g_2(y)+f_1(x-y)$							$f_2(x)$	最优策略
	0	10	20	30	40	50	60		
0	0 +0							0	(0 , 0)
10	0 +20	20+0						20	(10, 0)
20	0 +50	20+20	40+0					50	(20, 0)
30	0 +65	20+50	40+20	50+0				70	(20,10)
40	0 +80	20+65	40+50	50+20	55+0			90	(20,20)
50	0 +85	20+80	40+65	50+50	55+20	60+0		105	(30,20)
60	0+85	20+85	40+80	50+65	55+50	60+20	65+0	120	(40,20)

$$f_2(x)=\max_{y=0,10,20,\cdots x}\{g_2(y)+f_1(x-y)\}$$

例2 第一阶段 求 $f_1(x)$

解： $f_1(x)=g_1(x)$

第二阶段 求 $f_2(x)$

第三阶段 求 $f_3(x)$

	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

x \ y	$g_3(y)+f_2(x-y)$							$f_3(x)$	最优策略
	0	10	20	30	40	50	60		
0	0 +0							0	(0, 0, 0)
10	0 +20	25+0						25	(0, 0,10)
20	0 +50	25+20	60 +0					60	(0, 0,20)
30	0 +70	25+50	60+20	85 +0				85	(0, 0,30)
40	0 +90	25+70	60+50	85+20	100+0			110	(20, 0,20)
50	0+105	25+90	60+70	85+50	100+20	110 +0		135	(20, 0,30)
60	0+120	25+105	60+90	85+70	100+50	110+20	115 +0	155	(20,10,30)

$$f_3(x)=\max_{y=0,10,20,\cdots x}\{g_3(y)+f_2(x-y)\}$$

例2 第四阶段 求 $f_4(60)$

解:

	0	10	20	30	40	50	60
$f_3(x)$	0	25	60	85	110	135	155
$g_2(x)$	0	20	40	50	55	60	65
$g_3(x)$	0	25	60	85	100	110	115
$g_4(x)$	0	25	40	50	60	65	70

y \ x	$g_4(y)+f_3(x-y)$							$f_4(x)$	最优策略
	0	10	20	30	40	50	60		
0									
10									
20									
30									
40									
50									
60	0+155	$\boxed{25+135}$	40+110	50+85	60+60	65+25	70+0	160	(20, 0,30,10)

$$f_4(60)=\max_{y=0,10,20,\cdots 60}\{g_4(y)+f_3(60-y)\}$$

二. 投资分配问题

4. 评注：

投资分配问题可以推广为一般的资源分配问题，所谓资源可以是材料、设备，也可以是人力、资金、时间等。资源分配问题就是将数量一定的资源合理地分配给若干使用者，而使收益为最大。

例5-8（教材）

某邮电局有4套通讯设备准备分配给甲、乙、丙三个地区，事先调查了各地原有生产活动情况，在此基础上对各种分配方案的经济效益进行了估计，得到了下表的数据。例如甲地区原有生产活动的收益为38万元，当新增加一套通讯设备时总收益为41万元，其他类推。试求这4套设备的分配方案使三地区总收益最大。

	0	1	2	3	4
甲	38	41	48	60	66
乙	40	42	50	60	66
丙	48	64	68	78	76

第五章 动态规划

第五节 动态规划的应用

- 最短路问题
- 投资分配问题
- 背包问题
- 多阶段生产安排问题
- 生产与库存问题

第五节 动态规划的应用

三(1). 一维背包问题

- 问题的提出
- 建立动态规划基本方程
- 计算举例

1. 问题的提出

有一个徒步旅行者，有n种物品供他选择装入背包中。已知每种物品的重量及使用价值(物品对旅行者来说所带来好处的数量指标)由下表给出：

又知这位旅行者所能承受的重量不能超过a公斤，

问题： 他应如何选择这n种物品的件数，使得使用价值最大？

	x_1	x_2		x_k		x_n
物品	1	2	…	k	…	n
重量(公斤/件)	a_1	a_2	…	a_k	…	a_n
每件使用价值	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n

1. 问题的提出

	x_1	x_2		x_k		x_n
物品	1	2	…	k	…	n
重量(公斤/件)	a_1	a_2	…	a_k	…	a_n
每件使用价值	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n

问题： 他应如何选择这n种物品的件数，使得使用价值最大？

建立数学模型：

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t. \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le a$$

$$x_i \ge 0, \quad \text{且为整数}, \; i = 1, 2, \cdots n$$

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(y)=$ 总重量不超过y公斤,背包中只装前k种物品时的最大使用价值。

1. 问题的提出

有一个徒步旅行者, 有n种物品供他选择装入背包中。已知每种物品的重量及使用价值(物品对旅行者来说所带来好处的数量指标)由下表给出：

又知这位旅行者所能承受的重量不能超过a公斤，

问题：他应如何选择这n种物品的件数，使得使用价值最大？

所求：$f_n(a)$

	x_1	x_2		x_k		x_n
物品	1	2	…	k	…	n
重量(公斤/件)	a_1	a_2	…	a_k	…	a_n
每件使用价值	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(y)=$ 总重量不超过y公斤,背包中只装前k种物品时的最大使用价值。

分析:

$$\overbrace{\text{前}k\text{-1种物品} \qquad \text{第}k\text{种物品}}^{\text{前}k\text{种物品}} \quad 0 \le a_k x_k \le y$$

重量 $\le y$ 公斤 $\quad \le y - a_k x_k \qquad a_k x_k \ (x_k = 0,1,2,\cdots \left[\frac{y}{a_k}\right])$

使用价值 $\quad f_{k-1}(y - a_k x_k) + c_k x_k$

$$\therefore \ \boxed{f_k(y) = \max_{x_k = 0,1,2,\cdots\left[\frac{y}{a_k}\right]} \{c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)\}} \quad k = 2,3,\cdots n$$

当$k=1$时, $\boxed{f_1(y) = c_1 x_1 = c_1\left[\frac{y}{a_1}\right], \quad x_1 = \left[\frac{y}{a_1}\right]}$

3. 计算举例

例3

物品	1	2	3
重量(公斤/件)	3	2	5
每件使用价值	8	5	12

$a = 5$公斤

求：$f_3(5)$

解：$$f_k(y) = \max_{0 \le x_k \le \left[\frac{y}{a_k}\right]} \{c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k$$

$$f_2(5) =$$

$$f_2(0) =$$

$$f_3(5) = \max_{0 \le x_3 \le \left[\frac{5}{a_3}\right]} \{c_3 x_3 + f_2(5 - a_3 x_3)\}$$

$$= \max_{0 \le x_3 \le \left[\frac{5}{5}\right]} \{12 x_3 + f_2(5 - 5x_3)\}$$

$\rightarrow x_3 = 0, 1$

$$= \max\{0 + f_2(5), \quad 12 + f_2(0)\}$$

$x_3 = 0$ $\quad$ $x_3 = 1$

3. 计算举例

重量(公斤
每件使用

$$f_1(5) =$$

$$f_1(3) =$$

$$f_1(1) =$$

例3

解：

$$f_k(y) = \max_{0 \le x_k \le \left[\frac{y}{a_k}\right]} \{c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k$$

$$f_2(5) = \max_{0 \le x_2 \le \left[\frac{5}{a_2}\right]} \{c_2 x_2 + f_1(5 - a_2 x_2)\}$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le \left[\frac{5}{2}\right]} \{5x_2 + f_1(5 - 2x_2)\} \rightarrow x_2 = 0, 1, 2$$

$$= \max\{\underset{x_2=0}{0 + f_1(5)},\quad \underset{x_2=1}{5 + f_1(3)},\quad \underset{x_2=2}{10 + f_1(1)}\}$$

$$f_2(5) =$$

$$f_2(0) =$$

3. 计算举例

物品	1	2	3
重量(公斤/件)	3	2	5
每件使用价值	8	5	12

例3

解:

$$f_k(y)=\max_{0\le x_k\le\left[\frac{y}{a_k}\right]}\{c_k x_k + f_{k-1}(y-a_k x_k)\}$$

$$f_2(0)=\max_{0\le x_2\le\left[\frac{0}{a_2}\right]}\{c_2x_2+f_1(0-a_2x_2)\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le\left[\frac{0}{2}\right]}\{5x_2+f_1(0-2x_2)\}\rightarrow x_2=0$$

$$=\max\{0+f_1(0)\}$$

$$x_2=0$$

$$=f_1(0)$$

$$x_2=0$$

$f_1(5)=$

$f_1(3)=$

$f_1(1)=$

$f_1(0)=$

$f_2(5)=$

$f_2(0)=$

3. 计算举例

物品	1	2	3
重量(公斤/件)	3	2	5
每件使用价值	8	5	12

$$f_1(5)=8,\quad x_1=1$$
$$f_1(3)=8,\quad x_1=1$$
$$f_1(1)=0,\quad x_1=0$$
$$f_1(0)=0,\quad x_1=0$$

例3

解:

$$f_1(y)=c_1x_1=c_1\left[\frac{y}{a_1}\right],\qquad x_1=\left[\frac{y}{a_1}\right]$$

$$f_1(5)=c_1\left[\frac{5}{a_1}\right]=8\left[\frac{5}{3}\right]=8\qquad x_1=1$$

$$f_1(3)=c_1\left[\frac{3}{a_1}\right]=8\left[\frac{3}{3}\right]=8\qquad x_1=1$$

$$f_1(1)=c_1\left[\frac{1}{a_1}\right]=8\left[\frac{1}{3}\right]=0\qquad x_1=0$$

$$f_1(0)=c_1\left[\frac{0}{a_1}\right]=8\left[\frac{0}{3}\right]=0\qquad x_1=0$$

3. 计算举例

例3

物品	1	2	3
重量(公斤/件)	3	2	5
每件使用价值	8	5	12

解：

$$f_k(y)=\max_{0\le x_k\le\left[\frac{y}{a_k}\right]}\{c_k x_k+f_{k-1}(y-a_k x_k)\}$$

$$f_1(5)=8,\quad x_1=1$$
$$f_1(3)=8,\quad x_1=1$$
$$f_1(1)=0,\quad x_1=0$$
$$f_1(0)=0,\quad x_1=0$$

$$f_2(5)=\max_{0\le x_2\le\left[\frac{5}{a_2}\right]}\{c_2x_2+f_1(5-a_2x_2)\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le\left[\frac{5}{2}\right]}\{5x_2+f_1(5-2x_2)\}\quad\to x_2=0,1,2$$

$$=\max\{0+\overset{8}{f_1(5)},\ 5+\overset{8}{f_1(3)},\ 10+\overset{0}{f_1(1)}\}=13,$$

$x_2=0$, $x_1=1$; $x_2=1$, $x_1=1$; $x_2=2$, $x_1=0$; $x_2=1$, $x_1=1$

$$f_2(5)=13,\quad x_1=1,\ x_2=1$$

3. 计算举例

例3

物品	1	2	3
重量(公斤/件)	3	2	5
每件使用价值	8	5	12

解:

$$f_k(y) = \max_{0 \le x_k \le \left[\frac{y}{a_k}\right]} \{c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k)\}$$

$f_1(5) = 8,\quad x_1 = 1$

$f_1(3) = 8,\quad x_1 = 1$

$f_1(1) = 0,\quad x_1 = 0$

$f_1(0) = 0,\quad x_1 = 0$

$$f_2(0) = \max_{0 \le x_2 \le \left[\frac{0}{a_2}\right]} \{c_2 x_2 + f_1(0 - a_2 x_2)\}$$

$$= \max_{0 \le x_2 \le \left[\frac{0}{2}\right]} \{5x_2 + f_1(0 - 2x_2)\} \rightarrow x_2 = 0$$

$$= \max\{0 + f_1(0)\} = f_1(0)$$

$x_2 = 0$

$$= f_1(0) = 0$$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 0$

$f_2(5) = 13,\quad x_1 = 1$
$\qquad x_2 = 1$

$f_2(0) = 0,\quad x_1 = 0$
$\qquad x_2 = 0$

3. 计算举例

例3

物品	1	2	3
重量(公斤/件)	3	2	5
每件使用价值	8	5	12

$a=5$公斤

求：$f_3(5)$

解： $f_k(y)=\max\limits_{0\le x_k\le\left[\frac{y}{a_k}\right]}\{c_k x_k+f_{k-1}(y-a_k$

$f_2(5)=13,\ x_1=1,\ x_2=1$

$f_2(0)=0,\ x_1=0,\ x_2=0$

$$f_3(5)=\max_{0\le x_3\le\left[\frac{5}{a_3}\right]}\{c_3x_3+f_2(5-a_3x_3)\}$$

$$=\max_{0\le x_3\le\left[\frac{5}{5}\right]}\{12x_3+f_2(5-5x_3)\} \rightarrow x_3=0,1$$

$$=\max\{0+\overset{13}{f_2(5)},\quad 12+\overset{0}{f_2(0)}\}=13$$

$x_3=0,\ x_2=1,\ x_1=1$; $x_3=1,\ x_2=0,\ x_1=0$

$x_3=0,\ x_2=1,\ x_1=1$

三(1). 一维背包问题

4. 评注：

背包问题是一种数学模型，在实际问题中有着广泛的应用。背包问题实际上是运输问题中车、船、飞机、潜艇、人造卫星等运输工具的最优配载问题。还可以用于解决机床加工中零件最优加工问题、下料问题、投资决策问题等等，因此，有着广泛的实际意义。

练习

有一艘可装三种货物的货船，每种货物一件的重量及价值如下表所示：

货物	1	2	3
重量(吨/件)	4	12	8
使用价值(元)	30	80	65

已知该船的载重量不超过20吨，问对货船如何装载，使得价值最大?

$a = 20$吨　求：$f_3(20)$

第五节 动态规划的应用

三(2). 二维背包问题

- 问题的提出
- 建立动态规划基本方程
- 计算举例

1. 问题的提出

在背包问题中，除受质量条件限制外，还可以受背包体积等条件的限制。若增加背包体积限制为b，并设第i种物品每件的体积为b_i立方米，

问题：他应如何选择这n种物品的件数，使得使用价值最大？

重量不能超过a公斤，体积不能超过b立方米。

	x_1	x_2		x_k		x_n
物品	1	2	…	k	…	n
重量(公斤/件)	a_1	a_2	…	a_k	…	a_n
体积(立方米/件)	b_1	b_2	…	b_k	…	b_n
每件使用价值	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n

1. 问题的提出

	x_1	x_2		x_k		x_n
物品	1	2	…	k	…	n
重量(公斤/件)	a_1	a_2	…	a_k	…	a_n
体积(立方米/件)	b_1	b_2	…	b_k	…	b_n
每件使用价值	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n

建立数学模型：

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$s.t. \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \le a$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n \le b$$

$$x_i \ge 0, \quad \text{且为整数，} \; i = 1, 2, \cdots n$$

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(W,V)$=总重量不超过W公斤,总体积不超过V立方米，背包中只装前k种物品时的最大使用价值。

1. 问题的提出

在背包问题中，除受质量条件限制外，还可以受背包体积等条件的限制。若增加背包体积限制为b，并设第i种物品每件的体积为b_i立方米，

问题： 他应如何选择这n种物品的件数，使得使用价值最大？

求： $f_n(a,b)$

重量不能超过a公斤，体积不能超过b立方米。

	x_1	x_2		x_k		x_n
物品	1	2	…	k	…	n
重量(公斤/件)	a_1	a_2	…	a_k	…	a_n
体积(立方米/件)	b_1	b_2	…	b_k	…	b_n
每件使用价值	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(W,V)$=总重量不超过W公斤,总体积不超过V，背包中只装前k种物品时的最

$$x_k \le \min\{\left\lfloor \frac{W}{a_k} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{V}{b_k} \right\rfloor\}$$

分析:

前k种物品

前k-1种物品　　第k种物品

$$0 \le b_k x_k \le V$$

$$0 \le a_k x_k \le W$$

重量 $\le W$ 公斤	$\le W - a_k x_k$	$a_k x_k$
体积 $\le V$ 立方米	$\le V - b_k x_k$	$b_k x_k$
使用价值	$f_{k-1}(W - a_k x_k, V - b_k x_k)$	$+ c_k x_k$

$$\therefore\ f_k(W,V) = \max_{0 \le x_k \le \min\{\left\lfloor \frac{W}{a_k} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{V}{b_k} \right\rfloor\}} \{c_k x_k + f_{k-1}(W - a_k x_k, V - b_k x_k)\} \quad k = 2,3,\cdots n$$

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(W,V)$=总重量不超过W公斤,总体积不超过V，背包中只装前k种物品时的最大使用价值。

$$f_k(W,V)=\max_{0\le x_k\le\min\{\left[\frac{W}{a_k}\right],\left[\frac{V}{b_k}\right]\}}\{c_k x_k+f_{k-1}(W-a_k x_k, V-b_k x_k)\}\quad k=2,3,\cdots n$$

当$k=1$时，$f_1(W,V)=c_1x_1$，$x_1=\min\{\left[\frac{W}{a_1}\right],\left[\frac{V}{b_1}\right]\}$

$$0\le a_1x_1\le W$$

$$0\le b_1x_1\le V$$

$$x_1\le\min\{\left[\frac{W}{a_1}\right],\left[\frac{V}{b_1}\right]\}$$

3. 计算举例

例4 有一辆最大运货量为12吨，最大容量为10立方米的卡车，装载两种货物*A*和*B*。求*A*,*B*各装多少件卡车的价值最大？

$$f_1(12,10)=$$

$$f_1(8,5)=$$

$$f_1(4,0)=$$

解： 求：$f_2(12,10)$ 设货物*A*、*B*的装载件数为 x_1, x_2

$$f_2(12,10)=\max_{0\le x_2\le\min\{[12/a_2],[10/b_2]\}}\{c_2x_2+f_1(12-a_2x_2,10-b_2x_2)\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le\min\{[12/4],[10/5]\}=2}\{3x_2+f_1(12-4x_2,10-5x_2)\}$$

$0\le x_2\le\min\{[12/4],[10/5]\}=2\rightarrow x_2=0,1,2$

$$=\max\{\underbrace{0+f_1(12,10)}_{x_2=0},\ \underbrace{3+f_1(8,5)}_{x_2=1},\ \underbrace{6+f_1(4,0)}_{x_2=2}\}$$

$$f_k(W,V)=\max_{0\le x_k\le\min\{\left[\frac{W}{a_k}\right],\left[\frac{V}{b_k}\right]\}}\{c_kx_k+f_{k-1}(W-a_kx_k,V-b_kx_k)\}$$

3. 计算举例

例3

货物	A	B
重量(吨/件)	3	4
体积(立方米/件)	1	5
每件使用价值	2	3

$f_1(12,10)=8 \quad x_1=4$

$f_1(8,5)=4 \quad x_1=2$

$f_1(4,0)=0 \quad x_1=0$

解：

$$f_1(12,10)=2x_1,\ x_1=\min\{[12/3],[10/1]\}=4$$
$$=2\times 4=8$$

$$f_1(8,5)=2x_1,\ x_1=\min\{[8/3],[5/1]\}=2$$
$$=2\times 2=4$$

$$f_1(4,0)=2x_1,\ x_1=\min\{[4/3],[0/1]\}=0$$
$$=2\times 0=0$$

$$f_1(W,V)=c_1x_1,\ x_1=\min\{[W/a_1],[V/b_1]\}$$

3. 计算举

例4 有一 ... 最大容量 ... 装载两种

货物	A	B	限制
重量(吨/件)	3	4	12
体积(立方米/件)	1	5	10
每件使用价值	2	3	

$f_1(12,10)=8 \quad x_1=4$

$f_1(8,5)=4 \quad x_1=2$

$f_1(4,0)=0 \quad x_1=0$

求：$f_2(12,10)$

最优方案：A货物装4件，B货物不装，最大价值为8 。

解：

$$f_2(12,10)=\max_{0\le x_2\le \min\{[12/a_2],[10/b_2]\}}\{c_2x_2+f_1(12-a_2x_2,10-b_2x_2)\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le \min\{[12/4],[10/5]\}=2}\{3x_2+f_1(12-4x_2,10-5x_2)\}$$

$\rightarrow x_2=0,1,2$

$$=\max\{0+\overset{8}{f_1(12,10)},\ 3+\overset{4}{f_1(8,5)},\ 6+\overset{0}{f_1(4,0)}\}$$

$x_2=0$, $x_1=4$ $\qquad$ $x_2=1$, $x_1=2$ $\qquad$ $x_2=2$, $x_1=0$

$=8$

三(2). 二维背包问题

4. 评注：

凡具有正系数不等式约束的整数线性规划问题都可以用动态规划方法求解。若有m个约束条件，则认为是m维背包问题。

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le a \\ & b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \le b \\ & x_i \ge 0, \quad \text{且为整数，} i = 1, 2, \cdots n \end{aligned}$$

第五章 动态规划

第五节 动态规划的应用

- 最短路问题
- 投资分配问题
- 背包问题
- 多阶段生产安排问题
- 生产与库存问题

作业：P349 1,2,5

P351 9

作业：P282 1,2,5

P284 9