7.5 分段多项式插值

Piecewise-polynomial Interpolation

引言

我们已经知道插值有多种方法：**Lagrange** 插值、 **Newton**插值、**Hermit** 插值等多种方式。插值就是数值逼近的一种手段，而数值逼近，是为得到一个数学问题的精确解或足够精确的解。那么，是否插值多项式的次数越高，越能够达到这个目的呢？现在，我们来讨论这个问题。

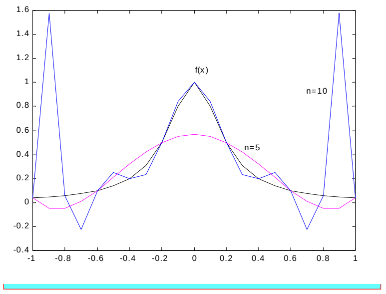
我们已经知道：$f(x)$在n+1个节点x_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$ 上的n次插值多项式$P_n(x)$ 的余项

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

设想当节点数增多时会出现什么情况。由插值余项可知，当$f(x)$充分光滑时，余项随n增大而趋于0的，这说明可用增加节点的方法达到这个目的，那么实际是这样吗？

1901年龙格(Runge) 给出一个例子:

$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$ 定义在区间[-1，1]上，这是一个光滑函数，它的任意阶导数都存在，对它在[-1，1]上作等距节点插值时，插值多项式情况，见图:



从图中，可见，在靠近-1或1时，余项会随n值增大而增大，如

$P_5(0.96)=-0.0693$

$P_{10}(0.96)=1.80438$

但$f(0.96)=0.0416$

从图中，还可看见，在x=0附近插值效果是好的，即余项较小，另一种现象是插值多项式随节点增多而振动更多。

这种插值多项式当节点增加时反而不能更好地接近被插之数的现象，称为龙格现象。

上述现象告诉我们用高次插值多项式是不妥当的，从数值计算上可解释为高次插值多项式的计算会带来舍入误差的增大，从而引起计算失真。因此，实践上作插值时一般只用一次、二次最多用三次插值多项式。

那么如何提高插值精度呢？采用分段插值是一种办法。

---

1)分段m次插值多项式

定义1

设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数，在节点

$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$,

的函数值为$y_0, y_1, y_2,\ldots, y_{n-1}, y_n$ ，若函数φ(x)满足条件

(1) φ(x)在区间$[a, b]$上连续;

(2) φ(x)在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$上是次数为m的插值多项式;

则称φ(x)是$f(x)$在$[a,b]$上的**分段m次插值多项式。**

m=1称为分段线性插值

m=2称为分段抛物线插值

若在m=1时，还满足： $\varphi'(x_k)=f'(x_k)$，则称φ(x)为分段三次**Hermit**插值

分段线性插值的构造

P211

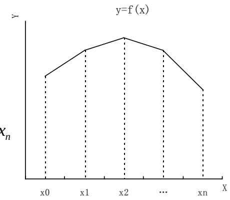
由定义， φ(x)在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$上是一次插值多项式:

$$\varphi(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\qquad x_i\le x\le x_{i+1}$$

φ(x)在区间$[a, b]$ 上是分段一次插值多项式:

$$\varphi(x)=\begin{cases} y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} & x_0\le x\le x_1\\ \vdots & \\ y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} & x_i\le x\le x_{i+1}\\ \vdots & \\ y_{n-1}\frac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}+y_{i+1}\frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & x_{n-1}\le x\le x_n \end{cases}$$

分段线性插值曲线图:



分段线性插值的余项： P212

定理：设 $f(x) \in C^2[a,b]$，且当 $x\in [a,b]$ 时，$|f''(x)| \le M$，

记：$h=\max\limits_{0\le i\le n-1}|x_{i+1}-x_i|$ ，则

$$|R_h(x)| = |f(x)-\varphi(x)| \le \frac{M}{8}\cdot h^2,\quad a\le x\le b$$

证明：由Lagrange 余项公式，当 $x\in[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 时，

$$|R_h(x)| = |f(x)-\varphi(x)| = \left|\frac{f''(\xi)(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2!}\right|,\qquad x_i\le x\le x_{i+1}$$

$$\le \frac{M}{2}\cdot \max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})| \le \frac{M}{8}h^2 \qquad \blacksquare$$

注意到h随分段增多而减少，因此用分段法提高精度是很好的途径.

$$\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})| = \frac{1}{4}(x_{i+1}-x_i)^2 \le \frac{h^2}{4}$$

例：设 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$ $\quad -1\le x\le 1$

• 将[-1，1] 10 等分，用分段线性插值近似计算f(-0.96)。

解：插值节点为 $x_i=-1+i/5$ $(i=0,1,\ldots,10)$，h=1/5

因为 $-0.96\in[-1,-0.8]$，取此区间为线性插值区间，其上的插值函数为

$$\varphi(x) = f(-1)\frac{x+0.8}{-0.2} + f(-0.8)\frac{x+1}{0.2}$$

$$= -0.1923(x+0.8) + 0.2941(x+1) \qquad -1\le x\le -0.8$$

所以 $f(-0.96)\approx\varphi(-0.96)=0.04253$

类似，还可构造分段三次Hermit插值。P212

实际上，上面介绍的分段插值，虽然具有计算简便，收敛性有保证，数值稳定性好且易在计算机上实现等优点，但它却不能保证整条曲线的光滑性，从而不能满足某些工程技术上的要求。

从六十年代开始，首先由于航空、造船等工程设计的需要而发展起来的样条插值（spline)方法，既保留了分段低次插值的各种优点，又提高了插值函数的光滑性，且不要求被插函数过多的信息。在许多领域有越来越广泛的应用。

作业

习题 7

P232：16

7.6 样条插值

- 三次样条函数定义
- 三次样条插值
- 三弯矩插值法

三次样条函数定义 P213

• 定义 对于区间 $[a,b]$ 上的一个分划：

Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

若函数 $s(x)$ 满足条件

(1) $s(x)$ 在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 上是次数不超过3的多项式；

(2) $s(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有2阶连续导数；

则称 $s(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上对应于分划 Δ 的3次样条函数。

$x_0,x_1,\cdots x_n$ 称为样条结点，其中 $x_1,\cdots x_{n-1}$ 称为内结点，x_0,x_n 称为边界结点。

三次样条函数是区间 $[a,b]$ 上具有2阶连续导数的分段3次多项式.

m次样条函数定义

- 定义 对于区间[a,b]上的一个划分:

⊿: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$

若函数$s(x)$满足条件

(1) $s(x)$在每个子区间[x_i, x_{i+1}]($i=0,1,\cdots,n-1$)
上是次数不超过m的多项式;

(2) $s(x)$在区间[a,b]上有m-1阶连续导数;

则称$s(x)$是定义在[a,b]上对应于划分⊿ 的m次样条函数。

$x_0,x_1,\cdots x_n$ 称为样条节点，其中$x_1,\cdots x_{n-1}$ 称为内点，

x_0,x_n 称为边界节点。

当 m=3 时，$s(x)$ 称为三次样条函数.

三次样条函数是区间[a,b]上具有2阶连续导数的分段3次多项式.

记S_3(⊿)为[a,b]上对应于⊿的全体三次样条函数组成的集合。

三次样条插值函数

•定义：设$y=f(x)$ 在点$x_0, x_1,\cdots,x_n$的值为$y_0,y_1,\cdots,y_n$, 若

$S(x)\in S_3$(⊿), 满足 $S(x_i)=y_i$ ($i=0,1,2,\cdots,n$)

则称 $S(x)$为三次样条插值函数。

确定一个三次样条插值函数所需要的条件。

三次样条插值函数

a) $s_i(x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3$, ($i=0,1,\ldots,n-1$) $x\in[x_i, x_{i+1}]$

确定一个三次样条函数需要4n个条件。

b) $s(x_i)=f(x_i)$, ($i=0,1,\ldots,n$) 插值条件

c) $s_{i+1}(x_{i+1})=s_i(x_{i+1})$, ($i=0,1,\ldots,n-2$) , 内结点连续;

d) $s_{i+1}'(x_{i+1})=s_i'(x_{i+1})$, ($i=0,1,\ldots,n-2$), 内结点一阶导连续;

e) $s_{i+1}''(x_{i+1})=s_i''(x_{i+1})$, ($i=0,1,\ldots,n-2$), 内结点二阶导连续;

$s(x)$在区间[a,b]上有直到2阶连续导数。

确定一个三次样条插值函数需要2个附加条件。

P214

第一型边界条件（固支条件）

给定两端点的一阶导数值y_0',y_n',要求

$s'(x_0)=y_0'$ $s'(x_n)=y_n'$

第二型边界条件 给定两端点的二阶导数值y_0'',y_n''

要求 $s''(x_0)=y_0''$ $s''(x_n)=y_n''$

特别当$s''(x_0)=0$, $s''(x_n)=0$时，称为自然边界条件。

第三型边界条件（周期条件） 已知 $f(x_0)=f(x_n)$

要求 $s(x_0+)=s(x_n-)$ $s'(x_0+)=s'(x_n-)$ $s''(x_0+)=s''(x_n-)$

第一型边界条件（固支条件）

P214

给定两端点的一阶导数值y_0',y_n',要求

$s'(x_0)=y_0'$ $s'(x_n)=y_n'$

第二型边界条件 给定两端点的二阶导数值y_0'',y_n''

要求 $s''(x_0)=y_0''$ $s''(x_n)=y_n''$

特别当$s''(x_0)=0$, $s''(x_n)=0$时，称为自然边界条件。

第三型边界条件（周期条件） 已知 $f(x_0)=f(x_n)$

要求 $s(x_0+)=s(x_n-)$ $s'(x_0+)=s'(x_n-)$ $s''(x_0+)=s''(x_n-)$

满足自然边界条件 的三次样条插值称为自然三次样条插值函数。

满足固支边界条件的三次样条插值称为固支三次样条插值函数。

满足周期边界条件 的三次样条插值称为周期三次样条插值函数。

三次样条插值的解法

- 待定系数法
- 三弯矩插值法
- 三转角插值法
- 三次B-基函数插值法*

例1　已知函数 $f(x)$ 的三个点处的值为

$$f(-1)=1, f(0)=0, f(1)=1$$

在区间[−1, 1]上，求 $f(x)$在自然边界条件下的三次样条插值函数。

解　$x_0=-1, x_1=0, x_2=1$, n=2, [−1, 1]分成两个子区间，故设

$$s(x)=\begin{cases} s_0(x)=a_0x^3+b_0x^2+c_0x+d_0, & x\in[-1,0] \\ s_1(x)=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1, & x\in[0,1] \end{cases}$$

由插值和函数连续条件：

$s_0(-1)=1$, $s_0(0)=0$, $s_1(0)=0$, $s_1(1)=1$, 得

$$\begin{cases} -a_0+b_0-c_0=1, \quad d_0=0, \\ d_1=0, \quad a_1+b_1+c_1=1 \end{cases} \qquad (1)$$

由内节点处一、二阶导数的连续条件

$s_0'(0)=s_1'(0)$, $s_0''(0)=s_1''(0)$, 得

$c_0=c_1$, $b_0=b_1$ (2)

最后由自然边界条件 $s_0''(-1)=0$, $s_1''(1)=0$,

得 $-6a_0+2b_0=0$ $6a_1+2b_1=0$ (3)

联立 (1) (2) (3)，解线性方程组，得

$a_0=-a_1=1/2$, $b_0=b_1=3/2$, $c_0=c_1=d_0=d_1=0$

从而问题的解为

$$s(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2, & x\in[-1,0] \\ -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2, & x\in[0,1] \end{cases}$$

这种解法称为**待定系数法**

例题2：已知 $f(x)$的满足**固支条件**的三次样条插值函数 $s(x)$在[0, 2]的表达式为

$$s(x)=\begin{cases} s_0(x)=1+Bx+2x^2-2x^3, & x\in[0,1] \\ s_1(x)=1+b(x-1)-4(x-1)^2+7(x-1)^3, & x\in[1,2] \end{cases}$$

求 $f'(0), f'(2)$.

解：因为　$s_0(1)=s_1(1)$, 所以 $B=0$;

因为　$s'_0(1)=s'_1(1)$, 所以 $b=-2$. 从而

$$s(x)=\begin{cases} s_0(x)=1+2x^2-2x^3, & x\in[0,1] \\ s_1(x)=1-2(x-1)-4(x-1)^2+7(x-1)^3, & x\in[1,2] \end{cases}$$

因为$s(x)$是$f(x)$的满足**固支条件**的三次样条插值函数

$f'(0)=s'_0(0)=0$, $f'(2)=s'_1(2)=11$.

三弯矩插值法

P215

设插值区间$[a,b]$的划分为

$$\Delta: \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

记子区间$[x_i, x_{i+1}]$的长度为

$$h_i=x_{i+1}-x_i \quad i=0,1,\cdots,n-1$$

$s(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$是三次式，故$s''(x)$是一次式。

设$s''(x_i)=M_i$ 为待定值，$i=0,1,\cdots,n$，则有

$$s''(x)=M_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+M_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i} \qquad (4)$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}], i=0,1,\cdots,n-1$$

对 (4) 式两边作两次不定积分，得到

对 (4) 式两边作两次不定积分，得到

$$s(x)=M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}$$

$$+c_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+c_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i} \qquad (5)$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}], i=0,1,\cdots,n-1$$

利用插值条件　$S(x_i)=y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$

得到

$$c_i=y_i-\frac{M_ih_i^2}{6}, \quad c_{i+1}=y_{i+1}-\frac{M_{i+1}h_i^2}{6}$$

代入 (5) 式，得

代入 (5) 式，得

$$s(x)=M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}$$

$$+(y_i-\frac{M_ih_i^2}{6})\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+(y_{i+1}-\frac{M_{i+1}h_i^2}{6})\frac{x-x_i}{h_i} \qquad (6)$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}], i=0,1,\cdots,n-1$$

对 (6) 式两边求一阶导数，得　$f[x_i,x_{i+1}]$

$$s'(x)=-M_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i}$$

$$+\underline{\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}}-\frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i) \qquad (7)$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}], i=0,1,\cdots,n-1$$

$$s'(x)=-M_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i}$$

$$+f[x_i,x_{i+1}]-\frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i) \quad (7)$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,1,\cdots,n-1$$

从而 $$s'(x_i+0)=f[x_i,x_{i+1}]-\frac{h_i}{6}(2M_i+M_{i+1})$$

$$s'(x_{i+1}-0)=f[x_i,x_{i+1}]+\frac{h_i}{6}(M_i+2M_{i+1})$$

$$s'(x_i-0)=f[x_{i-1},x_i]+\frac{h_{i-1}}{6}(M_{i-1}+2M_i)$$

利用 $s'(x_i-0)=s'(x_i+0)$ $i=1,2,\cdots,n-1$

$$f[x_{i-1},x_i]+\frac{h_{i-1}}{6}(M_{i-1}+2M_i)=f[x_i,x_{i+1}]-\frac{h_i}{6}(2M_i+M_{i+1})$$

$$i=1,2,\cdots,n-1.$$

$$h_{i-1}M_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)M_i+h_iM_{i+1}=6(f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i])$$

$$i=1,2,\cdots,n-1.$$

等式两边同除以 $h_{i-1}+h_i$， $h_{i-1}+h_i=x_{i+1}-x_{i-1}$

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}M_{i+1}=6\left(\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]}{h_{i-1}+h_i}\right)$$

$$i=1,2,\cdots,n-1.$$

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}M_{i+1}=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$$

$$i=1,2,\cdots,n-1.$$

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}M_{i+1}=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$$

$$i=1,2,\cdots,n-1.$$

引入记号
$$\begin{cases}\mu_i=\dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}, & \lambda_i=\dfrac{h_i}{h_{i-1}+h_i}=1-\mu_i\\ d_i=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]\end{cases} \quad (8)$$

$$i=1,\cdots,n-1$$

得到三弯矩方程 $$\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i \quad (9)$$

$$i=1,\cdots,n-1$$

$$\begin{cases}\mu_1M_0+2M_1+\lambda_1M_2=d_1\\ \mu_2M_1+2M_2+\lambda_2M_3=d_2\\ \cdots\ \cdots\\ \mu_{n-1}M_{n-2}+2M_{n-1}+\lambda_{n-1}M_n=d_{n-1}\end{cases} \quad (9)$$

三弯矩方程包含**n+1**个未知数$\{M_i\}_{i=0}^{n}$，但只有**n-1**个方程，另外两个方程由边界条件获得。

第一型边界条件（固支条件） $s'(x_0)=y_0'$ $s'(x_n)=y_n'$

由方程（7），导出：
$$\begin{cases}2M_0+M_1=d_0\\ M_{n-1}+2M_n=d_n\end{cases} \quad (10)$$

其中，$d_0=\dfrac{6}{h_0}(f[x_0,x_1]-y'_0),\ d_n=\dfrac{6}{h_{n-1}}(y'_n-f[x_{n-1},x_n])$

第一型边界条件插值问题

$$\begin{bmatrix}2&1&&&\\ \mu_1&2&\lambda_1&&\\ &\ddots&\ddots&\ddots&\\ &&\mu_{n-1}&2&\lambda_{n-1}\\ &&&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_0\\ M_1\\ \vdots\\ M_{n-1}\\ M_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_0\\ d_1\\ \vdots\\ d_{n-1}\\ d_n\end{bmatrix} \quad (13)$$

三对角且严格对角占优，方程组有唯一解。用追赶法求解。

第二型边界条件 $s''(x_0)=y_0''$ $s''(x_n)=y_n''$

$M_0=y_0''$ $M_n=y_n''$ (11)

第二型边界条件插值问题

$$\begin{bmatrix}2&\lambda_1&&&\\ \mu_2&2&\lambda_2&&\\ &\ddots&\ddots&\ddots&\\ &&\mu_{n-2}&2&\lambda_{n-2}\\ &&&\mu_{n-1}&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ \vdots\\ M_{n-2}\\ M_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1-\mu_1M_0\\ d_2\\ \vdots\\ d_{n-2}\\ d_{n-1}-\lambda_{n-1}M_n\end{bmatrix} \quad (14)$$

三对角且严格对角占优，方程组有唯一解。用追赶法求解。

第三型边界条件（周期条件）

$s(x_0+)=s(x_n-)$　$s'(x_0+)=s'(x_n-)$　$s''(x_0+)=s''(x_n-)$

由方程（4）、（7），导出：

$$\begin{cases} M_0 = M_n \\ \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases} \qquad (12)$$

其中
$$\begin{cases} \mu_n = \dfrac{h_{n-1}}{h_0+h_{n-1}},\ \lambda_n = \dfrac{h_0}{h_0+h_{n-1}} = 1-\mu_n \\ d_n = \dfrac{6}{h_0+h_{n-1}}\left(f[x_0,x_1]-f[x_{n-1},x_n]\right) \end{cases}$$

第三型边界条件插值问题

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \qquad (15)$$

此方程组的系数矩阵严格对角占优，方程组有唯一解。

例2　已知函数$f(x)$的函数表　　P219

x_i	2	4	6
$f(x_i)$	3	7	13
$f'(x_i)$	1		-1

求在区间[2，6]上的三次样条插值函数。

解：第一型插值问题　n=2　h=2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

由（8）式，$\mu_1=\lambda_1=1/2$，$d_1=3/2$

由（10）式　$d_0=3$　$d_2=-12$，

方程组为
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ -12 \end{bmatrix}$$

解得：　$M_0 = \dfrac{1}{4}$　$M_1 = \dfrac{5}{2}$　$M_2 = -\dfrac{29}{4}$

所求定义在区间[2，6]上的三次样条插值函数为

$$s(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{48}(4-x)^3+\dfrac{5}{24}(x-2)^3+\dfrac{17}{12}(4-x)+\dfrac{8}{3}(x-2) \\ \qquad 2\le x\le 4 \\ \dfrac{5}{24}(6-x)^3-\dfrac{29}{48}(x-4)^3+\dfrac{8}{3}(6-x)+\dfrac{107}{12}(x-4) \\ \qquad 4\le x\le 6 \end{cases}$$

三次样条插值误差定理

- **定理1**　设被插函数 $f(x)\in C^4[a,b]$，插值区间的划分为　$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$
- 并记最大步长 $h=\max\limits_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$，则第一、二边界条件下的三次样条插值函数$s(x)$及其导数$s'(x)$和$s''(x)$具有误差估计

$$\left\|f^{(k)}(x)-s^{(k)}(x)\right\|_\infty \le c_k h^{4-k}\left\|f^{(4)}(x)\right\|_\infty,\ k=0,1,2$$

其中，　$c_0=\dfrac{5}{384}, c_1=\dfrac{1}{24}, c_2=\dfrac{3}{8}$。

$$\|f(x)\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)|$$

作业

习题 7

P233：21（三弯矩法求解）