9 数值积分与数值微分
(Numerical Integration and Numerical Differentiation)

9.1 引言

•在实际问题中，往往会遇到被积函数$f(x)$的原函数无法用初等函数来表示，或函数只能用表格表示，或有的虽然能用初等函数表示，但过分复杂，所有这些情形都需要去建立定积分的近似计算公式。

将定积分近似表为 $$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

P283-284

的公式，称为数值求积公式（numerical quadrature formula). $a_i\,(i=0,1,\ldots,n)$称为求积系数，$x_i\,(i=0,1,\ldots,n)$称为求积结点。

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

称为求积余项。

$$f(x) \approx p(x), \qquad \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

插值型求积公式

9.2 插值型求积公式

•设 $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$, $p_n(x)$是$f(x)$的n次Lagrange插值多项式。

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{n,i}(x),$$

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} w_{n+1}(x)$$

$$w_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), a < \xi(x) < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)dx + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} w_{n+1}(x)dx$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{n,i}(x), \quad f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} w_{n+1}(x)$$

$$w_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), a < \xi(x) < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)dx + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} w_{n+1}(x)dx$$

$$= \underline{\int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{n,i}(x)dx} + \underline{\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) w_{n+1}(x)dx}$$

$$= \underline{\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)} + \underline{R_n(f)}$$

$$a_i = \int_a^b l_{n,i}(x)dx \quad i = 0,1,\cdots,n$$

插值型求积公式（Interpolating quadrature formula）

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = I_n(f) + R_n(f)$$ P284

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) \quad (1)$$ 其中，求积系数为

$$a_i = \int_a^b l_{n,i}(x)dx \quad i = 0,1,\cdots,n \quad (2)$$

$l_{n,i}(x)$为Lagrange插值基函数: $l_{nj}(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$

求积余项为

$$R_n(f) = \int_a^b [f(x) - p_n(x)]dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) w_{n+1}(x)dx \quad (3)$$

★★（1）代数精度(degree of accuracy) ★★

P285

定义1　若求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$　(1)，

对 $f(x)=1, x, x^2, x^3 \ldots x^m$，都等号成立，即 $R_n(x^i)=0$；而对于 x^{m+1} 等号不成立，则称此公式的代数精度为m.

定义2　若求积公式（1）对一切不高于m次的多项式 $p(x)$ 都等号成立，即 $R_n(p)=0$；而对于m+1次多项式等号不成立，则称此公式 的代数精度为m.

代数精度越高，公式越精确。

求法　从 $f(x)=1,x,x^2,x^3\ldots$ 依次验证求积公式是否成立，若第一个不成立的等式是 x^m，则其代数精度是m-1.

例1：求积公式的代数精度.

$$\int_0^h f(x)dx \approx h(f(0)+f(h))/2$$

解：取 $f(x)=1$，则上述公式　左=h，右=h（1+1）/ 2=h，故左=右；

取 $f(x)=x$，则　左=h²/2，右=h（0+h）/ 2= h²/2，故左=右；

取 $f(x)=x^2$，则　左=h³/3，右=h(0+h²)/ 2= h³/2

左≠右，所以求积公式具有1 次代数精度。

定理1　n+1个结点的求积公式 $I_n(f)=\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$　(1)

至少具有 n 次代数精度的充分必要条件是它是插值型的.

证明：（1）充分性　　P285

若　求积公式（1）是插值型的，

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) + R_n(f)$$

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)dx$$

当 $f(x)$ 是任何一个不超过n次的多项式时,余项 $R_n(f)=0$.

即，(n+1)个结点的插值型求积公式至少具有n次代数精度。

定理1　求积公式　$I_n(f)=\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$　(1)

至少具有 n 次代数精度的充分必要条件是它是插值型的.

（2）必要性

若　求积公式（1）至少具有 n 次代数精度，

则对任意≤ n 次多项式 f 都有　$I(f)=I_n(f)=\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$

特别

$$I(l_{n,k}(x)) = I_n(l_{n,k}(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i l_{n,k}(x_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{ik} = a_k$$

即

$$a_k = I(l_{n,k}(x)) = \int_a^b l_{n,k}(x)dx$$

所以求积公式（1）是插值型求积公式.

（2）牛顿—柯特斯(Newton-Cotes) 积分

插值型求积公式　$I(f)=\int_a^b f(x)dx = I_n(f)+R_n(f)$

其中，求积系数为　$I_n(f)=\sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$

$$a_i = \int_a^b l_{n,i}(x)dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx,\quad i=0,1,\cdots,n$$

求积余项为

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x))w_{n+1}(x)dx$$

当求积节点等距分布时，插值型求积公式称为
(n+1)点-牛顿—柯特斯(Newton-Cotes) 求积公式。

将积分区间[a,b] n等分，节点 x_i 为

$x_i=a+ih$，　$i=0,1,2,\ldots,n$

其中 $h=(b-a)/n$。引进变换　$x=a+th$，$0\le t\le n$

由公式（1），有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) \quad (4)$$

其中

$$a_i = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx = h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j}dt = (b-a)c_i^{(n)}$$

$$c_i^{(n)} = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j}dt = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (t-j)dt \quad (5)$$

$i=0,1,\cdots,n$

$c_i^{(n)}$ 称为柯特斯系数。

$$c_i^{(n)} = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^n \frac{t-j}{i-j}\,dt = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^n (t-j)\,dt \qquad (5)$$

$i=0,1,\cdots,n$ $\quad c_i^{(n)}$ 称为柯特斯系数。

于是(n+1)点牛顿—柯特斯求积公式为 **P286-287**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) = (b-a)\sum_{i=0}^n c_i^{(n)} f(x_i) \qquad (6)$$

常用公式： **1）梯形公式(Trapezoidal Rule)(n=1)**

$x_0=a,\ x_1=b,\ h=b-a,\quad c_0^{(1)}=c_1^{(1)}=1/2$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \qquad (7)$$

n=1，梯形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \qquad (7)$

它的几何意义是用四边梯形x_0ABx_1的面积代替曲边梯形的面积。

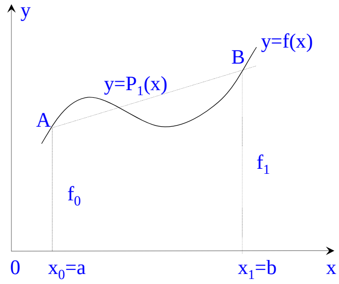

图1

梯形公式的误差

$$R_1(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$
$$= -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta), \quad a<\eta<b.$$

所以，带误差项的梯形公式是(n=1)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta), a<\eta<b$$

2）辛普森公式(Simpson's Rule) (n=2) **P287**

$x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=b,\ h=(b-a)/2$,

$c_0^{(2)}=1/6,\ c_1^{(2)}=2/3,\ c_2^{(2)}=1/6$，代入(6)式，可得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) \qquad (8)$$

$$R_2(f) = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta), \quad a<\eta<b$$

辛普森公式又称为抛物线公式。它的几何意义是用抛物线$y=P_2(x)$围成的曲边梯形面积代替由$y=f(x)$围成的曲边梯形面积图(2)。

带误差项的辛卜生公式是

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2) - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta)$$
$$x_0<\eta<x_1 \qquad (9)$$

n=2，辛普森公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$

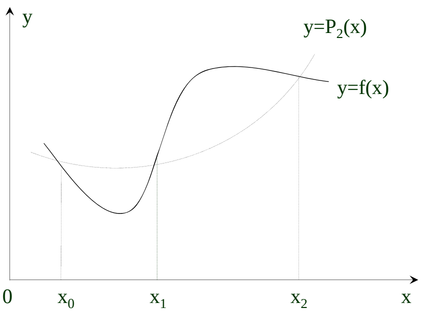

图2

3）3/8 辛普森公式 (n=3) **P287**

(Simpson's Three-Eighths Rule)

$x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=a+2h,\ x_3=b,\ h=(b-a)/3$

带余项的3/8辛普森公式为:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3) - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$$
$$x_0<\xi<x_3 \qquad (10)$$

4）Cotes 公式 (n=4)

$x_0=a,\ x_1=a+h,\ x_2=a+2h,\ x_3=a+3h,\ x4=b,\ h=(b-a)/4$

带余项的Cotes公式为:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4) - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$$
$$x_0<\xi<x_4 \qquad (11)$$

(n+1)-point Newton-Cotes公式

P287

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{j=0}^{n} C_j^{(n)} f(x_j)$$

- 柯特斯系数

n	$c_i^{(n)}$								
1	$1/2$	$1/2$							
2	$1/6$	$4/6$	$1/6$						
3	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$					
4	$7/90$	$16/45$	$2/15$	$16/45$	$7/90$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

(n+1)-point Newton-Cotes公式余项定理

定理2 设 $x_0=a, x_n=b, h=(b-a)/n$.

P289

(1) 若 $f\in C^{n+2}[a,b]$, n是偶数。则

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\sum_{j=0}^{n} c_j^{(n)} f(x_j)+\frac{h^{n+3}f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)dt$$

(2) 若 $f\in C^{n+1}[a,b]$, n是奇数。则

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\sum_{j=0}^{n} c_j^{(n)} f(x_j)+\frac{h^{n+2}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)dt$$

例如，n=2时 $R_2(f)=\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^2 t^2(t-1)(t-2)dt=-\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}$

梯形公式(n=1) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

抛物线公式(n=2) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$

3/8辛普森公式(n=3) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$

Cotes 公式 (n=4)

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{2h}{45}(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4)$$

例2 用Trapezoidal Rule与Simpson’s Rule

求 $I=\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx$ 的近似值。

解： **Trapezoidal Rule**

$$I=\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx\approx\frac{2}{2}(e^{-\frac{1}{2}}+e^{-\frac{3}{2}})\approx 0.829660819$$

Simpson’s Rule

I=0.7668010

$$I=\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}dx\approx\frac{2}{6}(e^{-\frac{1}{2}}+4e^{-\frac{2}{2}}+e^{-\frac{3}{2}})\approx 0.766575505$$

- 例3：用Newton-Cotes公式计算 $I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$

•解：当n取不同值时，计算结果如下所示。

•$I_{准}$=0.9460831

n	近似结果
1	0.9270354
2	0.9461359
3	0.9461109
4	0.9460830
5	0.9460830

评价数值求积公式优劣有3个指标：求积余项、代数精确度、数值稳定性。

Newton-Cotes公式的代数精度

定理 求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx I_n(f)=\sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j)$

至少具有n次代数精度的充分必要条件是它是插值型的.

即，(n+1)个结点的插值型求积公式至少具有n次代数精度。

由于Newton-Cotes公式是其特殊情形(等距节点)，它的代数精度至少是n, 还可以证明当n 为偶数时Newton-Cotes公式的代数精度至少是n+1.

取 $f(x)=1$, 有 $b-a=I(f)=\sum_{j=0}^{n}a_j \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n}c_j^{(n)}=1$

$a_i=(b-a)c_i^{(n)}$

由于Newton-Cotes公式是其特殊情形(等距节点),它的代数精度至少是n,还可以证明当n 为偶数时Newton-Cotes公式的代数精度至少是n+1.

例如

当n=1时，梯形公式的求积余项：$R_1(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi),\quad a<\xi<b$

它的代数精度为1。

当n=2时，$h=(b-a)/2$, 辛普森公式的求积余项：

$$R_2(f)=-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta),\quad a<\eta<b$$

它的代数精度为3.

当n=3时， 3/8辛普森公式的求积余项：

$$R_3(f)=-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi), a<\xi<b, h=\frac{b-a}{3}$$

它的代数精度为3.

当n=4时， Cotes公式的求积余项：

$$R_4(f)=-\frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi), h=\frac{b-a}{4}, a<\xi<b$$

它的代数精度为5.

例3：选择常数a，使求积公式

$$\int_0^h f(x)dx \approx h(f(0)+f(h))/2+ah^2(f'(0)-f'(h))$$

的代数精度尽量高，并求代数精度次数.

求法　　从$f(x)=1,x,x^2,x^3\ldots$依次验证求积公式是否成立，若第一个不成立的等式是x^m，则其代数精度是m-1.

解：取$f(x)=1$,则上述公式　左=h，右=h（1+1）/ 2=h，故左=右；

取$f(x)=x$,　则　　左=$h^2/2$，右=h（0+h）/ 2= $h^2/2$，故左=右；

取$f(x)=x^2$，则　左=$h^3/3$，右=$h(0+h^2)/2+ah^2(-2h)= h^3/2-2ah^3$

令　$h^3/2-2ah^3 =h^3/3$，得　$a=1/12$

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(0)+f(h))+\frac{h^2}{12}(f'(0)-f'(h))$$

取$f(x)=x^3$，则　左=$h^4/4$，右=$h(h^3)/2+h^2(-3h^2)/12=h^4/4$=左；

再取$f(x)=x^4$时，　左=$h^5/4$，右=$h^5/2+h^2(-4h^3)/12= h^5/6$

左≠右, 所以当　$a=1/12$时，求积公式具有最高3次代数精度。

（3） Newton-Cotes公式的数值稳定性　　P289

初步看来似乎n值越大，精确度越大。是不是n越大越好呢？

答案是否定的，可以证明：当求积系数 $c_i^{(n)}\geq 0$时，

舍入误差可以得到控制，从而求积公式是稳定性的。

但是,当n=8 时,The closed Newton-Cotes公式的系数为:

989/28350，…，－928/28350，…－4540/28350，…….

已出现负数，说明当n≥8时，稳定性将得不到保证,另一方面$R_n(f)$ 中有高阶导数，一般地说，难以进行误差估计。因此，在实际计算中，不用高阶的牛顿—柯特斯求积公式,一般我们只取n=1, 2, 4。

（4）　复合求积
（Composite Numerical Integration)

- 从余项的讨论看到，积分区间缩小，也可使求积公式的截断误差变小。因此，我们经常把积分区间分成若干小区间，在每个小区间上采用次数不高的插值公式，如梯形公式或抛物线公式，构造出相应的求积公式，然后再把它们加起来得到整个区间上的求积公式，这就是复合求积公式的基本思想。
- 复合求积公式克服了高次Newton-Cotes公式计算不稳定的问题，其运算简单且易于在计算机上实现。
- 常用的复合求积公式是复合梯形公式和复合抛物线公式。

复合梯形公式、复合抛物线公式 $I=\int_a^b f(x)dx$

- 复合梯形公式(Composite Trapezoidal rule) P290
- 把区间[a,b] n等分，取节点$x_k=a+kh$,k=0,1,...n, $h=(b-a)/n$, 对每个小区间$[x_k,x_{k+1}]$用梯形求积公式，再累加起来得：
- $$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))$$
$$=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{f(x_k)}_{\text{内点}}]$$
$$T_n=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)]$$

复合抛物线公式(Composite Simpson rule)

•令n=2m,m为正整数， $h=(b-a)/n$，在小区间$[x_{2k-2},x_{2k}]$上
•用辛普森求积公式，有： P290

$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{m}\frac{h}{3}(f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k}))$$
$$=\frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4\sum_{k=1}^{m}\underbrace{f(x_{2k-1})}_{\text{奇点}}+2\sum_{k=1}^{m-1}\overbrace{f(x_{2k})}^{\text{偶点}}]$$
$$S_n=\frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4\sum_{k=1}^{m}f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{m-1}f(x_{2k})]$$

复合积分的误差与收敛阶

定理3 （复合梯形求积公式的误差）设$f(x)\in C^2[a,b]$, 则
$$R(f,T_n)=\int_a^b f(x)dx-T_n=-\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta)$$
其中$h=(b-a)/n$，$x_k=a+kh,k=0,1,\dots,n$ $\quad a\le\eta\le b$

定理4 (复合抛物线求积公式的误差)设$f(x)\in C^4[a,b]$, 则
$$R(f,S_n)=\int_a^b f(x)dx-S_n=-\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)$$
$a\le\eta\le b$, 其中 $n=2m, h=(b-a)/n$

复合积分的收敛阶 $I=\int_a^b f(x)dx$

定义 3 (收敛阶数)如果一种复合求积公式I_n当$h\to 0$时成立渐进关系式
$$\lim_{h\to0}\frac{I-I_n}{h^p}=C .$$
P291

其中$C\neq 0$为常数，则称此求积公式是p阶收敛.

收敛阶数反映复化求积公式收敛到准确值的快慢程度.

- 复合梯形公式 ： $x_k=a+kh$, k=0,1,...n, $h=(b-a)/n$,
$$T_n=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)]$$
$$R(f,T_n)=I-T_n=-\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta)=O(h^2)$$

复化梯形公式是2阶收敛.

定义 3 (收敛阶数)如果一种复合求积公式I_n当$h\to 0$时成立渐进关系式
$$\lim_{h\to0}\frac{I-I_n}{h^p}=C .$$
$$I=\int_a^b f(x)dx$$
其中$C\neq 0$为常数，则称此求积公式是p阶收敛.

- 复合抛物线公式 ： $x_k=a+kh$, k=0,1,...n, $h=(b-a)/n$,
$$S_n=\frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4\sum_{k=1}^{m}f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{m-1}f(x_{2k})], n=2m.$$
$$R(f,S_n)=\int_a^b f(x)dx-S_n=-\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)=O(h^4)$$

复化Simpson公式是4阶收敛的。

例4 用复合抛物线公式计算$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$，误差小于$0.5\times10^{-6}$.

解
$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1\cos txdt,\quad f^{(k)}(x)=\int_0^1\frac{d^k(\cos tx)}{dx^k}dt=\int_0^1 t^k\cos(tx+\frac{k\pi}{2})dt$$
$$\Rightarrow \max_{0\le x\le1}|f^{(k)}(x)|\le\max_{0\le x\le1}\left|\int_0^1 t^k\cos(tx+\frac{k\pi}{2})dt\right|\le\int_0^1 t^k dt=\frac{1}{k+1}$$
$$\because |R(f,S_n)|=\frac{1}{180}h^4|f^{(4)}(\eta)|,\quad 这里\quad h=1/n,\quad 0<\eta<1$$
$$\therefore |R(f,S_n)|\le\frac{1}{180}(\frac{1}{n})^4(\frac{1}{5})\le\frac{1}{2}\times10^{-6},\Rightarrow\quad n\ge 6.866$$
$$R(f,S_n)=\int_a^b f(x)dx-S_n=-\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)$$
$a\le\eta\le b$, 其中 $n=2m, h=(b-a)/n$

因为n取偶数，所以n=2m=8, h=1/8, $x_i=i/8$

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx S_8$$

I=0.9460831⋯

$$S_8=\frac{h}{3}[f(0)+4\sum_{i=1}^{4} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{3} f(x_{2i})+f(1)]$$

$$=\frac{1}{24}[1+4\sum_{i=1}^{4}\frac{8\sin(\frac{2i-1}{8})}{2i-1}+2\sum_{i=1}^{3}\frac{4\sin(\frac{i}{4})}{i}+\sin 1]=0.9460833$$

下面采用同样的节点，按复合梯形公式计算

I=0.9460831⋯

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx T_8=\frac{h}{2}[f(0)+2\sum_{i=1}^{7} f(x_i)+f(1)]$$

$$=\frac{1}{2}[1+2\sum_{i=1}^{7}\frac{8\sin\frac{i}{8}}{i}+\sin 1]=0.9456911$$

可证：复化抛物线公式，复化梯形公式是数值稳定的。

要达到相同的精度，即满足｜$R(f,T_n)$｜< 0.5×10^{-6}

需要 $|R(f,T_n)|=\frac{1}{12}h^2|f^{(2)}(\eta)|\le\frac{1}{12}(\frac{1}{n})^2(\frac{1}{3})\le\frac{1}{2}\times10^{-6}$,

$\Rightarrow\quad n\ge 235.7\qquad$ 应取 $n=236$

显然，要达到相同的精度，复合梯形公式比复合抛物线公式计算量大得多。

复化抛物线公式是实际问题中，较常用的公式。

作业

习题 9

P324:

1(2)，2，3(2), 4，5

上机作业6:

数值实验：9-1