北京科技大学 2016 年《计算方法》

一、填空题(每小题 2 分，共 20 分)

1. 为了减少运算次数, 应将表达式 $x^5+17x^4+18x^3-14x^2-13x-15$ 改写为

$\left(\left(\left((x+17)+18\right)x-14\right)x-13\right)x-15$.

2. 用二分法求方程 $f(x)=2x^3-5x-1=0$ 在区间$[1,3]$内的根, 进行一步后根所在区间为

$[1,2]$, 进行二步后根所在区间为$[1.5,2]$.

```
% f(x)=2*x^3-5*x-1
fun=inline('2*x^3-5*x-1','x'); %输入函数f(x)
a=1;b=2;tol=10^(-4);N=10000;
k=0; fa=fun(a);
% for  k=1:N
%       p=(a+b)/2; fp=fun(p);
%     if( fp==0 | (b-a)/2<tol), break; end
%     if  fa*fp<0  b=p; else  a=p; end
% end
% k-1,p
for  k=1:2
      p=(a+b)/2; fp=fun(p);
    if( fp==0 | (b-a)/2<tol), break; end
    if  fa*fp<0  b=p; else  a=p; end
end
a,b
k-1,p
```

3. 设 A 是一个 5×2 的矩阵， B 是一个 2×3 的矩阵， C 是一个 3×6 的矩阵， D 是一个 6×4 的矩阵, 根据矩阵乘法结合率， $F=ABCD$ 可按如下公式计算

（1） $F=\left[A(BC)\right]D$ （2） $F=\left[(AB)(CD)\right]$

其中计算量较小的是公式**（2）**，其计算量为 **162**flops

解：计算量

(1) 3*2*3+2*5*6+6*5*4=198

(2) 2*5*3+6*3*4+3*5*4=162

4.设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 6\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1$ =**9**，$\|A\|_\infty$ =**11。**

5. 求 $f(x)=0$ 有 m 重根时，牛顿迭代公式中的迭代格式应为 $x_{n+1}=x_n-m\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

6．当 x=--1，0，1 时，对应的函数值分别为 $f(-1)=0$，$f(0)=2$，$f(1)=10$，则 $f(x)$的拉格朗日插值多项式是 $L_2(x)=2+5x+3x^2$ 。

解：用拉格朗日插值。

```
~~%求拉格朗日插值多项式基函数的系数~~
~~%x 是节点向量，y 是节点对应的函数值向量，~~
~~%L,p 分别是基函数和拉格朗日插值多项式的系数~~
~~%x=[-1 0 1];y=[0 2 10];~~
~~x=[-1 0 1];y=[0 2 10];~~
~~m=length(x);n=length(y);~~
~~if m~=n, error('向量 x 与 y 的长度必须一致');end~~
~~for i=1:n~~
~~  L(i)=1;~~
~~  for j=1:n,if j~=i,L(i)=L(i)/(x(i)-x(j));end,end~~
~~end~~
~~%给出插值多项式的系数~~
~~for i=1:n   p(i)=y(i)*L(i);end~~
~~L,p~~
```

$$\boldsymbol{L_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)}$$
$$\boldsymbol{=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2}$$

$$\boldsymbol{=2\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}+10\frac{(x+1)x}{1+1}=-2(x+1)(x-1)+5(x+1)x}$$
$$\boldsymbol{=-2(x+1)(x-1)+5(x+1)x=3x^2+5x+2}$$

7. 设 $f(x)=5x^3-x^2+3$，求差商 $f[0,1]=$ **4,** $f[7,6,3,5]=$ **5。**

解：

$$f[0,1]=\frac{f(0)-f(1)}{0-1}=\frac{3-7}{0-1}=4,\quad f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f'''(\xi)}{3!}=\frac{5\times 3!}{3!}=5$$

8．向量 $x=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ 可使用 household 矩阵 $H=$ $\underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}}$ 变换得 $Hx=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$.

注：

$$U=\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix},H=I-2\frac{UU^T}{\|U\|_2^2}=I-\frac{2}{24}\begin{pmatrix}16&-8&8\\-8&4&-4\\8&-4&4\end{pmatrix}=I-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

9. 若函数

$$S(x)=\begin{cases}x^3, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+1, & 1<x\le 3\end{cases}$$

为一个三次样条函数，则 $a=$ ____3~~1.5~~________，$b=$ ____3~~2~~________.

解：$S'(x)=\begin{cases}3x^2, & 0\le x\le 1\\ \frac{3}{2}(x-1)^2+2a(x-1)+b, & 1<x\le 3\end{cases}$

令 $S'(x)$ 在 $x=1$ 处连续，得到 $b=3$，这时

$$S''(x)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le 1\\ 3(x-1)+2a, & 1<x\le 3\end{cases}$$

再令 $S''(x)$ 在 $x=1$ 处连续，得到 $a=3$

10. 应用圆盘定理说出矩阵 $A=\begin{pmatrix}-3&1&0\\1&2&-1\\2&-2&9\end{pmatrix}$ 的特征值所在区域为

$|\lambda+3|\le 1,|\lambda-2|\le 2,|\lambda-9|\le 4$_

二、 (10 分)求解线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\1&4&4&3\\0&3&5&1\\3&12&12&10\end{bmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}4\\-1\\-6\\-1\end{pmatrix},$$

(1)求矩阵 A 的 Doolittle 分解，即分解成 $A=LU$ 的形式，其中 L 为单位下三角矩阵，U 为上三角矩阵；

(2)利用上述分解求解方程组 $Ax=b$.

解：$A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\1&4&4&3\\0&3&5&1\\3&12&12&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\3&3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&3&2&0\\0&0&3&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 分解6分,LU各三分)

解 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\3&3&0&1\end{bmatrix}y=\begin{pmatrix}4\\-6\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 得 $y=\begin{bmatrix}4\\-5\\-1\\2\end{bmatrix}$ (2 分)

解 $\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&3&2&0\\0&0&3&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}4\\-5\\-1\\2\end{bmatrix}$ 得 $x=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{bmatrix}$ (2 分)

```
%用 LU 分解法解方程组 Ax=b, x 为解向量，A=lu,l 为下三角矩阵，u 为上三角矩阵
A=[1 1 2 3; 1 4 4 3; 0 3 5 1; 3 12 12 10], b=[4 -1 -6 -1]',format short
%LU 分解
n=length(b);u=zeros(n,n);l=eye(n,n);u(1,:)=A(1,:); l(2:n,1)=A(2:n,1)/u(1,1);
for k=2:n
    u(k,k:n)=A(k,k:n)-l(k,1:k-1)*u(1:k-1,k:n);
    l(k+1:n,k)=(A(k+1:n,k)-l(k+1:n,1:k-1)*u(1:k-1,k))/u(k,k);
end
%解下三角方程组 Ly=b
y=zeros(n,1);y(1)=b(1);for k=2:n,    y(k)=b(k)-l(k,1:k-1)*y(1:k-1); end
%解上三角方程组 Ux=y
x=zeros(n,1);x(n)=y(n)/u(n,n);for k=n-1:-1:1,    x(k)=(y(k)-u(k,k+1:n)*x(k+1:n))/u(k,k); end
l, u, x
```

三、（10 分）设有方程组 $\begin{bmatrix}4&0&1\\1&4&1\\2&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\6\\2\end{bmatrix}$

使用 Gauss-Seidel 迭代法求解此方程，给出迭代格式和迭代矩阵，并采用初始值 $x_0=[0,0,0]'$ 迭代计算 2 步

解：Gauss-Seidel 迭代格式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{11 - x_3^{(k)}}{4} = \dfrac{11}{4} - \dfrac{1}{4}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{6 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}}{4} = \dfrac{13}{16} - \dfrac{3}{16}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{2 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{5} = -\dfrac{69}{80} + \dfrac{11}{80}x_3^{(k)} \end{cases}$ （2 分）

迭代矩阵为 $B_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{16} \\ 0 & 0 & \dfrac{11}{80} \end{pmatrix}$ （2 分）

$x_0 = [0,0,0]' \quad x_1 = \left[\dfrac{11}{4}, \dfrac{13}{16}, -\dfrac{69}{80}\right]' = [2.75, 0.8125, -0.8625]'$ （3 分）

$x_2 = \left[\dfrac{949}{320}, \dfrac{1247}{1280}, -\dfrac{6279}{6400}\right]' = [2.9656625, 0.97421875, -0.98109375]'$ （3 分）

```
%用 Gauss-Seidel 迭代法解线性方程组 Ax=b, x0 为初始向量, ep 为精度, N 为最大次数,
%x 是近似解向量
format long; clear;
A=[4 0 1;1 4 1;2 1 5];
b=[11 6 2]'; n=length(b);N=3;ep=1e-6;x0=zeros(n,1); P=inf;
%以下是 Gauss-Seidel 迭代法程序，迭代格式为 x=B_GS*x+d_GS
D=diag(diag(A));U=-triu(A,1);L=-tril(A,-1); dD=det(D);
if dD==0,disp('请注意：因为对角矩阵D奇异，所以此方程组无解.')
else  disp('请注意：因为对角矩阵D非奇异，所以此方程组有解.')
    iD=inv(D-L); B_GS=iD*U;d_GS=iD*b;end
k=0;
while k<N
    x=B_GS*x0+d_GS,if norm(x-x0,P)<ep, break; end, x0=x;k=k+1
end
if k==N,warning('已达到迭代次数上限');end
disp(['k= ',num2str(k)]), x, D,U,L,B_GS,d_GS, %jx=A\b,
```

四、(20 分) 已知方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近有根，使用牛顿迭代法求解此方程，

精确到 $|x_{k+1} - x_k| < 0.005$.

解： $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^3 - x_k^2 - 1}{3x_k^2 - 2x_k}$ **(2 分)**　　**取初始值** $x_0 = 1.5$

有 $x_1 := 1.487179487$ **，** $x_2 := 1.479114914$ **，** $x_3 := 1.474052886$ **，** $x_4 := 1.470879916$ **(每步2分)**

$f(x)=0$ 的解约为 1.470879916（1 分）

五、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间[0,3]上具有四阶连续导数，试用埃尔米特插值法求一个次数不高于 3 的多项式 $P_3(x)$，使其满足如下数据表值，并给出截断误差估计公式。（10 分）

已知 $f(x)$ 有如下的数据

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	2
$f'(x_i)$		3	

试写出满足插值条件 $P(x_i)=f(x_i)$ 以及 $P'(1)=f'(1)$ 的插值多项式 $P(x)$，并写出误差的表达形式。

解：待定系数法 1：$P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$P(0)=a=1$ $\quad P(2)=a+b+c+d=2$

$P(3)=a+2b+4c+8d=2$ $\quad P'(1)=b+2c+3d=3$（每个方程 1 分, 共 4 分）

解得 $a=1, b=-\frac{7}{2}, c=7, d=-\frac{5}{2}$ （每个系数 1 分, 共 4 分）

$P(x)=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}x+1$ $\cancel{P(x)=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}x+1}$（1 分）

$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x(x-1)^2(x-2)$ （1 分）

待定系数法 2：$P(x)=2+3(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$ （2 分）

$P(1)=2-3+c-d=1$（1 分） $P(2)=2+3+c+d=2$（1 分）

解得 $c=-\frac{1}{2}, d=-\frac{5}{2}$ （每个系数 1 分, 共 2 分）

$$P(x)=2+3(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{5}{2}(x-1)^3=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}x+1$$

~~$P(x)=2+3(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{5}{2}(x-1)^3=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}+1$~~（2 分）

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)^2(x-3)$$ （2 分）

差商法：(每个差商各 1 分,全对 6 分)

x	***f(x)***			
0	***1***			
1	***2***	***1***		
1	***2***	***3***	***2***	
2	***2***	***0***	***-3***	***-2.5***

$$P(x)=1+x+2x(x-1)-\frac{5}{2}x(x-1)^2=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}+1$$

~~$P(x)=1+x+2x(x-1)-\frac{5}{2}x(x-1)^2=-\frac{5}{2}x^3+7x^2-\frac{7}{2}+1$~~（2 分）

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-1)(x-2)^2(x-3)$$ （2 分）

六、(10 分) 已知实验数据如下

x	**-1**	**0**	**1**	**2**
y	**1**	**2**	**1**	**-2**

用最小二乘法求形如 $y=a+bx+cx^2$ 的经验公式。（10 分）

解：设拟合多项式为 $y=a+bx+cx^2$

则由条件得到正规方程组 $\begin{pmatrix}4&2&6\\2&6&8\\6&8&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$ (每个系数 1 分,共 8 分)

解得 $a=4.2, b=1.6, c=-3$.(2 分,错一个得 1 分,错 2 个以上不得分)

所以所求的拟合多项式为 $y=4.2+1.6x-3x^2$

七、(10 分) 用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases}y'=-y+2x^2\\y(0)=0\end{cases}\quad(0\le x\le 0.3)$$

取步长 $h=0.1$，计算 $y(0.3)$ 的近似值，计算过程中数值保留 5 位小数。

解: 改进的欧拉方法 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$

或写为 $\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1) \quad (n=0,1,2,\ldots) \end{cases}$

建立改进欧拉的迭代公式
$$k_1=f(x_k,y_k)=-y_k+2x_k^2$$
$$k_2=f(x_{k+1},y_k+k_1h)=-0.9y_k-0.2x_k^2+2x_{k+1}^2 \qquad (3 分)$$
$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}(k_1+k_2)=0.905y_k+0.09x_k^2+0.1x_{k+1}^2$$

迭代计算如下：

$k1 := -1$,, $k2 := -0.88$, $y_1 := 0.9060$

$k1 := -0.8860$, $k2 := -0.73740$, $y_2 := 0.8248300$

$k1 := -0.7448300$, $k2 := -0.57034700$, $y_3 := 0.7590711500$

八、(10 分) 利用复化 Simpson 公式 S_n 计算定积分 $I=\int_0^1 \sin x dx$ 若使 $|I-S_n|<10^{-5}$，问应取 n 为多少？并求此近似值。

解　由于 $|(\sin x)^{(4)}|=|\sin x|\le \sin 1$，所以，n 应满足：$n>\sqrt[4]{\frac{\sin 1}{2880\times 10^{-5}}}\approx 2.32$，

故，应取 n＝3。而且有：

$$I\approx S_3=\frac{1}{18}[\sin 0+\sin 1+2\sin\frac{1}{3}+2\sin\frac{2}{3}+4\sin\frac{1}{6}+4\sin\frac{1}{2}+4\sin\frac{5}{6}]\approx 0.4596997$$