10.5 高阶单步方法

(1) Taylor展开法

n阶Taylor方法的局部截断误差:

$$T_{i+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(x_i)+O(h^{n+2})$$

设 初值问题
$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b, \\ y(a)=\alpha \end{cases}$$

的解$y(x)$充分光滑, 将$y(x_{i+1})$在x_i点作Taylor展开:

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+(h^2/2!)y''(x_i)+\cdots$$

$$+(h^n/n!)y^{(m)}(x_i)+(h^{n+1}/(n+1)!)y^{(n+1)}(x_i)+O(h^{n+2}) \quad (1)$$

将解$y(x)$的导数用 $f(x,y(x))$表示:有

$y'(x)=f(x, y(x))$, $\quad y''(x)=f'(x, y(x))=f_x+f_y f$,

…… $\quad y^{(k)}=f^{(k-1)}(x, y(x))$

$$\begin{cases} y_0=\alpha \\ y_{i+1}=y_i+h\Phi_n(x_i,y_i,h), \quad i=0,1,\dots,n-1 \\ \Phi_n(x_i,y_i,h)=f(x_i,y_i)+\frac{h}{2}f'(x_i,y_i)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(x_i,y_i) \end{cases}$$

n阶Taylor方法

例1 （1）应用2阶与4阶Taylor方法求解初值问题:

$$\begin{cases} y'=y-x^2+1, & 0\le x\le 2 \\ y(0)=0.5,\ h=0.2 \end{cases}$$

（2）计算$y(1.25)$.

解: （1） $f(x,y(x)) = y-x^2+1$, $f'(x,y(x)) = y'-2x= y-x^2+1 -2x$,

$f''(x,y(x))= y'-2x-2= y-x^2-2x-1$, $f^{(3)}(x,y(x))= y'-2x-2= y-x^2-2x-1$

$$\Phi_2(x_i,y_i,h)=f(x_i,y_i)+\frac{h}{2}f'(x_i,y_i)=(1+\frac{h}{2})(y_i-x_i^2+1)-hx_i$$

$$\Phi_4(x_i,y_i,h)=f(x_i,y_i)+\frac{h}{2}f'(x_i,y_i)+\frac{h^2}{6}f''(x_i,y_i)+\frac{h^3}{24}f'''(x_i,y_i)$$

$$=(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{6}+\frac{h^3}{24})(y_i-x_i^2)-(1+\frac{h}{3}+\frac{h^2}{12})(hx_i)+1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{6}-\frac{h^3}{24}$$

2阶Taylor方法

$$\begin{cases} y_0=0.5 \\ y_{i+1}=y_i+h\varphi_2(x_i,y_i,h) \end{cases}$$

4阶Taylor方法

$$\begin{cases} y_0=0.5 \\ y_{i+1}=y_i+h\varphi_4(x_i,y_i,h) \end{cases}$$

这里 $h=0.2$, $n=10$, $x_i=ih$, $(i=0,1,\dots,10)$, $x_0=0$, 计算结果如下:

i	xi	y(xi)	Taylor(2) yi	Error	Taylor(4) yi	Error
0	0	0.5	0.5	0	0.5	0
1	0.2	0.8292986	0.83	0.0007	0.8293	0.0000014
2	0.4	1.21409	1.2158	0.0017	1.21409	0.0000034
3	0.6	1.64894	1.6521	0.0031	1.648946	0.0000062
4	0.8	2.12723	2.1323	0.0051	2.127239	0.0000101
5	1	2.640859	2.6486	0.0078	2.640874	0.0000153
6	1.2	3.17994	3.1913	0.0114	3.179964	0.0000225
7	1.4	3.7324	3.7486	0.0162	3.732432	0.0000321
8	1.6	4.28348	4.3061	0.0227	4.283529	0.0000447
9	1.8	4.8151763	4.8463	0.0311	4.815238	0.0000615
10	2	5.305472	5.3477	0.0422	5.305555	0.0000834

（2）计算$y(1.25)$ 1.25不是节点，利用插值求解。

a) 分段线性插值

$1.25\in[1.2,1.4]$, 这里 $x_6=1.2$, $x_7=1.4$

$y(1.2)\approx y_6=3.1799640$, $y(1.4)\approx y_7=3.7324321$

分段线性插值在[1.2,1.4]的表达式为:

$$p(x)=\frac{x-1.4}{1.2-1.4}\times y_6+\frac{x-1.2}{1.4-1.2}\times y_7$$

$y(1.25)\approx p(1.25)$=3.3180810, 精确解为 $y(1.25)$ =3.3173285

误差为 0.0007525

---

n阶Taylor方法虽然近似解的精度随着n的增大而增高，但需要计算 f(x,y)的高阶导数。
下面，寻求其它途径，构造高精度方法。

---

2 Runge-Kutta Methods

方法的阶越高，方法就越准确。

$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$, Euler 法 　　1阶方法

特点：计算1次$f(x,y)$的函数值

$$y_{k+1}=y_k+(h/2)[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})]$$ 梯形公式

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_k+hf(x_k,y_k))]$$

改进欧拉公式 　　2阶方法

特点：计算2次$f(x,y)$的函数值

(2)Runge-Kutta方法

Runge-Kutta方法的 基本思想

计算$f(x,y)$在不同结点的函数值, 然后作这些函数值的线性组合, 构造近似公式, 式中有一些可供选择的参数. 将近似公式与Taylor展开式相比较, 使前面的若干项密合, 从而使近似公式达到较高的阶.

Runge-Kutta 方法是一种高精度的单步法,简称R-K法.

下面以二阶R-K方法为例说明这一方法的基本思想.

二级二阶R-K方法（4个参数）

在$[x_i, x_{i+1}]$上, 取$f(x,y)$在两个点的函数值作线性组合, 得到二级R-K方法:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(c_1K_1 + c_2K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \qquad (i = 0,\dots, n-1), (*) \\ K_2 = f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hK_1) \end{cases}$$

其中, c_1、c_2、a_2、b_{21}为待定参数。

令 $\phi(x,y,h)= c_1K_1+c_2K_2 =c_1f(x,y)+c_2f(x+a_2h,y+b_{21}hf(x,y))$

若要求式(*)达到二阶精度，则只要局部截断误差

$T_{i+1}(h) =y(x_{i+1})-y(x_i)-h\phi(x_i,y(x_i),h)=O(h^3)$.

$T_{i+1}(h) =y(x_{i+1})-y(x_i)-h\phi(x_i,y(x_i),h)=O(h^3)$.

这里 $\phi(x,y,h)= c_1K_1+c_2K_2 =c_1f(x,y)+c_2f(x+a_2h,y+b_{21}hf(x,y))$

将 $\phi(x,y,h)$在(x,y)点作Taylor展开,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)+(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})f(x,y)+\frac{1}{2!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(\xi,\eta)$$

$$= f(x,y)+(\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f}{\partial y})+\frac{1}{2!}(\Delta x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\Delta y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})_{(\xi,\eta)}$$

$f(x+a_2h, y+b_{21}hf(x,y))=f(x,y)+a_2hf_x+b_{21}hf\cdot f_y+O(h^2)$

所以 $\phi(x,y,h)=(c_1+c_2)f(x,y) +c_2(a_2f_x+b_{21}ff_y)h +O(h^2)$

$\phi(x,y,h)=(c_1+c_2)f(x,y) +c_2(a_2f_x+b_{21}ff_y)h+O(h^2)$

$T_{i+1}(h) =y(x_{i+1})-y(x_i)-h\phi(x_i,y(x_i),h)=O(h^3)$.

$\phi(x_i,y(x_i),h)=(c_1+c_2)f(x_i,y(x_i)) +c_2h(a_2f_x+b_{21}ff_y)(x_i,y(x_i)) +O(h^2)$

$y(x_{i+1})$在x_i点的Taylor展开为

$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+(h^2/2!)\underline{y''(x_i)}+O(h^3)$

$= y(x_i)+hf(x_i,y(x_i)) +(h^2/2!)(f_x+f_yf)(x_i,y(x_i)) +O(h^3)$

$T_{i+1}(h) =y(x_{i+1})-y(x_i)-h\phi(x_i,y(x_i),h)$

$=[(1-c_1-c_2)hf+(1/2-c_2a_2)h^2f_x+(1/2-c_2b_{21})h^2ff_y](x_i,y(x_i)) +O(h^3)$

若要求$T_{i+1}(h)$ =O(h³), 则应有 $\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_2a_2=1/2 \\ c_2b_{21}=1/2 \end{cases}$

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_2a_2=1/2 \\ c_2b_{21}=1/2 \end{cases}$$

上述方程组含有3个方程, 4个未知数,其解是不唯一的.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(c_1K_1 + c_2K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \qquad (i = 0,\dots, n-1), (*) \\ K_2 = f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hK_1) \end{cases}$$

取$c_2=\beta$为自由参数,则得其一族解:

$c_1=1-\beta$, $c_2=\beta$, $a_2=b_{21}=1/(2\beta)$　　(**)

满足条件(**)的(*)式称为二级二阶R-K方法.

取β为不同的值时，得到不同的二级二阶R-K方法. 特别当β=1/2 时，c_1= 1/2 , c_2= 1/2 , $a_2=b_{21}=1$
公式即是前面介绍的改进的Euler方法.

取β=1/2， 则 c_1= 1/2 , c_2= 1/2 , $a_2=b_{21}=1$

Modified *Euler* **Method** ：改进的Euler方法

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_{i+1} = y_i + (1/2)h(K_1 + K_2), (i = 0,\dots, n-1) \\ K_1 = f(x_i, y_i), K_2 = f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)) \end{cases}$$

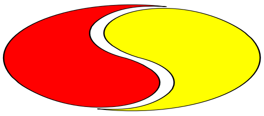
或

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i,y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i,y_i))] \\ (i = 0,\dots,n-1) \end{cases}$$

二级R-K方法是显示单步式，每前进一步需要计算两个函数值．由上面的讨论可知，适当选择四个参数c_1, c_2, a_2, b_{21}，可使每步计算两次函数值的二阶R-K方法达到二阶精度．能否在计算函数值次数不变的情况下，通过选择四个参数，使得二阶R-K方法的精度再提高呢?

我们说，答案是否定的．无论四个参数怎样选择，都不能使公式(**)提高到三阶．

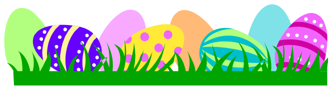
这说明每一步计算两个函数值的二阶R-K方法最高阶为二阶．若要获得更高阶得数值方法，就必须增加计算函数值的次数．



m 级显式Runge-Kutta 方法

仿照二级R-K方法，在$[x_i , x_{i+1}]$上，取 f 在m 个点的函数值做线性组合，即得到 m 级R-K方法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{m} c_j K_j, (i = 0,\dots, n-1) \\ K_1 = f(x_i, y_i), \\ K_r = f(x_i + ha_r, y_i + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} K_s), r = 2,\cdots,m \end{cases}$$



$m+m(m+1)/2-1$个参数

使用不同的方法确定参数c_i, a_r, b_{rs}可使上式成为不同阶的R-K方法．在m 级R-K方法中，最著名的是经典R-K方法（4级4阶R-K方法）：

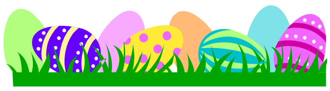
$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), (i = 0,\dots, n-1) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + h/2, y_i + hK_1/2) \\ K_3 = f(x_i + h/2, y_i + hK_2/2) \\ K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3) \end{cases}$$

由于它每前进一步需要计算四个点的函数值，因此称为四级公式．按定义可直接验证它的局部截断误差为$O(h^5)$，故它是四阶方法．

前面已经看到，二级、四级R-K方法可分别达到最高阶数二阶、四阶，但是$m(m>4)$级R-K方法的最高阶却不一定是m阶。R-K方法的级数表示公式中计算函数值f的次数。Butcher给出了R-K方法计算函数值f的次数与阶数之间的关系表，如下：

计算f的次数	2	3	4	5	6	7
方法的最高阶数	2	3	4	4	5	6

由表可见，四级以下R-K的方法其最高阶数与计算f的次数一致，对m 级R-K公式，当$m>4$，虽然计算f的次数增加，但是方法阶数不一定增加。因此四级四阶R-K公式是应用最为广泛的公式。



例题1：用经典的R-K方法求初值问题的数值解(取步长$h=0.1$计算到y_3)：
$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

解：经典的R-K方法为　　　　这里 $f(x,y)=-2xy^2$，

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), (i = 0,1,2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + h/2, y_i + hK_1/2) \\ K_3 = f(x_i + h/2, y_i + hK_2/2) \\ K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3) \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = -2x_i y_i^2 \\ K_2 = -2(x_i + h/2)(y_i + hK_1/2)^2 \\ K_3 = -2(x_i + h/2)(y_i + hK_2/2)^2 \\ K_4 = -2(x_i + h)(y_i + hK_3)^2 \end{cases}$$

将 $x_0=0, y_0=1, h=0.1$ 带入，计算结果如下

x_k	0.0	0.1	0.2	0.3
Euler	1	1	0.9800	0.9416
改进 *Euler*	1	0.9900	0.9614	0.9173
经典 $R-K$	1	0.9901	0.9615	0.9174
精确解	1	0.9901	0.9615	0.9174

经典的R-K方法所得近似解与精确解完全一样（精确到小数点后4位）

方法的比较

4级4阶R-K公式每一步需要计算4次f的值，2级2阶R-K公式每一步需要计算2次f的值，Euler公式每一步需要计算1次f的值，因此，4级4阶R-K公式每一步的计算量最大。要证明4级4阶R-K公式优于2级2阶R-K公式与Euler公式，应表明步长为 h 的4级4阶R-K公式优于步长为 h/2 的2级2阶R-K公式与步长为 h/4 的Euler公式。

例题2：分别用Euler方法（**h=0.05**）、改进的Euler方法（**h=0.1**）经典的R-K方法(**h=0.2**）求初值问题的数值解计算 $y(0.6)$的近似值。 $\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$

解：Euler方法（**h=0.05**），$y(0.6) \approx y_{12}$，
改进的Euler方法（**h=0.1**），$y(0.6) \approx y_6$，
经典的R-K方法(**h=0.2**），$y(0.6) \approx y_3$，计算结果如下

	x_k	0.0	0.2	0.4	0.6
$Euler\ (h=0.05)$		1	0.9705	0.8746	0.7456
改进 $Euler\ (h=0.1)$		1	0.9614	0.8620	0.7355
经典 $R-K\ (h=0.2)$		1	0.9615	0.8621	0.7353
精确解		1	0.9615	0.8621	0.7353

3 Runge-Kutta 方法的绝对稳定性

将经典的R-K方法(**4级4阶**）与改进的Euler法（**2级2阶**R-K方法）分别求解实验方程：$y' = \lambda y$，得

$$y_{k+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4\right) y_k \quad (1)$$

与 $$y_{k+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right) y_k \quad (2)$$

设 $y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k$，且 $\tilde{y}_k$ 满足上述方程（1）、（2）
则误差 ε_k 满足方程：

$$\varepsilon_{k+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4\right)\varepsilon_k \quad (1)$$

与 $$\varepsilon_{k+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right) \varepsilon_k \quad (2)$$

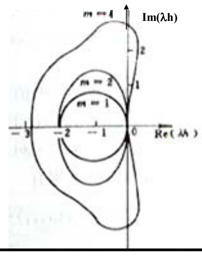
要使 $|\varepsilon_{k+1}| < |\varepsilon_k|$，必须

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4\right| < 1 \quad (3)$$

与 $$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right| < 1 \quad (4)$$

（3）、（4）即为经典的R-K方法(4级4阶）与改进的Euler法的绝对稳定域。

经典的R-K方法(4级4阶）与改进的Euler法的绝对稳定区间分别为（**-2.785, 0**)与(**-2 , 0**)。



单步法的绝对稳定区间

方法	绝对稳定区间
$Euler$	$-2 < \lambda h < 0$
向后 $Euler$	$-\infty < \lambda h < 0$
改进 $Euler$	$-2 < \lambda h < 0$
梯形	$-\infty < \lambda h < 0$
4阶 $R-K$	$-2.785 < \lambda h < 0$

步长：$h>0$，$\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

例题3 用经典的R-K方法求解初值问题 $\begin{cases} y' = -20y \\ y(0)=1 \end{cases}$

取步长**h=0.1**及**0.2**，问算法是否绝对稳定?

解：经典的R-K方法的绝对稳定区间为（**-2.785, 0**)，此题中 $\lambda=-20$，h 分别为0.1及0.2 。λh分别为 –2 及 –4 。
$\because -2 \in$ （**-2.785, 0**)，$\therefore$ 取步长**h=0.1**时，算法绝对稳定。
$\because -4 \notin$ （**-2.785, 0**)，$\therefore$ 取步长**h=0.2**时，算法不绝对稳定。
计算结果如下：

x_n	误差(h=0.1)	误差(h=0.2)
0.0	0	0
0.2	-0.092795	4.98
0.4	-0.012010	25.0
0.6	-0.001366	125.0
0.8	-0.000152	625.0
1.0	-0.000017	3125.0

合理选择步长至关重要。

作业

习题 10
P364:
4