课上练习

用单纯形法求解下列*LP*问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 26x_1 + x_2 - 3x_3 \\
s.t. \quad & 10x_1 + x_2 - x_3 \geq -2 \\
& -4x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

最优解：$X^* = (0,1,3)^T$， 最优值：-8

第一章 线性规划

第六节 对偶规划

- 对偶问题的提出
- 对偶规划的定义

一. 对偶问题的提出：

例： 某工厂在计划期内要安排生产甲乙两种产品，它们需要在四种不同的设备上加工。加工工时数、可得利润、总工时数均列于下表。

问： 应如何安排生产才能获利最大？

	A	*B*	*C*	*D*	利润
甲	2	1	4	0	20
乙	2	2	0	4	30
总工时数	12	8	16	12	

建立数学模型： 设 x_1, x_2 为计划期内甲、乙的产量

问题:求利润最大

$$\max S = 20x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 + 0x_2 \le 16 \\ 0x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0, j = 1,2 \end{cases}$$

	A	B	C	D	利润
甲	2	1	4	0	20
乙	2	2	0	4	30
总工时数	12	8	16	12	

对偶问题：不自己生产甲、乙两种产品，而将生产设备的总工时用于出租，收取租金。

对偶规划：

$$\min Z = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 20 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 30 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

设 y_1, y_2, y_3, y_4 为设备A, B, C, D每工时的价格

	A	B	C	D	利润
甲	2	1	4	0	20
乙	2	2	0	4	30
总工时数	12	8	16	12	

原规划(P)：　　　　对偶规划(D)：

$$\max S = 20x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & y_1 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 & y_2 \\ 4x_1 + 0x_2 \le 16 & y_3 \\ 0x_1 + 4x_2 \le 12 & y_4 \\ x_j \ge 0, j = 1,2 \end{cases}$$

$$\min Z = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 20 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 30 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

y_1, y_2, y_3, y_4 称为对偶变量

	y_1	y_2	y_3	y_4	
	A	B	C	D	利润
甲	2	1	4	0	20
乙	2	2	0	4	30
总工时数	12	8	16	12	

第一章 线性规划

第六节 对偶规划

- 对偶问题的提出
- 对偶规划的定义

二. 对偶规划的定义：

原规划 (P)：

$$\max S = 20x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 + 0x_2 \le 16 \\ 0x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0, j = 1,2 \end{cases}$$

对偶规划 (D)：

$$\min Z = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 20 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 30 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

(P)与(D)的对应关系：

1 约束条件的系数矩阵是转置关系且不等号反向

2 约束右端项 $\rightleftarrows$ 目标函数的系数

3 求 $\max S$ $\rightleftarrows$ 求 $\min Z$

写出对偶规划的向量形式：

$$\max S = 20x_1 + 30x_2 \qquad \min Z = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$(P)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & y_1 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 & y_2 \\ 4x_1 + 0x_2 \le 16 & y_3 \\ 0x_1 + 4x_2 \le 12 & y_4 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 & \lambda = (y_1, y_2, y_3, y_4) \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 20 & x_1 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 30 & x_2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \max S &= CX \\ AX &\le b \\ X &\ge 0 \end{aligned} \quad \xleftrightarrow{\text{对称}} \quad \begin{aligned} \min Z &= \lambda b = (y_1, y_2, y_3, y_4)\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} \\ \lambda A &\ge C \\ \lambda &\ge 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} \quad C = (20,30) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(y_1, y_2, y_3, y_4)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \ge (20,30)$$

与不等式约束条件相对应的对偶变量取值非负

对偶规划的定义：

定义1-7（对偶关系）——→对偶关系的对称形式

$(P)\quad \min S = CX$ ←对称→ $(D)\quad \max Z = \lambda b$

$AX \geq b$ $\quad\quad$ $\lambda A \leq C$

$X \geq 0$ $\quad\quad$ $\lambda \geq 0$ 对偶变量

(P)与(D)的对应关系：

1 约束条件的系数矩阵是转置关系且不等号反向

2 约束右端项 ⇌ 目标函数的系数

3 求 $\max S$ ⇌ 求 $\min Z$

写对偶规划的方法：(LP)

$$(LP) \longrightarrow (P)\ \min S = CX,\quad AX \ge b,\quad X \ge 0 \longrightarrow (D)\ \max Z = \lambda b,\quad \lambda A \le C,\quad \lambda \ge 0$$

例：

$$(P)\ \min S = CX,\quad AX = b,\quad X \ge 0$$

$$AX = b \longrightarrow \begin{cases} AX \ge b \\ AX \le b \end{cases}$$

对偶关系的非对称形式

$$(D)\ \max Z = \lambda b,\quad \lambda A \le C$$

$$\min S = CX$$

$$\begin{cases} AX \ge b \\ AX \ge -b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$\min S = CX$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} X \ge \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$b \longrightarrow u$（m维）

$-b \longrightarrow v$（m维）

$\xrightarrow{(u,v)(2m\text{维})}$

$$\max Z = (u,v)\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} = ub - vb = (u-v)b$$

$$(u,v)\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \le C \longrightarrow uA - vA \le C,\quad (u-v)A \le C,\quad \lambda A \le C$$

$$(u,v) \ge 0$$

令 $u - v = \lambda$（m维）

虽然 $u, v \ge 0$

但 λ 为自由变量

与等式约束条件相对应的对偶变量为自由变量

写对偶规划的原则：

(P)

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \text{为自由变量} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \min S = CX \\ AX \geq b \\ X \geq 0 \end{matrix} \xleftrightarrow{\text{对称}} \begin{matrix} \max Z = \lambda b \\ \lambda A \leq C \\ \lambda \geq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \min S = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{matrix} \xleftrightarrow{\text{非对称}} \begin{matrix} \max Z = \lambda b \\ \lambda A \leq C \end{matrix}$$

	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$\cdots$	x_n自	
$\lambda_1 \geq 0$	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	$\geq b_1$
$\lambda_2 \geq 0$	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	$\geq b_2$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
λ_m自	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	$= b_m$
	$\leq c_1$	$\leq c_2$	$\ldots$	$= c_n$	

(D)

$$\max Z = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \cdots + b_m\lambda_m$$

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \cdots + a_{m1}\lambda_m \leq c_1 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{m2}\lambda_m \leq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \cdots + a_{mn}\lambda_m = c_n \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \cdots, \lambda_m \text{为自由变量} \end{cases}$$

例1-16：

(P) $\min S = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3\text{自由变量} \end{cases}$$

$\min S = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 3 \\ -x_1 - 4x_2 - 6x_3 \geq -5 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3\text{自由变量} \end{cases}$$

	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	x_3自	
$\lambda_1 \geq 0$	2	3	5	≥ 2
λ_2自	3	1	7	$= 3$
$\lambda_3 \geq 0$	−1	−4	−6	≥ -5
	$\leq$	$\leq$	$=$	
	2	2	4	

(D) $\max Z = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \leq 2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 \leq 2 \\ 5\lambda_1 + 7\lambda_2 - 6\lambda_3 = 4 \\ \lambda_1, \lambda_3 \geq 0, \lambda_2\text{自由变量} \end{cases}$$

第一章 线性规划

第六节 对偶规划

- 对偶问题的提出
- 对偶规划的定义

作业：P96 9（1）（2）（3）

作业：P84 1（1）（2）（3）