10.6　线性多步法

一阶常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y'=f(x,y) & a\le x\le b \quad (1) \\ y(a)=\alpha & (2) \end{cases}$$

初值问题的数值解法：

- 单步法：$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)$, (显式)；$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,y_{n+1},h)$,(隐式)
- 多步法 ($n\ge k-1$)：$y_{n+1}=\sum_{j=1}^{k}a_{k-j}y_{n+1-j}+h\sum_{j=0}^{k}b_{k-j}f_{n-j+1}$，$f_{n-j+1}=f(x_{n-j+1},y_{n-j+1})$, 线性 k步法

k步法：计算y_{n+1}时，要用到前k步 $y_n, y_{n-1},\dots,y_{n-k+1}$的结果。

单步法是自开始的，k 步法需要k个开始值：$y_1, y_2,\dots,y_{k-1}$。

---

k步法：计算y_{n+1}时，要用到前k步 $y_n, y_{n-1},\dots,y_{n-k+1}$的结果。

$$y_{n+1}=\sum_{j=1}^{k}a_{k-j}y_{n+1-j}+h\sum_{j=0}^{k}b_{k-j}f_{n-j+1}$$

$$f_{n-j+1}=f(x_{n-j+1},y_{n-j+1}),\ \text{线性}\ k\text{步法}$$

例：2步法：$y_{n+1}=a_1y_n+a_0y_{n-1}+h(b_0f_{n-1}+b_1f_n+b_2f_{n+1})$

当$b_k=0$，　k步法是显式，当$b_k\ne 0$时，　k步法是隐式。

多步法的求解也是逐步进行的，即按公式
由已知的$y_0,y_1,\dots,y_n$,求y_{n+1}。显格式按递推公式求解，隐格式每一步需求解一个方程。

多步法的局部截断误差

多步法的一般形式为

$$y_{i+1}=\sum_{j=1}^{k}a_{k-j}y_{i-j+1}+h\sum_{j=0}^{k}b_{k-j}f_{i-j+1}$$

$$f_{i-j+1}=f(x_{i-j+1},y_{i-j+1}),$$

定义1　设$y(x)$是初值问题(1).(2) 的精确解，

$$\begin{cases} y'=f(x,y) & a\le x\le b \quad (1) \\ y(a)=\alpha & (2) \end{cases}$$

多步法（11）在x_{i+1} $(i=k,\dots,n-1)$处的局部截断误差为

$$T_{i+1}(h)=y(x_{i+1})-\sum_{j=1}^{k}a_{k-j}y(x_{i-j+1})-h\sum_{j=0}^{k}b_{k-j}f(x_{i-j+1},y(x_{i-j+1}))$$

$$=y(x_{i+1})-\sum_{j=1}^{k}a_{k-j}y(x_{i-j+1})-h\sum_{j=0}^{k}b_{k-j}y'(x_{i-j+1}) \quad (3)$$

例1　求差分格式　$y_{i+1}=y_i+(h/2)(3f_i-f_{i-1})$ 的局部截断误差。

解：差分格式 为2步法，由公式（12），在x_{i+1} 步的局部截断误差为

$$T_{i+1}(h)=y(x_{i+1})-y(x_i)-h(3y'(x_i)-y'(x_{i-1}))/2$$

由Taylor公式　$y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+(h^2/2)y''(x_i)+(h^3/3!)y^{(3)}(x_i)+O(h^4)$

$y'(x_{i-1})=y'(x_i-h)=y'(x_i)-hy''(x_i)+(h^2/2)y^{(3)}(x_i)+O(h^3)$

$$T_{i+1}(h)=y(x_{i+1})-y(x_i)-h(3y'(x_i)-y'(x_{i-1}))/2$$

$$=\cancel{h}y'(x_i)+(\cancel{h^2}/2)y''(x_i)+(h^3/3!)y^{(3)}(x_i)+O(h^4)-$$

$$h(\cancel{3}y'(x_i)\cancel{-}y'(x_i)+\cancel{h}y''(x_i)-(h^2/2)y^{(3)}(x_i)+O(h^3))/2=\frac{5}{12}h^3y_i^{(3)}+O(h^4)$$

所给2步法是2阶方法。

构造线性多步法：数值积分法、泰勒展开法、数值微分法

1.数值积分法

将微分方程　$y'=f(x,y)$ 在$[x_n,x_{n+1}]$积分，得

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y(x))dx$$

对积分：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y(x))dx$$

采用数值求积公式计算。

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y(x))dx \quad (4)$$

1）　k步Adams显式法

记 $f_i=f(x_i,y_i)$, $y_i\approx w_i$,过k个点 $(x_i,f_i)(i=n,n-1,\dots,n-k+1)$，作$f(x,y)$的牛顿向后插值多项式$P_{k-1}(x)$:

$$f(x,y(x))=P_{k-1}(x)+R_k(x) \quad (5)$$

这里，

$$P_{k-1}(x)=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{-s}{i}\nabla^i f_n,\ x=x_n+sh, 0\le s\le 1.$$

$$\binom{-s}{i}=(-1)^i\frac{s(s+1)\cdots(s+i-1)}{i!},\ \nabla^i f_n=\nabla^i f(x_n,y_n)$$

将(5)带入（4），得：

$$R_k(x)=\frac{f^{(k)}(\xi,y(\xi))}{k!}(x-x_n)\cdots(x-x_{n-k+1}) \quad (6)$$

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}}(P_{k-1}(x)+R_k(x))dx$$

$$=\int_{x_n}^{x_{n+1}}P_{k-1}(x)dx+\int_{x_n}^{x_{n+1}}R_k(x)dx$$

$$=\int_{x_n}^{x_{n+1}}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{-s}{i}\nabla^i f_n dx+\int_{x_n}^{x_{n+1}}R_k(x)dx,\ x=x_n+sh,0\le s\le 1.$$

$$=h\sum_{i=0}^{k-1}\nabla^i f_n\beta_i+\int_{x_n}^{x_{n+1}}R_k(x)dx,$$ 这里，

$$\beta_0=1,\beta_i=(-1)^i\int_0^1\binom{-s}{i}ds, i=1,\cdots,k-1$$

忽略误差项， 得k步Adams显式法:

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=0}^{k-1}\nabla^i f_n\beta_i,\quad (7)\qquad \nabla^i f_n=\nabla^i f(x_n,y_n)$$

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=0}^{k-1}\nabla^i f_n\beta_i,\quad (7)$$

k步Adams显式法

$$\beta_0=1,\beta_i=(-1)^i\int_0^1\binom{-s}{i}ds, i=1,\cdots,k-1$$

k步Adams显式法的局部截断误差 $\beta_k=(-1)^k\int_0^1\binom{-s}{k}ds,$

$$T_{n+1}(h)=\int_{x_n}^{x_{n+1}}R_k(x)dx=\beta_k h^{k+1}y^{(k+1)}(\eta)\qquad (8)$$

$$R_k(x)=\frac{f^{(k)}(\xi,y(\xi))}{k!}(x-x_n)\cdots(x-x_{n-k+1})$$

$$=\frac{y^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-x_n)\cdots(x-x_{n-k+1})\quad, x=x_n+sh,0\le s\le 1.\quad x_{n-i}=x_n-ih.$$

k步Adams显式法是k阶的。

常用的Adams显式法

k	order	公式	β_k
1	1	$y_{n+1}=y_n+hf_n$	1/2
2	2	$y_{n+1}=y_n+(h/2)(3f_n-f_{n-1})$	5/12
3	3	$y_{n+1}=y_n+(h/12)(23f_n-16f_{n-1}+5f_{n-2})$	3/8
4	4	$y_{n+1}=y_n+(h/24)(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3})$	251/720

4阶Adams显式法

$$y_{n+1}=y_n+(h/24)(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}),n=3,\cdots,N$$

例题3：用4阶Adams显式法求初值问题的数值解(取步长h=0.1计算到y_6)：

$$\begin{cases} y'=-2xy^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

解：4阶Adams显式法为

$$y_{n+1}=y_n+(h/24)(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}),n=3,\cdots,6$$

用经典的R-K方法提供开始值： y_1,y_2,y_3，计算结果如下：

x_i	0	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000
Adams	1.0000	0.9901	0.9615	0.9174	0.8624	0.8005	0.7359
4阶R-K	1.0000	0.9901	0.9615	0.9174	0.8621	0.8000	0.7353
精确解	1.0000	0.9901	0.9615	0.9174	0.8621	0.8000	0.7353

2） k步Adams隐式法

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y(x))dx$$

记$f_i=f(x_i,y_i)$, 过k+1个点$(x_i,f_i)(i=n+1,n,\ldots,n-k+1)$，作$f(x,y)$的插值多项式:

$$f(x,y(x))=P_k(x)+R_{k+1}(x)$$

$$P_k(x)=f_{n+1}+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{-s}{i}\nabla^i f_{n+1},\ x=x_{n+1}+sh,-1\le s\le 0.$$

$$R_{k+1}(x)=\frac{f^{(k+1)}(\xi,y(\xi))}{(k+1)!}(x-x_{n+1})(x-x_n)\cdots(x-x_{n-k+1})$$

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=f_{n+1}h+\int_{x_n}^{x_{n+1}}\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{-s}{i}\nabla^i f_{n+1}dx+\int_{x_n}^{x_{n+1}}R_{k+1}(x)dx$$

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=f_{n+1}h+h\sum_{i=1}^{k}\nabla^i f_{n+1}\gamma_i+\int_{x_n}^{x_{n+1}}R_{k+1}(x)dx$$

$$\gamma_i=(-1)^i\int_{-1}^0\binom{-s}{i}ds, i=1,\cdots,k.\quad \binom{-s}{i}=(-1)^i\frac{s(s+1)\cdots(s+i-1)}{i!},$$

$$y_{n+1}=y_n+f_{n+1}h+h\sum_{i=1}^{k}\nabla^i f_{n+1}\gamma_i\qquad (9)$$

$$f_i=f(x_i,w_i)$$ k步Adams隐式法

$$T_{n+1}(h)=\int_{x_n}^{x_{n+1}}R_{k+1}(x)dx=\gamma_k h^{k+2}y^{(k+2)}(\eta),x_{n-k+1}<\eta<x_{n+1}\qquad (10)$$

k步Adams隐式法是k+1阶的。

常用k步Adams隐式法

k	阶数	公式	γ_k
1	2	$y_{n+1}=y_n+(h/2)(f_{n+1}+f_n)$	$-1/12$
2	3	$y_{n+1}=y_n+(h/12)(5f_{n+1}+8f_n-f_{n-1})$	$-1/24$
3	4	$y_{n+1}=y_n+(h/24)(9f_{n+1}+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2})$	$-19/720$
4	5	$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{720}(251f_{n+1}+646f_n-264f_{n-1}+106f_{n-2}-19f_{n-3})$	$-3/160$

4阶Adams隐式法（3步法）

$$y_{n+1}=y_n+(h/24)(9f_{n+1}+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2}),n=2,\cdots,N$$

4阶Adams隐式法的计算

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+(h/24)(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}),n=3,\cdots,N \\ y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+(h/24)(9f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2}) \\ \qquad k=1,2,\cdots \end{cases}$$

4阶Adams隐式法的绝对稳定域比**4阶Adams**显式法大，**Adams**隐式公式的精度比同步**Adams**显式法高。但计算量较大。通常，将两个公式结合使用。

Adams预测-校正方法

通常用**4阶Adams**显式提供预测值，再用**4阶Adams**隐式法校正。

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(p)}=y_n+\frac{h}{24}(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(9f(x_{n+1},y_{n+1}^{(p)})+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2}) \end{cases}$$

例题4：用4阶Adams预测-校正法求初值问题的数值解(取步长h=0.1计算到y_6)：$\begin{cases} y'=-2xy^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$

解：
$$\begin{cases} y_{n+1}^{(p)}=y_n+\frac{h}{24}(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}) \\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(9f(x_{n+1},y_{n+1}^{(p)})+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2}) \end{cases}$$

用经典的R-K方法提供开始值：y_1,y_2,y_3，计算结果如下：

x_i	0	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000
Adams	1	0.9901	0.9615	0.9174	0.8624	0.8005	0.7359
P-C-Adams	1	0.9901	0.9615	0.9174	0.8620	0.7999	0.7352
4阶R-K	1	0.9901	0.9615	0.9174	0.8621	0.8000	0.7353
精确解	1	0.9901	0.9615	0.9174	0.8621	0.8000	0.7353

作业

习题 10
P319:8.

10.7 一阶微分方程组与高阶方程的数值解

1 一阶微分方程组

一阶微分方程的数值解法都可推广到一阶微分方程组。

n维一阶微分方程组的初值问题：

$$\begin{cases} y_1'=f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ y_2'=f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ \cdots\cdots \\ y_n'=f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} y_1(a)=\alpha_1 \\ y_2(a)=\alpha_2 \\ \cdots\cdots \\ y_n(a)=\alpha_n \end{cases} \quad (2)$$

$a\le x\le b$，其解为

$$y(x)=(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x))^T$$

考察二维一阶微分方程组的初值问题：

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y_1(a) = \alpha_1 \\ y_2(a) = \alpha_2 \end{cases} \quad (4)$$

$a \le x \le b$

引入记号

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, F(x,Y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y_1,y_2) \\ f_2(x,y_1,y_2) \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

则 $Y(a) = \begin{pmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \end{pmatrix} = \alpha$， $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$

二维一阶微分方程组的初值问题可写成向量形式：

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y' = F(x,Y) & (5) \\ Y(a) = \alpha & (6) \end{cases}$$

求解初值问题：
$$\begin{cases} Y' = F(x,Y) & (5) \\ Y(a) = \alpha & (6) \end{cases}$$

的Euler方法为
$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + hF(x_n, Y_n) & (7) \\ Y_0 = \alpha & (8) \end{cases}$$

这里， $Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = a$

$$F(x_n, Y_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_n, y_{1n}, y_{2n}) \\ f_2(x_n, y_{1n}, y_{2n}) \end{pmatrix}$$

求解初值问题：
$$\begin{cases} Y' = F(x,Y) \\ Y(a) = \alpha \end{cases}$$

的经典的R-K方法为

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) & (10) \\ K_1 = F(x_n, Y_n) \\ K_2 = F(x_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 = F(x_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \frac{1}{2}hK_2) \\ K_4 = F(x_n + h, Y_n + hK_3) \\ Y_0 = \alpha \end{cases}$$

例题4 用经典的R-K方法求解一阶微分方程组的初值问题 (取步长h=0.05)。

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases} \quad 0 \le x \le 0.2,$$

$$\begin{cases} y_1(0) = 6 \\ y_2(0) = 4 \end{cases}$$

解：设 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, F(x,Y) = \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 3y_1 + 2y_2 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

所给初值问题可写成向量形式：
$$\begin{cases} Y' = F(x,Y) \\ Y(0) = \alpha \end{cases}$$

求解该问题的经典的R-K方法为

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = F(x_n, Y_n) \\ K_2 = F(x_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 = F(x_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \frac{1}{2}hK_2) \\ K_4 = F(x_n + h, Y_n + hK_3) \\ Y_0 = \alpha \end{cases}$$

$n = 1,2,3,4$ 这里， $Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}, x_n = nh, h = 0.05$

x_i	0	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000
Y_n	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
y_{1n}	6.0000	6.7881	7.7769	9.0098	10.5395
y_{2n}	4.0000	5.4259	7.1412	9.2112	11.7157

$Y(x_n)$	$Y(0)$	$Y(0.05)$	$Y(0.1)$	$Y(0.15)$	$Y(0.2)$
$y_1(x_n)$	6.0000	6.7881	7.7770	9.0099	10.5396
$y_2(x_n)$	4.0000	5.4260	7.1413	9.2113	11.7158

2 高阶微分方程的数值解

对于高阶微分方程可通过变量代换，将其化为一阶微分方程组。

考察二阶微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y(a)=\alpha \\ y'(a)=\alpha_1 \end{cases} \quad a\le x\le b, \quad (11)$$

引入变量 $\begin{cases} y_1=y \\ y_2=y' \end{cases}$

初值问题（11）化为二维一阶微分方程组

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=f(x,y_1,y_2) \\ y_1(a)=\alpha \\ y_2(a)=\alpha_1 \end{cases}$$

例题5 求解 $\begin{cases} y''+y'=x+1 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$ 取步长h=0.1，算至x=0.5。

解：设 $\begin{cases} y_1=y \\ y_2=y' \end{cases}$ 则有 $\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=-y_2+x+1 \\ y_1(0)=1 \\ y_2(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y'=F(x,Y) \\ Y(0)=\alpha \end{cases}$

这里 $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad F(x,Y)=\begin{pmatrix} y_2 \\ -y_2+x+1 \end{pmatrix}, \quad \alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

用改进的Euler方法 $\begin{cases} Y_{n+1}=Y_n+\dfrac{h}{2}(K_1+K_2) \\ K_1=F(x_n,Y_n) \\ K_2=F(x_{n+1},Y_n+hK_1) \\ Y_0=\alpha \end{cases} \quad n=1,\cdots,5$

$x_0=0$，$h=0.1$

这里，$Y_n=\begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}, Y_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, K_1=F(x_n,Y_n)=\begin{pmatrix} y_{2n} \\ -y_{2n}+x_n+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{pmatrix}$

$$K_2=F(x_{n+1},Y_n+hK_1)=\begin{pmatrix} y_{2n}+hK_{21} \\ -(y_{2n}+hK_{21})+x_{n+1}+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{pmatrix}$$

改进Euler法 $y(x_n)\approx y_{1n}$,$y(x)=-e^{-x}+(1/2)x^2+2$

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_{1n}	1	1.1000	1.2010	1.3038	1.4092	1.5179
y_{2n}	1	1.0050	1.0190	1.0412	1.0708	1.1071
$y(x_n)$	1	1.10016	1.20127	1.30418	1.40968	1.51847

经典的R-K方法

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_{1n}	1	1.1002	1.2013	1.3042	1.4097	1.5185
y_{2n}	1	1.0048	1.0187	1.0408	1.0703	1.1065