目录

1、 线性规划 2
1.2、基本概念和定理 2
1.4、单纯形法 4
1.6、对偶规划 4
1.8、对偶单纯形 4
1.9、灵敏度分析 6
1.10、产销平衡运输问题 11
3、非线性规划 14
3.3、一维搜索 14
3.4、无约束优化 16
3.4.1、最速下降 16
3.4.2、共轭梯度下降 18
3.6、K-T+内外点法 21
3.6.1、K-T 条件 21
3.6.2、外点法 22
3.6.3、内点法 23
4、多目标规划 24
5、动态规划 26
5.2、投资分配 26
5.3、一维背包问题 27
5.4、二位背包问题 28
6、作业截图 28

1、 线性规划

1.2、基本概念和定理

$$AX=b \Rightarrow (B,N)\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=b \quad X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}\geq 0$$

$$\Rightarrow X_B+B^{-1}NX_N=B^{-1}b \Rightarrow \boxed{X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N}$$

$$(LP)\ \min S=CX$$

$$AX=b \rightarrow X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$$

$$X\geq 0$$

$$S=CX=(\underbrace{c_1,c_2,\cdots,c_m}_{C_B},\underbrace{c_{m+1},c_{m+2},\cdots,c_n}_{C_N})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\\x_{m+1}\\x_{m+2}\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\\\\\\end{matrix}\right\}X_B\\\left.\begin{matrix}\\\\\\\end{matrix}\right\}X_N\end{matrix}$$

$$=(C_B,C_N)\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=C_BX_B+C_NX_N$$

$$=C_B(B^{-1}b-B^{-1}NX_N)+C_NX_N$$

$$=C_BB^{-1}b-C_BB^{-1}NX_N+C_NX_N$$

$$=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N$$

$$\boxed{S=CX=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N}$$ 规划1-2

对比概念： $\because R(A)=m \therefore A=(B,N), B-$可逆

$B-$基(可逆)	$X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}-$基本解$(AX=b)$
$B-$可行基	$X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}-$基本可行解，$B^{-1}b\geq 0$ $(AX=b, X\geq 0)$
$B-$最优基	$X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}-$最优基本可行解 $B^{-1}b\geq 0,\quad C-C_B B^{-1}A\geq 0$

非退化的基本可行解：

若基本可行解$X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$中，$B^{-1}b\boxed{>}0$，则称该基本可行解为非退化基本可行解。

退化的基本可行解：

若基本可行解$X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$中，$B^{-1}b\boxed{\geq}0$，且$B^{-1}b$中$\boxed{\text{至少有一个分量为 0}}$，则称该基本可行解为退化基本可行解。

1.4、单纯形法

$$\begin{cases} \min S = CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$C_N - C_B B^{-1} N = (y_{0m+1}, y_{0m+2}, \cdots, y_{0n})$$

$$\begin{aligned} & C_N - C_B B^{-1} N \\ &= (c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots c_n) - C_B B^{-1}(p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots, p_n) \\ &= (c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots c_n) - (C_B B^{-1} p_{m+1},\ C_B B^{-1} p_{m+2}, \cdots,\ C_B B^{-1} p_n) \\ &= (\underline{c_{m+1} - C_B B^{-1} p_{m+1}},\ \underline{c_{m+2} - C_B B^{-1} p_{m+2}}, \cdots,\ \underline{c_n - C_B B^{-1} p_n}) \end{aligned}$$

非基变量 x_j 的检验数

$$\left.\begin{aligned} y_{0m+1} &= c_{m+1} - C_B B^{-1} p_{m+1} \\ y_{0m+2} &= c_{m+2} - C_B B^{-1} p_{m+2} \\ &\vdots \\ y_{0n} &= c_n - C_B B^{-1} p_n \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \\ & j = m+1, m+2, \cdots, n \end{aligned}$$

1.6、对偶规划

若X^*是(P)的最优基本可行解，B是相应的最优基，则单纯形乘子$\boxed{\pi = C_B B^{-1}}$是(D)的最优解。

1.8、对偶单纯形

单纯形法是保持 $B^{-1}b \geq 0$使迭代向实现 $C - C_B B^{-1} A \geq 0$进行。

对偶单纯形法是保持 $C - C_B B^{-1} A \geq 0$ 使迭代向实现 $B^{-1}b \geq 0$ 进行。

对偶可行解，正则基：

若(P)的一个基B，使得单纯形乘子$\lambda = C_B B^{-1}$是(D)的可行解$(C-\lambda A = \underline{C - C_B B^{-1} A \geq 0})$，则$(P)$相应的基本解

$X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$称为对偶可行解，$B$称为正则基。

三. 举例：

注意： 对偶单纯形法开始于一个正则基B,即$C - C_B B^{-1} A \geq 0$

所以适用于$C \geq 0$且不等式约束都是"$\geq$"的问题。

例1-17：

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \xrightarrow{\text{标准形}} \min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$C = (3,4,5) \geq 0$

$\downarrow$ 正则基

$$\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

正则基$B = (p_4, p_5) = E$

$C_B = (0,0) \quad C - C_B B^{-1} A \geq 0$

$C = (3,4,5,0,0)$

例1-17： $\min S = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geqslant 0$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		3	4	5	0	0
y_{0j}	0	3	4	5	0	0
0 x_4	-5	-1	-2	-3	1	0
0 x_5	-6	-2	-2	-1	0	1

$B = (p_4, p_5)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

正则基

$B^{-1}b \geq 0$? ✕

$\varepsilon = \min\{\frac{y_{0j}}{-y_{rj}} \mid y_{rj} < 0\} = \min\{\frac{3}{1}, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}\} = \frac{5}{3}$ → x_3为进基变量

1.9、灵敏度分析

一、C的灵敏度分析

(1) c_j 是非基变量 x_j 的系数；

设 $c_j \to c_j + \Delta c_j$，其他参数(C中其他分量, A, b)都不变。

改变量Δc_j只影响 x_j 的检验数 y_{0j}：

			x_1	x_2	x_3	x_j	x_4	x_5
		0	2	3	1	c_j	$c_j+\Delta c_j$	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$		1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	$c_j+\Delta c_j-C_BB^{-1}p_j\le 0$		1
$-C_BB^{-1}b$		−8	0	0	−3	$c_j-C_BB^{-1}p_j\le 0$	−5	−1
最优表	x_1	1	1	0	−1	$B^{-1}p_j$	4	−1
	x_2	2	0	1	2		−1	1

$B^{-1}b$

最优解: $X^*=(1,2,0,\cancel{0,0})^T, S^*=8$

最优基: $B=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ 1/3 & 4/3\end{pmatrix}$ $\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

(2) c_{J_r}是第r个方程的基变量x_{J_r}的系数

当c_{J_r}有改变量Δc_{J_r}时，则C_B发生变化：$C_B\to C_B+\Delta C_B$

$$\begin{array}{c} x_{J_1},\cdots,x_{J_r},\cdots,x_{J_m}\\ C_B=(c_{J_1},\cdots,c_{J_r},\cdots,c_{J_m})\end{array}$$

$$C_B+\Delta C_B=(c_{J_1},\cdots,c_{J_r}+\Delta c_{J_r},\cdots,c_{J_m})$$

所有非基变量检验数 $y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$ 都随之变化，

为使原最优解不变，所有非基变量的新检验数

$$y'_{0j}=c_j-(C_B+\Delta C_B)B^{-1}p_j\le 0$$

$$y'_{03}=1-(2+\Delta c_1,3)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\Delta c_1-3\le 0\to\Delta c_1\le 3$$

$$y'_{04}=0-(2+\Delta c_1,3)\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=-4\Delta c_1-5\le 0\to\Delta c_1\ge -5/4$$

$$y'_{05}=0-(2+\Delta c_1,3)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\Delta c_1-1\le 0\to\Delta c_1\le 1$$

$$-5/4\le\Delta c_1\le 1$$

线性规划1-9

$-5/4 \le \Delta c_1 \le 1$

$\bar{c}_1 = c_1 + \Delta c_1$ 在[2-5/4, 2+1]=[3/4, 3]内变化时，原X^*不变，

二、b的灵敏度分析

当第r个方程右端项 $b_r \to \bar{b}_r$，即 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \to \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

而其他参数不变时，问 b_r 在什么范围内变化时，最优基B不变？

分析： 因为b的变化不影响检验数 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j$，

所以当 $b \to \bar{b}$ 时，在最优表中 $\boxed{B^{-1}b \to B^{-1}\bar{b}, \quad \geqslant 0 \quad 若仍 \geqslant 0}$

则最优基B不变。

但最优解和最优值都发生变化：

$$X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}\bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} \quad S^* = C_B B^{-1}\bar{b}$$

当 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 时，为使最优基B不变，

$$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\bar{b}_1 - 3 \\ -\bar{b}_1 + 3 \end{pmatrix} \ge 0 \to \frac{3}{4} \le \bar{b}_1 \le 3$$

但 X^*, S^*变化为： $X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}\bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} \quad S^* = C_B B^{-1}\bar{b}$

		求min的问题	求max的问题
最优性判别		$B^{-1}b \geq 0$ $C - C_B B^{-1} A \geq 0$	$B^{-1}b \geq 0$ $C - C_B B^{-1} A \leq 0$
单纯形法	进基	$y_{0q} < 0,\quad x_q$ 进基	$y_{0q} > 0,\quad x_q$ 进基
	离基	$\min\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0\} = \frac{y_{p0}}{y_{pq}}$	$\min\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0\} = \frac{y_{p0}}{y_{pq}}$
对偶单纯形法	离基	$y_{r0} < 0,\quad x_{J_r}$ 离基	$y_{r0} < 0,\quad x_{J_r}$ 离基
	进基	$\min\{\frac{y_{0j}}{-y_{rj}} \mid y_{rj} < 0\} = \frac{y_{0k}}{-y_{rk}}$	$\min\{\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \mid y_{rj} < 0\} = \frac{y_{0k}}{y_{rk}}$

一、C的灵敏度分析 ——改变C中一个元素

(1) c_j 是非基变量 x_j 的系数

设最优表中 x_j的原检验数 $y_{0j} = c_j - c_B B^{-1} p_j \leq 0$

若新检验数 $y'_{0j} = y_{0j} + \Delta c_j$仍 ≤ 0 则最优解不变。

否则， x_j 进基，用单纯形法找新的最优解。

(2) c_{J_r}是第r 个方程的基变量 x_{J_r}的系数

为使原最优解不变，需所有非基变量的新检验数

$y'_{0j} = c_j - (C_B + \Delta C_B) B^{-1} p_j \leq 0$ （不等式组）

否则，用单纯形法找新的最优解。

二、b的灵敏度分析

当 $b \to \bar{b}$ 时，在最优表中 $B^{-1}b \to B^{-1}\bar{b}$，

$\geqslant 0$　若仍 $\geqslant 0$

则最优基B不变。但最优解和最优值都发生变化，

新最优解和最优值为 $X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}\bar{b} \\ 0 \end{pmatrix}$，$S^* = C_B B^{-1}\bar{b}$

若 $B^{-1}\bar{b} \ngeq 0$，用对偶单纯形法找新的最优解。

三、A的灵敏度分析

(1)某个元素 a_{ij} 有改变量 Δa_{ij}，且它是非基列 p_j 的分量：

$$p_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \to \bar{p}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} + \Delta a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

非基变量x_j的原检验数 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \leq 0$

非基变量x_j的新检验数 $y'_{0j} = c_j - C_B B^{-1} \bar{p}_j \leq 0$

则原最优解不变。

若 $y'_{0j} = c_j - C_B B^{-1} \bar{p}_j > 0$，则原最优解不再是最优解。

让 x_j进基进行换基运算求出新的最优解。

(2) 增加新的一列(即增加一个新的变量)

设增加变量 x_{n+1} ,对应的成本系数为c_{n+1}， 系数列 p_{n+1}

即在单纯形表中新增加一列： c_{n+1}

x_{n+1}

p_{n+1}

则在最优表中 x_{n+1} 的检验数为： $y_{0n+1} = c_{n+1} - C_B B^{-1} p_{n+1}$

若 $y_{0n+1} \le 0$，则原最优解不变；

若 $y_{0n+1} > 0$，则原最优解不再最优。x_{n+1} 进基，求新的最优解。

(3) 增加新的一行(即增加一个新的约束)

$X \ge 0$

设增加新的约束为：$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \cdots + a_{m+1,n}x_n \le b_{m+1}$

a) 如果原最优解满足新约束，则原最优解仍是最优的。

b) 如果原最优解不满足新约束，则原最优解不再最优。

为了寻求新的最优解，在新约束中加松弛变量 x_{n+1}，

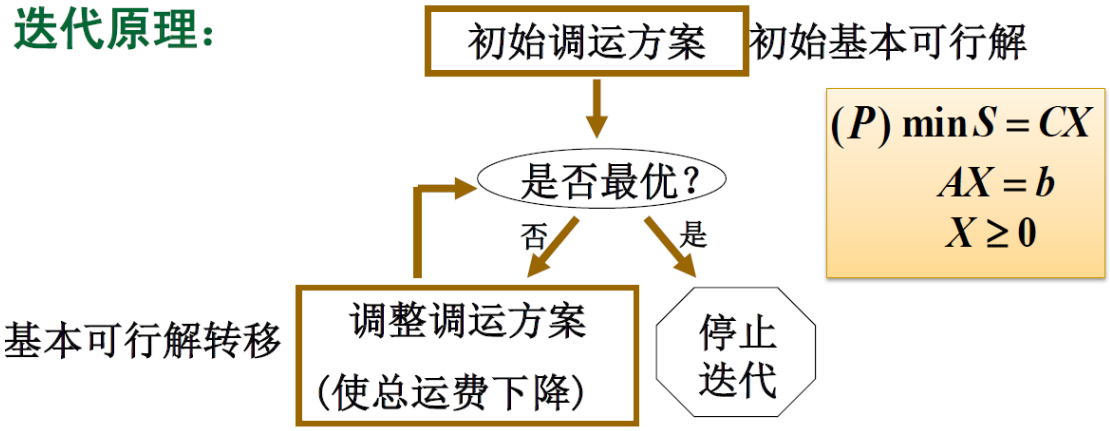
$$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \cdots + a_{m+1,n}x_n + x_{n+1} = b_{m+1}$$

在原最优表中增加新的一行(对应新约束)，然后用对偶单纯形法求新的最优解。

1.10、产销平衡运输问题

产销平衡运输问题的表上作业法：

迭代原理：



$$(P)\ \min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

迭代步骤： 1. 初始调运方案的求法--最小元素法

2. 建立最优性检验准则

3. 调运方案的调整--位势法

调运方案的调整--位势法(基本可行解的转移)

确定进基变量：

逐行检查，第一个负检验数对应的非基变量（没*格子中的运量）进基，可使总运费下降。

2. 建立最优性检验准则　例1-23

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	a_1	u_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	a_2	u_2
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	a_3	u_3
销量	b_1	b_2	b_3	b_4		
	v_1	v_2	v_3	v_4		

行位势数

列位势数

$$(P)\ \min S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_{ij}=b_j,\quad j=1,2,3,4$$

$$x_{ij}\ge 0$$

$$(D)\ \max Z=\sum_{i=1}^{3}a_iu_i+\sum_{j=1}^{4}b_jv_j$$

$$u_i+v_j\le c_{ij}\quad i=1,2,3\quad j=1,2,3,4$$

变量$m+n$个；方程$m+n-1$个

2. 建立最优性检验准则　例1-23

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	1.5 20*	2	0.3 80*	3	100	$u_1=0$
A_2	7 30*	0.8 20*	1.4	2 30*	80	$u_2=5.5$
A_3	1.2	0.3 50*	2	2.5	50	$u_3=5$
销量	50	70	80	30	230	
	$v_1=1.5$	$v_2=-4.7$	$v_3=0.3$	$v_4=-3.5$		

$$\begin{cases} u_1+v_1=1.5 \\ u_1+v_3=0.3 \\ u_2+v_1=7 \\ u_2+v_2=0.8 \\ u_2+v_4=2 \\ u_3+v_2=0.3 \end{cases}$$

设 $X=(x_{ij})$ 是(P)的一个基本可行解，寻找(D)的一个可行解

$\lambda=(u_i,v_j)$ 使 $x_{ij}(c_{ij}-u_i-v_j)=0$ → *格子中，$c_{ij}-u_i-v_j=0$

$i=1,2,3,\ j=1,2,3,4$

*格子中，$c_{ij}=u_i+v_j$

令 $u_1=0$，得到方程组的一个解：

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$$

$$\lambda=(0,\ 5.5,\ 5,\ 1.5,\ -4.7,\ 0.3,\ -3.5)$$

$\min S=CX$
$AX=b$
$X\ge 0$

$\max Z=\lambda b$
$\lambda A\le C$

最优性检验： 检验 $\lambda=(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3,v_4)$ 是否是(D)的可行解

$\rightarrow u_i+v_j\le c_{ij}\,?\rightarrow c_{ij}-u_i-v_j\ge 0?$

若 x_{ij} 的检验数 $\lambda_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j\begin{cases}=0, & *\text{格子中},\\ \ge 0, & \text{没}*\text{格子中}\end{cases}$

则 λ 是(D)的可行解，$X=(x_{ij})$是(P)的最优解。而 $\lambda_{23}=-4.4<0$

$\therefore\lambda$ 不是(D)的可行解，$X=(x_{ij})$不是(P)的最优解。

调运方案的调整： 假设 $x_{11}=0$ 为非基变量，$\lambda_{11}<0$，则 x_{11}为进基变量，

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	$x_{11}+\theta$ 0	$x_{12}-\theta$ 1			a_1
A_2		$x_{22}+\theta$ 2		$x_{24}-\theta$ 3	a_2
A_3	$x_{31}-\theta$ 5			$x_{34}+\theta$ 4	a_3
销量	b_1	b_2	b_3	b_4	

结论： $\theta=\min\{x_{12},x_{24},x_{31}\}=$ 奇数次顶点处的最小运量

$=x_{24}\rightarrow x_{24}$ 为离基变量

调整： 闭回路上$\begin{cases}\text{偶数次顶点处的运量 }+\theta\\ \text{奇数次顶点处的运量 }-\theta\end{cases}$

不在闭回路顶点上的其它各运量不变。$S^1=S^0+\lambda_{11}\theta$

调整后，$x_{11}=\theta$为基变量，$x_{24}=0$ 为非基变量，得到的新的基本可行解(新的调运方案)使总运费下降。

3、非线性规划

3.3、一维搜索

保留区间长度 ≤ 精度 ε

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

k	0	1	2	3	.....	n-1
l_k	1	$\frac{F_n}{F_{n+1}}$	$\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$	$\frac{F_{n-2}}{F_{n+1}}$	.....	$\frac{F_2}{F_{n+1}}=\frac{2}{F_{n+1}}$

此时保留区间中点与极小点λ^*之间的最大距离$\le \frac{1}{F_{n+1}} < \varepsilon$

$\rightarrow \boxed{F_{n+1} > \frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow F_{n+1}$

例如：$\varepsilon = 0.01$ $F_{n+1} > \frac{1}{\varepsilon} = 100$ $F_{n+1} = 144$

此时保留区间中点与极小点λ^*之间的最大距离$\le \frac{b-a}{F_{n+1}} < \varepsilon$

$\rightarrow \boxed{F_{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon}} \rightarrow F_{n+1}$

例如：$\varepsilon = 0.01, b-a = 3$ $F_{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon} = 300$ $F_{n+1} = 377$

3.4、无约束优化

3.4.1、最速下降

3. 迭代步骤

1^0 取初始点 $X^{(0)}$，容许误差（精度）$\varepsilon > 0$，令 $k := 0$

2^0 计算 $p^{(k)} = -\nabla f(X^{(k)})$

3^0 检验 $\|p^{(k)}\| \le \varepsilon$？若是迭代终止，取 $X^* = X^{(k)}$，否则转 4^0

4^0 求最优步长 λ_k：$\min\limits_{\lambda \ge 0} f(X^{(k)} + \lambda p^{(k)}) = f(X^{(k)} + \lambda_k p^{(k)})$（一维搜索）

5^0 令 $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$，令 $k := k+1$，转 2^0

$k = 0 \quad p^0 = -\nabla f(X^0), \quad \|p^{(0)}\| \le \varepsilon$？若是取 $X^* = X^{(0)}$，否则

$\min\limits_{\lambda \ge 0} f(X^0 + \lambda p^0) = f(X^0 + \lambda_0 p^0), \quad X^1 = X^0 + \lambda_0 p^0$

$k = 1 \quad p^1 = -\nabla f(X^1), \quad \|p^{(1)}\| \le \varepsilon$？若是取 $X^* = X^{(1)}$，否则

$\min\limits_{\lambda \ge 0} f(X^1 + \lambda p^1) = f(X^1 + \lambda_1 p^1), \quad X^2 = X^1 + \lambda_1 p^1$

$k = 2 \quad p^2 = -\nabla f(X^2), \quad \|p^{(2)}\| \le \varepsilon$？若是取 $X^* = X^{(2)}$，否则

$\min\limits_{\lambda \ge 0} f(X^2 + \lambda p^2) = f(X^2 + \lambda_2 p^2), \quad X^3 = X^2 + \lambda_2 p^2$ 规划3-4

2^0 结论： 一维搜索最优解的梯度 $\nabla f(X^{(k+1)})$ 与搜索方向 $p^{(k)}$ 正交

证明：

$$\because \min_{\lambda \ge 0} \underbrace{f(X^{(k)} + \lambda p^{(k)})}_{\varphi(\lambda)} = \underbrace{f(X^{(k)} + \lambda_k p^{(k)})}_{\varphi(\lambda_k)} \quad \varphi'(\lambda) = \nabla f(X^{(k)} + \lambda p^{(k)})^T p^{(k)}$$

$$\varphi'(\lambda_k) = \nabla f(X^{(k)} + \lambda_k p^{(k)})^T p^{(k)}$$

$$\therefore 0 = \varphi'(\lambda_k) = \nabla f(X^{(k+1)})^T p^{(k)} \quad (3-11)$$

3^0 结论： 最速下降法的任何两个相邻搜索方向正交(垂直)

$$\because \min_{\lambda \ge 0} \underbrace{f(X^{(k)} + \lambda p^{(k)})}_{\varphi(\lambda)} = \underbrace{f(X^{(k)} + \lambda_k p^{(k)})}_{\varphi(\lambda_k)} \quad \varphi'(\lambda) = \nabla f(X^{(k)} + \lambda p^{(k)})^T p^{(k)}$$

$$\therefore 0 = \varphi'(\lambda_k) = \nabla f(X^{(k+1)})^T p^{(k)} \quad (3-11) \longrightarrow p^{(k+1)^T} p^{(k)} = 0$$

4^0 将一维搜索用于正定二次函数：$f(X)=\frac{1}{2}X^TQX+b^TX+c$

则可以得到 λ_k 的表达式：　令$g^{(k)}=\nabla f(X^{(k)})$

$$\lambda_k=-\frac{g^{(k)^T}p^{(k)}}{p^{(k)^T}Qp^{(k)}}\quad(3-13)$$

5^0 将最速下降法用于正定二次函数：$f(X)=\frac{1}{2}X^TQX+b^TX+c$

则可以得到 λ_k 的表达式：　令$g^{(k)}=\nabla f(X^{(k)})$

$$\boxed{\lambda_k=-\frac{g^{(k)^T}p^{(k)}}{p^{(k)^T}Qp^{(k)}}}\quad(3-13)\xrightarrow{p^{(k)}=-g^{(k)}}\boxed{\lambda_k=\frac{g^{(k)^T}g^{(k)}}{g^{(k)^T}Qg^{(k)}}}\quad(3-14)$$

5^0 最速下降法，*Newton*法，拟*Newton*法，共轭梯度法的区别

就是搜索方向$p^{(k)}$取得不同。

$$p^{(k)}=-\nabla f(X^{(k)})$$

$$p^{(k)}=-G(X^{(k)})^{-1}\nabla f(X^{(k)})$$

$$p^{(k)}=-H^{(k)}\nabla f(X^{(k)})$$

$$p^{(k)}=-\nabla f(X^{(k)})+\beta_{k-1}p^{(k-1)}$$

3.4.2、共轭梯度下降

2. 二次函数共轭梯度法的迭代原理

$$\lambda_k = -\frac{g^{(k)^T} p^{(k)}}{p^{(k)^T} Q p^{(k)}}$$

求 $\min\limits_{X \in R^n} f(X) = \frac{1}{2} X^T Q X + b^T X + c$ 的最优解 X^*。Q

$X^{(1)}$ $\quad p^{(1)} = -g^{(1)}$ $\qquad X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda_1 p^{(1)}$

$X^{(2)}$ $\quad p^{(2)} = -g^{(2)} + \beta_1 p^{(1)}$ $\quad \beta_1 = \dfrac{g^{(2)^T} Q p^{(1)}}{p^{(1)^T} Q p^{(1)}}$ $\qquad X^{(3)} = X^{(2)} + \lambda_2 p^{(2)}$

确定 β_1： $\quad p^{(2)^T} Q p^{(1)} = -g^{(2)^T} Q p^{(1)} + \beta_1 p^{(1)^T} Q p^{(1)} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\beta_1 = \frac{g^{(2)^T} Q p^{(1)}}{p^{(1)^T} Q p^{(1)}}$$

$X^{(3)}$ $\quad p^{(3)} = -g^{(3)} + \beta_2 p^{(2)}$

确定 β_2： $\quad p^{(3)^T} Q p^{(2)} = -g^{(3)^T} Q p^{(2)} + \beta_2 p^{(2)^T} Q p^{(2)} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\beta_2 = \frac{g^{(3)^T} Q p^{(2)}}{p^{(2)^T} Q p^{(2)}}$$

2. 二次函数共轭梯度法的迭代原理

$$\lambda_k = -\frac{g^{(k)T} p^{(k)}}{p^{(k)T} Q p^{(k)}}$$

求 $\min\limits_{X \in R^n} f(X) = \frac{1}{2} X^T Q X + b^T X + c$ 的最优解 X^*。Q

$$X^{(1)} \quad p^{(1)} = -g^{(1)} \qquad X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda_1 p^{(1)}$$

$$X^{(2)} \quad p^{(2)} = -g^{(2)} + \beta_1 p^{(1)} \quad \beta_1 = \frac{g^{(2)T} Q p^{(1)}}{p^{(1)T} Q p^{(1)}} \quad X^{(3)} = X^{(2)} + \lambda_2 p^{(2)}$$

$$X^{(3)} \quad p^{(3)} = -g^{(3)} + \beta_2 p^{(2)} \quad \beta_2 = \frac{g^{(3)T} Q p^{(2)}}{p^{(2)T} Q p^{(2)}} \quad X^{(4)} = X^{(3)} + \lambda_3 p^{(3)}$$

$$X^{(k)} \quad p^{(k)} = -g^{(k)} + \beta_{k-1} p^{(k-1)} \quad \beta_{k-1} = \frac{g^{(k)T} Q p^{(k-1)}}{p^{(k-1)T} Q p^{(k-1)}} \quad X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

共轭梯度法是共轭方向法，具有二次终止性

4. 一般函数的共轭梯度法

$$\beta_k = \frac{g^{(k+1)T} Q p^{(k)}}{p^{(k)T} Q p^{(k)}} = \frac{g^{(k+1)T}(g^{(k+1)} - g^{(k)})}{-p^{(k)T} g^{(k)}}$$

$$g^{(k+1)T} g^{(k)} = 0$$

$$g^{(k)T} p^{(k)} = -g^{(k)T} g^{(k)}$$

1^0 $\beta_k = \dfrac{g^{(k+1)T} g^{(k+1)}}{g^{(k)T} g^{(k)}}$ (3-32) 称为*FR*公式

2^0 $\beta_k = \dfrac{g^{(k+1)T} g^{(k+1)}}{-p^{(k)T} g^{(k)}}$ (3-33) 称为*DM*公式

3^0 $\boxed{\beta_k = \dfrac{g^{(k+1)T}(g^{(k+1)} - g^{(k)})}{g^{(k)T} g^{(k)}} \quad \text{(3-34) 称为PRP公式}}$

这三个公式对应的共轭梯度法分别称为*FR*, *DM* 和 *PRP*算法.

5. PRP算法的迭代步骤

$3^0\ \beta_k = \dfrac{g^{(k+1)^T}(g^{(k+1)} - g^{(k)})}{g^{(k)^T} g^{(k)}}$ PRP公式

1^0 给定初始点 $X^{(1)}$,容许误差 $\varepsilon > 0$

$2^0\ \|g^{(1)}\| < \varepsilon$? 若满足,迭代终止,取$X^* = X^{(1)}$ 否则,转 3^0

3^0 令$p^{(1)} = -g^{(1)}$, 置 $k := 1$

$4^0\ \min\limits_{\lambda \geq 0} f(X^{(k)} + \lambda p^{(k)}) = f(X^{(k)} + \lambda_k p^{(k)})$ $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$

$5^0\ \|g^{(k+1)}\| < \varepsilon$? 若满足,迭代终止,取$X^* = X^{(k+1)}$ 否则,转 6^0

6^0 若 $k = n$, 则令 $X^{(1)} := X^{(k+1)}$转 3^0

若 $k < n$, 计算$\beta_k = \dfrac{g^{(k+1)^T}(g^{(k+1)} - g^{(k)})}{g^{(k)^T} g^{(k)}}$, $p^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)}$

在*PRP*算法中,每*n*次迭代中的第一步取负梯度方向为其搜索方向,这种做法简称为“*n*步重新开始”.这是为了减少舍入误差的影响,加快收敛速度。

3.6、K-T+内外点法

3.6.1、K-T 条件

一阶必要条件： (NP) $\boxed{\min f(X)}$

$$s.t.\begin{cases} g_i(X)\geq 0, i=1,2,\cdots,m & \lambda_i \\ h_j(X)=0, j=1,2,\cdots,p & \mu_j \end{cases}$$

定理5-3 Kuhn-Tucher条件(K-T条件):

设X^*是局部极小点，$f,g_i,h_j,\forall i,j$在X^*连续可微，$\nabla g_i(X^*), i\in E$和 $\nabla h_j(X^*), j=1,\cdots,p$ 线性无关，则存在λ_i^*,μ_j^* 满足

$$\boxed{\begin{cases} \nabla f(X^*)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla g_i(X^*)-\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0 \\ \lambda_i^*\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m \\ \lambda_i^* g_i(X^*)=0, i=1,\cdots,m \quad \text{（互补条件）} \end{cases}}$$

注意：相应于 ≥ 约束，要求 $\lambda_i^*\geq 0,\ i=1,\cdots,m$

例： 试写出 $\min f(X)=x_1$ 的K-T条件

$$s.t.\ \begin{cases} g(X)=16-(x_1-4)^2-x_2^2\geq 0 & \lambda \\ h(X)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13=0 & \mu \end{cases}$$

解： $\nabla f(X)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\nabla g(X)=\begin{pmatrix}-2(x_1-4)\\-2x_2\end{pmatrix}$, $\nabla h(X)=\begin{pmatrix}2(x_1-3)\\2(x_2-2)\end{pmatrix}$,

所以，Kuhn-Tucher条件(K-T条件)为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}-2(x_1-4)\\-2x_2\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}2(x_1-3)\\2(x_2-2)\end{pmatrix}=0 \\ \lambda[16-(x_1-4)^2-x_2^2]=0 \\ \lambda\geq 0 \\ h(X)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla f(X^*)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla g_i(X^*)-\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0 \\ \lambda_i^*\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m \\ \lambda_i^* g_i(X^*)=0,\ i=1,\cdots,m \end{cases}$$

可分析出哪些是可能的解点.

3.6.2、外点法

二. 外点法迭代步骤

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X)\geq 0$$
$$h_j(X)=0$$

$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2+M\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

1^0 给定$X^{(0)}$，$M_1(=1)>0$，$\varepsilon>0$, $k:=1$

2^0 求 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M_k)$ 的最优解$X^{(k)}(M_k)$(用数值迭代的方法求解)

3^0 若 $g_i(X^{(k)}(M_k))>-\varepsilon$，$i=1,2,,\cdots m$，$\left|h_j(X^{(k)}(M_k))\right|<\varepsilon\ j=1,2,\cdots,p$

则迭代终止，$X^*=X^{(k)}(M_k)$

否则取$M_{k+1}=C\,M_k$，其中$C=5\sim10$ 令 $k:=k+1$ 转2^0

三. 外点法举例

$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2$$

例3-18 $\min f(X)=x_1+x_2 \quad s.t\begin{cases}-x_1^2+x_2\ge 0\\ x_1\ge 0\end{cases}$

解：

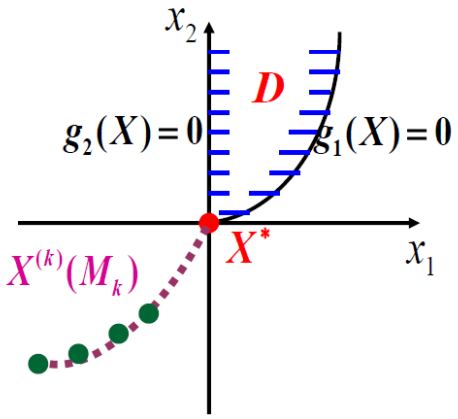
$$X^{(k)}(M_k)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2(M_k+1)}\\ \dfrac{1}{4(M_k+1)^2}-\dfrac{1}{2M_k}\end{pmatrix}\xrightarrow[M_k\to\infty]{}X^*=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$M_1=1 \qquad X^{(1)}(1)$

$M_2=10 \qquad X^{(2)}(10)$

$M_3=100 \qquad X^{(3)}(100)$

$M_4=1000 \quad X^{(4)}(1000)$



3.6.3、内点法

一. 内点法迭代原理

$$(NP)\min f(X) \quad s.t.g_i(X)\ge 0$$

障碍函数： $\varphi(X,r_k)=f(X)+r_k\sum_{i=1}^{m}\dfrac{1}{g_i(X)}$

或$\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X))$

二. 内点法迭代步骤

$$\varphi(X,r_k)=f(X)+r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X)}$$

$$或\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X$$

1^0 取r_1>0(=1)，$\varepsilon>0, k:=1$

2^0 取 $X^{(0)}\in D$ (P201/P167)

3^0 求 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,r_k)$的最优解 $X^{(k)}(r_k)$ (用数值迭代的方法)

4^0 检验 $X^{(k)}(r_k)$ 是否满足收敛准则：

若满足，则迭代终止，$X^*=X^{(k)}(r_k)$

否则取$r_{k+1}=Cr_k$,其中$C=1/5$或$1/10$。令k:=k+1转3^0

$$1^0\ r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X^{(k)})}\le\varepsilon$$

$$2^0\left|r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X^{(k)}))\right|\le\varepsilon$$

$$3^0\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|\le\varepsilon$$

$$4^0\left|f(X^{(k)})-f(X^{(k-1)})\right|\le\varepsilon$$

三. 内点法举例

$$\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X))$$

例3-18 $\min f(X)=x_1+x_2$ $\begin{cases}-x_1^2+x_2\ge 0\\ x_1\ge 0\end{cases}$

解：

$$\varphi(X,r_k)=x_1+x_2-r_k\ln(-x_1^2+x_2)-r_k\ln x_1$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,r_k)$

(解析法)

$$\Downarrow$$

$$\nabla\varphi(X,r_k)=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=1-\dfrac{r_k(-2x_1)}{-x_1^2+x_2}-\dfrac{r_k}{x_1}=0\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}=1-\dfrac{r_k}{-x_1^2+x_2}=0\end{cases}$$

解得：$X^{(k)}(r_k)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(-1+\sqrt{1+8r_k})\\ \frac{3}{2}r_k-\frac{1}{8}(-1+\sqrt{1+8r_k})\end{pmatrix}\xrightarrow[r_k\to 0]{}X^*=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

4、多目标规划

达到 == 等于

若要求 $\boxed{\min f(X)}$，则目标函数为 $\min(d^+ - d^-)$

$$f(X) + d^- - d^+ = f_0 \longrightarrow f(X) = f_0 + (d^+ - d^-)$$

$$\min f(X) \leftrightarrow \min f_0 + (d^+ - d^-) \leftrightarrow \min(d^+ - d^-)$$

若要求 $\boxed{\max f(X)}$，则目标函数为 $\min(d^- - d^+)$

$$f(X) + d^- - d^+ = f_0 \longrightarrow f(X) = f_0 - (d^- - d^+)$$

$$\max f(X) \leftrightarrow \max -(d^- - d^+) \leftrightarrow \min(d^- - d^+)$$

四级目标的目标规划数学模型

$$\min[\, P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^- + 2d_4^-) + P_4 d_5^+ \,]$$

$$\begin{cases} 80x_1 + 120x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4000 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 30 \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ d_2^- + d_5^- - d_5^+ = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad d_j^-, d_j^+ \geq 0 \end{cases}$$

5、动态规划

5.2、投资分配

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(x)=$ 以数量为x(万元)的资金分配给前k个工厂所得到的最大总利润值。

(资金分配以“万元”为单位)

分析： 显然：$f_1(x)=g_1(x)$

当 $k\geq 2$ 时，

	前k-1个工厂	第k个工厂
资金x万元	$x-y$	$y\ (y=0,1,2,\cdots x)$
利润(万元)	$f_{k-1}(x-y)$ +	$g_k(y)$

$$\therefore\ f_k(x)=\max_{y=0,1,2,\cdots x}\{g_k(y)+f_{k-1}(x-y)\}\quad k=2,3,\cdots n$$

$g_i(x_i)=$ 第i个工厂得到数量为 x_i(万元)的资金后所提供的利润值(万元)

	0	10	20	30	40	50	60
$f_1(x)$	0	20	50	65	80	85	85
最优策略	0	10	20	30	40	50	60
$f_2(x)$	0	20	50	70	90	105	120
最优策略	0 0	10 0	20 0	20 10	20 20	30 20	40 20
$f_3(x)$	0	25	60	85	110	135	155
最优策略	0 0 0	0 0 10	0 0 20	0 0 30	20 0 20	20 0 30	20 10 30

5.3、一维背包问题

设 $f_k(y)=$ 总重量不超过y公斤,背包中只装前k种物品时的最大使用价值。

分析:

	前k-1种物品	第k种物品 $0\le a_k x_k \le y$
重量 $\le y$ 公斤	$\le y-a_k x_k$	$a_k x_k \ (x_k=0,1,2,\cdots\left[\frac{y}{a_k}\right])$
使用价值	$f_{k-1}(y-a_k x_k)+c_k x_k$	

$$\therefore\ f_k(y)=\max_{x_k=0,1,2,\cdots\left[\frac{y}{a_k}\right]}\{c_k x_k+f_{k-1}(y-a_k x_k)\}\quad k=2,3,\cdots n$$

当$k=1$时, $f_1(y)=c_1x_1=c_1\left[\frac{y}{a_1}\right]$, $x_1=\left[\frac{y}{a_1}\right]$

例3

物品	1	2	3
重量(公斤/件)	3	2	5
每件使用价值	8	5	12

$a=5$公斤

求: $f_3(5)$

解: $f_k(y)=\max\limits_{0\le x_k\le\left[\frac{y}{a_k}\right]}\{c_k x_k+f_{k-1}(y-a_k$

$f_2(5)=$

$f_2(0)=$

$$f_3(5)=\max_{0\le x_3\le\left[\frac{5}{a_3}\right]}\{c_3x_3+f_2(5-a_3x_3)\}$$

$$=\max_{0\le x_3\le\left[\frac{5}{5}\right]}\{12x_3+f_2(5-5x_3)\}\rightarrow x_3=0,1$$

$$=\max\{0+f_2(5),\quad 12+f_2(0)\}$$

$x_3=0$ $x_3=1$

5.4、二位背包问题

设 $f_k(W,V)$=总重量不超过W公斤,总体积不超过V，背包中只装前k种物品时的最

$$x_k \le \min\{\left[\frac{W}{a_k}\right],\left[\frac{V}{b_k}\right]\}$$

分析：

$$\overbrace{\text{前}k\text{-1种物品} \qquad \text{第}k\text{种物品}}^{\text{前}k\text{种物品}}$$

$$0 \le b_k x_k \le V$$

$$0 \le a_k x_k \le W$$

重量 $\le W$ 公斤　　$\le W - a_k x_k$　　$a_k x_k$

体积 $\le V$ 立方米　　$\le V - b_k x_k$　　$b_k x_k$

使用价值　　$f_{k-1}(W - a_k x_k, V - b_k x_k) + c_k x_k$

$$\therefore\ f_k(W,V) = \max_{0 \le x_k \le \min\{\left[\frac{W}{a_k}\right],\left[\frac{V}{b_k}\right]\}} \{c_k x_k + f_{k-1}(W - a_k x_k, V - b_k x_k)\} \quad k = 2,3,\cdots n$$

6、作业截图

作业：P95　6 (1) (2) (3)

作业：P41　6 (1) (2) (3)

作业：P95　7 (1) (2) (3)

作业：P41　7 (1) (2) (3)

作业：P96　9（1）（2）（3）

作业：P84　1（1）（2）（3）

作业：P96　10（1）（2）

作业：P84　2（1）（2）

例3-9(P147)自己做

作业：P244　2 5(1)(2)　7(1)(2)(3)(4)

作业：P154　2 5(1)(2)　7(1)(2)(3)(4)

作业：P245　12 13

作业：P155　12 13

作业：P245　14

作业：P155　14

作业：P245　16

作业：P155　16

作业：P295　7　8

作业：P241　7　8

作业：P296　9(2)

作业：P242　9(2)

作业：P349　1, 2, 5
　　P351　9

作业：P282　1, 2, 5
　　P284　9