§ 8.2 正交多项式

一、权函数

P244

定义1　设$[a,b]$是有限或无限区间，$\rho(x)$是定义在$[a,b]$上的非负可积函数，若其满足

(1) $\int_a^b x^n \rho(x)dx$存在，$n=0,1\ldots$

（2）对非负连续函数$g(x)$，若 $\int_a^b g(x)\rho(x)dx=0$

则 $g(x)\equiv 0$，则称$\rho(x)$是$[a,b]$上的一个权函数.

常见的权函数有：

$$(1)\ \rho(x)=1 \qquad -1\le x\le 1$$

$$(2)\ \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1\le x\le 1$$

$$(3)\ \rho(x)=e^{-x} \qquad 0\le x<+\infty$$

$$(4)\ \rho(x)=e^{-x^2} \qquad -\infty<x<+\infty$$

二、　带权内积与带权范数

定义2　设$f(x),g(x)\in C[a,b]$，$\rho(x)$是$[a,b]$上的权函数，

称　$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$　　P245

为$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上以$\rho(x)$为权函数的内积。

称

$$\|f\|_2=\sqrt{(f(x),f(x))}=\left(\int_a^b \rho(x)\left(f(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

为$f(x)$的带权$\rho(x)$的2-范数

$\forall a,b\in R$，$f,g,h\in C[a,b]$，有

$$(f,ag+bh)=a(f,g)+b(f,h)$$

三、带权正交及正交多项式

P245

定义 3　若$f(x),g(x)\in C[a,b]$，$\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数，且满足

$$(f(x),g(x))=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx=0,$$

则称$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交．若函数序列$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$满足关系式

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases}0, & j\ne k,\\ A_k>0, & j=k.\end{cases} \qquad (8.2.3)$$

则称$\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交函数系；若$A_k\equiv 1$，则称之为标准正交函数系．

例如，三角函数系　$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots$

就是在区间$[-\pi,\pi]$上的带权　$\rho(x)\equiv 1$　的正交函数系.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lxdx=0,\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lxdx=0,(k\ne l)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos lxdx=0,(k,l\in Z)$$

正交多项式

定义4　设n次多项式序列为

$$g_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$
$$a_n\ne 0,n=0,1,2,\ldots$$

若多项式序列 $\{g_n(x)\}_{n=0}^\infty$ 满足

$$(g_m(x),\ g_n(x))=\int_a^b \rho(x)g_m(x)g_n(x)dx=0 \qquad m\ne n$$

则称$\{g_n(x)\}_{n=0}^\infty$在区间$[a,b]$上带权 $\rho(x)$正交，　$g_n(x)$称为n次正交多项式 .

四、正交多项式的性质: P245-246

定理1　$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系　$\{g_k(x)\}_{k=0}^n$一定是$[a,b]$上线性无关的函数系。

证明：　设　$k_0g_0(x)+k_1g_1(x)+\cdots+k_ng_n(x)=0,a\le x\le b$

$$k_0(g_i(x),g_0(x))+k_1(g_i(x),g_1(x))+\cdots+k_n(g_i(x),g_n(x))=0,0\le i\le n$$

$$\Leftrightarrow k_i(g_i(x),g_i(x))=0,0\le i\le n$$

$$\because (g_i(x),g_i(x))>0,\quad \therefore k_i=0.\quad 0\le i\le n$$

$\therefore\{g_k(x)\}_{k=0}^n$　是$[a,b]$上线性无关的函数系。

设　$\Phi_n=span\{1,x,\cdots,x^n\}=\{P(x)|P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\}$

$g_0(x),g_1(x),\cdots,g_n(x)$是$\Phi_n$的一组基。

$$\Phi_n=\{P(x)|P(x)=c_ng_n(x)+\cdots+c_1g_1(x)+c_0g_0(x)\}$$

定理1 $[a, b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系 $\{g_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 一定是$[a, b]$上线性无关的函数系。且任何 n次多项式

$P_n(x)$ 均可表示为它们的线性组合.

定理2 设$\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系，则$g_n(x)$与任何次数不高于$n-1$次的多项式$q(x)$正交，即

$$(q(x), g_n(x)) = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

定理3 $[a, b]$上的n次正交多项式$g_n(x)$有n个互异实根，且全部落在(a,b)内。

定理4 正交多项式系$\{g_k(x)\}_{k=0}^{n}$，具有下列递推关系式:

$$g_{n+1}(x) = (\alpha_n x - \beta_n) g_n(x) - \lambda_{n-1} g_{n-1}(x),$$

这里 α_n，β_n, λ_n与x无关。 $n = 0,1,\ldots$

规定 $g_{-1}(x) = 0$

这里: $\alpha_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $\beta_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \dfrac{(g_n(x), x g_n(x))}{(g_n(x), g_n(x))}$

$$\lambda_n = \frac{a_{n+1} a_{n-1}}{a_n^2} \cdot \frac{(g_n(x), g_n(x))}{(g_{n-1}(x), g_{n-1}(x))}$$

其中，a_n 是$g_n(x)$最高次幂的系数。

只要给定区间$[a, b]$及权函数$\rho(x)$,均可由线性无关的幂函数序列 $\{1, x, \cdots, x^n, \cdots\}$, 按施密特正交化过程构造出首一的正交多项式系 $\{\varphi_n(x)\}_0^{\infty}$:

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n, \varphi_j(x))}{(\varphi_j(x), \varphi_j(x))} \varphi_j(x), \ n = 1, 2, \cdots$$

它们也满足如上定理1--4.

例如，给定区间$[0, 1]$，$\{1, x, x^2\}, \rho(x) = 1$, 按施密特正交化过程可构造 $\{\varphi_n(x)\}_0^2$:

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x - \frac{1}{2}, \varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{12} x - \frac{7}{24}$$

五、常见正交多项式 P246

1、勒让德(Legendre)正交多项式

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_j(x) = \dfrac{1}{2^j j!} \dfrac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j, (j = 1,2\ldots) \end{cases}$$

它们是在区间 $[-1,1]$上带权 $\rho(x) = 1$的正交多项式。

$P_1(x) = x$, $P_2(x) = \dfrac{3}{2} x^2 - \dfrac{1}{2}$ $\quad P_j(x)$是j次多项式。

$$(P_m(x), P_n(x)) = \int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

勒让德多项式的递推公式

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \\ P_{n+1}(x) = \dfrac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \dfrac{n}{n+1} P_{n-1}(x), (n = 1, 2\ldots) \end{cases}$$

2、切比雪夫(Chebyshev)正交多项式

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_j(x) = \cos(j \arccos x), (j = 1,2\ldots) \end{cases}$$

它们是定义在区间 $[-1,1]$上带权 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式。 $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$

$$(T_m(x), T_n(x)) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

切比雪夫多项式的递推公式

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x), (n = 1, 2\ldots) \end{cases}$$

由定理3：勒让德(Legendre)正交多项式$P_n(x)$、切比雪夫多项式$T_n(x)$在$(-1, 1)$内有n个互异实根。特别对切比雪夫多项式$T_n(x)$，可求出其n个互异实根为

$$x_i = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, k = 1, 2, \cdots, n.$$

3、拉盖尔(Laguerre)正交多项式

$$\begin{cases} L_0(x)=1 \\ L_j(x)=e^x \dfrac{d^j}{dx^j}(x^j e^{-x}) \ ,(j=1,2\ldots) \end{cases}$$

它们是定义在区间 $[0,+\infty)$上带权 $\rho(x)=e^{-x}$的正交多项式。

$$(L_m(x),\ L_n(x))=\int_0^{+\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx$$

$$=\begin{cases} 0 & m\neq n \\ (n!)^2 & m=n \end{cases}$$

拉盖尔多项式的递推公式

$$\begin{cases} L_0(x)=1,\quad L_1(x)=1-x \\ L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x),(n=1,2\ldots) \end{cases}$$

4、Hermite正交多项式

$$\begin{cases} H_0(x)=1 \\ H_j(x)=(-1)^j e^{x^2}\dfrac{d^j}{dx^j}(e^{-x^2}) \ ,(j=1,2\ldots) \end{cases}$$

它们是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$上带权 $\rho(x)=e^{-x^2}$的正交多项式。

$$(H_m(x),\ H_n(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx$$

$$=\begin{cases} 0 & m\neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & m=n \end{cases}$$

Hermite多项式的递推公式

$$\begin{cases} H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x \\ H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),(n=1,2\ldots) \end{cases}$$

作业

习题 8
P278:
6，7

§ 8.3 连续函数的最佳平方逼近

一、问题的提法和解法

设$f(x)\in C[a,b],\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$在$[a,b]$上线性无关，

$$M=span\{\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}=\{\varphi=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j \mid c_j\in R\}$$

是逼近f的函数类，求 $\varphi^*(x)\in M$

$$\varphi^*(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j^*\varphi_j(x)$$

使得 $$\|f-\varphi^*\|_2=\min_{\varphi\in M}\|f-\varphi\|_2$$

若½ *(x)存在，则称其为*f*(*x*)在[*a*,*b*]上的最佳平方逼近函数

求 $$\varphi^*(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j^*\varphi_j(x)\in M$$

使得 $$\|f-\varphi^*\|_2=\min_{\varphi\in M}\|f-\varphi\|_2 \qquad \varphi(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)$$

$$\|f-\varphi\|_2=\sqrt{\int_a^b\rho(x)(f(x)-\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x))^2dx}$$

$$\|f-\varphi\|_2^2=\int_a^b\rho(x)(f(x)-\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x))^2dx$$

记 $S(c_0,c_1,\ldots,c_n)=\|f-\varphi\|_2^2=\int_a^b\rho(x)(f(x)-\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x))^2dx$

称$S(c_0,c_1,\ldots,c_n)$为用φ逼近f的平方误差。

$$S(c_0^*,\cdots,c_n^*)=\min_{c_i\in R}S(c_0,\cdots,c_n)$$

平方误差 S的极小点 $c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*$应满足方程组

$$\frac{\partial S}{\partial c_k} = 0, \qquad k = 0,1,2,\dots,n$$

即 $$\frac{\partial S}{\partial c_k} = 2\int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)]\varphi_k(x)dx$$

$$= 2(f - \varphi, \varphi_k) = 0 \qquad \varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)$$

故 $\varphi^*(x)$的系数 $c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*$是如下方程组的解

$$(f - \varphi, \varphi_k) = 0 \Leftrightarrow \underline{(\varphi, \varphi_k) = (f, \varphi_k)} \quad (1)$$

$$k = 0,1,2,\dots,n$$

或 $$\underline{\sum_{j=0}^{n} c_j(\varphi_k, \varphi_j) = (\varphi_k, f)}, \quad (k = 0,1,\dots,n) \qquad (2)$$

方程组（1）、（2）称为正规方程或法方程。

正规方程 $\sum_{j=0}^{n} c_j(\varphi_k, \varphi_j) = (\varphi_k, f), \quad (k = 0,1,\dots,n)$

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \dots(\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots(\varphi_1,\varphi_n) \\ & \dots\dots\dots\dots & \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \dots(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}$$

定理1 正规方程的解是存在且唯一的，且使

$S = \| f - \varphi \|_2^2$最小。

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

求 $$\varphi^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^* \varphi_j(x) \in M$$

使得 $$\| f - \varphi^* \|_2 = \min_{\varphi \in M} \| f - \varphi \|_2$$

步骤 1、确定

$$M = span\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} = \{\varphi = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j \mid c_j \in R\}$$

2、求解正规方程

$$\sum_{j=0}^{n} c_j(\varphi_k, \varphi_j) = (\varphi_k, f), \quad (k = 0,1,\dots,n)$$

3 计算$\varphi^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^* \varphi_j(x)$，其中$c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*$是正规方程的解。

½ *(x) 称其为$f(x)$在$[a,b]$上的最佳平方逼近函数.

用φ^*逼近f的平方误差为：

$$S(c_0^*, c_1^*, \cdots, c_n^*) = \| f(x) \|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^* \big(f(x), \varphi_k(x)\big) .$$

二、多项式空间做逼近函数类

$$M = span\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\} = \{\varphi = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j \mid c_j \in R\}$$

选取M为多项式空间

$M = span\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$，即取$\varphi_j = x^j, j = 0,1,\dots,n$

$\forall \varphi(x) \in M, \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ 为多项式.

求解正规方程组（ 2），设所得解为 $c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*$，

则$f(x)$的最小二乘逼近多项式 $\varphi^*(x)$:

$$\varphi^*(x) = c_0^* + c_1^* x + \dots + c_n^* x^n$$

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \dots(\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \dots(\varphi_1,\varphi_n) \\ & \dots\dots\dots\dots & \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \dots(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

取权$\rho(x) = 1$，则正规方程（2）中的元素由下式定义

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}, j = k, k+1, \dots, n, k = 0,1,\dots,n$$

$$(\varphi_k, f) = \int_a^b f(x) x^k dx, \qquad k = 0,1,\dots,n$$

求解正规方程组（ 2），设所得解为 $c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*$，

则$f(x)$的最小二乘逼近多项式 $\varphi^*(x)$:

$$\varphi^*(x) = c_0^* + c_1^* x + \dots + c_n^* x^n$$

例：给定$f(x) = \sqrt{x}, 0 \le x \le 1$，取$M$为适当逼近空间，

构造其最佳平方逼近元素。

解： 1. 取M为一次空间，即 $M = span\{1, x\}, \rho(x) = 1$

拟和函数φ(x)为 $\varphi(x) = c_0 + c_1 x$ $\qquad \varphi_0(x) = 1,$

满足正规方程：$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1, f) \end{bmatrix}$ $\qquad \varphi_1(x) = x$

由 $(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^1 x^{j+k} dx = \frac{1}{j+k+1}$，得

$(\varphi_0, \varphi_0) = 1, (\varphi_1, \varphi_0) = \frac{1}{2}, (\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{3}$

$(\varphi_0, f) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}, (\varphi_1, f) = \int_0^1 \sqrt{x} x dx = \frac{2}{5}$

正规方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

解得$c_0^*=\dfrac{4}{15},c_1^*=\dfrac{12}{15}$，所求最佳平方逼近元为

$$\varphi^*(x)=\frac{4}{15}+\frac{12}{15}x$$

$\varphi_0(x)=1$,
$\varphi_1(x)=x$
$\varphi_2(x)=x^2$

2　取 $M=span\{1,x,\ x^2\}$, 则还需计算

$$(\varphi_0,\ \varphi_2)=\frac{1}{3},(\varphi_1,\ \varphi_2)=\frac{1}{4},(\varphi_2,\ \varphi_2)=\frac{1}{5},(\varphi_2,\ f)=\int_0^1 x^2\sqrt{x}dx=\frac{2}{7}$$

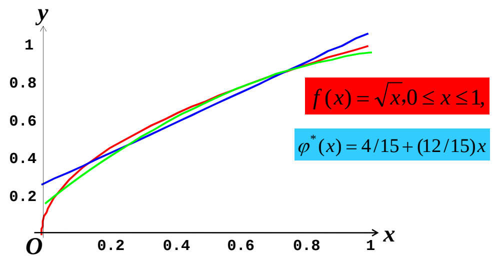
正规方程：

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2)\\(\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\\(f,\varphi_2)\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\1/2 & 1/3 & 1/4\\1/3 & 1/4 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3\\2/5\\2/7\end{bmatrix}$$

解得　$c_0=0.1714,\ c_1=1.3714,\ c_2=-0.5714$

$$\varphi^*(x)=0.1714+1.3714x-0.5714x^2$$

$\varphi^*(x)=0.1714+1.3714x-0.5714x^2$



若取 $M=span\{1,x,\ x^2,\cdots,x^n\}$, 则正规方程系数矩阵为

$$H=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1)\\1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+2)\\1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+3)\\\cdots & & & & \\1/(n+1) & 1/(n+2) & 1/(n+3) & \cdots & 1/(2n+1)\end{bmatrix}$$

H 称为Hilbert 矩阵，n越大，病态越严重。

在多项式空间 M中换基。 $M=span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\}$

这里$\{\varphi_j(x)\}(j=0,1,\ldots,n)$是区间$[a,b]$上带权 $\rho(x)$的正交多项式组。

三、基于正交多项式的逼近函数类

设$\{\varphi_j(x)\}(j=0,1,\ldots,n)$是区间$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式组,取逼近$f(x)$的多项式空间$M$为

$M=span\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\}$　$(\varphi_i,\ \varphi_j)=0, i\neq j$

则正规方程（2）为

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & & & \\ & (\varphi_1,\varphi_1) & & \\ & & \cdots\cdots & \\ & & & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\\cdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\\\vdots\\(\varphi_n,f)\end{bmatrix}$$

解方程组，得　$c_j^*=\dfrac{(\varphi_j,f)}{(\varphi_j,\varphi_j)}, j=0,1,\ldots,n$

求得最小二乘逼近多项式

$$\varphi^*(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j^*\varphi_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(\varphi_j,f)}{(\varphi_j,\varphi_j)}\varphi_j(x)$$

1. *Legendre*最小二乘逼近多项式

取　$[a,b]=[-1,1],\rho(x)=1$

$$\varphi_j(x)=P_j(x)=\frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^j,(j=0,1,\ldots,n)$$

则 $c_j^*=\dfrac{(P_j,f)}{(P_j,P_j)}=\dfrac{2j+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)P_j(x)dx,(j=0,1,\ldots,n)$

例：求$f(x)=x^4$在区间$[-1,1]$上的二次*Legendre*最小二乘逼近多项式。

解：取 $\varphi_j(x)=P_j(x),\ j=0,1,2.$

则有 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\varphi_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1)$

$$c_0^*=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{1}{5},\qquad c_1^*=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^5dx=0,$$

$$c_2^*=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^4(3x^2-1)dx=\frac{4}{7}$$

故$f(x)$在$[-1,1]$上的二次 *Legendre* 最小二乘逼近多项式为

$$\varphi^*(x)=\sum_{j=0}^{2}c_j^*\varphi_j(x)=\frac{1}{5}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{6}{7}x^2-\frac{3}{35}$$

其最大误差为

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|f(x)-\varphi^*(x)\right|=\max_{-1\le x\le 1}\left|x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35}\right|=0.22857$$

2. *Chebyshev*最小二乘逼近多项式

取 $[a,b]=[-1,1], \rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\varphi_j(x)=T_j(x)=\cos(j\arccos x),(j=0,1,\dots,n)$

则 $c_j^*=\dfrac{(T_j,f)}{(T_j,T_j)}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,(j=0,1,\dots,n)$

$$(T_j(x),\ T_j(x))=\int_{-1}^{1}\frac{T_j^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\pi/2, & j\neq 0\\ \pi, & j=0\end{cases}$$

*Chebyshev*最小二乘逼近多项式为

$$\phi^*(x)=\frac{c_0^*}{2}+\sum_{j=1}^{n}c_j^*T_j(x)$$

例：求$f(x)=x^4, x\in[-1,1]$，在$M=span\{T_0(x),T_1(x),T_2(x)\}$中的最小二乘逼近多项式。

解：$T_0(x)=1, T_1(x)=x, T_2(x)=2x^2-1$

$$c_0^*=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{3}{4},\qquad c_1^*=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,$$

$$c_2^*=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^4(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}$$

于是所求最小二乘逼近多项式为

$$\varphi^*(x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}(2x^2-1)=x^2-\frac{1}{8},\qquad -1\le x\le 1$$

其最大误差为

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|f(x)-\varphi^*(x)\right|=\max_{-1\le x\le 1}\left|x^4-x^2+\frac{1}{8}\right|=0.125$$

若所给区间不是$[-1,1]$，而是$[a,b]$，则可通过变换

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$$

将它转换为$-1\le t\le 1$上的情形处理。

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)=g(t), t\in[-1,1].$$

例：$f(x)=x^4, x\in[0,1]$，则做变换 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t$

得到

$$f(x)=x^4=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)^4=g(t), t\in[-1,1].$$

在[0,1]上逼近f(x)可转化为在[-1,1]上逼近g(t)。

作业

习题 8

P278:

3(1)(2)，7，10，12(2),14