

# 战争模型

**Abstract:** 介绍战争中的不同的战争模式，并对战争的胜负进行预测

**Keywords:** 游击战、阵地战及混合模型

## 1 Introduction

在第一次世界大战中，Lanchester就提出了几个预测战争结局的数学模型，游击战、正规战争（阵地战）或者混合战争。后来人们在此基础上对这些模型做了改进和进一步的解释，用来分析历史上的一些著名的战争，得到较好的模拟效果。

Lanchester所提出的模型是非常简单的，只考虑双方兵力的多少和战斗力的强弱。兵力的减员包括战斗减员和非战斗减员，又由后备力量的增援而增加。战斗力即杀伤对方的能力，与射击率、射击命中率及战争的类型有关系。当然这些模型没有考虑战争中的士气、政治、经济等相关的因素。但是通过这一类型的模型的分析，可以帮助我们有效得理解毛泽东所提出的游击战争在中国开展的必要性，如何用空间换取时间，最后并取得战争的胜利。

一般的战争模型：用 $x(t), y(t)$ 表示甲乙双方在 $t$ 时刻所对应的人数。每一方的战斗减员率都取决于双方的兵力和战斗力，分别用 $f(x, y), g(x, y)$ 表示，而每一方的非战斗减员率(疾病、逃兵等相关因素)与本方的兵力成正比。每一方的增援是固定的函数 $u(t), v(t)$

$$\begin{cases} x' = -f(x, y) - \alpha x + u(t), \alpha > 0 \\ y' = -g(x, y) - \beta y + v(t), \beta > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

针对于不同的战争类型， $f, g$ 有不同的表达形式。根据不同的形式，分析对战争结局的不同影响。

正规战争模型：这一表达式中，我们只需分析甲方的战斗减员率 $f(x, y)$ .对于甲方的士兵而言，处于乙方的每个士兵的监视和杀伤范围之内，一旦甲方的某个士兵被杀伤，乙方的火力就会立刻集中在其余士兵身上，也就是说甲方的战斗减员与乙方的兵力有关。可以假设 $f = ay, a$ 表示乙方平均每个士兵对甲方士兵的杀伤率，称为乙方的战斗乙方系数。这里 $a$ 可以有进一步的分解 $a = r_y p_y$ ,其中 $r_y$ 是射击率（单位时间的射击次数）， $p_y$ 是每次射击的命中率。

这样，就可以根据以上假设给出战斗模型的表达式：

$$\begin{cases} x' = -r_y p_y y - \alpha x + u(t), \alpha > 0 \\ y' = -r_x p_x x - \beta y + v(t), \beta > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

做如下假设，忽略战斗中的非战斗减员，则上述模型可以写成如下形式：

$$\begin{cases} x' = -r_y p_y y = -ay, \alpha > 0 \\ y' = -r_x p_x x = -bx, \beta > 0 \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

对于该方程，因为这是一个初始值问题，可以应用Matlab中的ode45来进行求解。但是在写该程序的时候，必须对该方程进行预处理：把上式写成如下形式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r_y p_y \\ -r_x p_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

对应的Matlab代码：

```
infinity=12;
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
[T,Y] = ode45(@rigid,[0 12],[x0 y0],options);
function dy = rigid(t,y)
dy = zeros(2,1);
dy(1) = -r_y p_y y(1);
dy(2) = -r_x p_x y(2);
```

这是一个初始值问题，这样可以计算出方程的解。而同样对这样的方程不直接进行求解，可以直接判断双方的胜负：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} = \frac{r_x p_x x}{r_y p_y y} \quad (1.5)$$

很容易计算出上面方程的解，

$$ay^2 - bx^2 = k \quad (1.6)$$

而根据方程的初始条件，有

$$ay_0^2 - bx_0^2 = k \quad (1.7)$$

根据以上表达式可以知道，如果 $k > 0$ ,这说明会在某一点，当 $x$ 的值为零时， $y$ 的值大于零。这也说明当一方的兵力为零的时候，另外一方还有兵力存在，这说明有兵力存在的一方

胜利。同理可知，当 $k < 0$ 时，另外一方获胜。而 $k = 0$ 时，双方战平。

根据以上分析可以知道，根据初始条件所确定的 $k$ 值，可以确定双方的胜负。

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{b}{a} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y} \quad (1.8)$$

这说明双方的兵力之比 $\frac{y_0}{x_0}$ 以平方的关系影响着战争的结局。很容易可以看出，如果初始兵力之比增加为原来的两倍，则影响战争结局的能力将增加到原来的4倍。所以由于这个原因正规战争模型也称为平方律模型。

**游击战争模型** 双方都用游击部队作战。

这种模型和前面的模型是有所不同的，甲方士兵在乙方士兵看不到的某个区域 $s_x$ 内活动。乙方士兵不是向甲方士兵开火，而是向这个隐蔽区域射击，而且不知道杀伤情况。这时甲方士兵的伤亡率不仅和乙方的兵力有关，而且随着甲方兵力的增加而增加。因为在一个有限的区域内，己方士兵越多，被杀伤的就越多。这样可以假设 $f = cxy$ 。而原来的正面战争模型中甲方的伤亡率决定于乙方的人数。

这里的战斗系数可以表示为 $c = r_y p_y = r_y \frac{s_{ry}}{s_x}$ ，这里 $r_y$ 仍然为射击率，而命中率等于乙方一次射击的有效面积 $s_{ry}$ 成正比，与甲方的活动面积 $s_x$ 成反比。

类似地有 $g = dxy, d = r_x p_x = r_x \frac{s_{rx}}{s_y}$

这样上述方程就可以写成如下形式：

$$\begin{cases} x' = -r_y \frac{s_{ry}}{s_x} xy = -cxy, \alpha > 0 \\ y' = -r_x \frac{s_{rx}}{s_y} xy = -dxy, \beta > 0 \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

类似于上面的战争模型，同样我们可以写出下列的相平面上的解：

$$cy - dx = m, cy_0 - dx_0 = m \quad (1.10)$$

与前一模型的不同之处是该模型的相轨线是直线。这时战争的胜负仍然可以根据 $m$ 值的正负来决定。进一步可以知道

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x s_{rx} s_x}{r_y s_{ry} s_y} \quad (1.11)$$

初始的兵力之比以线性关系影响战争的结局。

进一步可以得到**混合战争模型**：

$$\begin{cases} x' = -r_y \frac{s_{ry}}{s_x} xy = -cxy, \alpha > 0 \\ y' = -r_x p_x x = -bx, \beta > 0 \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

可以得到对应的相轨线：

$$cy^2 - 2bx = n, cy_0^2 - 2bx_0 = n, \quad (1.13)$$

这时相轨线是抛物线。并且乙方取得胜利的条件是：

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{2b}{cx_0} = \frac{2r_x p_x s_x}{r_y s_{ry} x_0} \quad (1.14)$$

通过这个表达式，很容易可以得到在战争中如何处于弱势的游击一方以空间换取对对方的战斗力的消弱的。可以作如下假设：

设甲方初始兵力为 $x_0 = 100$ ，命中率为 $p_x = 0.1$ ，火力 $r_x$ 是乙方火力 $r_y$ 的一半，活动区域面积 $s_x = 0.1$ 平方公里，而乙方的射击的有效面积是 $s_{ry} = 1$ 平方米，那么乙方胜利的条件是：

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{2b}{cx_0} = \frac{2 * 0.1 * 0.1 * 10^6}{2 * 1 * 100} = 100 \quad (1.15)$$

根据上式可以知道，两者之比必须大于10，也就是说初始乙方必须10倍于甲方的兵力。

**硫磺岛战役：**二次世界大战中，经典的战役有硫磺岛战役，根据美军的战地记录，发现模型结果与实际情况吻合很好。硫磺岛战役时日军重要的空军基地。美军在1945年2月19日开始进攻，战斗持续一个多月，日军21500人全部被俘或者阵亡。在战斗中，美军投入兵力73000人，伤亡20265人。战争进行到28天时美军宣布占领该岛，实际战斗到36天才停止。

用 $A(t)$ ,  $J(t)$ 分别表示美军和日军的人数

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -aJ(t) + u(t), a > 0 \\ \frac{dJ}{dt} = -bA(t), b > 0 \\ A(0) = 0, J(0) = 21500 \end{cases} \quad (1.16)$$

---

而美军的战地记录给出的增援为

$$u(t) = \begin{cases} 54000, 0 < t < 1 \\ 6000, 2 \leq t \leq 3 \\ 13000, 5 \leq t < 6 \\ 0, \text{others} \end{cases} \quad (1.17)$$

对以上方程进行积分，则可得：

$$\begin{aligned} A(t) &= A(0) - a \sum_{\tau=1}^t J(\tau) + \sum_{\tau=1}^t u(\tau) \\ J(t) &= J(0) - b \sum_{\tau=0}^t A(\tau). \end{aligned} \quad (1.18)$$

这里时间 $t$ 的取值最大为36，而且 $J(36) = 0$ ，并且根据 $\sum_{\tau=1}^{36} A(\tau) = 2037000$ ，可以计算出 $b$ 的值为0.0106。把这个系数带入进(1.18)可以依次算出 $J(t), t = 1, 2, \dots, 36$ 。

然后跟据(1.18)估计 $a$ 的值。令 $t = 36$ ，得

$$a = \frac{\sum_{\tau=1}^{36} u(\tau) - A(36)}{\sum_{\tau=1}^{36} J(\tau)} \quad (1.19)$$

分子上是美军的总的伤亡人数，为20265人，分母可由已经得到的 $J(t)$ 得到，为372500人，这样可以计算出系数 $a = 0.0544$ ，把这个结果带入到（1.18）可得：

$$A(t) = -0.0544 \sum_{\tau=1}^t J(\tau) + \sum_{\tau=1}^t u(\tau) \quad (1.20)$$

根据这一表达式就可以计算出美军每天的理论值。