第二章 整数规划

第一节 整数规划问题的提出

- 线性规划最优解可能是整数,也可能不是整数.
- 实际问题当中有相当多的问题要求最优解必须是整数.
- 例如,所求解的是完成某任务需用的人数,购买机器的台数,设备维修的次数等.
- 对于线性规划问题,如果增加全部变量为整数的要求,就构成了线性整数规划问题.如果部分变量要求是整数,则称为混合整数规划问题.如果变量仅取0和1,则称为0-1整数规划问题.

整数规划----线性整数规划

- 分枝定界法
- 割平面法
- 分配问题的解法
- 隐枚举法 (0-1整数规划)

第二节 分枝定界法

例2-1

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-1)\quad s.t.\begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{伴随规划}}$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

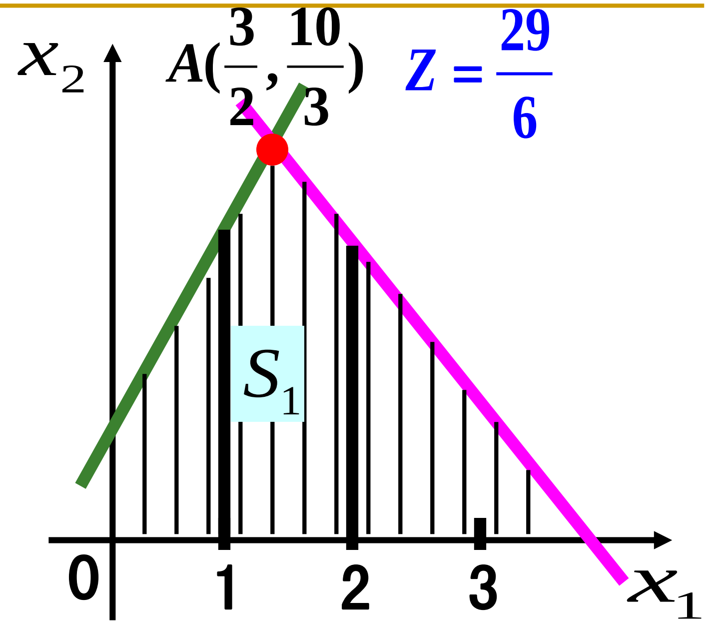
$$(2-1)'\quad s.t.\begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分枝定界法的思想:

先不考虑整数条件, 即先求相应的伴随规划的最优解, 若得到的是整数解, 则问题得到解决. 否则将原问题分成几个分枝问题. 对于每个分枝问题求相应伴随规划的最优解, 若是整数解, 问题得到解决. 否则将它分枝再解, 直到求出最优整数解为止.

伴随规划 $\max Z = x_1 + x_2$

$$(2-1)' \quad s.t. \begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



求解 $(2-1)'$，得最优解：$A\begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 10/3 \end{cases}$，$Z = \dfrac{29}{6}$

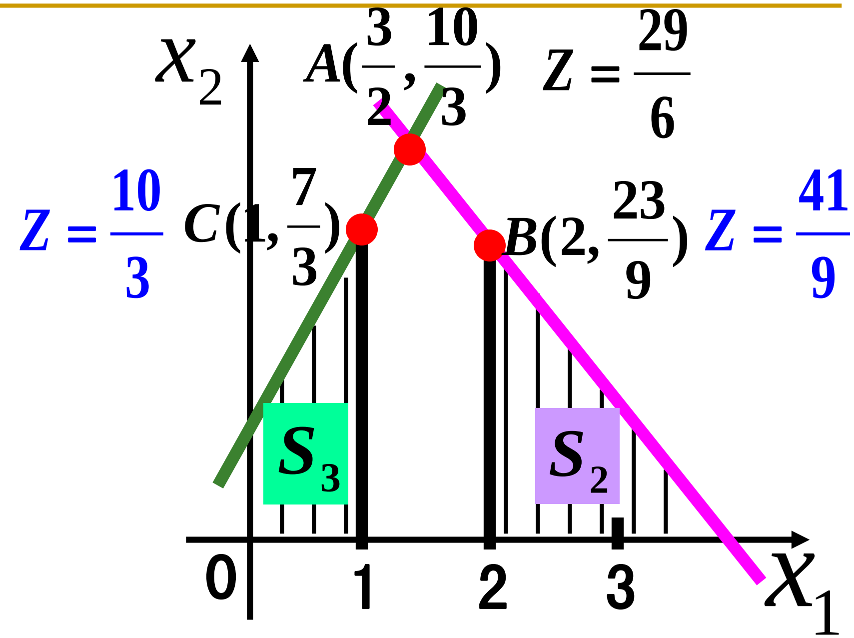
分枝定界法：

在 $(2-1)'$ 的最优解A中，选择一个非整数变量，例如 $x_1 = 3/2$，则$(2-1)$的最优解中，x_1应满足：$x_1 \le 1$或$x_1 \ge 2$

（$\because 1 < x_1 < 2$不符合整数条件）

伴随规划 $\max Z = x_1 + x_2$

$$(2-1)' \quad s.t. \begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



(求整数解)

分枝问题: $x_1 \ge 2$ $\quad$ $x_1 \le 1$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-2)' \quad s.t. \begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-3)' \quad s.t. \begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ 0 \le x_1 \le 1 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

则 (2-1) 的最优解中, x_1 应满足: $x_1 \le 1$ 或 $x_1 \ge 2$

分枝定界法的迭代原理

分枝问题(求整数解)

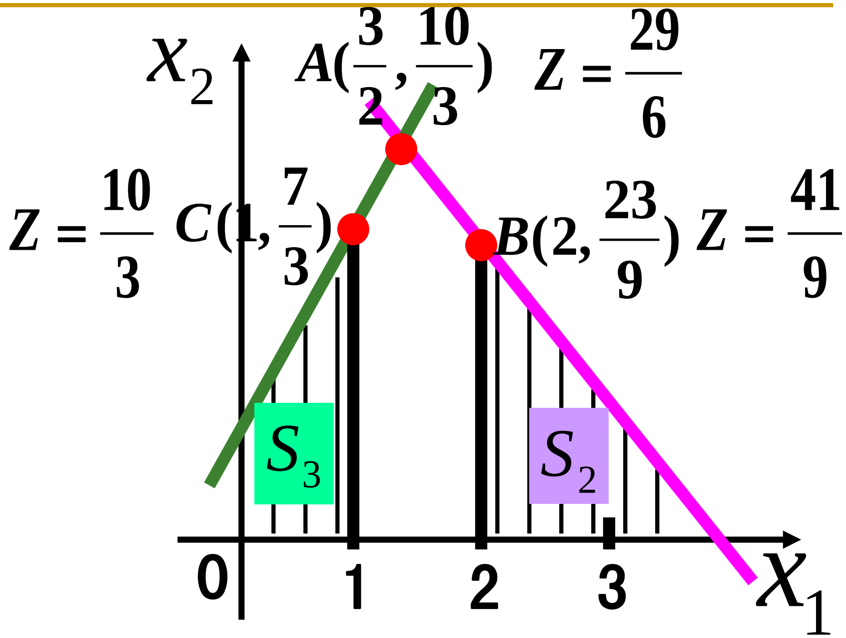
↓

求解其伴随规划的最优解(单纯形法)

最优解
- 整数解
  - 该分枝不需要再分枝
  - 判断该整数解是否最优
    - 若目标值>其它分枝最优值，则是最优整数解,终止.
    - 否则, 其它分枝问题继续分枝,得整数解,比较目标值,得到最优整数解.
- 非整数解
  - 分枝 —— 比较分枝问题最优值决定先分哪一枝
  - 不用分枝 (已判明该分枝中不可能有整数最优解)

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-2)' \quad s.t. \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14} x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$



在 $(2-2)'$ 的最优解B中，$x_2 = 23/9 = 2\frac{5}{9}$，

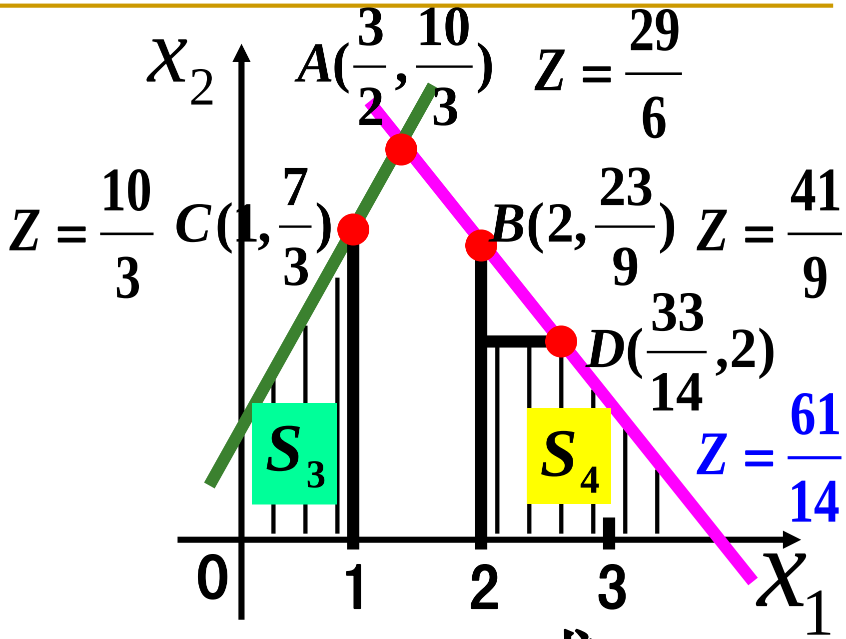
则 $(2-2)$的最优解中，x_2应满足：$x_2 \le 2$或$x_2 \ge 3$

（$\because 2 < x_2 < 3$不符合整数条件）

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$(2-2)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$



$x_2 \le 2$或$x_2 \ge 3$

(求整数解)

分枝问题：$x_2 \le 2$ $\qquad$ $x_2 \ge 3$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$(2-4)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$(2-5)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad x_2 \ge 3 \end{cases}$$

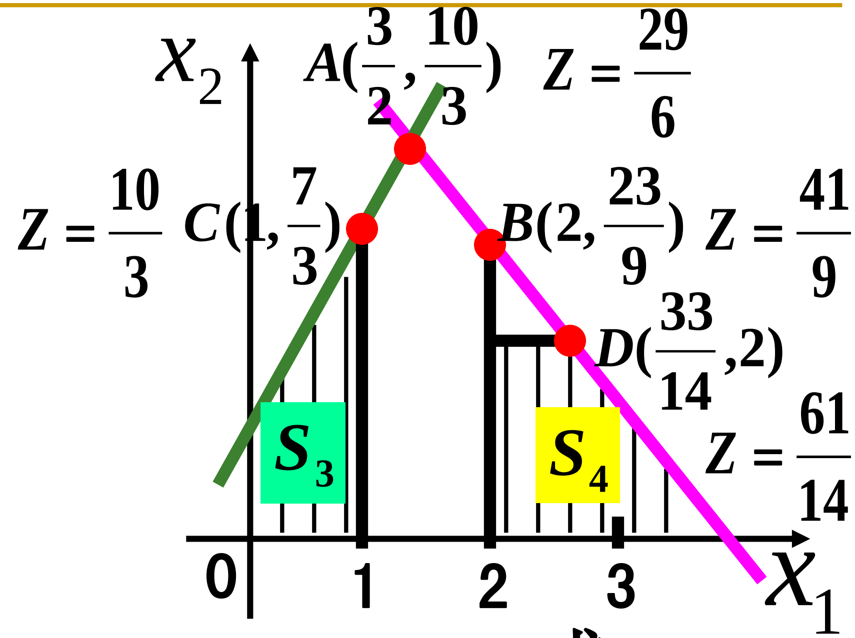
$\because S_5 =$ 空集

（$\because 2 < x_2 < 3$不符合整数条件）

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$(2-2)'\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$



$x_2 \le 2$或$x_2 \ge 3$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

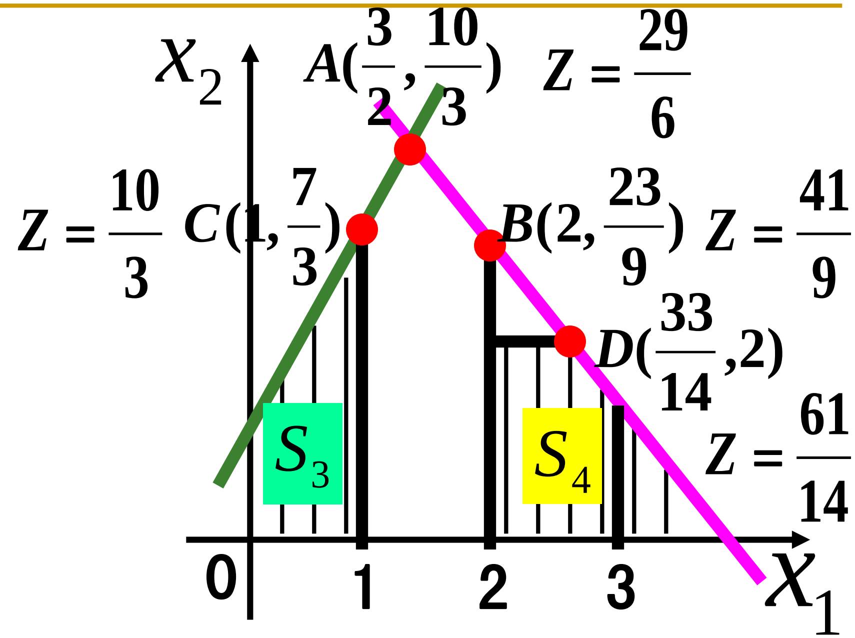
$$(2-4)'\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$

$\because Z = \frac{61}{14} > Z = \frac{10}{3}$

$\therefore$先分枝 $(2-4)'$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-4)' \quad s.t. \begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$



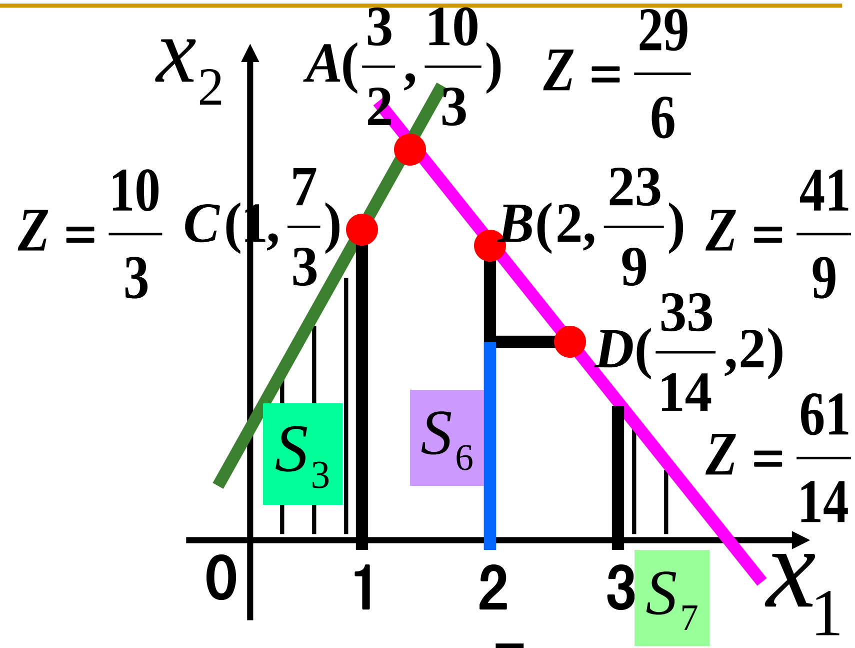
在 $(2-4)'$ 的最优解D中，$x_1 = 33/14 = 2\frac{5}{14}$，

则$(2-4)$的最优解中，x_1应满足：$x_1 \le 2$或$x_1 \ge 3$

（$\because 2 < x_1 < 3$不符合整数条件）

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-4)' \quad s.t.\begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$



在 $(2-4)'$ 的最优解D中，$x_1 = 33/14 = 2\dfrac{5}{14}$，

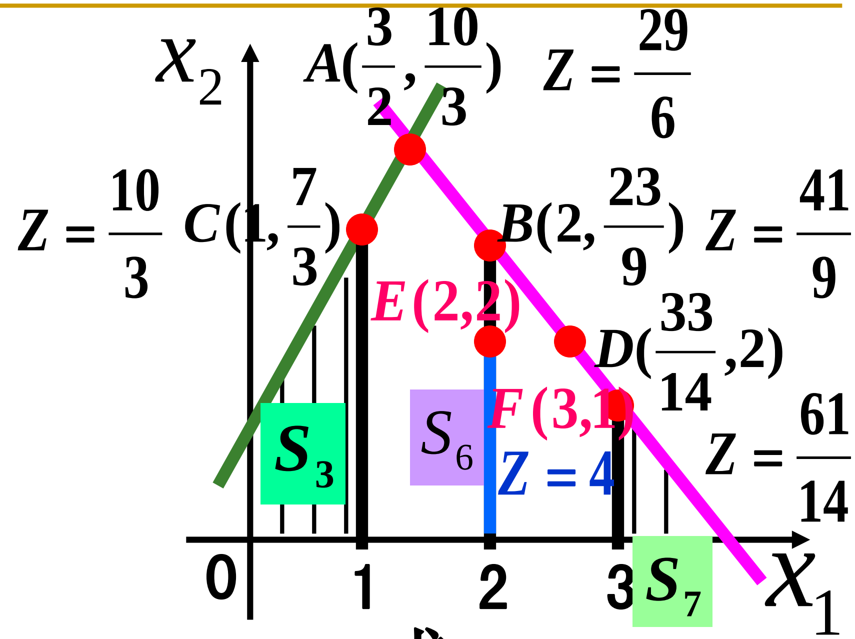
则 $(2-4)$ 的最优解中，x_1应满足：$x_1 \le 2$或$x_1 \ge 3$

（$\because 2 < x_1 < 3$ 不符合整数条件）

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$(2-4)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1 \ge 2 \quad 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$



$x_1 \le 2$或$x_1 \ge 3$

(求整数解)

分枝问题：$x_1 \le 2$ $x_1 \ge 3$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$(2-6)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1 = 2 \quad 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

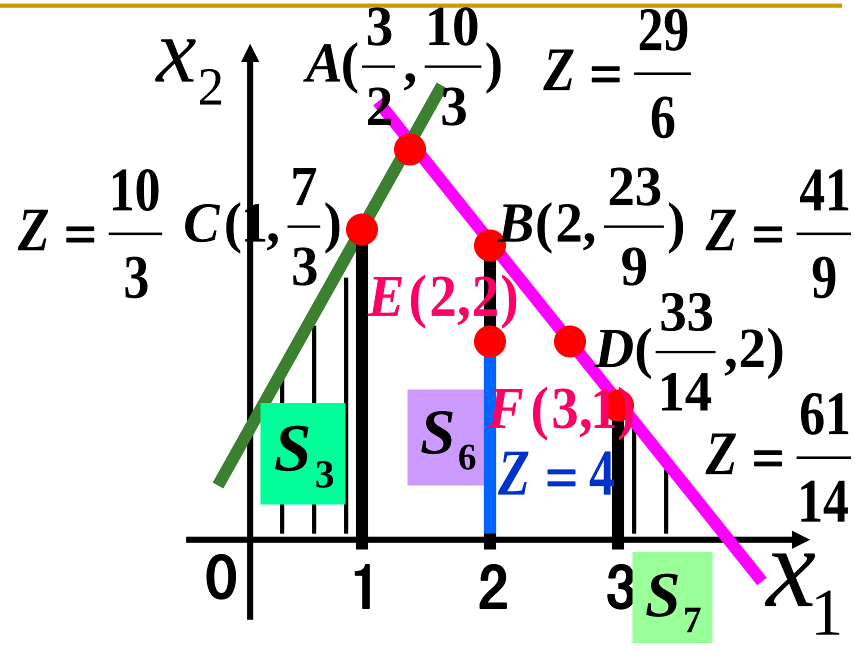
s.t.

$$(2-7)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \le \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \\ x_1 \ge 3 \quad 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$

例2-1

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \le \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \le \dfrac{1}{3} \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$



$$\because Z=\frac{10}{3}<Z=4 \therefore (2-3)' \text{不必再分枝。}$$

所以$E(2,2)$和$F(3,1)$是原问题(2-1)的整数最优解。

分枝定界法的迭代原理

分枝问题(求整数解)

↓

求解其伴随规划的最优解(单纯形法)

- 最优解
  - 整数解
    - 该分枝不需要再分枝
    - 判断该整数解是否最优
      - 若目标值>其它分枝最优值，则是最优整数解,终止.
      - 否则, 其它分枝问题继续分枝,得整数解,比较目标值,得到最优整数解.
  - 非整数解
    - 分枝——比较分枝问题最优值决定先分哪一枝
    - 不用分枝 (已判明该分枝中不可能有整数最优解)

整数规划----线性整数规划

- 分枝定界法
- 割平面法

第三节 割平面法

例2-2
$$
\max Z = x_1 + x_2 \\
s.t.\ (2-8)\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}
\xrightarrow{\text{伴随规划}}
\max Z = x_1 + x_2 \\
s.t.\ \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} (2-8)'
$$

割平面法的思想：

割平面法也是通过解伴随规划的方法来解整数规划的. 如果伴随规划的最优解不是整数解, 则增加线性约束(割平面), 切掉可行域中不含整数解的部分域, 在新的约束条件下再解伴随规划. 不断重复这个过程, 直到伴随规划的最优解是整数解为止. 经过割平面对可行域的不断切割, 最优整数解最终成为新可行域的顶点.

第三节 割平面法

例2-2 $\max\limits_{s.t.} Z = x_1 + x_2$

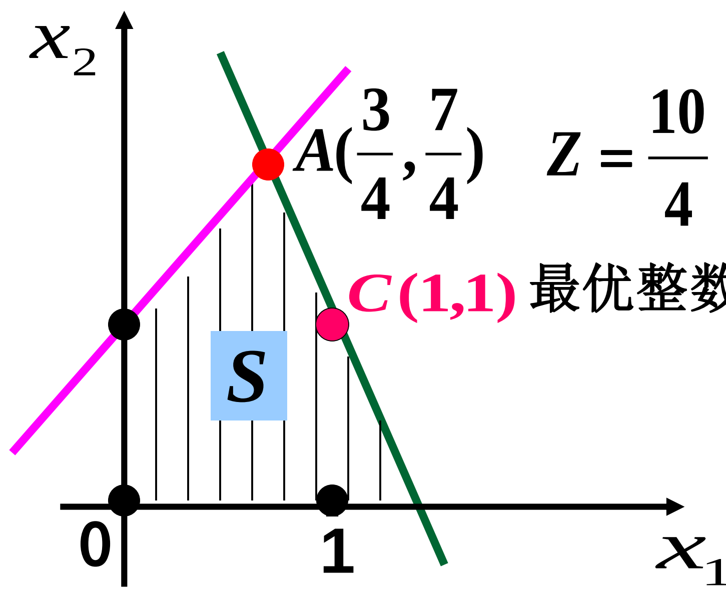
$$(2-8)\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \xrightarrow{\text{伴随规划}} \max\limits_{s.t.} Z = x_1 + x_2 \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} (2-8)'$$

求解 $(2-8)'$，得最优解：

S有4个整数解:

(1,0), (0,1), (0,0), (1,1)

最优整数解: (1,1)，Z=2



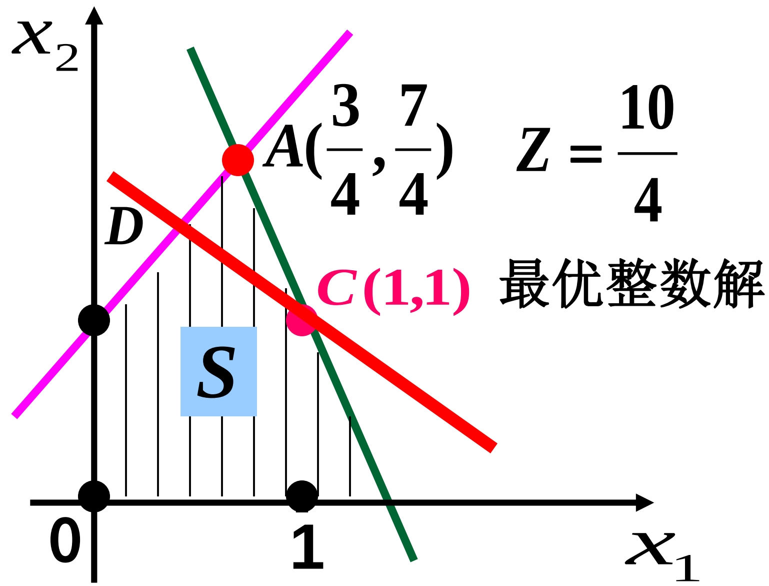
第三节 割平面法

例2–2 $\max\limits_{s.t.} Z = x_1 + x_2$

$$(2-8)\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \xrightarrow{\text{伴随规划}} \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} (2-8)'$$

伴随规划：$\max\limits_{s.t.} Z = x_1 + x_2$

希望能找到一条象CD那样的直线(割平面)切割S,切掉无整数解的三角形ACD,使得C是新可行域的顶点.在此域上解伴随规划,使其最优解恰是C点.



问题:如何构造割平面?

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$

$$
(2-8)\quad s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}
\longrightarrow
\max Z = x_1 + x_2 \quad \text{典式}
$$

$$
s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-9)
$$

$(2-9)'$ 的**最优表**为

在引入松弛变量之前，先将约束条件中各变量的系数及右端项化为整数

		x_1	x_2	u_1	u_2
	$-5/2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$
x_2	$7/4$	0	1	$3/4$	$1/4$
x_1	$3/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$

不是整数解

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$

$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$

$$(2-8)\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (s.t.)$$

$\longrightarrow$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (s.t.) \quad (2-9)$$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$

$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$

这两个式子可用于构造"割平面"

在(2-9)的约束方程中，x_1, x_2 的系数是整数，右端常数项也是整数，所以若 x_1, x_2 取整数，则 u_1, u_2 也一定是整数。

第三节 割平面法

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2 \quad \text{典式} \quad \max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-8)\ s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \longrightarrow s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} (2-9)$$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 \longrightarrow x_1 + u_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 + u_2$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 \ge 1$$

$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$

割平面方程

使 u_1, u_2 系数为正的真分数

$$\frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 \ge \frac{1}{4}$$

$$u_1 + 3u_2 \ge 1$$

$$(1 + x_1 - x_2) + 3(4 - 3x_1 - x_2) \ge 1$$

$$2x_1 + x_2 \le 3$$

$$\boxed{2x_1 + x_2 = 3}$$

第三节 割平面法

例2–2 $\max Z = x_1 + x_2$

s.t.

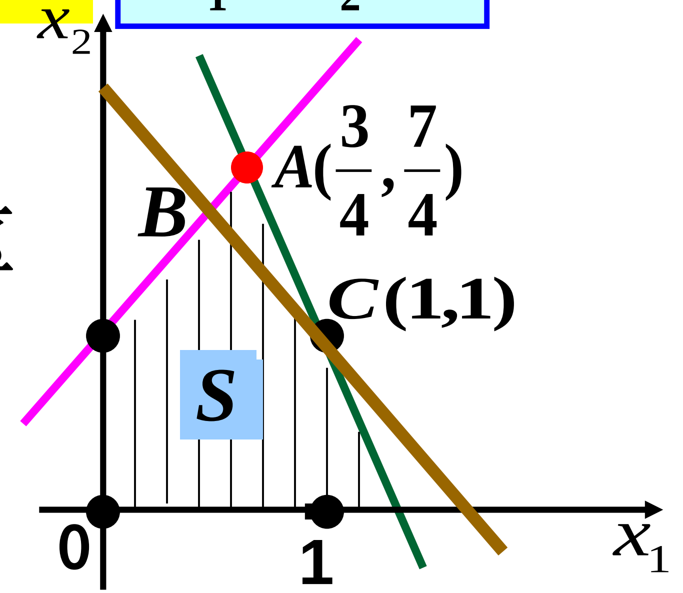
$$(2-8)\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} (2-9)$$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

s.t.

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 \rightarrow 2x_1 + x_2 \le 3 \quad \boxed{2x_1 + x_2 = 3}$$ 割平面

BC将S中$2x_1 + x_2 > 3$($u_1 + 3u_2 < 1$)的区域ΔABC割掉，但割掉的区域内不包含S的整数点。



$2x_1 + x_2 \le 3$ $u_1 + 3u_2 \ge 1$

第三节 割平面法

例2-2 $\max_{s.t.} Z = x_1 + x_2$

$$(2-8)\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \max_{s.t.} Z = x_1 + x_2 \ \text{典式} \\ -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} (2-9)$$

$$\underline{x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2} \longrightarrow x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(u_1 + 3u_2) - u_2 < \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - u_2$$

$$= 1 - u_2 \le 1$$

BC将S中$2x_1 + x_2 > 3$$(u_1 + 3u_2 < 1)$的区域$\Delta ABC$割掉，但割掉的区域内不包含$S$的整数点。

证明：

即割去的部分 $x_1 < 1$ 且 $x_2 > 1$(同理可证)
所以割去的部分不含任何整数解。

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$

$$(2-8)\quad s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ 典式

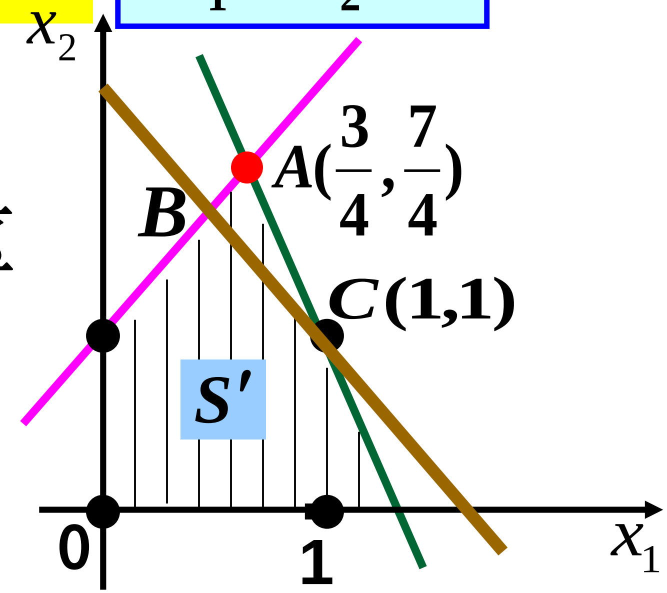
$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-9)\quad s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 \rightarrow 2x_1 + x_2 \le 3 \quad \boxed{2x_1 + x_2 = 3} \ \text{割平面}$$

BC将S中$2x_1 + x_2 > 3(u_1 + 3u_2 < 1)$的区域$\Delta ABC$割掉，但割掉的区域内不包含$S$的整数点。

割去的部分$x_1 < 1$且 $x_2 > 1$



第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$

$$(2-8)\ s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

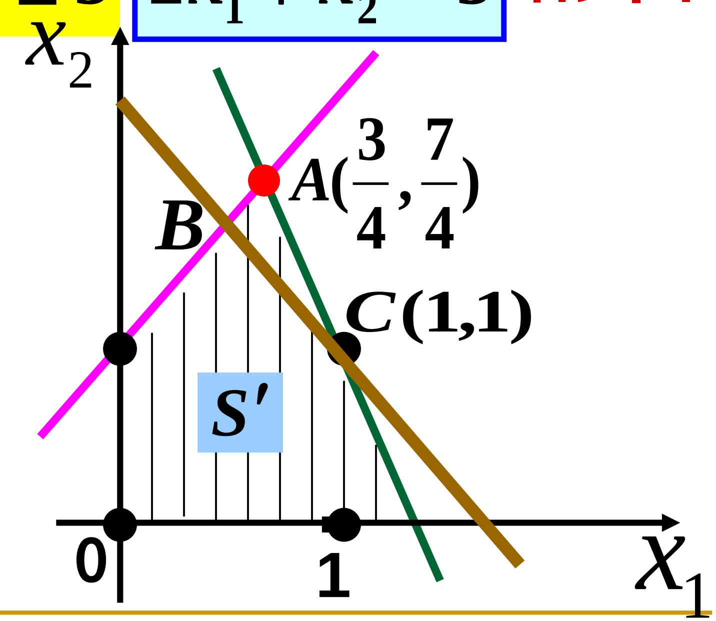
$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-9)$$

$\max Z = x_1 + x_2$

$$(2-14)\ s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$2x_1 + x_2 \le 3$ $\boxed{2x_1 + x_2 = 3}$ 割平面



例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2 \quad \text{典式}$$
$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-9)$$

$$(2-14)\quad \max Z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2 \quad \text{典式}$$
$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-15)$$

(2-15)比(2-9)多了一个约束，为求 $(2-15)'$的最优解，可用灵敏度分析中增加约束的方法。将新约束加到 $(2-9)'$ 的最优表中，用对偶单纯形法迭代一次即可求出 $(2-15)'$ 的最优表。

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-8)\quad s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2 \text{ 典式}$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-9)$$

$(2-9)'$ 的**最优表**为

		x_1	x_2	u_1	u_2
	$-5/2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$
x_2	$7/4$	0	1	$3/4$	$1/4$
x_1	$3/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$

$$\max Z = x_1 + x_2 \text{ 典式}$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-15)$$

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$

$$(2-8)\quad \text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}\quad (2-9)$$

$(2-9)'$ 的**最优表**为

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-5/2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0
x_2	$7/4$	0	1	$3/4$	$1/4$	0
x_1	$3/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0
u_3	3	2	1	0	0	1

$\max Z = x_1 + x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

(2-15)

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-8)\quad s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2 \quad \text{典式}$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-9)$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

(2-15)

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
u_3	3 $\frac{3}{2}$	2 0	1	0 $\frac{1}{2}$	0 $-\frac{1}{2}$	1

-2

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-8)\quad s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2 \text{典式}$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} (2-9)$$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-5/2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0
x_2	$7/4$	0	1	$3/4$	$1/4$	0
x_1	$3/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0
u_3	$3/2$	0	1	$1/2$	$-1/2$	1

−1

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$(2-15)$

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$

$$(2-8)\quad s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}\quad (2-9)$$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-5/2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0
x_2	$7/4$	0	1	$3/4$	$1/4$	0
x_1	$3/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0
u_3	$-1/4$	0	0	$-1/4$	$-3/4$	1
				2	$2/3$	

$\max Z = x_1 + x_2$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

(2-15)

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\quad (2-8)\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2 \text{典式}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \quad (2-9) \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-5/2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0
x_2	$7/4$	0	1	$3/4$	$1/4$	0
x_1	$3/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0
u_2	$-1/4$	0	0	$-1/4$	$-3/4$	1

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

(2-15)

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-8)\quad s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2 \text{典式}$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-9)$$

$(2-15)'$ 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-7/3$	0	0	$-1/3$	0	$-2/3$
x_2	$5/3$	0	1	$2/3$	0	$1/3$
x_1	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$
u_2	$1/3$	0	0	$1/3$	1	$-4/3$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$(2-15)$

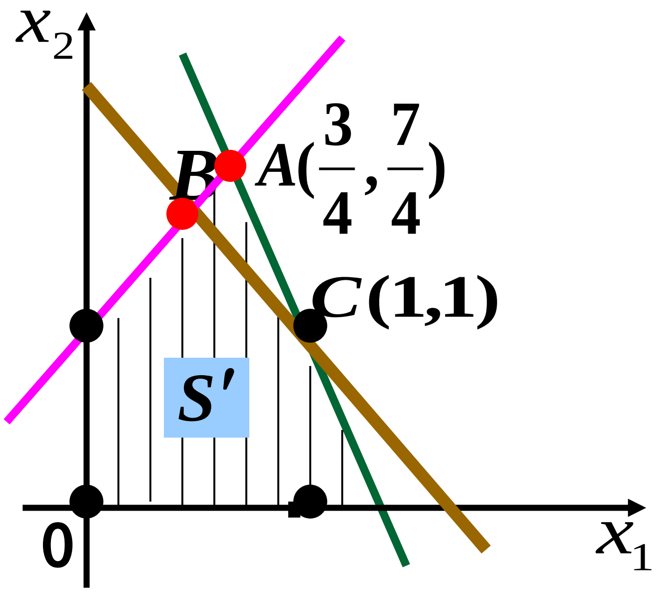
例2-2

$(2-15)'$ 的最优解 $B(\frac{2}{3},\frac{5}{3})$ → 不是整数解，再做割平面

$$Z=\frac{7}{3}$$

$(2-15)'$ 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-7/3$	0	0	$-1/3$	0	$-2/3$
x_2	$5/3$	0	1	$2/3$	0	$1/3$
x_1	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$
u_2	$1/3$	0	0	$1/3$	1	$-4/3$



例2-2

做割平面：$x_2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_3$

$$x_2 + u_1 + u_3 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_3 \geq 2 \rightarrow \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_3 \geq \frac{1}{3}$$

$$\downarrow$$

$$u_1 + 2u_3 \geq 1$$

$(2-15)'$ 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-7/3$	0	0	$-1/3$	0	$-2/3$
x_2	$5/3$	0	1	$2/3$	0	$1/3$
x_1	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$
u_2	$1/3$	0	0	$1/3$	1	$-4/3$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

(2−15)

例2-2

做割平面： $x_2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_3$

$u_1 + 2u_3 \ge 1 \rightarrow (1 + x_1 - x_2) + 2(3 - 2x_1 - x_2) \ge 1$

$x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 + x_2 = 2$ 割平面

$(2-15)'$ 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-7/3$	0	0	$-1/3$	0	$-2/3$
x_2	$5/3$	0	1	$2/3$	0	$1/3$
x_1	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$
u_2	$1/3$	0	0	$1/3$	1	$-4/3$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

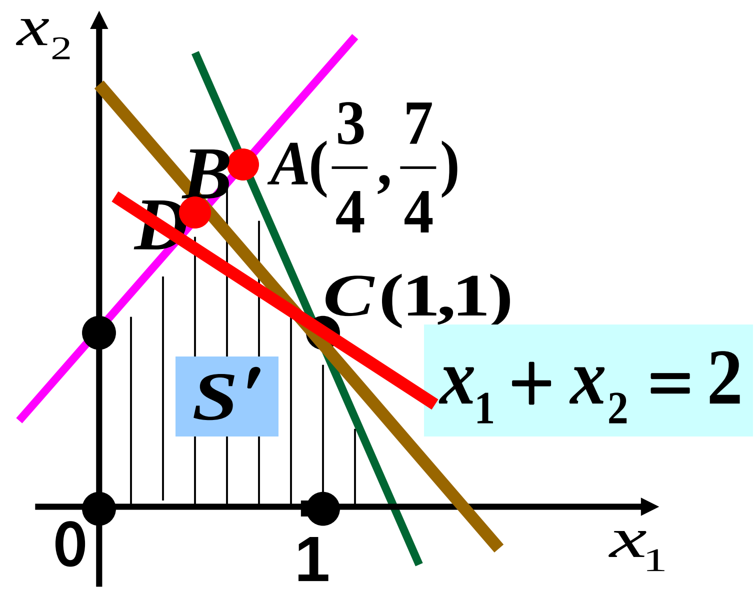
$(2-15)$

例2-2

$$(2-8)\quad \max Z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$(2-14)\quad \max Z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$(2-19)\quad \max Z = x_1 + x_2$$
$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$



例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-19)$$

$$\longrightarrow$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + u_4 = 2 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-20)$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-15)$$

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-20)\quad s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + u_4 = 2 \\ u_1, u_2, u_3 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$(2-15)'$ **最优表**

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	$-7/3$	0	0	$-1/3$	0	$-2/3$	0
x_2	$5/3$	0	1	$2/3$	0	$1/3$	0
x_1	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	0
u_2	$1/3$	0	0	$1/3$	1	$-4/3$	0
u_4	2	1	1	0	0	0	1

−1

整数规划2-3

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$s.t.$

$$(2-20)\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + u_4 = 2 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	$-7/3$	0	0	$-1/3$	0	$-2/3$	0
x_2	$5/3$	0	1	$2/3$	0	$1/3$	0
x_1	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	0
u_2	$1/3$	0	0	$1/3$	1	$-4/3$	0
u_4	$4/3$	0	1	$1/3$	0	$-1/3$	1

−1

整数规划2-3

例2-2

$$(2-20)\begin{cases} \max Z = x_1 + x_2 \\ s.t. \\ -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + u_4 = 2 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, 整数 \end{cases}$$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	$-7/3$	0	0	$-1/3$	0	$-2/3$	0
x_2	$5/3$	0	1	$2/3$	0	$1/3$	0
x_1	$2/3$	1	0	$-1/3$	0	$1/3$	0
u_2	$1/3$	0	0	$1/3$	1	$-4/3$	0
u_4	$-1/3$	0	0	$-1/3$	0	$-2/3$	1

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t. \quad (2-20)\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + u_4 = 2 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

最优解 $C(1,1)$ $Z = 2$

$(2-20)'$ 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	-2	0	0	0	0	0	-1
x_2	1	0	1	0	0	-1	2
x_1	1	1	0	0	0	1	-1
u_2	0	0	0	0	1	-2	1
u_1	1	0	0	1	0	2	-3

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

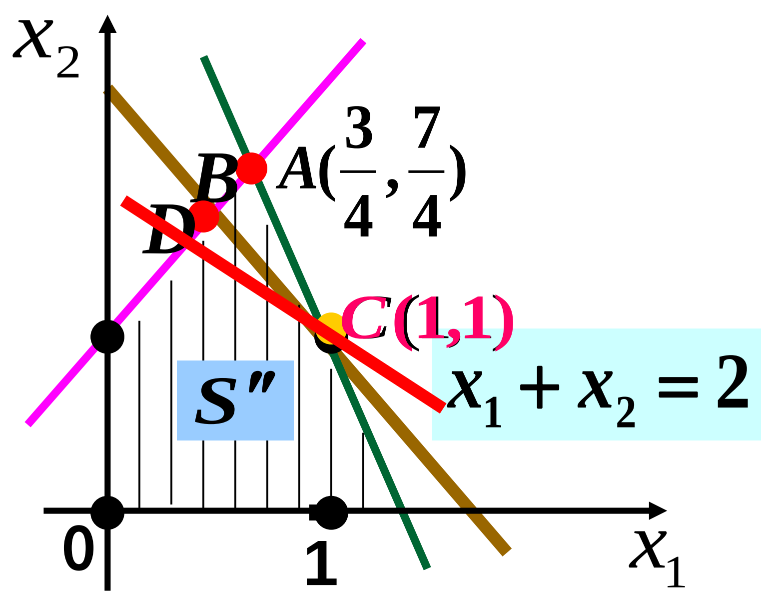
$$(2-8)\ s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$(2-14)\ s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-19)$$



解 $(2-19)'$ 得最优解 $C(1,1)$

$Z = 2$

割平面法的迭代步骤：

线性整数规划(S) → 求其伴随规划的最优解

↓

线性整数规划(S')

最优解
- 整数解 → 原问题的最优整数解，迭代终止
- 非整数解 →
  1. 建立割平面方程
  2. 将割平面方程相应的约束加入原线性整数规划，得到较小可行域上的线性整数规划，且S'中与S中的整数解相同.

整数规划---线性整数规划

- 分枝定界法
- 割平面法
- 分配问题的解法

作业：P125　2(1)(2)　3(1)

作业：P109　2(1)(2)　3(1)