第二章 整数规划

第四节 分配问题（指派问题）

n 个人

n 项工作

数学模型：

$$\min\ S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1,2,\cdots n\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots n\\ x_{ij}=0\text{ 或 }1,\ i,j=1,2,\cdots n\end{cases}$$

c_{ij} — 第 i 个人做第 j 项工作的费用

是特殊的运输问题： $m=n,\ a_i=b_j=1.$

价格矩阵： $C=(c_{ij})$ 元素非负

简单情况：

$$\begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ * & * & 0 & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & 0 & * \end{bmatrix}, \cdots$$

想法： 将价格矩阵C化成这样易于分配工作的形式.

约化矩阵： $C'=(c_{ij}')$ —— **匈牙利方法**

将C的某些行和列分别加减某些数而得，

$c_{ij}' \geq 0$，且每行每列至少有一个0元素.

原理： 给定 $C=(c_{ij})$，把C的某一行或某一列的所有元素减去一个常数 β，记为 C'，则以C为价格矩阵的分配问题和以 C' 为价格矩阵的分配问题有相同的最优解.

验证： 设第 i_0行减 β，则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}{}'x_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\sum_{j=1}^{n}\beta x_{i_0 j}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\beta\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{n}x_{i_0 j}}_{=1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-\beta \quad \blacksquare$$

理解：

$$C=\begin{bmatrix}2&3&4&5\\ *&*&0&*\\ *&0&*&*\\ *&*&*&0\end{bmatrix}\begin{matrix}-2\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$ 时与 $$C'=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\ *&*&0&*\\ *&0&*&*\\ *&*&*&0\end{bmatrix}$$ 时同解.

第二章 整数规划

第五节 0–1型整数规划的隐枚举法

- 0-1型整数规划是一种特殊的整数规划，要求所有变量只能取值为0或1.
- 完全枚举法求解困难：n个变量，2^n种变量组合.

隐枚举法：

- 只要变量组合不满足其中一个约束条件，则不再检验是否满足其它约束条件；
- 利用目标函数值作为过滤条件.

例1. 求解0-1整数规划：

$$\max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & (a) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & (b) \\ x_1 + x_2 \le 3 & (c) \\ 4x_2 + x_3 \le 6 & (d) \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

隐枚举法：

(x_1,x_2,x_3)	z 值	约束条件				过滤条件
		a	b	c	d	
$(0,0,0)$	0	√	√	√	√	$z \geq 0$
$(0,0,1)$	5	√	√	√	√	$z \geq 5$
$(0,1,0)$	-2					
$(0,1,1)$	3					
$(1,0,0)$	3					
$(1,0,1)$	8	√	√	√	√	$z \geq 8$
$(1,1,0)$	1					
$(1,1,1)$	6					

$$\max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 & (a) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 & (b) \\ x_1 + x_2 \leq 3 & (c) \\ 4x_2 + x_3 \leq 6 & (d) \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 & \end{cases}$$

最优解(1,0,1)，max z = 8

8次+12次=20次运算！

隐枚举法：

(x_1,x_2,x_3)	z 值	约束条件 a	b	c	d	过滤条件
(0,0,0)	0	√	√	√	√	$z \geq 0$
(0,1,0)	−2					
(0,1,1)	3	√	X			
(0,0,1)	5	√	√	√	√	$z \geq 5$
(1,0,0)	3					
(1,0,1)	8	√	√	√	√	$z \geq 8$
(1,1,0)	1					
(1,1,1)	6					

$$\max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 & (a) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 & (b) \\ x_1 + x_2 \leq 3 & (c) \\ 4x_2 + x_3 \leq 6 & (d) \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

最优解(1,0,1)，$\max z = 8$

8次+14次=22次运算！

例1. 求解0-1整数规划：

$$\max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & (a) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & (b) \\ x_1 + x_2 \le 3 & (c) \\ 4x_2 + x_3 \le 6 & (d) \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

题中 x_2 系数较大，约束为 $\le$ ，倾向于让它取0值！

- 在隐枚举法中，可根据约束条件形式及变量系数大小来调整变量组合的次序，以提高计算效率.