无量纲化

Abstract: 介绍无量纲的处理方式及相关理论

Keywords: Pi理论

1 Introduction

对于数学或者物理上的一个等式，我们要求等式两边的单位保持一致，这就是量纲的齐次性. 当然，很多的物理量本身是有量纲的，但是有些物理量的量纲是基本的，有些可以由其他的基本量纲通过定义或者某些物理定律推导出来。例如：长度、时间、质量的量纲分别为米、秒和千克。一般情况我们把其表示为：L, T, M. 这些我们称为基本的量纲。而对于有些物理量：如速度、力和加速度，其量纲是$LT^{-1}, MLT^{-2}, LT^{-2}$。而在物理量中某些系数也可能存在量纲，例如万有引力表达式中$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$。其量纲为$LMT^{-2}L^2M^{-2} = L^3M^{-1}T^{-2}$. 这样我们可以推导出一些问题的量纲单位，那么如何应用量纲来处理一些具体的问题：

单摆运动：这是一个经典的数学问题。质量为m 的小球系在长度为l的线的一端，稍微偏离位置后，小球在重力mg的作用下往复运动，计算单摆的运动周期t.

如果从物理的角度来看，可以通过反复做试验，统计相关的数据，建立起不同的数据之间的关系表达式，但是在处理的时候，往往因为试验条件的不同，会导致试验的结果有差距。那么如何通过数学的角度来进行处理，从而使得其试验次数减少，更精确建立起不同的物理量之间的关系。

在处理之前，首先要考虑的一点是该问题和什么物理量有关，而与此同时，可能有些物理量是和该问题没有关系。

我们假设和其周期相关的物理量有：重力、摆线的长度、小球的质量。这样从量纲的表示来看：$t = km^{\alpha_1}g^{\alpha_2}l^{\alpha_3}$. 根据量纲相等，则：

$$T = kM^{\alpha_1}(LT^{-2})^{\alpha_2}L^{\alpha_3} \tag{1.1}$$

根据两边的量纲，则同量纲的系数应该相等。则$\alpha_2 = -\frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = 0$. 这样我们可以得

到各个变量之间的关系表达式：

$$t = kg^{-\frac{1}{2}}l^{\frac{1}{2}} = k\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1.2}$$

这样我们只需要一组试验数据就可以确定系数k的值。这也说明周期和质量没有关系。

我们同样可以把该问题推广到一般的情况，即各个变量之间的关系表达式是

$$f(t,l,m,g) = 0 \Rightarrow t^{y_1}m^{y_2}l^{y_3}g^{y_4} = 0 \tag{1.3}$$

而以上的各个变量可以用基本的量纲来表示，即：

$$(L^0M^0T)^{y_1}(L^0MT^0)^{y_2}(LM^0T^0)^{y_3}(LM^0T^{-2})^{y_4} = 0 \tag{1.4}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

$$M^{y_2}L^{y_3+y_4}T^{y_1-2y_4} = M^0L^0T^0 \tag{1.6}$$

从数学来讲，这是一个代数方程组，那么有4个变量，三个方程，这样的方程有无穷多个解。则其存在基础解系。$y_2 = 0, y_3 = -y_4, y_1 = 2y_4$,这样取$y_4 = 1$, 则可得$(2,0,-1,1)$,这样亦可以得到上面的比例关系。同时我们也可以观察到该方程组的秩为3，其基本解的个数为1，则同时也可以发现$(2,0,-1,1)$为其对应的一组无量纲的解。

定理：设有m个物理量$q_1, q_2, \cdots, q_m$，$f(q_1, q_2, \cdots, q_m) = 0, X_1, X_2, \cdots, X_n$为基本的量纲，我们假设每个物理量$q_j$都可以由基本量纲表示：

$$q_j = \Pi_{i=1}^{n} X_i^{a_{ij}}, j = 1, 2, \cdots, m \tag{1.7}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

若该矩阵的秩为r,则该方程组有$m-r$个基本解，这$m-r$个基本解恰好可以构成所对应的$m-r$个无量纲量。这就是Pi定理。

流经平板的流体的流动模型（Blasius Problem）

$$
\begin{aligned}
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

对应的边界条件为：

$$
y=0,u=v=0;y\to\infty,u\to U \tag{1.10}
$$

根据连续性方程，这里速度u,v是两个相互独立的因变量，想要求其表达式，或者其相关的变量，可以这样理解：$u=f(x,y,\nu,U)$

这里，以上各个变量的量纲可以表示如下：

$$
[u]=LT^{-1},[x]=L,[y]=L,[\nu]=L^2T^{-1},[U]=LT^{-1} \tag{1.11}
$$

则

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \cdots\\ y_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \cdots\\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.12}
$$

其秩为2，其基础解系个数为3。可得$y_4=-y_2-y_3,y_5=-y_1+y_2+y_3$,则可得$(0,0,1,-1,1)$, $(0,1,0,-1,1),(1,0,0,0,-1)$.

则其对应的无量纲值为：$\eta=\frac{xU}{\nu},\xi=\frac{yU}{\nu},\bar{u}=\frac{u}{U}$.

把以上的结果带入到控制方程，可以得到

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2}\\
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}=0
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

从方程结构上来看，其解并没有实质性的化简。这样我们就需要对方程的进行重新处理，也就是修改的PI定理：一般情况下，在边界层方程中，其在水平方向的长度和边界层的厚度是不在同一个单位级别（同一尺寸）的，这样对该问题进行处理，做如下假设$[x]=L_x$,则速度$[u]=L_xT^{-1}$, 同样我们假设速度u,v 是同一量级，进一步根据连续性方程可以得到等式两边的量纲为：

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=T^{-1},\frac{\partial v}{\partial y}=T^{-1} \tag{1.14}
$$

则速度v 和y 方向的量纲为

$$[v] = L_y T^{-1}, [y] = L_y \tag{1.15}$$

并且等式两边所对应项的量纲为：

$$[u\frac{\partial u}{\partial x}] = L_x T^{-2}, [v\frac{\partial v}{\partial y}] = L_x T^{-2}, [\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] = L_x T^{-2} \tag{1.16}$$

这样粘性系数ν的量纲为$L_y^2 T^{-1}$.这样就得到另外一种关于速度u的表达形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

可以得到其特解为$(1, -1, 2, -1, 0), (1, 0, 0, 0, -1)$,则其无量纲量为

$$\bar{u} = \frac{u}{U}, \eta = y/\sqrt{\frac{x\nu}{U}}\frac{u}{U} = \varphi'(\eta). \tag{1.18}$$

这里$\sqrt{\frac{x\nu}{U}} = \delta$实际上是边界层的厚度。

把上式带入到原控制方程中可以得到：

$$2\varphi''' + \varphi'\varphi'' = 0 \tag{1.19}$$

对应的边界条件为

$$\eta = 0, \varphi = 0, \varphi' = 0; \eta \to \infty, \varphi' = 0 \tag{1.20}$$

这样上述的偏微分方程就变成了一个常微分方程，使得计算得以进一步简化。对于这样的常微分方程的求解，一般我们将采用打靶法和龙格库塔方法相结合进行求解或者是求解边值问题的软件进行处理。

```
function [T,Y] = euler( tmax , dt , ic )
T = 0:dt:tmax;
Y = zeros( length(ic) , length(T) );
[m,n] = size(ic);
if( m == 1 )
ic =ic';
end
***********
```

```
initial condition
Y(:,1) = ic;
for i=2:length(T)
y = Y(:,i-1);
t = T(:,i-1);
Y(:,i) = y + dt*f(t,y);
end
return
********
function dy = f(t,y)
alpha = 1; beta = 5; gamma = 4; delta = 1;
r = y(1); w = y(2);
dy = zeros(size(y));
dy(1) = alpha*r*(1-r) - beta*r*w;
dy(2) = gamma*r*w - delta*w;
return;
```

而且从以上的计算可以知道，不同的量纲分析得到不同的无量纲变换，有些可以使得方程更加简单，而有的并没有从本质上改变方程计算强度。

抛射问题：在地球表面以初速度v数值向上发射火箭，地球半径为r,忽略空气阻力，讨论运行高度随时间t的变化规律。

根据万有引力公式，容易计算：

$$m_1x'' = -k\frac{m_1m_2}{(x+r)^2} \tag{1.21}$$

边界条件是：

$$x = 0 : x'' = -g \tag{1.22}$$

而且根据以上的方程可以得到：

$$x'' = -\frac{r^2g}{(x+r)^2} \tag{1.23}$$

边界条件是：

$$x(t)|_{t=0} = 0, x'(t)|_{t=0} = v \tag{1.24}$$

这个表达式中各个变量都是带量纲的，要求的距离x显然会和变量r, v, g, t具有相关性。我们可以给出一个无量纲的变换，当然我们也有其他的无量纲的变换方式，但是从物理上来

讲，未必得到符合实际的表达式。

$$\bar{x} = \frac{xg}{v^2}, \bar{t} = \frac{t}{vg^{-1}} \tag{1.25}$$

$$\bar{x}'' = -\frac{1}{(\frac{v^2}{rg}\bar{x} + 1)^2} \tag{1.26}$$

边界条件是

$$\bar{x}(\bar{t})|_{\bar{t}=0} = 0, \bar{x}'(\bar{t})|_{\bar{t}=0} = 1, \tag{1.27}$$

这里$\frac{v^2}{rg}$ 同样是一个无量纲的量，而且是一个小的参数，因为速度相对于半径而言是极小。不妨把它记为ε.

这样，上述方程可以表示成一个含有小参数的如下表达式，

$$\bar{x}'' = -\frac{1}{(\varepsilon\bar{x} + 1)^2} \tag{1.28}$$

而且表达式中各个变量都是无量纲的值，是纯粹的一个非线性的数学问题，对于非线性的数学问题，一般情况下很难直接取得解析表达式。对于这样含有小参数的微分数学问题，若想得到其解析表达式，一般我们采用摄动方法。