稳定性理论及连续性方程

Abstract: 介绍稳定性理论及相关的连续性数学模型：生物链相关的模型、稳定性理论

Keywords: 捕食者、稳定性理论

1 Introduction

对应于一些建立的连续性的微分模型，若对其解进行分析，有这么几种方式，一是应用数值的方法计算出其数值解，但是对这样的解进行分析，要分析其解的合理性。一般情况下这样的解同样需要根据其物理背景来判断其解的可靠性，例如速度曲线，如果计算出来的结果趋向于无穷大，则其解是从物理意义上不存在的；其次是计算其解析表达式，如果能得到其解析表达式，这是最好的，因为这样可以从本质上来分析其解的形态。但是很多的方程都是非线性的，对于非线性的方程进行求解，要想计算出其解析表达式，难度同样很大。一般借助于一些解析方法，如摄动方法、同伦分析方法、同伦摄动方法、Adomin 分解方法等。对于这样的问题进行求解，其核心思想是把原来的非线性问题转换成一系列的线性问题来进行计算，得到其渐近解析表达式；最后一种方法是不求出其解，但是同样可以根据方程的特点来分析其解的稳定性、解的存在性、唯一性等相关的特点。对这样的问题来进行分析，既要有扎实的理论基础，同样也需要对方程的特点来进行分析，方程的形式不同，分析的方式、方法也不同。

对于微分方程$x'(t) = f(x)$,如果方程的右边不显含自变量t，称之为自治方程。如果令$f(x) = 0$，其对应的实根$x = x_0$称为方程的平衡点(奇点)。显然$x = x_0$也是方程的解。对于一个微分方程，如果其通解存在，则该方程存在任意的常数。根据某个初始条件，可以确定该方程的特解。而对于该特解满足如下条件，若$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$,则称平衡点$x_0$为稳定点。但是，一般情况下，该方程的解的表达式我们不能求出。这样对于上面的问题，就陷入一个死循环，解不能求出，如何来求极限，而要求其极限，就需要求其解。在这种情况下，一般我们应用直接法来进行分析：

把方程的右边的等式在$x = x_0$展开，可以得到如下方程表达式$x'(t) = f'(x_0)(x - x_0)$.则如果$f'(x_0) > 0$,该解不稳定，若$f'(x_0) < 0$,该解稳定。证明如下：对以上方程$x'(t) = f'(x_0)(x - x_0)$进行求解，可以得到方程的解为$x(t) = c\exp(f'(x_0)t) + x_0$.很容易可以看出，

若$f'(x_0) > 0$,则当时间t趋向于无穷大时，其解发散；而对应另外一种情况，其解满足条件趋向于x_0.

如果方程是一个方程组的话，如下所示：

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{1.1}$$

令

$$\begin{cases} 0 = f_1(x_1, x_2) \\ 0 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{1.2}$$

可以得到方程的实根$x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$，称之为平衡点。如果当时间t趋向于无穷大时，其解趋向于$\lim_{t\to\infty} x_1 = x_1^0, \lim_{t\to\infty} x_2 = x_2^0$,这时我们称其解为稳定点。但是如果方程$f_1, f_2$为非线性方程，这时我们对方程应用多元函数的泰勒公式,在点(x_1^0, x_2^0) 展开得到其对应的线性部分。

$$\begin{cases} \quad x_1' = f_{1x1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10}) + f_{1x2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20}), \\ \quad x_2' = f_{2x1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10}) + f_{2x2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20}), \end{cases} \tag{1.3}$$

这时对应的方程和原方程有相同的稳定性。

$$A = \begin{pmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} \end{pmatrix}|_{(x_1^0, x_2^0)} \tag{1.4}$$

同样若要对该方程组进行分析，则需要考虑其线性部分所对应的矩阵的特征方程。很容易可以得到：

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{1.5}$$

这里$p = -f_{1x_1} - f_{2x_2}|_{(x_1^0, x_2^0)}, q = \det(A)|_{(x_1^0, x_2^0)}$.如果$p > 0, q > 0$，则其平衡点是稳定的。而如果$p < 0$或者$q < 0$，则该平衡点是不稳定的。或者如果特征根小于零或者有负实部，则其解是稳定的，否则该点为非稳定点。

在一个自然环境中有两个种群存在，它们之间存在着相互竞争、相互依存以及弱肉强食的相互关系。当两个种群为争夺同一事物来源和生存空间相互竞争时，最常见的结局是：竞争力弱的灭绝而竞争力强的达到环境允许的最大值。对于这样的模型进行分析，因为要对两个不同的种群的相互作用进行分析，容易产生一种反复。例如A对B有影响，而B对A 反过来又有作用，这是一个动态变化的过程。如何建立方程描述这一相互作用。

假设有甲乙两个种群，当他们独自在一个自然环境中生存时，服从Logistic的规律。

设$x_1(t), x_2(t)$是两个种群的数量，r_1, r_2是他们的固有增长率，N_1, N_2是它们的最大的容量，则对应于种群甲而言满足如下的表达式：

$$x_1'(t) = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1}) \tag{1.6}$$

这里$1 - \frac{x_1}{N_1}$ 反应了甲对有限资源的消耗导致了对他本身的增长的阻滞作用，因为若没有这个值的影响，其增长率为r_1.可以理解为x_1数量的甲所消耗的$1/N_1$的数量的食物对甲的影响。

当两个种群在同一个环境中生存时，由于乙消耗同样的供养甲的资源对甲的增长产生阻滞作用，这样可以在因子$1 - \frac{x_1}{N_1}$中再减去一项，其表达式如下：

$$x_1'(t) = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}), \tag{1.7}$$

这里σ_1可以这样理解，由于两者竞争能力的不同，乙所消耗的食物的数量为甲的σ_1倍。

类似的，甲的存在也影响着乙的增长，则种群乙所对应的方程为：

$$x_2'(t) = r_2 x_2 (1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}), \tag{1.8}$$

这样，就建立起两个种群的竞争模型。注意这里的两个系数σ_1, σ_2,当一个种群的竞争能力很强的时候，这时另外一个种群相对于另外一个种群的竞争力就会相当于变弱。这样一般情况下我们做如下假设：$\sigma_1 \sigma_2 = 1$

令方程的等号右边等于零，可以得到4个平衡点

$$P_1(N_1, 0), P_2(0, N_2), P_3(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}), P_4(0,0) \tag{1.9}$$

首先该问题所对应的平衡点只有是正数的时候，才具有意义，因为我们需要要求种群的数量应该为正数。所以对于P_3,其参数σ_1, σ_2 应该同时大于1或者小于1.

$$A = \begin{pmatrix} r_1(1 - \frac{2x_1}{N_1} - \frac{\sigma_1 x_2}{N_2}) & \frac{-r_1\sigma_1 x_1}{N_2} \\ \frac{-r_2\sigma_2 x_2}{N_1} & r_2(1 - \frac{2x_2}{N_2} - \frac{\sigma_2 x_1}{N_1}) \end{pmatrix}|_{P_i} \tag{1.10}$$

根据平衡点可以计算出相应的p, q值，根据解的稳定性，可以得到其相应的稳定条件。

$$\begin{aligned} & P_1(N_1, 0) : \sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1, \\ & P_2(0, N_2) : \sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1, \\ & P_3(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}) : \sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1, \\ & P_4(0,0) : Nostability \end{aligned} \tag{1.11}$$

刚才我们是从直观上对解的稳定性进行了分析。对于该问题，也可以从理论的角度进行处理，来分析其解最终会趋向于稳定点。

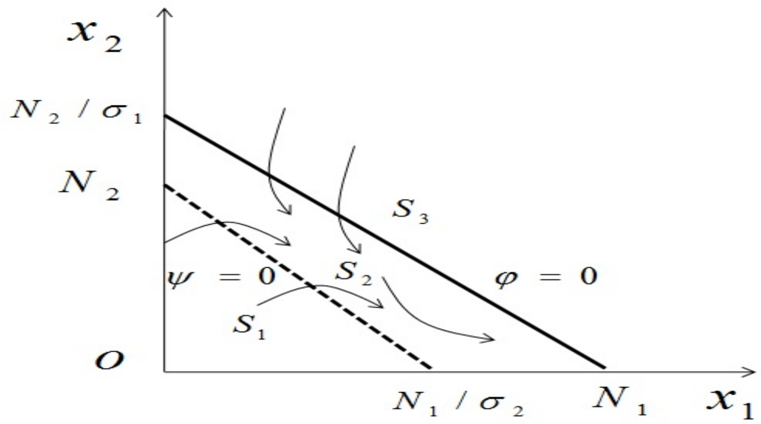

Figure 1: 点P1所对应的稳定性

根据所给条件

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}),\\
x_2'(t) &= r_2x_2(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}),
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

这里$\sigma_1<1,\sigma_2>1$. 可以知道在不同的区域内，

$$
\begin{aligned}
&S_1: x_1'>0, x_2'>0\\
&S_2: x_1'>0, x_2'<0\\
&S_3: x_1'<0, x_2'<0
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

下面我们分析随着时间t的增长，x_1,x_2是如何变换的：如果轨线从S_1出发，则向上，向右运动，必然可以进入到S_3.

若轨线从S_2出发，根据条件可以知道轨线往右下方运动，或者进入S_3，或者趋向点P_1.但是不可能趋向于S_3. 否则必然在某个时刻t_1,$\varphi=0$,则$x_1'(t_1)=0$.而我们可以根据一阶导数值计算其相应的二阶导数值：

$$x_1''(t_1)=-\frac{r_1\sigma_1}{N_2}x_1(t_1)x_2'(t_1) \tag{1.14}$$

而根据条件可以知道$x_2'(t)<0$,则$x_1''(t_1)>0$,则说明$x_1(t)$在t_1达到极小值，但是这时不可能的，因为S_2内，x_1一直是单调递增的。

若轨线从S_3出发，根据条件可以知道轨线往左下方运动，或者进入S_2，或者趋向点P_1.如

果进入到S_2,则根据上面的分析则最终趋向于P_1.

这样也就说明了其解最终会趋向于点P_1.

种群的相互依存：在自然界中处于同一环境下的两个种群相互依存而共生的现象是很普遍的。例如植物可以独立生存，但是昆虫的授粉作用又可以提高植物的增长率，而以花粉为食物的昆虫却不能离开植物单独存活。

设种群甲可以独立存在，按照Logistic 规律增长，而种群乙为甲提供养料，有助于甲的增长。

$$x_1'(t) = r_1x_1(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1\frac{x_2}{N_2}), \tag{1.15}$$

而对应于种群乙而言，没有甲的存在就会死亡。假设其死亡率为r_2,则乙单独存在时有

$$x_2'(t) = -r_2x_2 \tag{1.16}$$

因为甲对乙提供养料，则

$$x_2'(t) = r_2x_2(-1 + \sigma_2\frac{x_1}{N_1}) \tag{1.17}$$

从上面的表达式可以看出显然$\sigma_2\frac{x_1}{N_1} > 1$时，种群乙的数量才会增长，在增长的同时乙本身又会受到自身的阻滞作用。所以在以上式的右端还要添加Logistic项：

$$x_2'(t) = r_2x_2(-1 + \sigma_2\frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}) \tag{1.18}$$

这样两个方程就构成了相互依存的数学模型。

令等号右侧的方程等于零，可以得到平衡点，

$$\begin{aligned}
&P_1(N_1, 0) : \sigma_2 < 1, \sigma_1\sigma_2 < 1, \\
&P_2(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}) : \sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1, \sigma_1\sigma_2 < 1, \\
&P_3(0, 0) : Nostability
\end{aligned} \tag{1.19}$$

对于所得到的平衡点而言，欲使其有意义($x_1 > 0, x_2 > 0$)且满足稳定的条件.

$$\psi = -1 + \sigma_2\frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} = 0; \varphi = 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1\frac{x_2}{N_2} = 0; \tag{1.20}$$

这两条轨线把区域分成了四部分：

$$
\begin{aligned}
&S_1 : x_1' > 0, x_2' < 0 \\
&S_2 : x_1' > 0, x_2' > 0 \\
&S_3 : x_1' < 0, x_2' > 0 \\
&S_4 : x_1' < 0, x_2' < 0
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

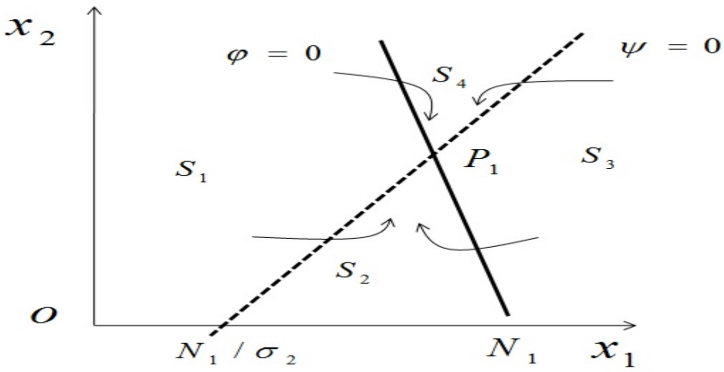

Figure 2: 点P2所对应的稳定性

这里有几个条件需要确定：$\sigma_1\sigma_2 < 1$来表示其解在第一象限内，$\sigma_1 < 1$这说明乙向甲提供食物加以限制，以防止甲的过分增长。

相互依存的模型还有其他形式：两种群均能独立生存及均不能独立生存，同样可以类似分析其平衡点的稳定性。

捕鱼业的持续收获： 渔业资源是一种再生的资源，再生资源再开发的时候要注意适度开发，要注意两点：一是希望产量最大，但不是涸泽而渔；另外希望产生的鱼所得到的收益最高，但这时需要注意的是鱼的产量的稳定。希望建立适当的模型，得到合适的捕捞值达到以上的两个结果.

考察一个渔场，做如下假设，其中的鱼量在天然的情况下按照一定的规律增长，如果捕捞量恰好等于鱼的增长量，那么渔场的鱼量将保持不变，这样鱼可以保持持续发展；但是捕鱼的目的在于创造最大的经济效益，这样就需要建立合适的渔场模型，对上述结果进行分析。首先我们建立起鱼的产量模型：

假设t时刻渔场中的鱼的数量为$x(t)$,如果不考虑捕捞，则$x'(t) = rx(1 - \frac{x}{N})$. 而与此同时，单位时间的捕捞量与渔场的鱼量成正比，$h(x) = Ex$.

这样，渔场内的鱼的数量应该满足以下方程：

$$x'(t) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex = f(x) \tag{1.22}$$

令

$$F(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex = 0 \tag{1.23}$$

可以得到两个平衡点：$x_0 = N(1 - \frac{E}{r}), x_1 = 0$ 容易计算$F'(x_0) = E - r, F'(x_1) = r - E$. 所以若$E < r$,则$x_0$点稳定，$x_1$点不稳定。

这说明一个情况，如果捕捞量小于鱼的固有增长量，就可以使得渔场的鱼量稳定在x_0,但是需要注意的是这里E仍然是一个变化的值。需要确定在稳定什么情况下可以获得最大的捕捞量。而对应于另外一种情况，如果捕捞过量，则渔场的鱼量就会趋向于零。

显然在$E < r$时，可以得到稳定的解。但是什么情况下可以使得Ex最大。Ex最大，实际上是$f(x)$最大。对于$f(x)$表达式.很容易可以得到其最大值。当$x* = \frac{N}{2}$时，可以得到最大的$f(x)$.把其带入到$f(x)$中，则可得$f(x) = \frac{rN}{4}$.这实际上也是最大的捕捞量。可以得到$E = \frac{r}{2}$,也就是捕捞率。从这样的表达式可以看出当捕捞率是固有增长率的一半的时候，可以保持持续的增长并且产量最大。

但是，捕捞出来的鱼还是要卖的，这时要关键看一下它所对应的效益–即经济效益模型。从经济角度来看，最佳的经济效益未必对应于最大的产量。因为由于产量的增长势必带来成本价格的增长。假设其单位捕捞率的成本费用为c,鱼的销售单价为p. 这时可以在保证产量稳定的情况下，得到相应的利润：

$$T = pEx - cE = pEN(1 - \frac{E}{r}) - cE \tag{1.24}$$

这里E仍然是一个未知的值。对E求导数，可以得到$E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN})$.

这时在最大利润并且保证可以持续稳定发展情况下所对应的鱼的捕捞率。可以得到此时的稳定点的值为$x_R = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}$.

进一步可以得到在这种情况下所对应的鱼的产量：$h_R = E_R x_R = \frac{rN}{4}(1 - \frac{c^2}{p^2N^2})$。对此式进行分析，可以看出，在最大利润的情况下，捕捞率有所减少，持续的产量有所增大，鱼场产量有所减少。而减少或增加的部分和捕捞成本与销售价格有一定的影响。对于捕捞率而言，显然，当捕捞成本增大时，为了利润最大化，捕捞率应该相应降低，同时若价格上涨，相应应该增加捕捞率。这种模型是单独的经营者有计划的捕捞，可以追求利润的最大化。但是如果渔场向众多的盲目的经营者开放，那么即使只有微薄的利润，经营者也会趋之若鹜，这种情况下称之为盲目捕捞。这种开采、捕捞主要由利润所决定，这时并非是追求的利润的最大化，而是说哪怕利润为零，只要有利润，捕捞者就会加快步伐，也就是说要打破原来的

平衡，所以其分界点应该是利润值为零时。

$$T = pEN(1 - \frac{E}{r}) - cE = 0 \Rightarrow E_s = r(1 - \frac{c}{pN}) \tag{1.25}$$

若$E < E_R$, 利润$R(E) > 0$,盲目的经营者就会加大捕捞轻度。反而，他们要减少强度。