9.3 外推法与龙贝格(Romberg)求积公式

(1) 理查森外推法（Richardson's Extrapolation ）

- 理查森外推法是一种对低阶收敛方法进行适当的组合，从而产生较高阶收敛精度的一种方法。
- 设公式$F_1(h)$逼近F*,即$h \to 0$时, $F_1(h) \to F^*$, P295
- 其误差展开式为:

$$F^*-F_1(h)=a_1h^{p_1}+a_2h^{p_2}+\cdots+a_mh^{p_m}+\cdots(1)$$

这里 $p_1<p_2<\cdots<p_m<\cdots$,且$a_1,a_2,\cdots$等是与$h$无关的常数。

上式记为$F^*-F_1(h)=O(h^{p_1})$,称$F_1(h)$ p_1阶收敛于F^* 。

下面利用理查森外推法构造p_2阶收敛于F^*的公式。

$$F^*-F_1(h)=a_1h^{p_1}+a_2h^{p_2}+\cdots+a_mh^{p_m}+\cdots(1)$$

- 将(1)中的h用qh来代替, $0<q<1$, 则有
- $F^*-F_1(qh)=a_1(qh)^{p_1}+a_2(qh)^{p_2}+\cdots+a_k(qh)^{p_k}+\cdots$ (2)
- (2)- $q^{p_1}\times$ (1), 得

$$(1-q^{p_1})F^*-[F_1(qh)-q^{p_1}F_1(h)]$$
$$=a_2(q^{p_2}-q^{p_1})h^{p_2}+\cdots+a_m(q^{p_m}-q^{p_1})h^{p_m}+\cdots$$

因为$1-q^{p_1}$不等于零,用$1-q^{p_1}$除上式两边有

$$F^*-\frac{F_1(qh)-q^{p_1}F_1(h)}{1-q^{p_1}}=a_2^{(1)}h^{p_2}+a_3^{(1)}h^{p_3}+\cdots+a_m^{(1)}h^{p_m}+\cdots$$

其中： $a_m^{(1)}$(m=2,3,…)是与h无关的常数.

$$F^*-\frac{F_1(qh)-q^{p_1}F_1(h)}{1-q^{p_1}}=a_2^{(1)}h^{p_2}+\cdots+a_m^{(1)}h^{p_m}+\cdots$$

令 $F_2(h)=\dfrac{F_1(qh)-q^{p_1}F_1(h)}{1-q^{p_1}}$,

则 $F^*-F_2(h)=a_2^{(1)}h^{p_2}+\cdots+a_m^{(1)}h^{p_m}+\cdots(3)$

$F_2(h)$逼近F^*的阶为p_2. 依次做下去,计算公式为

$$F_{j+1}(h)=\frac{F_j(qh)-q^{p_j}F_j(h)}{1-q^{p_j}},\quad 0<q<1,\quad (4)$$

$F^*-F_j(h)=O(h^{p_j})$, $j=1,2,\cdots$ $F_j(h)$逼近F^*的阶为p_j

上面的这种方法,称为理查森外推法

(2) 龙贝格（Romberg）求积公式

Romberg方法也称为逐次分半加速法。它是在复化梯形公式的基础上，利用Richardson外推法，构造出一种高精度的数值积分方法。

在等距基点的情况下，用计算机计算积分值通常都采用把区间逐次分半的方法进行。这样，前一次分割得到的函数值在分半以后仍可被利用,且易于编程 。

$$T_{2^k}=\frac{h_k}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^k-1}f(a+ih_k)],h_k=\frac{b-a}{2^k},k=0,1,\cdots$$

Romberg方法计算 $\int_a^b f(x)dx$ 步骤如下:

（1）构造复合梯形序列{$T_{1,k}$},k=0,1,…, $T_{1,k}=T_{2^k},h_k=\dfrac{b-a}{2^k}$

定义 $T_{1,0}=T_1=h_0[f(a)+f(b)]/2$ $h_0=b-a$

$T_{1,1}=T_2=(h_1/2)[f(a)+f(b)+2f(a+h_1)]=1/2[T_{1,0}+h_0f(a+h_1)]$, $h_1=(b-a)/2$

$T_{1,2}=T_4=(1/2)\{T_{1,1}+h_1[f(a+h_2)+f(a+3h_2)]\}$, $h_2=(b-a)/4$

. . . .

$$T_{1,k}=T_{2^k}=\frac{1}{2}[T_{1,k-1}+h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}f(a+h_k(2i-1))],h_k=\frac{b-a}{2^k}$$

$k=1,2,\cdots$

可以证明

$$\int_a^b f(x)dx-T_{1,k}=a_1h_k^2+a_2h_k^4+a_3h_k^6+\cdots+a_ih_k^{2i}+\cdots$$

(2)对复合梯形序列{$T_{1,k}$} 作Richardson外推

Richardson外推法

若 $p_1 < p_2 < \cdots < p_m < \cdots$，且

$$F^* - F(h) = a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \cdots + a_m h^{p_m} + \cdots \quad (1)$$

则有

$$\begin{cases} F_1(h) = F(h) \\ F_{j+1}(h) = \dfrac{F_j(qh) - q^{p_j} F_j(h)}{1 - q^{p_j}}, \quad 0 < q < 1 \\ F^* = F_j(h) + O(h^{p_j}), \quad j = 1,2,\cdots. \end{cases}$$

在（1）中, $p_j=2j$, 取$q=1/2$, $F_1(h)= T_{1,0}$,得到Romberg积分法。

Romberg积分法

$$T_{1,k} = T_{2^k} = \frac{1}{2}[T_{1,k} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} f(a + h_k(2i-1))], \ h_k = \frac{b-a}{2^k}$$

$$k = 1,2,\cdots$$

P297-298

$$\begin{cases} T_{1,0} = (h/2)[f(a) + f(b)], \ h = b - a \\ T_{m+1,k} = \dfrac{T_{m,k+1} - (1/2)^{2m} T_{m,k}}{1 - (1/2)^{2m}} = T_{m,k+1} + \dfrac{T_{m,k+1} - T_{m,k}}{4^m - 1}, \\ \int_a^b f(x)dx = T_{m,k} + O(h_k^{2m}), \quad m = 1,\cdots,k, \ k = 0,1,\cdots n. \end{cases}$$

k是2分区间 $[a,b]$的次数； m是外推的次数。

$$T_{2,0} = T_{1,1} + \frac{T_{1,1} - T_{1,0}}{3}, \ \int_a^b f(x)dx = T_{2,0} + O(h^4).$$

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$1: T_{1,0}$			
$2: T_{1,1}$	$3: T_{2,0}$		
$4: T_{1,2}$	$5: T_{2,1}$	$6: T_{3,0}$	
$7: T_{1,3}$	$8: T_{2,2}$	$9: T_{3,1}$	$10: T_{4,0}$
$11: T_{1,4}$	$12: T_{2,3}$	$13: T_{3,2}$	$14: T_{4,1}$

外推顺序表

可以验证，第一列是复合梯形序列；第二列是复合辛卜生序列；第三列是复合Cotes序列；第四列称为Romberg序列。

随着外推的次数增加，舍入误差积累也可能增加，因此外推的次数不宜过多。

终止外推条件：｜$T_{k,0}$- $T_{k-1,0}$｜<ε

例题1 给定下表，构造Romberg序列，近似计算 $\int_1^5 f(x)dx$

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

解: $T_{1,k} = T_{2^k} = \dfrac{1}{2}[T_{1,k-1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} f(1 + h_k(2i-1))], \ h_k = \dfrac{4}{2^k}$

$$k = 1,2,\cdots$$

$$\begin{cases} T_{1,0} = (4/2)[f(1) + f(5)] = 11.3892, \quad h_0 = 4 \\ T_{1,1} = (1/2)[T_{1,0} + 4f(3)] = 11.4894, \quad h_1 = 2 \\ T_{1,2} = (1/2)[T_{1,1} + 2(f(2) + f(4))] = 11.5157, \quad h_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{1,0} = (h/2)[f(a) + f(b)], \ h = b - a \\ T_{m+1,k} = T_{m,k+1} + \dfrac{T_{m,k+1} - T_{m,k}}{4^m - 1}, \end{cases}$$

$1: T_{1,0}$

$2: T_{1,1}$ $3: T_{2,0}$

$4: T_{1,2}$ $5: T_{2,1}$ $6: T_{3,0}$

$$\int_1^5 f(x)dx \approx 11.5246$$

$$T_{2,0} = T_{1,1} + \frac{T_{1,1} - T_{1,0}}{3} = 11.5228$$

$$T_{2,1} = T_{1,2} + \frac{T_{1,2} - T_{1,1}}{3} = 11.5245$$

$$T_{3,0} = T_{2,1} + \frac{T_{2,1} - T_{2,0}}{15} = 11.5246$$

例题2 利用Romberg序列，近似计算 $\int_0^1 f(x)dx$

若$T_{1,0}$=4, $T_{2,0}$=5,求f (0.5).

解： $T_{1,1} = \dfrac{1}{2}[T_{1,0} + f(0.5)], \quad f(0.5) = 2T_{1,1} - T_{1,0}$

$$T_{2,0} = T_{1,1} + \frac{T_{1,1} - T_{1,0}}{3} \Rightarrow T_{1,1} = \frac{3T_{2,0} + T_{1,0}}{4} = \frac{19}{4}$$

$$f(0.5) = 2T_{1,1} - T_{1,0} = \frac{19}{2} - 4 = \frac{11}{2}$$

作业

习题 9
P324:
6，7(1)

9.4 高斯求积公式

- 引言
- 求积公式
- 高斯求积公式的系数和余项
- 举例

引言

n+1个节点的插值求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

的代数精确度不低于n,能不能在区间[a,b]上适当选择n+1个节点$x_0,x_1,\ldots\ldots,x_n$,使插值求积公式的代数精度高于n?

答案是肯定的，适当选择节点，可使公式的精度最高达到2n+1，这就是所要介绍的高斯求积公式。

为考虑一般性,设求积公式为

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$\rho(x)\ge 0$ 是权函数

（一）定理：

n+1个节点的插值型求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的代数精度最高不超过2n+1次。

结论:n+1个节点的插值型求积公式的代数精度m满足:

$n \le m \le 2n+1$

定义: 若n+1个节点求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ P299

达到最高代数精度2n+1，则其称为Guass求积公式

Guass求积公式的节点x_k称为Guass点,系数A_k称为Guass系数.

定理 1 n+1个节点的插值型求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的代数精度最高不超过2n+1次。

证明：取 $f(x)=1, x, x^2, \ldots x^m$，带入求积公式，并令等号成立：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \cdots + A_n = \int_a^b \rho(x)dx \\ A_0x_0 + A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = \int_a^b x\rho(x)dx \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ A_0x_0^m + A_1x_1^m + \cdots + A_nx_n^m = \int_a^b x^m\rho(x)dx \end{cases}$$

m +1 个方程，2n+2 个变量. 要让方程组有唯一解, 应有 m = 2n+1. 因此， n+1个节点的求积公式代数精度 至少有 2n+1.
下证： n+1个节点的求积公式的代数精度不超过2n+1.

令 $g(x)=(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$，这里 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是求积结点.

则$g(x)$是2n+2次多项式，满足 $g(x_k)=0, k=0,1,\ldots,n$.

带入求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

$$\text{left} = \int_a^b \rho(x)g(x)dx > 0, \quad \text{right} = \sum_{k=1}^{n} A_k g(x_k) = 0$$

left≠right。

因此， n+1个节点的求积公式代数精度最高只能是 2n+1.

■

定理2:（1）若$f^{(2n+2)}(x)$在$[a,b]$上连续，则高斯求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$ 的求积余项为： P301

$$R_n(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx-\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)w_{n+1}^2(x)dx$$

其中$\eta\in(a,b)$,$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$。

（2）高斯求积公式的系数$A_k(k=0,1,\ldots,n)$大于零。

(3)
$$\sum_{k=0}^{n} A_k=\int_a^b \rho(x)dx$$

余项$R_n(f)$中，包含$f^{(2n+2)}(x)$，故高斯求积公式具有2n+1次代数精确度。即：当$f(x)$为任意次数不超过2n+1的多项式时，高斯求积公式都精确成立。

高斯求积公式的系数$A_k>0$,且系数和有界。故它是稳定的.

高斯求积公式的构造

两种方法：
- 待定系数法
- 正交多项式方法

1）待定系数法构造高斯求积公式

例题：选择系数与节点，使求积公式（1）

$$\int_0^1 f(x)\ln(\frac{1}{x})dx \approx c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2) \quad (1)$$ 成为Gaussian公式。

解 $\ln(1/x)$视为(0,1)上的权函数。 n=2, 由定义，若求积公式具有3次代数精度，则其是Gaussian公式。

为此，分别取 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 代入公式，并让其成为等式，得

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_1x_1+c_2x_2=1/4 \\ c_1x_1^2+c_2x_2^2=1/9 \\ c_1x_1^3+c_2x_2^3=1/16 \end{cases}$$

求解得：

$$c_1=0.718539, c_2=0.281461$$
$$x_1=0.112009, x_2=0.602277$$

所求Gaussian公式为：

$$\int_0^1 f(x)\ln(\frac{1}{x})dx \approx 0.718539 f(0.112009)+0.281461 f(0.602277)$$

2）利用正交多项式构造高斯求积公式

P300

定理3 设$x_0, x_1, \cdots, x_n$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的n+1次正交多项式$g_{n+1}(x)$的n+1个零点，则插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

是Guassian型求积公式。

Guass求积公式有多种,它们的Guass点x_k, Guass系数A_k都有表可以查询.

常用的高斯求积公式

1.Gauss - Legendre 求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k), \rho(x)=1$$

其中高斯点为Legendre多项式的零点。

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\bullet\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \quad -1\le x\le 1$$

求积余项为
$$R_n(f)=\frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}f^{(2n+2)}(\eta), \eta\in[-1,1]$$

对于一般有限区间$[a,b]$，用线性变换$x=(a+b)/2+(b-a)t/2$使它变成为$[-1,1]$。

Gauss- Legendre 点及系数表

n+1	x_k	A_k	R_n
1	0	2	$\frac{1}{3}f''(\eta)$
2	-0.5773503 +0.5773503	1 1	$\frac{1}{135}f^{(4)}(\eta)$
3	-0.7745967 +0.7745967 0	5/9=0.5555556 5/9=0.5555556 8/9=0.8888889	$\frac{1}{15750}f^{(6)}(\eta)$
4	-0.8611363 -0.3399810 +0.3399810 +0.8611363	0.3478548 0.6521452 0.6521452 0.3478548	$\frac{f^{(8)}(\eta)}{3472875}$
5	-0.9061799 -0.5384693 0 +0.5384693 +0.9061799	0.2369269 0.4786287 0.5688889 0.4786287 0.2369269	$\frac{f^{(10)}(\eta)}{1237732650}$

例题:用Gauss - Legendre求积公式(n=0、1、4)

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ 计算积分

解　令x=1/2 (1+t), 则

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}=\ln 2=0.69314718\cdots$$

1）用(n=0)Gauss -Legendre求积公式计算:

$$I=\int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}\approx A_1 f(t_1),\quad f(t)=\frac{1}{3+t}\quad I\approx 2f(0)=\frac{2}{3}=0.6,$$

2）用(n=1)Gauss -Legendre求积公式计算:

$$I=\int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}\approx A_1 f(t_1)+A_2 f(t_2)$$

$$I\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)=0.692307695,$$

2）用(n=1)Gauss -Legendre求积公式计算:

$$I=\int_{-1}^1 \frac{dt}{3+t}\approx A_1 f(t_1)+A_2 f(t_2),$$

$$I\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)=0.692307695,$$

3)用五点Gauss -Legendre求积公式计算:

$$I\approx A_1^{(5)}\frac{1}{3+t_1^{(5)}}+A_2^{(5)}\frac{1}{3+t_2^{(5)}}+\cdots+A_5^{(5)}\frac{1}{3+t_5^{(5)}}$$

$$\approx 0.69314719\cdots$$

积分精确值为

I=ln2=0.69314718…

由此可见，增加节点高斯公式的精度也随之提高。

2.Gauss - Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\sum_{k=0}^n A_k f(x_k),\ \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},-1\le x\le 1$$

其中高斯点x_k为Chebyshev 多项式$T_n(x)$的零点。

$T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$

$T_{n+1}(x)$的零点为 $x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\quad ,A_k=\frac{\pi}{n+1},k=0,1,\cdots,n$

求积余项为$R_n(f)=\frac{2\pi}{2^{2n+2}(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta),\eta\in[-1,1]$

例题:利用Gauss - Chebyshev求积公式计算 $I=\int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解　$f(x)=x^4$, ∵$f^{(5)}(x)=0$, ∴当$n=2$时，$R_n(f)=0$。

用三点Gauss - Chebyshev求积公式计算.

$$x_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}\quad ,A_k=\frac{\pi}{3},k=0,1,2$$

$$I=\frac{\pi}{3}(x_0^4+x_1^4+x_2^4)=\frac{\pi}{3}[(\frac{\sqrt{3}}{2})^4+0+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^4]=\frac{3\pi}{8}$$

用Gauss - Legendre求积公式计算　$f(x)=\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$

3.Gauss - Laguerre 求积公式

$$\int_0^{\infty} e^{-x}f(x)dx\approx\sum_{k=0}^n A_k f(x_k),\qquad \rho(x)=e^{-x},x\in(0,+\infty)$$

求积余项为　$R_n(f)=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta),\eta\in[0,\infty)$

4 .Gauss - Hermite 求积公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}f(x)dx\approx\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)\quad \rho(x)=e^{-x^2},x\in(-\infty,+\infty)$$

求积余项为

$$R_n(f)=\frac{((n+1)!)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\eta),\eta\in(-\infty,\infty)$$

Gauss – Laguerre公式的高斯点与系数

n+1	x_i	A_i	n	x_i	A_i
1	1	1	4	0.3225477	0.6031541
2	$2-\sqrt{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$		1.7457611	0.3574187
				4.5366203	0.0388879
				9.3950709	0.0005393
	$2+\sqrt{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$	5	0.2635603	0.5217556
				1.4134031	0.3986668
				3.5964258	0.0759424
3	0.4157746	0.7110930		7.0858100	0.0036118
	2.2942804	0.2785177		12.6408008	0.0000234
	6.2899451	0.0103893			

Gauss - Hermite 求积公式的高斯点与系数

n	x_i	A_i	n	x_i	A_i
1	0	$\sqrt{\pi}$	4	$\pm\frac{\sqrt{6-2\sqrt{6}}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{6}}{12}\sqrt{\pi}$
2	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$		$\pm\frac{\sqrt{6+2\sqrt{6}}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{6}}{12}\sqrt{\pi}$
3	0	$\frac{2\sqrt{\pi}}{3}$	5	0	$\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$
	$\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{6}$		$\pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{10}}}{2}$	$\frac{7+2\sqrt{10}}{60}\sqrt{\pi}$
				$\pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{10}}}{2}$	$\frac{7-2\sqrt{10}}{60}\sqrt{\pi}$

例题:计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos x dx$ 的近似值。**(n=4)**

解 ***f(x)=cosx,*** $\rho(x)=e^{-x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos x dx \approx \sum_{k=0}^{4} A_k \cos x_k = 1.380390$$

$$I=\sqrt{\pi}e^{-1/4}=1.38039885\cdots$$

总结

- 1：梯形求积公式和抛物线求积公式是低精度的方法，但对于光滑性较差的函数有时比用高精度方法能得到更好的效果。复化梯形公式和抛物线求积公式，精度较高，计算较简，使用非常广泛。
- 2：Romberg求积方法，算法简单，当节点加密提高积分近似程度时，前面的计算结果可以为后面的计算使用，因此，对减少计算量很有好处。并有比较简单的误差估计方法。
- 3。Gauss型求积，它的节点是不规则的，所以当节点增加时，前面的计算的函数值不能被后面利用。计算过程比较麻烦，但精度高，特别是对计算无穷区间上的积分和旁义积分，则是其他方法所不能比的。

作业

习题 9
P324:
6，7(1), 8(2)(4)