

# 北京科技大学 2016 年《计算方法》

## 一、填空题(每小题 2 分, 共 20 分)

1. 为了减少运算次数, 应将表达式  $x^5 + 17x^4 + 18x^3 - 14x^2 - 13x - 15$  改写为\_\_\_\_\_.

2. 用二分法求方程  $f(x) = 2x^3 - 5x - 1 = 0$  在区间  $[1, 3]$  内的根, 进行一步后根所在区间为\_\_\_\_\_, 进行二步后根所在区间为\_\_\_\_\_.

3. 设  $A$  是一个  $5 \times 2$  的矩阵,  $B$  是一个  $2 \times 3$  的矩阵,  $C$  是一个  $3 \times 6$  的矩阵,  $D$  是一个  $6 \times 4$  的矩阵, 根据矩阵乘法结合率,  $F = ABCD$  可按如下公式计算

$$(1) F = [A(BC)]D \quad (2) F = [(AB)(CD)]$$

其中计算量较小的是公式\_\_\_\_\_, 其计算量为\_\_\_\_\_ flops

4. 设  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ , 则  $\|A\|_1 =$ \_\_\_\_\_,  $\|A\|_\infty =$ \_\_\_\_\_.

5. 求  $f(x) = 0$  有  $m$  重根时, 牛顿迭代公式中的迭代格式应为( )

6. 当  $x = -1, 0, 1$  时, 对应的函数值分别为  $f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=10$ , 则  $f(x)$  的拉格朗日插值多项式是\_\_\_\_\_.

7. 设  $f(x) = 5x^3 - x^2 + 3$ , 求差商  $f[0,1] =$ \_\_\_\_\_,  $f[7,6,3,5] =$ \_\_\_\_\_.

8. 向量  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  可使用 household 矩阵  $H =$ \_\_\_\_\_, 变换得  $Hx =$ \_\_\_\_\_.

9. 若函数

$$S(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + 1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

为一个三次样条函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.

10. 应用圆盘定理说出矩阵  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$  的特征值所在区域为

\_\_\_\_\_

二、(10 分)求解线性方程组  $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 12 & 12 & 10 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(1)求矩阵  $A$  的 Doolittle 分解，即分解成  $A = LU$  的形式，其中  $L$  为单位下三角矩阵， $U$  为上三角矩阵；

(2)利用上述分解求解方程组  $Ax = b$ 。

三、(10 分) 设有方程组 
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

使用 Gauss-Seidel 迭代法求解此方程，给出迭代格式和迭代矩阵，并采用初始值  $x_0 = [0, 0, 0]'$  迭代计算 2 步

四、(20 分) 已知方程  $x^3 - x^2 - 1 = 0$  在  $x_0 = 1.5$  附近有根，使用牛顿迭代法求解此方程，精确到  $|x_{k+1} - x_k| < 0.005$ 。

五、(10 分) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 3]$  上具有四阶连续导数，试用埃尔米特插值法求一个次数不高于 3 的多项式  $P_3(x)$ ，使其满足如下数据表值，并给出截断误差估计公式。(10 分)

已知  $f(x)$  有如下的数据

$x_i$	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	2
$f'(x_i)$		3	

试写出满足插值条件  $P(x_i) = f(x_i)$  以及  $P'(1) = f'(1)$  的插值多项式  $P(x)$ ，并写出误差的表达形式。

六、(10 分) 已知实验数据如下

<b>x</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>y</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>-2</b>

用最小二乘法求形如  $y = a + bx + cx^2$  的经验公式。(10 分)

七、(10 分) 用改进的欧拉方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y + 2x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 0.3)$$

取步长  $h=0.1$ ，计算  $y(0.3)$  的近似值，计算过程中数值保留 5 位小数。

八、(10 分) 利用复化 Simpson 公式  $S_n$  计算定积分  $I = \int_0^1 \sin x dx$  若使  $|I - S_n| < 10^{-5}$ ，问应取  $n$  为多少？并求此近似值。