第三章 非线性规划

第一节 非线性规划的数学模型及基本概念 4.1

第三节 一维搜索 4.3

第四节 无约束优化问题的解法 4.4

最速下降法 4.4.2

共轭梯度法 4.4.4

第六节 罚函数解法 5.2

第三章 非线性规划

第一节 非线性规划的数学模型及基本概念

- 非线性规划举例及数学模型
- 基本概念
  - 局部最优解和全局最优解
  - 梯度
  - 二次函数
  - 无约束问题的最优性条件

一. 非线性规划举例及数学模型

例：

某公司经营两种设备,第一种设备每件售价30元,第二种设备每件售价450元。根据统计,售出一件第一种设备所需要的营业时间平均是0.5小时,第二种设备是2+0.25 x_2小时,其中x_2是第二种设备的售出数量。已知该公司在这段时间内的总营业时间为800小时,试决定使其营业额最大的营业计划。

建立数学模型： 设售出两种设备分别为 x_1, x_2 件。

$$\max f = 30x_1 + 450x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 0.5x_1 + (2+0.25x_2)x_2 \le 800 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

一. 非线性规划举例及数学模型

一般的数学模型：

Nonlinear Programming

$$(NP) \quad \min \; f(X)$$

$$s.t.\begin{cases} h_i(X)=0 & i=1,2,\cdots,m \\ g_j(X)\geq 0 & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

可行解：满足所有约束条件的向量X称为(NP)可行解

可行域：$D=\{X \mid h_i(X)=0, i=1,2,\cdots,m, g_j(X)\geq 0, j=1,2,\cdots,n\}$

第三章 非线性规划

第一节 非线性规划的数学模型及基本概念

- 非线性规划举例及数学模型
- 基本概念
  - 局部最优解和全局最优解
  - 梯度
  - 二次函数
  - 无约束问题的最优性条件

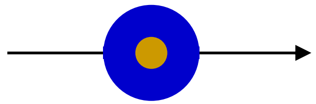
$$\min f(X)$$
$$s.t. \begin{cases} h_i(X)=0 \\ g_j(X)\ge 0 \end{cases}$$

二. 基本概念

1. 局部最优解和全局最优解

定义3-1 若 $X^* \in D$ 满足 $\min\limits_{X\in D} f(X)=f(X^*)$, 即对 $\forall X \in D$ 都有 $f(X^*)\le f(X)$, 则称 X^* 为(NP)的全局最优解。

定义3-2 若 $X^* \in D$, 且存在 X^* 的某个领域



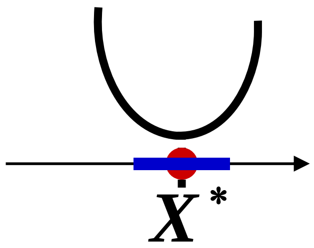
$N_\varepsilon(X^*)=\{X \mid \|X-X^*\|<\varepsilon, \varepsilon>0\}$ 使得 $\min\limits_{X\in D\cap N_\varepsilon(X^*)} f(X)=f(X^*)$,

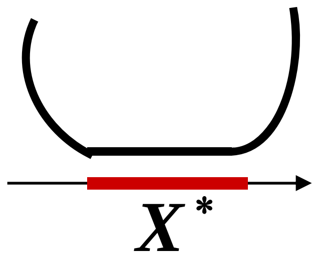
即对 $\forall X \in D\cap N_\varepsilon(X^*)$ 都有 $f(X^*)\le f(X)$, 则称 X^* 为

$<$

(NP)的局部最优解。

严格局部最优解。





2. 梯度

$\nabla f(X)$是一元函数的导数 $f'(x)$的推广

定义3-1 设 $f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的偏导数存在，则

$f(X)$在X处的梯度为 $\nabla f(X)=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n})^T$

例3-4

求 $f(X)=X^TX=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 的梯度

解： $\nabla f(X)=(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n})^T=(2x_1,2x_2,\cdots,2x_n)^T=2X$

2. 梯度

例3-5

求 $f(X)=x_1^4+2x_2^3+3x_3^2-x_1^2x_2+4x_2x_3-x_1x_3^2$ 的梯度

解:

$$\nabla f(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_1^3-2x_1x_2-x_3^2\\ 6x_2^2-x_1^2+4x_3\\ 6x_3+4x_2-2x_1x_3\end{pmatrix}$$

梯度的性质: 函数 $f(X)$在X^0处的负梯度方向 $-\nabla f(X^0)$ 是 $f(X)$在X^0处函数值下降最快的方向。

3. 二次函数

二次函数的一般形式：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$$

其中 q_{ij}, b_i, c 为常数，且 $q_{ij} = q_{ji}$

3. 二次函数

其中 q_{ij}, b_i, c 为常数，且 $q_{ij} = q_{ji}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_i x_j \overset{n=3}{=\!=} q_{11}x_1^2 + q_{12}x_1x_2 + q_{13}x_1x_3 + q_{21}x_2x_1 + q_{22}x_2^2 + q_{23}x_2x_3 + q_{31}x_3x_1 + q_{32}x_3x_2 + q_{33}x_3^2$$

$$= x_1(q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + q_{13}x_3) + x_2(q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + q_{23}x_3) + x_3(q_{31}x_1 + q_{32}x_2 + q_{33}x_3)$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}}_{Q}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = X^T Q X$$

3. 二次函数

其中 q_{ij}, b_i, c 为常数，且 $q_{ij}=q_{ji}$

二次函数的一般形式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c$$

$$=\frac{1}{2}X^TQX+b^TX+c$$

对称阵

其中 $Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

当Q为正定阵时，称 $f(X)$为正定二次函数。

3. 二次函数

例3-7

求二次函数 $f(X)=\frac{1}{2}\underline{X^TQX}+b^TX+c$ 的梯度

解:

当$n=3$时,
$$X^TQX=q_{11}x_1^2+q_{12}x_1x_2+q_{13}x_1x_3 +q_{21}x_2x_1+q_{22}x_2^2+q_{23}x_2x_3 +q_{31}x_3x_1+q_{32}x_3x_2+q_{33}x_3^2$$

$$\nabla(X^TQX)=\begin{pmatrix}2q_{11}x_1+2q_{12}x_2+2q_{13}x_3\\2q_{21}x_1+2q_{22}x_2+2q_{23}x_3\\2q_{31}x_1+2q_{32}x_2+2q_{33}x_3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}q_{11}&q_{12}&q_{13}\\q_{21}&q_{22}&q_{23}\\q_{31}&q_{32}&q_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2QX$$

3. 二次函数

例3-7

求二次函数 $f(X)=\frac{1}{2}X^TQX+b^TX+c$ 的梯度

解:

$$\nabla(X^TQX)=2QX \qquad b^TX=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n$$

$$\nabla(b^TX)=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=b \qquad \nabla(c)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=0 \qquad \boxed{\nabla f(X)=QX+b}$$

3. 二次函数

$$f(X)=\frac{1}{2}X^TQX+b^TX+c$$

当 $f(X)$为单变量正定二次函数时，

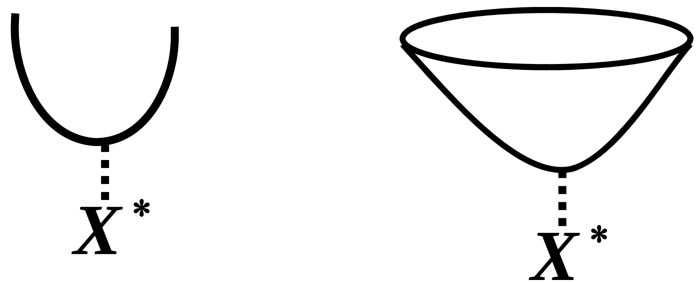
Q正定 $\longrightarrow$ $a>0$

$f(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx+c$ 的图像是开口向上的抛物线

当 $f(X)$为两个变量正定二次函数时，

$f(X)=\frac{1}{2}X^TQX+b^TX+c$ 的图像是开口向上的抛物面

直观结论：正定二次函数有唯一的全局极小点。



4. 无约束问题的最优性条件

$$\min f(X) \quad s.t.\begin{cases} h_i(X)=0 \\ g_j(X)\ge 0 \end{cases}$$

X^*是 $\min\limits_{X\in R^n} f(X)$ 的局部最优解 $\longrightarrow$ 必要条件

$\longleftarrow$ 充分条件

必要条件、充分条件 } 最优性条件

x^*是 $\min\limits_{x\in R} f(x)$ 的局部最优解 $\longrightarrow$ $f'(x^*)=0$

$\longleftarrow$ $f'(x^*)=0,\ f''(x^*)>0$

X^*是 $\min\limits_{X\in R^n} f(X)$ 的局部最优解 $\longrightarrow$ $\nabla f(X^*)=0$ (定理3-2)

$\longleftarrow$ $\nabla f(X^*)=0, \nabla^2 f(X^*)$正定

(定理3-3)

4. 无约束问题的最优性条件

$$\min f(X) \quad s.t.\begin{cases} h_i(X)=0 \\ g_j(X)\ge 0 \end{cases}$$

$$X^* 是 \min_{X\in R^n} f(X) 的局部最优解 \begin{matrix} \longrightarrow 必要条件 \\ \longleftarrow 充分条件 \end{matrix} \Bigg\} 最优性条件$$

$$x^* 是 \min_{x\in R} f(x) 的局部最优解 \longrightarrow f'(x^*)=0$$

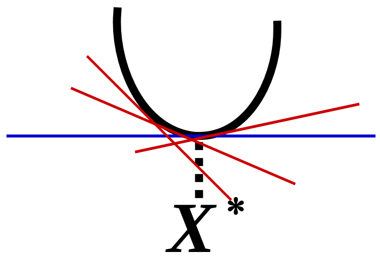
$$\longleftarrow f'(x^*)=0,\ f''(x^*)>0$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)>0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)\uparrow$$



第三章 非线性规划

第一节 非线性规划的数学模型及基本概念

- 非线性规划举例及数学模型
- 基本概念
  - 局部最优解和全局最优解
  - 梯度
  - 二次函数
  - 无约束问题的最优性条件

作业：P244　2 5(1)(2)　7(1)(2)(3)(4)

作业：P154　2 5(1)(2)　7(1)(2)(3)(4)