5　方程组的迭代解法

- §5.1 引言
- §5.2 线性方程组的迭代法
- §5.3 非线性方程组的迭代法

5.1　引言

- 迭代法　将线性方程组 **Ax=b** 化为

x=Bx+d　不动点方程

再由此构造向量序列 $\{x^{(k)}\}: x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$　初始值

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$　迭代矩阵

若 $\{x^{(k)}\}$ 收敛至某个向量 x^*，则可证向量 x^* 就是所求方程组 **AX=b** 的准确解.

线性方程组的迭代法主要有**Jocobi**迭代法、**Seidel**迭代法和超松弛(**Sor**)迭代法.

三种常用的向量范数：

设 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

以上范数可以统一表示　为

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$$

称为向量的 p 范数。$(p = 1, 2, \infty)$

四种常用的矩阵范数：

由矩阵算子范数导出如下三种范数

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| \quad \text{列范数}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| \quad \text{行范数}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda} \quad \text{谱范数}$$

λ是$A^T A$最大特征值

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|^2} \quad F\text{范数}$$

• §5.2 线性方程组的迭代法

- 设有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

用矩阵表示：　不动点方程

Ax =b ⟷ **x=Bx+d**

（**A** 为系数矩阵，非奇异且设 $a_{ii} \neq 0$）

A=M+N，**M**的逆好求。**Ax =b** ⟷ **(M+N)x=b** ⟷ **Mx=-Nx+b** ⟷ $x = -M^{-1}Nx + M^{-1}b$ (<u>不动点方程</u>)

分解A是一个重要问题，不同的分解,导出不同解法。

A的分解

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = L+D+U$$

U

D

L

例

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -9 & 7 \\ 2 & -6 & 10 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A= L+D+U

(1) 常用迭代法

Jacobi 迭代 P114

U

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = L + D + U$$

L D

$Ax=b \longleftrightarrow (L+D+U)x=b \longleftrightarrow Dx=-(L+U)x+b$

如果 D^{-1} 存在（ $a_{ii}\neq 0$, i=1,2,…,n），则

$x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$ 或，$x=-D^{-1}(A-D)x+D^{-1}b=(E-D^{-1}A)x+D^{-1}b$

令 $B_J=E-D^{-1}A$， $d_J=D^{-1}b$

Jacobi 不动点方程 $x=B_Jx+d_J$

Jacobi迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)}=B_Jx^{(k)}+d_J$$

Jacobi迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)}=B_Jx^{(k)}+d_J$$

Jacobi迭代矩阵

$$B_J=E-D^{-1}A=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, d_J=D^{-1}b=\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Jacobi迭代分量形式

$$x_i^{(k+1)}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)}-\frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

Jacobi迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)}=B_Jx^{(k)}+d_J$$

$B_J=E-D^{-1}A$ ， $d_J=D^{-1}b$

给出初始向量 $x^{(0)}$, 即可得到向量序列：$x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k)},\ldots$

若 $x^{(k)}\to x^*$, 则x^*是解。

$$x_i^{(k+1)}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)}-\frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i^{(k+1)}=\frac{b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, i=1,\cdots,n$$

为了加快收敛速度，同时节省计算机的内存，作如下的改进：每算出一个分量的近似值，立即用到下一个分量的计算中去。

将上式中$x_j^{(k)}$ $(j=1,2,\ldots,i-1)$替换为$x_j^{(k+1)}$ $(j=1,2,\ldots,i-1)$，得到

2.Gauss-Seidel迭代法

P116

$$x_i^{(k+1)}=\frac{b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, i=1,\cdots,n$$

将上式中$x_j^{(k)}$ $(j=1,2,\ldots,i-1)$替换为$x_j^{(k+1)}$ $(j=1,2,\ldots,i-1)$，得到

$$x_i^{(k+1)}=\frac{b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, i=1,\cdots,n$$

上述迭代法称为Gauss-Seidel迭代法，简称为GS迭代法.

Gauss-Seidel迭代法 分量形式

$$x_i^{(k+1)}=\frac{b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, i=1,\cdots,n$$

即

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}= \quad -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)}-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)}-\cdots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)}+\frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)}=-\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} \quad -\frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)}-\ldots-\frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)}+\frac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)}=-\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)}-\frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)}-\cdots-\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k+1)}+\frac{b_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$$

GS迭代法的矩阵形式

从Jacobi迭代公式入手

$x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+d_J$ ，这里 $B_J=-D^{-1}(A-D)$, $d_J=D^{-1}b$

利用A=D+ L+U,其中D为对角矩阵,L,U分别为严格下，上三角矩阵．则 A-D=L+U。

$$B_J=-D^{-1}(L+U)$$

$x^{(k+1)}$

$$x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+D^{-1}b=-D^{-1}Lx^{(k)}-D^{-1}Ux^{(k)}+D^{-1}b$$

$$x^{(k+1)}=-D^{-1}Lx^{(k+1)}-D^{-1}Ux^{(k)}+D^{-1}b$$

$$Dx^{(k+1)}=-Lx^{(k+1)}-Ux^{(k)}+b$$

$$(D+L)x^{(k+1)}=-Ux^{(k)}+b$$

$$x^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}Ux^{(k)}+(D+L)^{-1}b$$

GS迭代法的矩阵形式

GS迭代法的矩阵形式

$$x^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}Ux^{(k)}+(D+L)^{-1}b$$

令：$B_s=-(L+D)^{-1}U$ $d_s=(L+D)^{-1}b$

GS迭代法 $x^{(k+1)}=B_s x^{(k)}+d_s$

GS迭代矩阵：B_s

GS迭代法的矩阵形式

$$x^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}Ux^{(k)}+(D+L)^{-1}b$$

相当于在 不动点方程中

$$x=-M^{-1}Nx+M^{-1}b$$

取 $M=L+D, N=U$

令：$B_s=-(L+D)^{-1}U$ $d_s=(L+D)^{-1}b$

GS迭代法 $x^{(k+1)}=B_s x^{(k)}+d_s$

GS迭代矩阵：B_s

例1 设方程组为
$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12\\-x_1+4x_2+2x_3=20\\2x_1-3x_2+10x_3=3\end{cases}$$

试分别写出其Jacobi迭代格式和Seidel迭代格式以及相应的迭代矩阵，并求解。

解 导出 Jacobi不动点方程

$$\begin{cases}5x_1=-2x_2-x_3-12\\4x_2=x_1-2x_3+20\\10x_3=-2x_1+3x_2+3\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1=-\frac{2}{5}x_2-\frac{1}{5}-\frac{12}{5}\\x_2=\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{2}x_3+5\\x_3=-\frac{1}{5}x_1+\frac{3}{10}x_2+\frac{3}{10}\end{cases}$$

Jacobi 不动点方程

Jacobi迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5}\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5\\x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{3}{10}x_2^{(k)}+\frac{3}{10}\end{cases}$$

$$x^{(14)}=\begin{pmatrix}-3.9997\\2.9998\\1.9998\end{pmatrix}$$

Jacobi迭代格式

$x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+d_J$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5}\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5\\x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{3}{10}x_2^{(k)}+\frac{3}{10}\end{cases}$$

Jacobi迭代矩阵为

$$B_J=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{10}&0\end{bmatrix},\quad x^{(k)}=\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{pmatrix},\quad d_J=\begin{pmatrix}-\frac{12}{5}\\5\\\frac{3}{10}\end{pmatrix},$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^t$, $e=10^{-3}$,终止准则：$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<e$

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad x^{(1)}=\begin{pmatrix}-12/5\\5\\3/10\end{pmatrix},\quad \left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_\infty=5>e$$

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5}\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5\\x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{3}{10}x_2^{(k)}+\frac{3}{10}\end{cases}$$

$$x^{(2)}=\begin{pmatrix}-4.46\\4.25\\2.28\end{pmatrix},\quad \left\|x^{(2)}-x^{(1)}\right\|_\infty=2.06>e\quad\cdots$$

$$x^{(13)}=\begin{pmatrix}-4.0002\\2.9992\\2.0002\end{pmatrix},\quad x^{(14)}=\begin{pmatrix}-3.9997\\2.9998\\1.9998\end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{(14)}-x^{(13)}\right\|_\infty=0.0006<e\qquad x^*\approx x^{(14)}$$

Seidel迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

从式中解出$x_i^{(k+1)}$,i=1,2,3得：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{10}x_2^{(k)} - \frac{11}{20}x_3^{(k)} + \frac{22}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{20}x_2^{(k)} - \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{21}{10} \end{cases}$$

故可得Seidel迭代矩阵为

$$B_s = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{11}{20} \\ 0 & \frac{1}{20} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

从例中可以看出**Jacobi**迭代矩阵B_J的主对角线为零，而**Seidel**迭代矩阵**Bs**的第**1**列是零，这对一般情况也是成立的。

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^t$, $e=10^{-3}$,终止准则：$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<e$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} -12/5 \\ 5 \\ 3/10 \end{pmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} -12/5 \\ 22/5 \\ 21/10 \end{pmatrix},$$

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty = 22/5 > e \quad \cdots \quad x^* \approx x^{(7)}$$

$$x^{(7)} = \begin{pmatrix} -4.0000 \\ 3.0001 \\ 2.0000 \end{pmatrix}, \quad \left\| x^{(7)} - x^{(6)} \right\|_\infty \approx 0.0007 < e$$

3.松弛迭代法(SOR)

P119

松弛法可以看作是Seidel 迭代法的加速， Seidel 迭代是松弛法的特例。

Seidel 迭代格式为

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$

两边同乘矩阵D+L，得

$$(D+L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b \quad \longleftrightarrow$$

$$Dx^{(k+1)} = -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b$$

两边同乘矩阵D^{-1}，得

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}Lx^{(k+1)} - D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b, \quad \text{现令}$$

$$\Delta x_k = x^{(k+1)} - x^{(k)} = -D^{-1}Lx^{(k+1)} - D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b - x^{(k)}$$

于是，Seidel 迭代格式又可表为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x_k, \quad \text{这里}$$

$$\Delta x_k = -D^{-1}Lx^{(k+1)} - D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b - x^{(k)}$$

对Seidel 迭代法，$x^{(k+1)}$ 可看作在向量 $x^{(k)}$ 上加修正项Δx_k而得到的。

在修正项的前面加上一个参数ω，便得到松弛法：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega\Delta x_k$$

松弛因子

$$x^{(k+1)} = B_\omega x^{(k)} + d_\omega$$

$$B_\omega = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]$$

$$d_\omega = \omega(D+\omega L)^{-1}b$$

Sor 迭代的分量格式　　**ω=1即为Seidel格式**

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_i^{(k)}\right)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n, \quad k = 0, 1, \cdots$$

松弛迭代格式也是线性迭代形式,若松弛因子ω选择的好,可加速收敛。 ω<1称为低松弛法,ω>1称为超松弛法 。 也称为Sor方法。

例2 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -12 \\ -x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad e = 10^{-5}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^t$, $e=10^{-3}$。计算结果如下：

Jacobi方法：迭代次数k=158, $x^{(k)}=[-12.1665,\ 7.8342,\ 0.1673]^t$

Seidel方法：发散。

Sor方法：迭代次数k= 8, w=0.8。W>1,发散。

若将例题中系数矩阵与精度e换为

则Sor方法最好(k=15, w=1.1)，Seidel方法次之(k=16,)， Jacobi方法发散。 $x^{(k)}=[-29.5\ \ 34.5\ \ 0.5]^t$.

由以上例题的求解过程可看出Jacobi方法、Gauss-Seidel方法并不是总收敛。对于任意给定的一个方程组分别用Jacobi迭代法和GS迭代法求解时，两种迭代法可能都收敛，也可能都不收敛．也有可能是GS迭代法收敛而J迭代法不收敛．但亦有相反情况，即Jacobi迭代法收敛而GS迭代法不收敛．．一般的，在两种迭代法都收敛时， Seidel迭代法优于Jacobi迭代法。Sor方法若松弛因子ω选择的好，可加速收敛。

下面讨论迭代法收敛的条件。

谱半径

定义　设 n 阶方阵A的特征值为λ_i(i=1,2,3……n)，则称

$$\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$$ 为矩阵A的谱半径.

定理　矩阵范数与谱半径之间的关系为: $\rho(A) \le \|A\|$。

4. 迭代法的收敛分析

P120

Jacobi迭代、GS迭代格式和Sor 迭代可表述为统一形式:

$$x^{(k+1)} = \underbrace{B}_{\text{迭代矩阵}}x^{(k)} + g \quad (1)$$

引理1　设B∈$R^{n\times n}$,则 $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$ 的充要条件是B的谱半径$\rho(B)<1$.

引理2　设B∈$R^{n\times n}$, 若$\rho(B)<1$,则E－B为非奇异阵。

证明：　因为$\rho(B)<1$，B的特征值λ_i 满足 $|\lambda_i|<1$(i=1,2,…,n).

从而，矩阵E－B的特征值$\mu_i=1-\lambda_i\neq0$，→

$$\det(E-B)=\prod(1-\lambda_i)\neq 0$$

即矩阵E－B为非奇异阵。

定理5-1　　对任意初始向量$x^{(0)}$及右端向量 g，由(1)产生

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \quad (1)$$

P121

的迭代向量序列{$x^{(k)}$}收敛的充要条件是 $\rho(B)<1$

证明：必要性：设｛$x^{(k)}$｝收敛，其极限为 x^*　，则

$$x^* = Bx^* + g \quad (2)$$

$$x^{(k)} - x^* = B(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = B^k(x^{(0)} - x^*) \quad (3)$$

两边取极限

$$\lim_{k\to\infty} B^k(x^{(0)} - x^*) = 0$$

因上式对任意$x^{(0)}$均成立，故$B^k\to 0 (k\to\infty)$。

由引理1，$\rho(B)<1$。

充分性：设$\rho(B)<1$,则由引理2，E－B为非奇异阵,

由引理1，$B^k\to 0$ ($k\to\infty$)，因为E－B为非奇异阵,

所以x=Bx+g 有唯一解,记为 x^* ，$x^* =B x^* +g$ 。由（3）

$$x^{(k)} - x^* = B^k(x^{(0)} - x^*)$$

$$\lim_{k\to\infty}(x^{(k)} - x^*) = \lim_{k\to\infty} B^k(x^{(0)} - x^*) = 0$$

即 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$

证毕

定理5-1　　对任意初始向量$x^{(0)}$及右端向量 d，由(1)产生的迭代向量序列{$x^{(k)}$}收敛的充要条件是 $\rho(B)<1$

定理5-2　若某种范数$\|B\|<1$，则迭代格式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+d$ 产生的序列　{$x^{(k)}$}收敛, 且满足

P124

$$1.\quad \|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$2.\quad \|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

这里 x^*是 Ax=b 的同解方程 x=Bx+d 的精确解。

证明 ∵ $\rho(B) \le \|B\|<1$, 由定理1， 迭代{$x^{(k)}$ }是收敛的。

$\because \|B\|<1, \therefore \exists x^*$,　s.t. $x^* = Bx^* + c$

$x^{(k+1)} - x^* = Bx^{(k)} + c - Bx^* - c = B(x^{(k)} - x^*)$

$\therefore \|x^{(k+1)} - x^*\| \le \|B\|\cdot\|x^{(k)} - x^*\| \quad (1)$

$$\left\|x^{(k+1)}-x^*\right\| \le \|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \quad (1)$$

$$\because \|x^{(k+1)}-x^{(k)}\| = \|x^{(k+1)}-x^*+x^*-x^{(k)}\|$$

$$\ge \left\|x^*-x^{(k)}\right\| - \left\|x^{(k+1)}-x^*\right\| \ge \left\|x^*-x^{(k)}\right\| - \|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^*\right\|$$

$$\ge (1-\|B\|)\left\|x^*-x^{(k)}\right\|$$

$$\because 1-\|B\|>0 \quad \therefore \left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \frac{1}{1-\|B\|}\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\| \quad (2)$$

另一方面

$$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\| \le \left\|B(x^{(k)}-x^{(k-1)})\right\| \le \|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$$

$$\le \|B\|^k\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\| \quad (3)$$

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$$

$$\therefore \left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\| \qquad \blacksquare$$

定理5-2 若 $\|B\|<1$, 则迭代 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+d$ 收敛.

推论 1 若 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 满足下列条件之一:

(1) $\|B\|_\infty = \max\limits_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$

(2) $\|B\|_1 = \max\limits_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1$

(3) $\|B\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2} < 1$

则迭代 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+d$ 收敛。

注释: $\|B\|<1$ 是迭代 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+d$ 收敛的充分条件不是必要条件.

迭代法的误差估计 $\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\| < e$

定理5-2 若 $\|B\|<1$，则迭代格式 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+d$ 产生的序列 $\{x^{(k)}\}$收敛, 且满足

实用的

1. $\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$

2. $\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \dfrac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$

这里 x^*是 Ax=b 的同解方程 $x=Bx+d$ 的精确解。

当$\|B\|<\frac{1}{2}$时, $\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$

2式说明，$\|B\|$越小，$\{x^{(k)}\}$收敛越快。由于ρ(B)< $\|B\|$ 说明ρ(B)越小，$\{x^{(k)}\}$也收敛越快。

定义1 **R(B)=-ln ρ(B),称为迭代法的渐进收敛速度。**

例3 用迭代法解方程组AX=b,其中

$$A=\begin{bmatrix}10 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 11 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 10 & -1\\ 0 & 3 & -1 & 8\end{bmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}6\\25\\-11\\15\end{pmatrix}$$

解：本题分别用Jacobi迭代法和Seidel迭代法来解

(1) Jacobi

$$x^{(k+1)}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0\\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10}\\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0\end{bmatrix}x^{(k)}+\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{25}{11}\\ -\frac{11}{10}\\ \frac{15}{8}\end{bmatrix}$$

$$\because \|B_J\|_\infty = 0.5<1 \qquad \therefore Jacobi\text{迭代法收敛}$$

取$x^{(0)}=(0,0,0,0)^T$,用四位小数计算,结果见表1

表 1

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
[illegible]	0.6000	1.0473	0.9326	1.0152	0.9890	1.0032	0.9981	1.0006	0.9997	1.0001
$x_2^{(k)}$	2.2727	1.7159	2.0533	1.9537	2.0114	1.9922	2.0023	1.9987	2.0004	1.9998
$x_3^{(k)}$	-1.1000	-0.8052	-1.0493	-0.9681	-1.0103	-0.9945	-1.0020	-0.9990	-1.0004	-0.9998
$x_4^{(k)}$	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214	0.9944	1.0036	0.9989	1.0006	0.9998

该方程的精确解为: $x^* = (1,2,-1,1)^T$

由定理2，有

$$\left\|x^{(10)}-x^*\right\|_\infty \le \frac{\|B_J\|_\infty}{1-\|B_J\|_\infty}\left\|x^{(10)}-x^{(9)}\right\|_\infty$$

$$=\left\|x^{(10)}-x^{(9)}\right\|_\infty = 0.0008$$

而 $\left\|x^{(10)}-x^*\right\|_\infty = 0.0002 < 0.0008$

（2）Gauss-Seidel迭代法 $x^{(k+1)}=B_s x^{(k)}+g_s$ $\quad \|B_s\|_\infty = 0.3<1$

$$B_s=\begin{pmatrix}0 & -0.1000 & 0.2000 & 0\\ 0 & -0.0091 & -0.0727 & 0.2727\\ 0 & 0.0191 & -0.0473 & -0.0727\\ 0 & 0.0058 & 0.0214 & -0.1114\end{pmatrix} \qquad g_s=\begin{pmatrix}0.6000\\ 2.3273\\ -0.9873\\ 0.8789\end{pmatrix}$$

仍取$x^{(0)}=(0,0,0,0)^T$ 用四位小数计算，结果 见表 2

K	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0.6000	1.0300	1.0065	1.0009	1.0001
$x_2^{(k)}$	2.3272	2.0370	2.0036	2.0003	2.0000
$x_3^{(k)}$	-0.9873	-1.0140	-1.0025	-1.0003	-1.0000
$x_4^{(k)}$	0.8789	0.9844	0.9983	0.9999	1.0000

表2

此时，$\left\|x^*-x^{(5)}\right\|_\infty = 0.0001 < \left\|x^{(5)}-x^{(4)}\right\|_\infty = 0.0003$

而迭代次数只是 *Jacobi* 迭代法的一半.

例4 写出方程组收敛的Jacobi迭代格式并计算结果。误差小于10^{-3}.

$$\begin{cases} -x_1+4x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+10x_3=2 \\ 5x_1+2x_2+3x_3=3 \end{cases}$$

解

$$B_J = E - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2/3 & 0 & 10/3 \\ -5/3 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda) = |\lambda E - B_J| = \lambda^3 + \frac{26}{9}\lambda + \frac{208}{9}$$

$f(-2)>0,\ f(-3)<0$ 特征方程 $f(\lambda)=0$ 在（$-3,-2$）中有一个根。因此，$\rho(B_J)>1$

Jacobi 迭代不收敛。

矩阵B的范数‖B‖与B的元素有关,要想‖B‖小，必须使B的元素尽可能的小。

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+3x_3=3 \\ -x_1+4x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+10x_3=2 \end{cases}$$

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 & -3/5 \\ 1/4 & 0 & -1/2 \\ -1/5 & 3/10 & 0 \end{pmatrix} \quad \|B_J\|_F \approx 0.896 < 1$$

Jacobi 迭代收敛，取 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + g_J \quad 其中\ g_J = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/4 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$x^{(8)} = \begin{pmatrix} 0.3825 \\ 0.2476 \\ 0.1977 \end{pmatrix}$$ 精度$e=10^{-3}$

补充定理 如果 $a_{ij}\le 0$, for each $i\ne j$, 且 $a_{ii}>0$, for each $i=1,\ldots,n$, 则下列结论有且仅有一个成立:

a. $0<\rho(B_s)<\rho(B_J)<1$　　b. $1<\rho(B_J)<\rho(B_s)$

c. $\rho(B_J)=\rho(B_s)=0$　　d. $\rho(B_J)=\rho(B_s)=1$

当Jacobi迭代矩阵B_J为非负矩阵时， Jacobi迭代法与GS迭代法同时收敛，或同时发散。若同时收敛，GS迭代法优于Jacobi迭代法。

定理5-3 如果A为对称正定阵，则其 Seidel迭代、Sor方法（$0<\omega<2$）对任何初始向量$x^{(0)}$都收敛。

例2 求解方程组 P126

$$Ax=b,\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix}.\ e=10^{-5}$$

$$\Delta_1 = 1>0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{vmatrix} = 0.75>0, |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{vmatrix} = 0.5>0$$

A为对称正定阵，Seidel迭代、 Sor方法（$0<\omega<2$）都收敛。

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^t$, $e=10^{-3}$: Sor方法最好(k=15, w=1.1)，Seidel方法次之(k=16,)， $x^{(k)}=[-29.5\ \ 34.5\ \ 0.5]^t$.

定义2 如果 矩阵 $A=(a_{ij})$满足

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\ne i}^{n} |a_{ij}| \qquad i=1,2,\ldots\ldots n,$$

则称方阵A是严格(行)对角占优的. P89

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -9 & 7 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix}$

A是严格对角占优矩阵。

引理5-2 设$A\in R^{n\times n}$为严格对角占优矩阵，则$a_{ii}\ne 0$，且A为非奇异。 P129

引理5-2 设$A\in R^{n\times n}$为严格对角占优矩阵，则$a_{ii}\ne 0$，且A非奇异。

证明：∵ $A\in R^{n\times n}$为严格对角占优，

$$\therefore\ |a_{ii}| > \sum_{j=1,j\ne i}^{n} |a_{ij}| \ge 0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad 即 a_{ii}\ne 0.$$

假设A奇异，则$Ax=0$ 有非零解$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，

设$\|x\|_\infty = |x_r|$，则$A(x/|x_r|)=0$

对第r个方程，有

$$a_{rr}\frac{x_r}{|x_r|} = -\sum_{j=1,j\ne r}^{n} a_{rj}\frac{x_j}{|x_r|}$$

$$\Rightarrow |a_{rr}| \le \sum_{j=1,j\ne r}^{n} |a_{rj}|$$

与A为严格对角占优矩阵矛盾，所以A非奇异。

证毕

定理5-4 如果A为严格对角占优阵，则其 Jacobi迭代、Seidel迭代、Sor迭代 $(0<\omega<1)$ 对任何初始向量 $x^{(0)}$ 都收敛。

证明：(1) Jacobi迭代 P129

因为A为严格对角占优阵，所以 $a_{ii}\neq 0$，Jacobi迭代矩阵

$$B_J=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \|B_J\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$$

因为A为严格对角占优阵，所以 $\|B_J\|_\infty<1$，由判别条件（1），Jacobi迭代收敛。

---

(2) Seidel迭代　　Seidel迭代矩阵为 $B_S=-(D+L)^{-1}U$,

$\rho(B_s)<1 \longleftrightarrow$ B_S的特征值λ满足：$|\lambda|<1$

B_S的特征方程为：$\det(\lambda E-B_S)=0$

$\lambda E-B_s=\lambda E+(D+L)^{-1}U=(D+L)^{-1}(\lambda(D+L)+U)$

$\det(\lambda E-B_s)=\det(D+L)^{-1}\det(\lambda(D+L)+U)$

$\det(\lambda E-B_s)=0 \longleftrightarrow \det(\lambda(D+L)+U)=0$　(4)

利用A为严格对角占优阵，证明方程(4)的根：$|\lambda|<1$

$$\lambda(D+L)+U=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A=L+D+U$$

$\det(\lambda E-B_s)=0 \longleftrightarrow \det(\lambda(D+L)+U)=0$　(4)

利用A为严格对角占优阵，证明方程(4)的根：$|\lambda|<1$

$$\lambda(D+L)+U=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A=L+D+U$$

若 $|\lambda|\geq 1$，因为A严格对角占优，矩阵 $\lambda(D+L)+U$ 的对角元

$$|\lambda||a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|\lambda||a_{ij}|>\sum_{j=1}^{i-1}|\lambda||a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

$\longrightarrow$ 矩阵 $\lambda(D+L)+U$ 是严格对角占优阵。

由定理1，矩阵 $\lambda(D+L)+U$ 是非奇异的，

即 $\det(\lambda(D+L)+U)\neq 0$，则λ不是方程(4)的根。

$\det(\lambda(D+L)+U)=0$　(4)

若 $|\lambda|\geq 1$，因为A严格对角占优，矩阵 $\lambda(D+L)+U$ 的对角元

$$|\lambda||a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|\lambda||a_{ij}|>\sum_{j=1}^{i-1}|\lambda||a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

$\longrightarrow$ 矩阵 $\lambda(D+L)+U$ 是严格对角占优阵。

由定理1，矩阵 $\lambda(D+L)+U$ 是非奇异的，

即 $\det(\lambda(D+L)+U)\neq 0$，则λ不是方程(4)的根。

因此，方程(4)的根λ一定满足：$|\lambda|<1$。

由于B_S的任意特征值λ均满足：$|\lambda|<1 \longrightarrow \rho(B_s)<1$

证毕

例4：用迭代法解方程组AX=b,其中

$$A=\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

系数矩阵A是严格对角占优，

Jacobi迭代法和Seidel迭代法均收敛.

定理5-5 若SOR方法收敛，则 $0<\omega<2$。 P130

$$x^{(k+1)}=B_\omega x^{(k)}+d_\omega$$

$$B_\omega=(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]$$

$$d_\omega=\omega(D+\omega L)^{-1}b$$

定理5-5 若SOR方法收敛，则 $0<\omega<2$。 P130

$$x^{(k+1)}=B_\omega x^{(k)}+d_\omega$$

$$B_\omega=(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]$$

$$d_\omega=\omega(D+\omega L)^{-1}b$$

证明：因为 SOR 收敛, 所以 $\rho(B_\omega)<1$.

令 $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ 是 B_ω的特征值，则

$|\lambda_i|<1$ $(i=1,\ldots,n)$. 即
$|\det(B_\omega)|=|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|<1$

因为 $\det(B_\omega)=\det((D-\omega L)^{-1})\det((1-\omega)D+\omega U)=(1-\omega)^n$

So, $|1-\omega|<1$ ■

收敛性判别条件

定理5-1 对任意初始向量$x^{(0)}$及任意右端向量 g，由格式

$x^{(k+1)} = B x^{(k)} + g$ 产生 的迭 代向量序列{$x^{(k)}$}收敛的充要条件是 $\rho(B) < 1$。

定理5-2 若某种范数$\|B\|<1$，则迭代$x^{(k+1)} = B x^{(k)} + g$ 收敛.

定理5-3 如果A为对称正定阵，则其 Seidel迭代Sor方法 $(0<\omega<2)$，对任何初始向量$x^{(0)}$都收敛。

定理5-4 如果A为严格对角占优阵，则其 Jacobi迭代、Seidel 迭代、 Sor迭代$(0<\omega\leq1)$对任何初始向量$x^{(0)}$都收敛。

定理5-5 若Sor方法收敛，则 $0<\omega<2$。

作 业

习题 5
P142:
2，4，5，6

上机作业 2：

数值实验 5
P144:
5-1

要求：抄题，公式，程序、
计算结果（终止迭代步数k、近似解$x^{(k)}$),
结果分析（三种迭代列表）。