环境污染的治理问题

Abstract: 建立合适的对于湖水污染及生物治理的模型

Keywords: 判断其解的合理性

1 Introduction

环境污染是人类现在面临着的一个重要的社会问题，随着社会的进步发展，对环境的治理也逐步提到日程上来。这就需要对污染的机理进行研究，从而可以对污染的治理达到有的放矢，事半功倍的效果。对于环境的污染，可以包括湖水污染、河流污染、大气污染以及地下水污染等，但是在不同的环境中污染机理也有所不同：湖水和河流的污染主要是人为的排放、地下水污染主要是地面的渗透，而海洋污染又伴随着洋流的变化，根据污染的机理的不同，应该采取不同的治理方式。

湖泊是人类水资源的重要部分，不仅为人类提供了大量的用引用水，而且可以用来运输、养殖，也是人们旅游的场所。像在我国就有许多美丽的湖泊：南京的玄武湖，河北的白洋淀、云南的巢湖等。但是与此同时，湖泊也承受着人们倾倒的垃圾、污染，这些污染物会进一步导致水体过营养化而发生难闻的气味，同时也会导致某些生物的过渡繁殖，导致水体生态的破坏。例如像滇池、巢湖以及玄武湖都曾经爆发大面积的蓝藻水华，甚至厚度达到1米以上，几乎形成“冻湖”。对湖泊的治理相当困难，主要取决于两方面的因素：一是水体本身的自然情况，一般情况下湖水覆盖区域较广，周围的污染源较为复杂。二是政治原因，环境污染总是和周围的政治因素有千丝万缕的联系。像中国当地政府的政绩：财政税收。（蒙牛乳业奶牛养殖产生的大量牛粪、小洋人乳业建的新厂同样也有大量的污染，但是没有处理就排泄出去）。如果不考虑这些就会很难得到全面的治理。

但是在考虑这些模型时我们一般忽略政治上的因素，而纯粹的从数学的角度建立数学模型，进而希夷得到满足符合实际状况的解。同河流不一样，依靠水体自身的自净能力来缓解污染，因为河流的流动性较强。但是对于被污染的湖水来讲并不是一件容易的事，因为被污染的水体将相当长的时间留在湖中。仅仅依靠生物的降解作用，对湖水的净化将需要更长的时间。

1、对污染物进行分析，我们假设所有的污染物的来源一样，按平均来进行估计。把湖水

看作是带有污染物的水流入和湖泊中的水流出对湖水的污染程度的影响。对于污染物在湖水中的分布，假设是平均分布。

2、湖水可能会因为降雨而体积变大，因为蒸发、渗漏而体积变小，如果我们全部都考虑，情况就会变得复杂，实际上，湖水水体的体积四季基本上保持不变，变化不大。

3、最简单的模型不考虑生物的净化因素，污染物除了流出外不会在湖水中消失。

在模型的建立过程中，做如下假设，假设在t时刻：流入和流出的湖水流速分别为$r_1(t), r_0(t)$,流入和流出的污染物的浓度分别为$p_1(t), p_0(t)$,湖水的体积为$V(t)$,湖水的污染物的浓度为$p(t)$.

建立模型的公式很简单：**“湖内污染物的改变量=流入的污染物的量-流出的污染物的量”**

$$\frac{p(t+\triangle t)-p(t)}{\triangle t}V(t)=p_1(t)r_1(t)-p_0(t)r_0(t)=(p_1(t)-p(t))r_0(t) \tag{1.1}$$

移项后可得：

$$\frac{dp(t)}{dt}\frac{V(t)}{r_0(t)}=p_1(t)-p(t) \tag{1.2}$$

初始条件为

$$p(0)=p_s \tag{1.3}$$

这里，$\frac{V(t)}{r_0(t)}=\tau$，相当于把湖里的水全部排空所需要的时间。就得到一个一阶的微分方程及其所对应的初始条件，可以应用常数变易法对该方程进行求解。

对于上述问题，分析最一般的情况，若流入的污染物的浓度为常数K,则可以计算出湖水浓度的表达式

$$p(t)=(p_s-K)\exp(-t/\tau)+K, \frac{dp}{dt}=-\frac{1}{\tau}(p_s-K) \tag{1.4}$$

根据以上的表达式很容易计算得出，湖水的污染物的浓度和时间τ成反比。而且根据右侧的导数公式，很容易判断湖水的浓度随时间的变化情况。若$p_s>K$,则污染物的浓度单调递减，说明湖水水质是逐渐变好的，流入的水对污染的湖水有稀释的作用，最终随着时间的增加，湖水的浓度达到K.反之有同样的情况。

在湖水的变化过程中，定义$p(t)/K=\beta(t)$作为污染的水源对湖水污染的衡量标准。如果$\beta(t)>1$，说明这时湖水的污染情况很重，则定义其为超饱和污染水平。但是污染的情况会不断变好。

若初始状态的$p_s=0$,即这时湖水没有污染，那么t 时刻$\beta(t)=1-\exp(-t/\tau)$ 。对于给定的β ，湖水的污染程度达到水平所需的时间是$t_\beta=-\ln(1-\beta)$ 。反过来进行计算，同样若把这样的污染程度的水变成清水也需要同样的时间。

若$K=0$ ，这时没有污染物流入。那么湖水会以最快的速度净化，所需的时间

为$t_\alpha = \tau \ln(p_s/p(t))$.

这时，我们假设污染物的排放是一个常数，而实际上，对于污染，如果加以控制，也就是说减少污染排放量，可以假设$p_1(t) = K_0 \exp(-at), a > 0$,初始条件为$p(0) = K_0$.这说明污染物将逐年降低。很容易求得其解

$$p(t) = \frac{K_0}{1 - a\tau}(\exp(-at) - a\tau \exp(-t/\tau)) \tag{1.5}$$

同样可以分析，当时间t趋向于无穷远的时候，湖水的污染物的浓度会趋向于零。

这个模型过于简单，过于理想化，但是它反映了湖水污染治理的基本趋势。我们可以对该模型进一步细化。可以从以下两个角度进行分析：

1、原来我们不考虑湖水的体积的变化。如果考虑蒸发和渗漏。这样体积也许就会发生变化，是一个时间的函数。

2、同样对于生物的降解，我们也没有考虑，实际上现在对湖水污染的治理，很大程度上是依靠人工的或者湖水的生物降解能力。消除水体中的有机成分，达到净化水体的作用。这样在平衡式的右端就需要增加新的一项，生物降解减少项。

在小的河流中为了达到净化水质的目的，往往需要在河水中种植大量的水生植物。对于这些植物所起的作用，一方面可以对于大的垃圾起到阻止的作用，另外由于一些水生植物的根部可以使得一些细菌或者水生生物的存在，对一些污染物起到生物降解的功能，同时一些植物也可以吸附一些重金属。从而达到对污染物的浓度进行降解的目的。所以在河流中，为了达到降解的目的，串联性得种植一片片的水生植物。试从数学的角度对该问题进行分析，欲达到降解的目的，水生植物的面积应该多大合适？

在该模型中，做如下假设，假设t时刻，流入该降解区域前污染物的浓度为$c_1(t)$，流出时污染物浓度为$c_0(t)$，流入和流出时流体的速度为$v_1(t), v_0(t)$，假设水生植物所在的降解区域内微生物的浓度为$b(t)$。显然微生物的浓度受多方面的影响：流进的污染物的浓度，一般情况下污染物的浓度越高，微生物的繁殖速度越快。微生物本身没有流进，但是会随着水流流出。假设降解区域的体积为$V(t)$

$$\frac{c(t + \triangle t) - c(t)}{\triangle t} V = c_1 v_1(t) - c(t) v_0(t) - r \tag{1.6}$$

这里$v_1 = v_0$,并且r表示被生物降解的部分，为分解率。一般情况下，污染物被微生物分解，转化而消失的速率与微生物浓度成正比。则

$$r = r_s b(t) c(t) V \tag{1.7}$$

这里$Vc(t)$表示有害物质的总量，乘以$b(t)$表示与微生物的浓度有一定的比例关系，其关系

为r_s. 根据上式，很容易进行分析，实际上就是在原来的湖水污染的模型上增加了一项，即生物的降解值。

但是微生物并非永远存在的，也会死亡,假设死亡率为d，繁殖，而且会有部分随着水流流出$v_0(t)$。假设它的自然衰亡率（死亡率）为d，这样微生物的变化就相当于减去了一项。那么它的繁殖又和什么有关系呢？实际上，微生物是以有害物质为食物的，那么微生物的变化就应该和有害物质的浓度有关,假设微生物依靠有害物质的分解、转化产生的能量而增殖的速度是r_2与有害物质浓度成正比。这里我们假设有害物质的浓度不大，如果浓度过大，也许会抑制微生物的繁殖，这时就需要建立新的数学模型。这样就需要建立微生物的变化模型：

$$\frac{db(t)}{dt}V(t) = r_2(t)c(t)b(t)V(t) - dbV(t) - v_0(t)b(t) \tag{1.8}$$

可以计算方程存在两个平衡点，也就是在一定的条件下，其解会最终趋向于某个稳定情况。令等号右侧为零。

$$P_1 : c = \frac{d + v_0/V}{r_2}, b = \frac{v_0(c_1 - c)}{Vr_sc}; P_2 : c = c_1, b = 0 \tag{1.9}$$

可以计算其对应的线性部分的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{v_0(t)}{V(t)} - r_sb & -r_sc \\ r_2b & r_2c - \frac{v_0(t)}{V(t)} \end{pmatrix}|_{P_i}, i = 1, 2 \tag{1.10}$$

可以计算上述矩阵A所对应的特征根。可以验证在$c < c_1$的条件下P_1稳定，而P_2不稳定。其解的意义也说明在降解过程中达到降解的目的，其污染物的浓度有所降低。这样可以知道如果$b > 0$, 则必须有$c < c_1$. 而这个条件等价于(根据P_1第一个表达式所得到)

$$V > \frac{v_0}{r_2c_1 - d} \tag{1.11}$$

这时一个单独的生物降解区域，当然也可以对区域以串联的形式增加，但是对应于第二个模型，需要增加新的项，也就是说第一个区域流入第二个区域的微生物的量。