第三章 非线性规划

第七节 乘子法

$$(NP) \qquad \min f(X)$$

$$s.t. \begin{cases} g_i(X) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m \\ h_j(X) = 0, j = 1,2,\cdots,p \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Hestens}\text{乘子法} \\ \textit{Powell}\text{乘子法} \end{array}\right\} \text{等式约束问题}$$

- *Hestens*乘子法
- *Powell*乘子法
- *Rockaffellar*乘子法 —— 不等式约束问题

第三章 非线性规划

Hestens 乘子法

$$(NP)\ \min f(X)$$

$$s.t.\ h_j(X)=0,\ j=1,2,\cdots,p$$

- 乘子法迭代原理
- 乘子法迭代步骤
- 乘子法举例

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\quad \min f(X)$$
$$s.t.\, h_j(X)=0$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

复习：罚函数法

$$\min f(X)$$
$$s.t.\begin{cases} g_i(X)\geq 0, i=1,2,\cdots,m \\ h_j(X)=0, j=1,2,\cdots,p \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\text{求解} \min_{X\in R^n} \varphi(X,M_k)$$

$$\downarrow$$

$$X^{(k)}(M_k)\xrightarrow[M_k\to\infty]{} X^*$$

$$\varphi(X,M_k)=f(X)+M_k\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2+M_k\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\quad \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0 \quad \mu_j$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

复习:

*Lagrange*函数: $L(X,\mu)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)$

设X^*是(NP)最优解，则存在*Lagrange*乘子μ^*使

$$\nabla_X L(X^*,\mu^*)=\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0 \quad \mu^*=(\mu_1^*,\mu_2^*,\cdots,\mu_p^*)$$

X^*是(NP)最优解 $\longrightarrow$ $\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$

μ^*称为X^*相应的*Lagrange*乘子

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\quad \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0 \quad \mu_j$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

$Lagrange$函数: $L(X,\mu)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)$

X^*是(NP)最优解 $\longrightarrow$ $\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$

$\mu^*=(\mu_1^*,\mu_2^*,\cdots,\mu_p^*)$称为$X^*$相应的$Lagrange$乘子

改进罚函数法的思想：

罚函数: $\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$

一般情况下, X^*不是 $\min_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ (对固定的M)的最优解

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\quad \min f(X) \quad s.t.\ h_j(X)=0$$

X^*是(NP)最优解 ⟶ $\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$

罚函数：$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$

一般情况下, X^*不是 $\min_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ (对固定的M)的最优解

证明：若X^*是 $\min_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ 的最优解, 由一阶必要条件有

$$\nabla\varphi(X^*,M)=0$$

但$\nabla\varphi(X^*,M)=\nabla f(X^*)+2M\sum_{j=1}^{p}\underbrace{h_j(X^*)}_{0}\nabla h_j(X^*)$

$$=\nabla f(X^*)(=-\sum\mu_j^*\nabla h_j(X^*))\neq 0$$ 矛盾

因此一般情况下, X^*不是 $\min_{X\in R^n}\varphi(X,M)$的最优解 ■

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\quad \begin{aligned}&\min f(X)\\ &s.t.\, h_j(X)=0\end{aligned}$$

X^*是(NP)最优解 $\longrightarrow$ $\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$

罚函数：$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$

一般情况下, X^*不是 $\min_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ (对固定的M)的最优解

因此，需要求解一系列的 $\min_{X\in R^n}\varphi(X,M_k)$，其最优解

$$X^{(k)}(M_k)\xrightarrow[M_k\to\infty]{}X^*$$

为了提高效率, 对罚函数进行改进，使X^*是改进后的罚函数的最优解。

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

*Lagrange*函数：$L(X,\mu)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)$

罚函数：$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$

乘子罚函数： $\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$

结论： X^* 是(NP)的最优解 $\Rightarrow$ X^* 是 $\varphi(X,\mu^*,C)$ 的驻点。

即$\exists\mu^*$使$\nabla_X\varphi(X^*,\mu^*,C)=0$

证明：

$\because X^*$是(NP)的最优解 $\longrightarrow$ $\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$

$$\therefore \nabla_X\varphi(X^*,\mu^*,C)=\underbrace{\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)}_{0}+C\sum \underbrace{h_j(X^*)}_{0}\nabla h_j(X^*)=0$$

■

$$L(X,\mu)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)$$

$$(NP)\min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

$$\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$$

乘子罚函数：

$$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

结论： X^* 是 (NP) 的最优解 $\Rightarrow$ X^* 是 $\varphi(X,\mu^*,C)$ 的驻点。

$(NP) \longrightarrow$ 求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$

讨论 (NP) 的最优解 X^* 与 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$ 的最优解的关系

$$L(X,\mu)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)$$

$$(NP)\min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

乘子罚函数：

$$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

讨论(*NP*) 的最优解X^*与 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$的**最优解**的关系

定理3 X^*是(*NP*)的最优解$\Rightarrow$ X^*是 $\varphi(X,\mu^*,C)$ 的驻点。

设1^0 $f(X)$, $h_j(X)$是二次连续可微；

2^0 X^*是(*NP*)的最优解, 且$\exists\mu^*$使 $\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$

3^0 对每个满足 $Z^T\nabla h_j(X^*)=0$的$Z\neq 0$,有$Z^T\nabla_X^2 L(X^*,\mu^*)Z>0$

则$\exists$正数C^*使得对$\forall C\geq C^*$， X^*是 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$ 的最优解

$$\nabla_X^2 L(X^*,\mu^*)=\nabla^2 f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla^2 h_j(X^*)$$

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

乘子罚函数：

$$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

讨论(NP) 的最优解X^*与 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$的**最优解**的关系

定理3-20

X^*是(NP)的最优解 $\xrightarrow{3^0}$ X^*是 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$ 的最优解

$(\forall C\geq C^*, C$不必$\to\infty)$

定理3-21

设X^*是 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$ 的最优解

则 X^* 是(NP)的最优解 $\Longleftrightarrow h_j(X^*)=0,\ j=1,2,\cdots,p$

μ^* 是其相应的*Lagrange*乘子

$$\varphi(X,\mu^*,C)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^* h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

$$\min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

$X\in R^n$

则 X^* 是(NP)的最优解 $\Leftrightarrow h_j(X^*)=0,\ j=1,2,\cdots,p$

μ^* 是其相应的$Lagrange$乘子

证明：

$\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$ 若X^*是 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$ 的最优解，且 $h_j(X^*)=0,\ j=1,2,\cdots,p$

则对$\forall X$，都有：$\varphi(X,\mu^*,C)\ge\varphi(X^*,\mu^*,C)=f(X^*)$

则对 $\forall X\in D$，都有： $f(X)=\varphi(X,\mu^*,C)\ge f(X^*)$

所以， X^* 是(NP)的最优解。

$$\varphi(X,\mu^*,C)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

$$\min f(X) \quad s.t.\ h_j(X)=0,\ j=1,2,\cdots,p$$

$\min\limits_{X\in R^n}$

则 X^* 是(NP)的最优解,$\Leftrightarrow$ $h_j(X^*)=0,\ j=1,2,\cdots,p$

μ^* 是其相应的$Lagrange$乘子

证明:

$\Leftarrow$ 若X^*是 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$ 的最优解，且 $h_j(X^*)=0,\ j=1,2,\cdots,p$

则X^*是(NP)的最优解。

又因为X^*是 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$的最优解,

$$\therefore \nabla_X\varphi(X^*,\mu^*,C)=\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)+C\sum_{j=1}^{p}\underbrace{h_j(X^*)}_{0}\nabla h_j(X^*)=0$$

$$\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$$

$\therefore\ \mu^*$ 是 X^* 相应的$Lagrange$乘子 ■

X^*是(NP) 的最优解 ⟶ $\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$ $=0$

$j=1,2,\cdots,p$

$$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

讨论(NP) 的最优解X^*与 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$的最优解的关系

定理3-20 定理3-21

X^*是(NP)的最优解 $\underset{h_j(X^*)=0}{\overset{3^0}{\rightleftarrows}}$ X^*是 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$ 的最优解

$(\forall C\geq C^*, C$不必$\to\infty)$

求$\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^*,C)$的最优解 ⟶ 求$(NP)$的最优解 X^*

问题： *Lagrange*乘子 μ^* 如何求得？

思路： 用迭代法得到 $\mu^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\mu^*$

X^*是(NP) 的最优解 $\longrightarrow$ $\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0$

乘子罚函数：$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$

$\mu^{(k)}$的修正公式：给定一个足够大的$C>0$, 设已求得$\mu^{(k)}$,

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^{(k)},C)$ 得最优解 $X^{(k)}$

$$0=\nabla_X\varphi(X^{(k)},\mu^{(k)},C)=\nabla f(X^{(k)})+\sum_{j=1}^{p}\underline{\mu_j^{(k)}\nabla h_j(X^{(k)})}+C\sum_{j=1}^{p}\underline{h_j(X^{(k)})\nabla h_j(X^{(k)})}$$

$X^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}X^*$

$\mu^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\mu^*$

$\mu_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\mu_j^*$

$$0=\underline{\nabla f(X^{(k)})}+\sum_{j=1}^{p}\underline{(\mu_j^{(k)}+Ch_j(X^{(k)}))}\underline{\nabla h_j(X^{(k)})}$$

$$0=\underline{\nabla f(X^*)}+\sum_{j=1}^{p}\underline{\mu_j^*}\underline{\nabla h_j(X^*)}$$

$$\therefore\ \mu_j^{(k+1)}=\mu_j^{(k)}+Ch_j(X^{(k)})\quad j=1,2,\cdots,p$$

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$

乘子罚函数： $\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$

$\mu^{(k)}$的修正公式：给定一个足够大的$C>0$, 设已求得$\mu^{(k)}$,

求解$\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^{(k)},C)$得最优解$X^{(k)}$

$$\mu_j^{(k+1)}=\mu_j^{(k)}+Ch_j(X^{(k)})\quad j=1,2,\cdots,p$$

$$\mu^{(k)}=(\mu_1^{(k)},\cdots,\mu_j^{(k)},\cdots,\mu_p^{(k)})\longrightarrow\mu^{(k+1)}=(\mu_1^{(k+1)},\cdots,\mu_j^{(k+1)},\cdots,\mu_p^{(k+1)})$$

再求解$\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^{(k+1)},C)$得最优解$X^{(k+1)}$, 重复以上过程

得到两个点列：$\{X^{(k)}\}$, $\{\mu^{(k)}\}$

收敛结论：
$\mu^{(k)}\to\mu^*$ (X^*相应*Lagrange*的乘子)
$X^{(k)}\to X^*$(C足够大, 不必$\to\infty$)

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$

乘子罚函数：

$$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^{(k)},C)$ 得最优解 $X^{(k)}$

$\mu^{(k)}$的修正公式：$\mu_j^{(k+1)}=\mu_j^{(k)}+Ch_j(X^{(k)})\quad j=1,2,\cdots,p$

收敛结论： $\mu^{(k)}\to\mu^*$ (X^*相应*Lagrange*的乘子)

$X^{(k)}\to X^*$(C足够大, 不必 $\to\infty$)

停机准则：

$\because X^{(k)}\to X^*\ \therefore h(X^{(k)})\to h(X^*)=0\ \therefore \left\|h(X^{(k)})\right\|\to\left\|h(X^*)\right\|=0$

$$h(X^{(k)})=\begin{pmatrix}h_1(X^{(k)})\\h_2(X^{(k)})\\\vdots\\h_p(X^{(k)})\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}h_1(X^*)\\h_2(X^*)\\\vdots\\h_p(X^*)\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 停机准则为：$\left\|h(X^{(k)})\right\|<\varepsilon$

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$

乘子罚函数：

$$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^{(k)},C)$ 得最优解 $X^{(k)}$

$\mu^{(k)}$的修正公式：$\mu_j^{(k+1)}=\mu_j^{(k)}+Ch_j(X^{(k)})\quad j=1,2,\cdots,p$

收敛结论： $\mu^{(k)}\to\mu^*$ (X^*相应$Lagrange$的乘子)

$X^{(k)}\to X^*$(C足够大, 不必 $\to\infty$)

停机准则： $\|h(X^{(k)})\|<\varepsilon$

若在迭代过程中, $X^{(k)}\to X^*$ 过慢, 即 $\|h(X^{(k)})\|\to\|h(X^*)\|=0$ 过慢

即 $\dfrac{\|h(X^{(k)})\|}{\|h(X^{k-1})\|}>r(0<r<1)$,则增大罚因子C，加快收敛速度。

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

停机准则：$\left\|h(X^{(k)})\right\|<\varepsilon$

若在迭代过程中，$X^{(k)}\to X^*$ 过慢，即 $\left\|h(X^{(k)})\right\|\to\left\|h(X^*)\right\|=0$ 过慢

即 $\dfrac{\left\|h(X^{(k)})\right\|}{\left\|h(X^{k-1})\right\|}>r(0<r<1)$，则增大罚因子$C$，加快收敛速度。

若 $\dfrac{\left\|h(X^{(k)})\right\|}{\left\|h(X^{k-1})\right\|}\le r(r=1/2)$ $\longrightarrow$ $\left\|h(X^{(k)})\right\|\le\dfrac{1}{2}\left\|h(X^{(k-1)})\right\|$

$$\le(\frac{1}{2})^2\left\|h(X^{(k-2)})\right\|$$
$$\vdots$$
$$\le(\frac{1}{2})^k\left\|h(X^{(0)})\right\|$$

$\longrightarrow$ $\left\|h(X^{(k)})\right\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$很快

1. 乘子法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$

乘子罚函数：

$$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^{(k)},C)$ 得最优解 $X^{(k)}$

$\mu^{(k)}$的修正公式：$\mu_j^{(k+1)}=\mu_j^{(k)}+Ch_j(X^{(k)})\quad j=1,2,\cdots,p$

收敛结论： $\mu^{(k)}\to\mu^*$ (X^*相应$Lagrange$的乘子)

$X^{(k)}\to X^*$(C足够大, 不必 $\to\infty$)

停机准则： $\left\|h(X^{(k)})\right\|<\varepsilon$

若在迭代过程中, $X^{(k)}\to X^*$ 过慢, 即 $\left\|h(X^{(k)})\right\|\to\left\|h(X^*)\right\|=0$ 过慢

即 $\dfrac{\left\|h(X^{(k)})\right\|}{\left\|h(X^{k-1})\right\|}>r(0<r<1)$,则增大罚因子C，加快收敛速度。

第三章 非线性规划

Hestens乘子法

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0,\ j=1,2,\cdots,p$$

- 乘子法迭代原理
- 乘子法迭代步骤
- 乘子法举例

2. 乘子法迭代步骤

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

乘子罚函数：

$$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

1^0 给定 $X^{(0)}$，$\mu^{(1)}(=1),\varepsilon,C,0<r<1,\alpha>1$，令 $k:=1$

2^0 求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^{(k)},C)$ 得最优解 $X^{(k)}$ (用数值迭代方法)

3^0 若 $\|h(X^{(k)})\|<\varepsilon$，则迭代终止，$X^*=X^{(k)}$

否则 若 $\dfrac{\|h(X^{(k)})\|}{\|h(X^{k-1})\|}>r$，则令 $C=\alpha C$，转 4^0

否则 转 4^0

4^0 计算 $\mu_j^{(k+1)}=\mu_j^{(k)}+Ch_j(X^{(k)}),\ j=1,2,\cdots,p$，令 $k:=k+1$ 转 2^0

第三章 非线性规划

*Hestens*乘子法

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0,\ j=1,2,\cdots,p$$

- 乘子法迭代原理
- 乘子法迭代步骤
- 乘子法举例

3. 乘子法举例

$$\varphi(X,\mu,C)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)+\frac{C}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

例(补充) 用乘子法求解 $\min\limits_{s.t.} f(X)=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2$

$$h_1(X)=x_1+x_2-2=0 \quad \mu_1^{(k)}$$

解:

$$\varphi(X,\mu^{(k)},C)=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2+\mu_1^{(k)}(x_1+x_2-2)+\frac{C}{2}(x_1+x_2-2)^2$$

取$C=2$ $\quad =2x_1^2-x_1x_2+x_2^2+\mu_1^{(k)}(x_1+x_2-2)+(x_1+x_2-2)^2$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^{(k)},C)$ 得最优解 $X^{(k)}$ (用数值迭代方法)

$$\left.\begin{aligned}0=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=4x_1-x_2+\mu_1^{(k)}+2(x_1+x_2-2)\\ 0=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=-x_1+2x_2+\mu_1^{(k)}+2(x_1+x_2-2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow X^{(k)}=\begin{pmatrix}x_1^{(k)}\\ x_2^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{12-3\mu_1^{(k)}}{23}\\ \dfrac{20-5\mu_1^{(k)}}{23}\end{pmatrix}$$

$$\mu_1^{(k+1)}=\mu_1^{(k)}+Ch_1(X^{(k)})=\mu_1^{(k)}+2(x_1^{(k)}+x_2^{(k)}-2)=\frac{7\mu_1^{(k)}-28}{23}$$

3. 乘子法举例

例(补充)　用乘子法求解 $\min\limits_{s.t.} f(X)=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2$

$$h_1(X)=x_1+x_2-2=0 \quad \mu_1^{(k)}$$

解：

$$\varphi(X,\mu^{(k)},C)=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2+\mu_1^{(k)}(x_1+x_2-2)+\frac{C}{2}(x_1+x_2-2)^2$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,\mu^{(k)},C)$　取 $C=2$

$$X^{(k)}=\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{12-3\mu_1^{(k)}}{23} \\ \dfrac{20-5\mu_1^{(k)}}{23} \end{pmatrix}$$

$$\mu_1^{(k+1)}=\frac{7\mu_1^{(k)}-28}{23}$$

$\mu_1^{(1)}=1$

$\mu_1^{(2)}=-0.913$

$\mu_1^{(3)}=-1.495$

$\mu_1^{(4)}=-1.671$

$\mu_1^{(5)}=-1.725$

$\mu_1^{(6)}=-1.741$

$\mu_1^{(7)}=-1.746$

$\mu_1^{(8)}=-1.748$

$\mu_1^{(9)}=-1.749$

$\mu_1^{(10)}=-1.75$

$\mu_1^{(11)}=-1.75$

$$\mu_1^{(k)}\to\mu_1^*=-1.75$$

3. 乘子法举例

例(补充) 用乘子法求解 $\min\limits_{s.t.} f(X) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$

$$h_1(X) = x_1 + x_2 - 2 = 0 \quad \mu_1^{(k)}$$

解:

$$\varphi(X,\mu^{(k)},C) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + \mu_1^{(k)}(x_1 + x_2 - 2) + \frac{C}{2}(x_1 + x_2 - 2)^2$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n} \varphi(X,\mu^{(k)},C)$ 取 $C = 2$

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{12-3\mu_1^{(k)}}{23} \\ \dfrac{20-5\mu_1^{(k)}}{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1^{(k)} \to -1.75} X^* = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{5}{4} \end{pmatrix} \quad f^* = \frac{7}{4}$$

$$\mu_1^{(k+1)} = \frac{7\mu_1^{(k)} - 28}{23} \qquad \mu_1^{(k)} \to \mu_1^* = -1.75$$

3. 乘子法举例

例（补充） 用乘子法求解 $\min\limits_{s.t.} f(X) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$

$$h_1(X) = x_1 + x_2 - 2 = 0 \quad \mu_1^{(k)}$$

解：

$$\varphi(X,\mu^{(k)},C) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + \mu_1^{(k)}(x_1+x_2-2) + \frac{C}{2}(x_1+x_2-2)^2$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n} \varphi(X,\mu^{(k)},C)$ 取$C=2$

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{12-3\mu_1^{(k)}}{23} \\ \dfrac{20-5\mu_1^{(k)}}{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1^{(k)} \to -1.75} X^* = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad f^* = \frac{7}{4}$$

$$\mu_1^{(k+1)} = \frac{7\mu_1^{(k)} - 28}{23} \rightarrow \mu_1^* = \frac{7\mu_1^* - 28}{23} \rightarrow \mu_1^* = -1.75$$

$$\mu_1^{(k)} \to \mu_1^* = -1.75$$

第三章 非线性规划

*Hestens*乘子法

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0,\ j=1,2,\cdots,p$$

- 乘子法迭代原理
- 乘子法迭代步骤
- 乘子法举例

$\boxed{\text{作业：P246　24(1)}}$

$\boxed{\text{作业：P203　　5(1)}}$