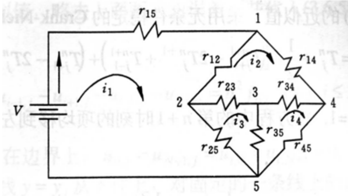
# 4. 线性方程组的直接解法

线性方程组求解问题广泛存在于自然科学和工程实际中。

例如电路问题、结构分析、网络分析、大地测量、数据分析、最优化以及非线性方程组和微分方程数值解等，都可转化为求解线性方程组的问题。

## 案 例（电路问题）

下图表示一个电源和一些电阻的电网络问题. 其中V为电压, $r_{ij}$, i,j=1,2,3,4,5表示电阻, $i_k$, k=1,2,3,4 表示电流. 已知 V 和 $r_{ij}$, i,j=1,2,3,4,5,求各回路的电流.




$$\begin{pmatrix} (r_{12}+r_{25}+r_{15}) & -r_{12} & -r_{25} & 0 \\ -r_{12} & (r_{12}+r_{23}+r_{34}+r_{14}) & -r_{23} & -r_{34} \\ -r_{25} & -r_{23} & (r_{23}+r_{25}+r_{35}) & -r_{35} \\ 0 & -r_{34} & -r_{35} & (r_{34}+r_{35}+r_{45}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其矩阵形式为　AI=f

## § 4.1 引言

考察

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ |\boldsymbol{A}| \neq 0$$

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}, \boldsymbol{x} = (x_1 \ \cdots \ x_n)^T, \boldsymbol{b} = (b_1 \ \cdots \ b_n)^T$$

求解$Ax=b$的克莱姆算法

1. $D = |A| = \sum\limits_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

2. $For \quad j = 1 \cdots n$

2.1 $D_j = \sum\limits_{(i_1\cdots i_n)} (-1)^t a_{i_1 1} \cdots b_{i_2 j} \cdots a_{i_n n}$

2.2 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$

$D_j$是指D中第$j$列用右端$b_1$,... $b_n$代替构成的行列式.

N=[$(n^2-1)n!+n$]flop

求解$Ax=b$的克莱姆(cramer)规则 (D=｜$A$｜≠0)

$x_i = D_i / D$　($i$=1,…,n)

必须计算n+1个n阶行列式.

$$D = \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

计算一个n阶行列式需要做$(n-1)n!$次乘法.

计算n+1个n阶行列式,共需做$(n^2-1)n!$次乘法.

求$x_i$(i=1,... n)需要$(n^2-1)n!$次乘法，n次除法。

总计算量为　　N=[$(n^2-1)n!+n$]flop

n=20,　　N=$9.707\times10^{20}$ flop

设在每秒百亿次（$10^{11}$flop /s）的计算机上计算,

则需$9.707\times10^{9}$秒≈ 307.81年。

这个计算量是大得惊人的. 对于上百个未知量的方程组, 运算量就更大了. 因此克莱姆规则在理论上尽管是完善的, 但在实际计算中却没有什么实用价值. 本文我们将重点讨论求解线性方程组的其它有效的数值方法.

求解线性方程组的的数值方法可分为两类：**直接法与迭代法。**

- 直接法 ---在忽略舍入误差的假设下，通过有限步运算后得到线性方程组的精确解.

直接法的典型代表是高斯消元法。

## 主要内容

- §4.2 **高斯消元法**
- §4.3 **矩阵分解与应用**
- §4.4 **误差分析**

## §4.2 消元法

高斯消元法是一个古老的直接法,由它改进得到的选主元的消元法,是目前计算机上常用于求低阶稠密矩阵方程组的有效方法,其特点就是通过消元将一般线性方程组的求解问题转化为三角方程组的求解问题。

考察n阶线性方程组

Ax=b , | A | ≠0

按三角形方程组和一般线性方程组的顺序来讨论 。

### 1.三角形方程组的解法

三角形方程组包括上三角形方程组和下三角形方程组，是最简单的线性方程组之一。上三角方程组的一般形式是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \cdots\cdots = .. \\ \quad\quad a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\ \quad\quad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

其中$a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,2,\ldots\ldots,n)$

例1 用回代法求解上三角方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 3x_3 + 13x_4 = 13 \\ -13x_4 = -13 \end{cases}$$

解:

$x_4 = 1$

$x_3 = (13 - 13x_4)/3 = 0$

$x_2 = -(7 + 5x_4 + x_3) = -(7+5+0) = 2$

$x_1 = 4 - 3x_4 - x_2 = 4 - 3 - 2 = -1$

$$x_n = b_n / a_{nn}$$
$$x_i = (b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k)/a_{ii}$$
$$i = n-1, n-2, \cdots, 1$$

所以，解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T = (-1,2,0,1)^T$

三角形方程组的计算量

回代法求解上三角形方程组的计算量:

$$x_n = b_n / a_{nn}$$
$$x_i = (b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k)/a_{ii}$$
$$i = n-1, n-2, \cdots, 1$$

求解一个三角形方程组需$n$次除法

与$\sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{1}{2}n(n-1)$次乘法。

共$\frac{1}{2}n(n+1)\,flop$.

回代法的程序实现

返回变量　函数名　参数表

```
function X=backsub(A,b)
%Input—A is an n×n upper- triangular nonsingullar matrix
%        ---b is an n×1 matrix
%Output—X is the solution to the system AX=b
```

```
n=length(b);
X=zeros(n,1);
X(n)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
  X(i)=(b(i)-A(i,i+1:n)* X(i+1:n))/A(i,i);
end
```

A的第$i$行、第$i+1$到$n$列元素构成的行向量

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

$$x_i = (b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k) / a_{ii}$$

$$i = n-1, n-2, \cdots, 1$$

A=[ 2 0 0;1 1 0;3 2 4]; b=[2 2 9]';

X=backsub(A, b)

X=(-1 2 0 1)'

例2 用回代法求解下三角方程组

$$\begin{cases} 2x_1 & = 2 \\ x_1 + x_2 & = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = b_1 / a_{11} \\ x_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k) / a_{ii} \end{cases}$$

$$i = 2, 3, \cdots, n$$

解：

$x_1 = 2/2 = 1$

$x_2 = (2-1)/1 = 1$

$x_3 = (9 - 3\times 1 - 2\times 1)/4 = 1$

所以，解为 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$

下三角形方程组的计算量

$$\frac{1}{2} n(n+1) flop$$

## 2. 高斯消元法

考察$n$阶线性方程组：

$$Ax=b \quad , \; |A| \neq 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

高斯消元法的求解过程, 可分为两个阶段: 首先, 把原方程组化为上三角形方程组, 称之为"消元"过程; 然后, 用逆次序逐一求出上三角方程组(原方程组的等价方程组)的解, 称之为"回代"过程.

符号约定：

1. $(\lambda E_i) \to (E_i)$: 第$i$个方程乘以非零常数λ。
2. $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$: 第$j$个方程乘以非零常数λ加到第$i$个方程。
3. $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$: 交换第$i$个方程与第$j$个方程。

消元过程：

乘数

第一步：设$a_{11}\neq 0$, 令 $m_{i1} = -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$， 做

$(E_i + \boldsymbol{m_{i1}} E_1) \to (E_i)$ $i=2,3,\dots n$,（消去第$i$个方程中的$x_1$）

则第$i$个方程变为

$$a_{i2}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{in}^{(1)} x_n = b_i^{(1)}, \quad i = 2, \cdots, n$$

这里，$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} + m_{i1} a_{1j}^{(0)}$， $b_i^{(1)} = b_i^{(0)} + m_{i1} b_1^{(0)}$ ,$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$ ,$b_i^{(0)} = b_i$

$i,j=2,3,\dots,n$ 　第一步消元后的方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \\ \qquad a_{22}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \vdots \\ \qquad a_{n2}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

第 $k$ 步：设 $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$，令 $m_{ik} = -\dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ 做

$(E_i + \boldsymbol{m_{ik}} E_k) \to (E_i)$（消去第$i$个方程组的$x_k$, $i$=k+1, k+2, …, n）.

这里 $a_{kk}^{(k-1)}$（k=1, 2, …n−1）称为主元素。

第k步消元后的方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}^{(0)} x_n = b_1^{(0)} \\ \qquad a_{22}^{(1)} x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{k+1\,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \cdots + a_{k+1\,n}^{(k)} x_n = b_{k+1}^{(k)} \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n\,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \cdots + a_{nn}^{(k)} x_n = b_n^{(k)} \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + m_{ik} b_k^{(k-1)}$$

$$i, j = k+1, k+2, \dots, n$$

继续下去到第n-1步消元,可将线性方程组化为如下上三角方程组:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\cdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$$

其中 $a_{ij}^{(k)}$ 和 $b_i^{(k)}$ 的上标 $k$ 表示第 $k$ 次消元后的系数。

计算公式为：对 $k = 1,2,3,\cdots,n-1$

$$\begin{cases} m_{ik} = -a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{ik}a_{kj}^{(k-1)} & i,j = k+1,k+2,\dots,n \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + m_{ik}b_k^{(k-1)} \end{cases}$$

$a_{kk}^{(k)} \neq 0(k = 1,2,\cdots,n-1)$ 是高斯消元的前提。

例3　用 *Gauss* 消元法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

解　$n = 3$, 主元 $a_{11} = 1 \neq 0$

$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2/1 = -2$，　$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1/1 = -1$

做 $(E_i + m_{i1}E_1) \to (E_i)$ $i$=2,3，得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$a_{22}^{(1)} = -1 \neq 0, m_{32} = -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = -1/-1 = 1$

完成第二步消元：$E_3 + m_{32}E_2 \to E_3$。得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_2 - 2x_3 = -3 \\ -3x_3 = -3 \end{cases}$$

回代求得

$$x_3 = -3/-3 = 1$$

$$x_2 = -(-3 + 2x_3) = -(-3 + 2\times 1) = 1$$

$$x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 = 6 - 2\times 1 - 3\times 1 = 1$$

故所求解为　$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

**MATLAB For Gaussian Elimination**

```
function X=gauss(A,b)
%Input—A is an n×n nonsingullar matrix
%         ---b is an n×1 matrix
%Output—X is the solution to the system AX=b
[n n]=size(A); % 确定A的维数
X=zeros(n,1);
Aug=[A b]; % 形成增广矩阵
for k=1:n-1
  for i=k+1:n          % 消元过程
    m=Aug(i,k)/ Aug(k,k); % Aug(k,k) ≠0, % 确定乘数
    Aug(i,k:n+1)= Aug(i,k:n+1)-m*Aug(k,k:n+1); % 消元
  end
end     X=backsub(Aug(1:n,1:n), Aug(1:n,n+1)); %回代求解
```

$$\begin{cases} 2x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=2 \end{cases}$$

主元素 $a_{11}$= 0

但交换方程的顺序后,就可用Gauss消元法求解了.

# 高斯消去法的计算量分析

高斯消去法的乘除总运算为

| 消元次数k | 消元乘法次数 | 消元除法次数 | 回代乘除法次数 |
|---|---|---|---|
| 1 | n(n-1) | n-1 | |
| 2 | (n-1)(n-2) | n-2 | |
| . | | | |
| . | | | |
| . | | | |
| k | (n-k+1)(n-k) | n-k | |
| . | | | |
| . | | | |
| n-1 | 2*1 | 1 | n(n+1)/2 |

计算量为　N= $\underset{\text{乘}}{\underline{n(n^2-1)/3}}$ + $\underset{\text{除}}{\underline{n(n-1)/2}}$ + $\underset{\text{回代}}{\underline{n(n+1)/2}}$ $=n^3/3+n^2-n/3$

当 n 充分大时为　$n^3/3$

*3.　选主元*

*例题5: 讨论下面方程组的解法*

$$\begin{cases} 0.0001x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases}$$

假设求解是在四位浮点十进制数的计算机上进行

解：本题用机器数系表示为

$$\begin{cases} \underline{0.1000\times 10^{-3}}x_1 + 0.1000\times 10^1 x_2 = 0.1000\times 10^1 \\ 0.1000\times 10^1 x_1 + 0.1000\times 10^1 x_2 = 0.2000\times 10^1 \end{cases}$$

$m_{21}=-a_{21}/a_{11}=-1/0.0001=-10^4$, $(E_2 + m_{21}E_1) \to (E_2)$,得

$$\begin{cases} 0.1000\times 10^{-3}x_1 + 0.1000\times 10^1 x_2 = 0.1000\times 10^1 \\ -0.1000\times 10^5 x_2 = -0.1000\times 10^5 \end{cases}$$

回代解得 $x_2$=1 , $x_1$=0　　严重失真!　　主元 $a_{11}$ 过小

(本题的准确解为 $\underline{x_1=10000/9999, x_2=9998/9999}$)

$(0.1000\times 10^1-0.1000\times 10^5)x_2= -0.1000\times 10^5 x_2$

***选主元基本思想***

用高斯消元法求解线性方程组时，为避免小主元.在进行第k步消元前，首先在第k列元素 $a_{ik}^{(k-1)}$ ($i=k,\ldots,n$) 中找出第一个出现的绝大值最大者，例如

$$\left|a_{pk}^{(k-1)}\right| = \max_{k\le i\le n}\left|a_{ik}^{(k-1)}\right|$$

再把第p个方程与第k个方程组进行交换，使 $a_{pk}^{(k-1)}$ 成为主元. 我们称这个过程为选主元. 由于只在第k列元素中选主元，通常也称为按列选主元（或称部分选主元 (partial pivoting)）.

选出主元后，再按前面介绍的计算步骤进行消元计算. 这种方法称为按列选主元的高斯消去法，简称列主元法.

---

现在我们再用列主元法解例5

假设求解是在四位浮点十进制数的计算机上进行

$$\begin{cases} 0.0001x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases}$$

将两个方程对调，得

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ 0.0001x_1+x_2=1 \end{cases} \quad \text{消元，得} \quad \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ (1-0.0001)\,x_2=1 \end{cases}$$

在四位浮点十进制数的计算机上,上式为

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ (0.1000\times10^1-0.00001\ \times10^{1})\,x_2=1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

解得：$x_1=1$，$x_2=1$

---

例6 用列主元消去法解方程组

$$\begin{cases} -0.002x1+2x2+2x3 \quad =0.4 \\ x1+0.78125x2 \qquad =1.3816 \\ 3.996x1+5.5625x2+4x3=7.4178 \end{cases}$$

解 第一次消元对

$$[A^{(0)}\,|b^{(0)}\,]=\left[\begin{array}{ccc|c} -0.002 & 2 & 2 & 0.4 \\ 1 & 0.78125 & 0 & 1.3816 \\ \boxed{3.996} & 5.5625 & 4 & 7.4178 \end{array}\right]$$

因列主元素为 $a_{31}^{(0)}$,故先作行交换 $E_1 \longleftrightarrow E_3$,然后进行消元计算可得

$$[A^{(1)}\,|b^{(1)}\,]=\left[\begin{array}{ccc|c} 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \\ 0 & -0.61077 & -1.0010 & -0.47471 \\ 0 & \boxed{2.0029} & 2.0020 & 0.40371 \end{array}\right]$$

第二次消元对 $[A^{(2)}\,|b^{(2)}\,]$,因列主元素为 $a_{32}^{(1)}$,故先作行交换 $E_2 \longleftrightarrow E_3$,然后进行消元计算可得

$$[A^{(2)}\,|b^{(2)}\,]=\left[\begin{array}{ccc|c} 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \\ 0 & 2.0029 & 2.0020 & 0.40371 \\ 0 & 0 & -0.39050 & -0.35160 \end{array}\right]$$

---

回代求解,得 $x=(1.9272,-0.69841,0.90038)^T$,
精确解为 $x^*=(1.9273,-0.69850,0.90042)^T$

相比较是比较准确的.

前面介绍的列主元法解决了Gauss消元法由于小主元的出现所导致的舍入误差的积累，从而出现的失真的问题。但列主元法也有缺点，当方程中出现比例因子时，列主元法就无能为力了。

---

$$\begin{cases} 10^{-4}x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases} \quad Gauss\text{法求解，失真}\ x_1=1, x_2=0$$

列主元法求解 $x_1=x_2=1$.

$$\begin{cases} 10^3x_1+10^7x_2=10^7 \\ x_1+x_2=2 \end{cases} \quad \text{列主元法求解，失真}\ x_1=1, x_2=0$$

**4.按比例消元法(Scaled partial pivoting)：**

将每个方程乘上一个适当的比例因子，，使方程组的最大系数的绝对值不超过1，然后再做列主元消元。

---

具体步骤如下：

1、在第一步消元前，计算 $s_i=\max\limits_{1\le j\le n}\left|a_{ij}\right| \quad i=1,2,\cdots,n$

2、在第k步消元前，选最小的r，使 $\dfrac{|a_{rk}|}{s_r}=\max\limits_{k\le i\le n}\dfrac{|a_{ik}|}{s_i}$

3、对换 $E_k \longleftrightarrow E_r$ , $s_k \leftrightarrow s_r$

4、消元

例7 应用按比例消元法求解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 & ① \\ 3x_1+4x_2 \quad =3 & ② \\ 2x_1+10x_2+4x_3=10 & ③ \end{cases}$$

解：$s_1=2$，$s_2=4$，$s_3=10$

对 $k=1$，$\dfrac{|a_{11}|}{s_1}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{|a_{21}|}{s_2}=\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{|a_{31}|}{s_3}=\dfrac{1}{5}$，$r=2$

对换 $E_1 \leftrightarrow E_2$，$s_1 \leftrightarrow s_2$ 得：

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3 & ① \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 & ② \\ 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 10 & ③ \end{cases} \quad \text{消元，得} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3 & ① \\ \frac{2}{3}x_2 + x_3 = 2 & ② \\ \frac{22}{3}x_2 + 4x_3 = 8 & ③ \end{cases}$$

$s_1 = 4,\quad s_2 = 2,\quad s_3 = 10$

k=2 $\quad \frac{|a_{22}|}{s_2} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3},\quad \frac{|a_{32}|}{s_3} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$

$r = 3,\quad E_3 \leftrightarrow E_2,\quad s_3 \leftrightarrow s_2$ 得：

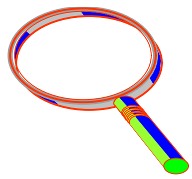
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3 & ① & s_1 = 4 \\ \frac{22}{3}x_2 + 4x_3 = 8 & ② & s_2 = 10 \\ \frac{2}{3}x_2 + x_3 = 2 & ③ & s_3 = 2 \end{cases} \quad \text{消元，得} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3 & ① \\ \frac{22}{3}x_2 + 4x_3 = 8 & ② \\ \frac{7}{11}x_3 = \frac{14}{11} & ③ \end{cases}$$

解得：$x_3 = 2 \quad x_2 = 0 \quad x_1 = 1$

## 作业

**习题 4**
**P109:**
**4-2, 4-3（按比例选主元）**

# §4.3 矩阵分解与应用



- **1.矩阵LU分解**
- **LU分解 :将系数矩阵A分解为两个矩阵L和U的乘积 ,其中L和U分别是下三角和上三角矩阵 ,当要求L的对角元素都是1时称为Doolittle分解；当要求U的对角元素都是1时称为Crout分解.**

**Doolittle分解的方法**：

***由LU=A获得Doolittle分解***

- 根据下式(Doolittle分解)：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & u_{n-1n} & u_{(n-1)n} \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}}_{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A$$

第$i$个分量

$$L_i \cdot U_j = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, \cdots l_{i,i-1}, 1, 0, \cdots\cdots, 0) \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij}$$

第$j$个分量

$l_{ii} = 1$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} + u_{ij},\quad i \le j$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} + l_{ij} \cdot u_{jj},\quad i > j$$

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}l_{ik}\cdot u_{kj}=\sum_{k=1}^{i}l_{ik}\cdot u_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}\cdot u_{kj}+\quad u_{ij},\quad i\le j$$

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}l_{ik}\cdot u_{kj}=\sum_{k=1}^{j}l_{ik}\cdot u_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}\cdot u_{kj}+l_{ij}\cdot u_{jj},\quad i>j$$

规定 $\sum_{k=1}^{0}=0$

得*Doolittle*分解公式

$u_{1j}=a_{1j}\quad j=1,2,\cdots,n;$

$l_{i1}=a_{i1}/u_{11};\ i=2,3,\cdots n.$

计算量大约为(1/3)$n^3$

$$u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}\cdot u_{kj}\qquad\cdots j\ge i$$

$$l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}\cdot u_{kj})/u_{jj}\qquad\cdots j<i$$

***Doolittle*分解的执行顺序：** $u_{1j}=a_{1j}\quad j=1,2,\cdots,n;$

$l_{i1}=a_{i1}/u_{11};\ i=2,3,\cdots n.$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}\cdot u_{kj}\qquad\cdots j\ge i$$

$$l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}\cdot u_{kj})/u_{jj}\qquad\cdots j<i$$

$$\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&&u_{1n}\\l_{21}&u_{22}&\cdots&&u_{2n}\\l_{31}&l_{32}&\ddots&&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{n,n-1}&u_{nn}\end{bmatrix}\begin{matrix}(1)\\(3)\\\vdots\\(2n-1)\end{matrix}$$

(2) (4) ⋯ (2n-2)

**定理1** 若n阶矩阵A的各阶顺序主子式不为零,则A有唯一的Doolittle分解A=LU.

$$A_k=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix},1\le k\le n$$

$A_k$：第k阶顺序主子阵。det($A_k$):第k阶顺序主子式。

**例1** 利用Doolittle分解求解方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\2x_1+x_2+2x_3=1\\x_1+3x_2+4x_3=1\end{cases}$

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

设 $A=LU=\begin{pmatrix}1&&\\l_{21}&1&\\l_{31}&l_{32}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\&u_{22}&u_{23}\\&&u_{33}\end{pmatrix}$

$u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=-1/3$

由Doolittle分解公式 $u_{11}=1$，$u_{12}=2$，$u_{13}=3$ $l_{21}=2$，$l_{31}=1$

$L=\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\1&-1/3&1\end{pmatrix}\qquad U=\begin{pmatrix}1&2&3\\&-3&-4\\&&-1/3\end{pmatrix}$

$u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=1-4=-3$，$u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=2-6=-4$ $l_{32}=(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22}=-1/3$

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1/3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&0&-1/3\end{pmatrix}$$

则线性方程组Ax=b可写成：Ax=(LU)x=L(U x)=b

令 U x=y, 则

$$Ax=b\Leftrightarrow\begin{cases}Ly=b\\Ux=y\end{cases}$$

于是可首先求解向量y使 Ly=b

然后求解 Ux=y,从而得到线性方程组Ax=b的解x.

$Ly=b\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1/3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 解得 $y=(1\quad -1\quad -1/3)^T$

$Ux=y\longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&0&-1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1/3\end{pmatrix}$ 解得 $x=(0\quad -1\quad 1)^T$

**例2** 计算 A的行列式。

解：∵ A=LU ∴ |A|=|L||U|

∵ |L|=1 , |U| $=u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}=1$

∴ |A|=|U|=1

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\alpha=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ 求$A^{-1}$与 $x=\alpha^T A^{-1}b$

1) 求$A^{-1}$ 由定义 $AA^{-1}=E_3$ (1) 将$A^{-1}$与$E_3$按列分块

$A^{-1}=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ $E_3=(e_1\ e_2\ e_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

由（1）式，有 $A\alpha_i=e_i \quad (i=1,2,3) \quad (2)$

利用LU分解,解方程组（2） 求解(2)可转化为解

由例1 $A=LU=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1/3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&0&-1/3\end{pmatrix}$ $\begin{cases}L\beta_i=e_i\\U\alpha_i=\beta_i\end{cases}$ $(i=1,2,3)$

依次解得 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\-6\\5\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1/3\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}$$

2）计算 $x=\alpha^T A^{-1}b$

首先求解 $Ay=b$ 求得 $y=A^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

其次计算 $x=\alpha^T y=(1\ -1\ 0)^T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=2$

## 2.三对角矩阵与追赶法

- 定义1 若n 阶矩阵A=($a_{ij}$)的元素满足:对于1≤p,q<n的正整数p、q,有$j>i+p$及 $i>j+q$时，$a_{ij}=0$，则A称为上带宽为p，下带宽为q的带状矩阵. 带宽为w=p+q+1。

■较常见带状矩阵为带宽为3（p=q=1,w=3)的矩阵。

$$A=\begin{bmatrix}b_1&c_1&0&\cdots&0\\a_2&b_2&c_2&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&a_{n-1}&b_{n-1}&c_{n-1}\\0&\cdots&0&a_n&b_n\end{bmatrix}$$

A称为三对角矩阵。

p=1,q=2,w=4
$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&a_{42}&\ddots&a_{n-2,n-2}&a_{n-2,n-1}&0\\\vdots&\ddots&\ddots&a_{n-1,n-2}&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\0&\cdots&0&a_{n,n-2}&a_{n,n-1}&a_{n,n}\end{bmatrix}$$

$a_{ij}=0$ whenever $j>i+1$ or $i>j+2$. Its bandwidth is w=4。

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&a_{42}&\ddots&a_{n-2,n-2}&a_{n-2,n-1}&a_{n-2,n}\\\vdots&\ddots&\ddots&a_{n-1,n-2}&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\0&\cdots&0&a_{n,n-2}&a_{n,n-1}&a_{n,n}\end{bmatrix}$$

p =2，q =2。

A称为五对角矩阵。

**三对角线性方程组：** 系数矩阵为三对角矩阵的线性方程组称为三对角方程组。

$$\begin{cases}b_1x_1+c_1x_2 &= d_1\\a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3 &= d_2\\\cdots\\a_{n-1}x_{n-2}+b_{n-1}x_{n-1}+c_{n-1}x_n &= d_{n-1}\\a_nx_{n-1}+b_nx_n &= d_n\end{cases}$$

对应的系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}b_1&c_1&&&\\a_2&b_2&c_2&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&a_{n-1}&b_{n-1}&c_{n-1}\\&&&a_n&b_n\end{bmatrix}$

应用追赶法求解三对角线性方程组。

■追赶法仍然保持LU分解特性,它是一种特殊的LU分解。充分利用了系数矩阵的特点，使分解更简单,得到对三对角线性方程组的快速解法。

定理1 如果上带宽为p，下带宽为q的n阶带状矩阵A有Doolittle分解。A=LU，则L是下带宽为q的单位下三角矩阵，U是上带宽为p的上三角矩阵。

设A有Doolittle分解,则由定理1其分解形式为：

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ p_2 & 1 & & & \\ & p_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & p_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & \gamma_1 & & & \\ & q_2 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \gamma_{n-1} \\ & & & & q_n \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法及相等定义，有：

$q_1 = b_1$

$p_k q_{k-1} = a_k$, $q_k + p_k \gamma_{k-1} = b_k$, $\gamma_{k-1} = c_{k-1}$ $(k = 2,3,\cdots,n)$

于是得计算 $L$ 的元素 $p_i$ 及 $U$ 的 $q_i$ 和 $\gamma_i$ 的计算公式，为：

$q_1 = b_1$

$p_k = a_k / q_{k-1}$

$\gamma_{k-1} = c_{k-1}$ $(k = 2,3,\cdots,n)$

$q_k = b_k - p_k \gamma_{k-1}$

求解Ax=d ⟺ LUx=d ⟺ $\begin{cases} Ly=d \\ Ux=y \end{cases}$

求解Ly=d $\begin{cases} y_1=d_1 \\ y_i=d_i-p_i y_{i-1} \\ i=2,\ldots,n \end{cases}$ 追

**追赶法**

求解Ux=y $\begin{cases} x_n=y_n/q_n \\ x_i=(y_i-c_i x_{i+1})/q_i \\ i=n-1,\ldots,1 \end{cases}$ 赶

例：求解方程组：$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 & = 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 & = 0 \\ x_3 - 2x_4 & = -1 \end{cases}$

$q_1 = b_1$

$p_k = a_k / q_{k-1}$

$\gamma_{k-1} = c_{k-1}$ $(k = 2,3,\cdots,n)$

求解Ux=y

$x_4=1/3$, $x_3=-1/3$, $x_2=-1$, $x_1=-1$

$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 & = 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 & = 0 \\ x_3 - 2x_4 & = -1 \end{cases}$

$$解：A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 0 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ p_2 & 1 & & \\ & p_3 & 1 & \\ & & p_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & \gamma_1 & & \\ & q_2 & \gamma_2 & \\ & & q_3 & \gamma_3 \\ & & & q_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -0.5 & 1 & & \\ & -2/3 & 1 & \\ & & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ & -1.5 & 0 & \\ & & -2 & 1 \\ & & & -1.5 \end{bmatrix}$$

求解Ly=d

$y_1=1$, $y_2=1.5$, $y_3=1$, $y_4=-0.5$

## 3. 平方根法

实际问题中，当求解方程组的系数矩阵是对称矩阵时，即$A^T=A$，用下面介绍的$LDL^T$分解法可以简化程序并减少计算量.

### (1)$LDL^T$分解法 (改进的平方根法)

从定理1可知,当矩阵A的各阶顺序主子式不为零时,A有唯一的Doolittle分解A=LU.此时，$|U| \neq 0$,即矩阵U的对角线元素$u_{ii} \neq 0,(i=1,2,\ldots,n)$。将矩阵U的每行依次提出$u_{ii}$.

则有$U = D\tilde{U}$,这里

$$U = D\tilde{U}$$

$$D = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \frac{u_{13}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \frac{u_{23}}{u_{22}} & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & \frac{u_{n-1n}}{u_{n-1n-1}} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

由$A=A^T$，得 $A^T = (LU)^T = U^T L^T = (D\tilde{U})^T L^T$

$= \tilde{U}^T D^T L^T = \tilde{U}^T D L^T = LD\tilde{U} = A$

由分解的唯一性有：$\tilde{U} = L^T$，于是可得下面的结论：

定理2：若对称矩阵A各阶顺序主子式不为零,则A可以唯一分解为$A=LDL^T$，这里

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

$L^T$为L的转置矩阵。

当A有$LDL^T$分解时，利用矩阵运算法则及相等原理易得计算$l_{jk}$及$d_k$的公式为

$$\begin{cases} d_k = a_{kk} - \sum_{m=1}^{k-1} l^2_{km} d_m \\ l_{jk} = (a_{jk} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} l_{jm} d_m)/d_k \end{cases}$$

$k=1,2,\dots,n$; $j=k+1,k+2,\dots,n$

为减少乘法次数，引入辅助量 $u_{jk}=l_{jk}d_k$,则上面公式可写成

$$\begin{cases} d_k = a_{kk} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{km} l_{km} \\ u_{jk} = a_{jk} - \sum_{m=1}^{k-1} u_{jm} l_{km} \\ l_{jk} = u_{jk}/d_k \end{cases} \quad \begin{pmatrix} k=1,2,\cdots,n \\ j=k+1,k+2,\cdots,n \end{pmatrix}$$

实际问题中，当求解方程组的系数矩阵是对称矩阵时，则用上面介绍的$LDL^T$分解法可以减少计算量与存储量.

若 $A=LDL^T$,则

$$Ax=b \Longleftrightarrow (LDL^T)x=b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ly=b \\ Dz=y \\ L^T x=z \end{cases}$$

例1 求解方程组

$$\begin{cases} 5x_1-4x_2+x_3=2 \\ -4x_1+6x_2-4x_3=-1 \\ x_1-4x_2-6x_3=-1 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

解 本题是对称线性方程组，故可用LDLT 分解法求解，设

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix}$$

$$k=1, d_1=a_{11}=5$$
$$j=2, u_{21}=a_{21}=-4, l_{21}=u_{21}/d_1=-0.8$$
$$j=3, u_{31}=a_{31}=1, l_{31}=u_{31}/d_1=0.2$$
$$k=2, d_2=a_{22}-u_{21}l_{21}=2.8$$
$$j=3, u_{32}=a_{32}-u_{31}l_{21}=-3.2$$
$$l_{32}=u_{32}/d_2=-1.14286$$
$$k=3, d_3=a_{33}-u_{31}l_{31}-u_{32}l_{32}=2.14285$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & \\ -0.8 & 1 & \\ 0.2 & -1.14286 & 1 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 5 & & \\ & 2.8 & \\ & & 2.14285 \end{bmatrix}$$

分别求解方程组 Ly=b Dz=y $L^T$x=z 。 $b=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$y_1=2,\ y_2=0.6,\ y_3=-0.714284$$
$$z_1=0.4,\ z_2=0.214286,\ z_3=-0.333334$$
$$x_3=-0.333334, x_2=-0.166667, x_1=0.333333$$

(2) $LL^t$ 分解

定理3 若A为对称正定矩阵，则它有唯一的 $L_1L_1^T$ 分解式。即，$L_1L_1^T$,称为cholesky 分解。这里$L_1$是对角元为正的下三角矩阵。

证明

因为A对称正定， $A=LDL^T$,且 D的元素$d_i>0.(i=1,\dots,n)$

将D分解为$D=D^{1/2}D^{1/2}$，这里$D^{1/2}$也是对角矩阵，其元素为$d_i^{1/2}$.

$$A=LDL^T=LD^{\frac12}D^{\frac12}L^T=(LD^{\frac12})(LD^{\frac12})^T=L_1L_1^T$$

$L_1=LD^{\frac12}$ 是对角元为正的下三角矩阵。

证毕

**Doolittle分解**

$$A=LU=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n-1,n} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

**Crout分解**

$$A=LU=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n-1,n} & l_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 4.4 误差分析

对 $Ax=b$ 来说，由于观测或计算等原因，线性方程组两端的系数A和b都带有误差δA和δb，这样实际建立的方程组是近似方程组 $(A+\delta A)x=b+\delta b$。对近似方程组求出的解是原问题的真解x加上误差δx,即 $x+\delta x$。而δx是由δA及δb引起的，它的大小将直接影响所求解的可靠性。

**这种解依赖于方程组系数的误差δA及δb的问题，称为线性方程组解对系数的敏感性。**

方程组的系数矩阵发生微小扰动，就有可能引起方程组解性质上的变化，这是方程组本身的"性态问题"。

方程组的系数矩阵发生微小扰动，就有可能引起方程组解性质上的变化，这是方程组本身的"性态问题"。

**相对误差关系式**

给定原线性方程组 $Ax=b$， A可逆；

和近似方程组 $(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$

1、$\delta A=0$, $\delta b\neq 0$ 即 $A(x+\delta x)=b+\delta b$

证明：
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le \|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

由 $A(x+\delta x)=b+\delta b$ 消去 $Ax=b$,得 $A\delta x=\delta b$

$$\Rightarrow \quad \delta x = A^{-1}\delta b,\quad \|\delta x\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\| \quad (1)$$

$$\text{又}\quad \|b\|=\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|\Rightarrow \quad \|x\|\ge\frac{\|b\|}{\|A\|}\quad (2)$$

不等式（1）、（2）两边相除，结论得证。

**相对误差关系式**

1、$\delta A=0$, $\delta b\neq 0$ 即 $A(x+\delta x)=b+\delta b$

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|}\le \|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

2、$\delta A\neq 0,\delta b=0$ 即 $(A+\delta A)(x+\delta x)=b$

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

**一般情形**

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

$\mathrm{Cond}(A)\ge\|A^{-1}A\|=1$

由这些关系式可看到，解的相对误差不仅与扰动δA、 δb大小相关，而且与量$\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$相关，故可作如下定义：

定义：设A非奇异，称$\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$为矩阵A的条件数；记为Cond (A)， 即$\mathrm{Cond}(A)=\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$.

Cond (A)可反映出方程组的解对系数的敏感性。

矩阵A被称为是好条件的，如果Cond (A) ≈1；此时，方程组称为良态。当Cond (A) >>1时A被称为是坏条件的。此时，方程组称为病态。

**矩阵A常用的条件数为**

$$\mathrm{Cond}(A)_\infty=\|A^{-1}\|_\infty\cdot\|A\|_\infty$$

$$\mathrm{Cond}(A)_1=\|A^{-1}\|_1\cdot\|A\|_1$$

$$\mathrm{Cond}(A)_2=\|A^{-1}\|_2\cdot\|A\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}$$

矩阵A被称为是好条件的，如果Cond (A) ≈1；此时，方程组称为良态。当Cond (A) >>1时A被称为是坏条件的。此时，方程组称为病态。

方程组
$$\begin{cases}2.001x_1-x_2=1\\2x_1-x_2=1\end{cases}\quad(1)$$

此方程组的准确解为$x^*=(0,-1)^T$。

现将其右端加以微小的扰动使之变为：

$$\begin{cases}2.001x_1-x_2=1.0002\\2x_1-x_2=1\end{cases}\quad(2)\qquad \delta b=\begin{pmatrix}0.0002\\0\end{pmatrix}$$

经计算可得准确解为$x^{2*}=(0.2,-0.6)^T$.

这两个方程组的解相差很大$\|x^*-x^{2*}\|_\infty=0.4$，说明方程组的解对常数项b的扰动很敏感。

注意到$\|A\|_\infty=3.001$, $\|A^{-1}\|_\infty=4.001\times10^3$ ,故有

$\mathrm{Cond}(A)_\infty=1.2007\times10^4$ ,可见条件数很大.方程组是病态的。

一般来说，良态方程组，求得的解就可靠；反之，病态方程组解的可靠性就差。

通常当从方程组 $Ax=b$ 求出计算解 $\bar{x}$ 后，有时用残向量

$$r=b-A\bar{x}$$

的大小来检验 $\bar{x}$ 的精度，认为如果对某种范数||r||很小，就说明解 $\bar{x}$ 是好的。一定是这样吗？

看刚才举例的方程组，当用(2)的解 $x^{2*}$ 近似(1)的解 $x^*$ 后，则有 $r=b-Ax^{2*}=(-0.0002,0)^T$，显然||r||很小的，但 $\|x^*-x^{2*}\|_\infty=0.4$ 很大。

相对误差关系式：

$$\frac{\|\bar{X}-X\|}{\|X\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}=cond(A)\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

定理 4-11 已知 $Ax=b$，$r=b-A\bar{x}$，$A$ 是一个可逆矩阵，则有 $\|x-\bar{x}\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|r\|$

若 $x\neq0$，$b\neq0$，则

P91,Th4-11

$$\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

证明 因为 $Ax=b$，$r=b-A\bar{x}$

$$\Rightarrow r=b-A\bar{x}=Ax-A\bar{x}=A(x-\bar{x})$$

因为 $A$ 是一个可逆矩阵，则

$$x-\bar{x}=A^{-1}r$$

$$\|x-\bar{x}\|=\|A^{-1}r\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|r\| \quad (1)$$

$$\|x-\bar{x}\|=\|A^{-1}r\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|r\| \quad (1)$$

此外，因为 $b=Ax$，有 $\|b\|=\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|}\le\frac{\|A\|}{\|b\|},\ x\neq0,\ b\neq0 \quad (2)$$

根据 (1)、(2)，我们有

$$\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}$$ ■

不可轻易用残向量||r||的大小来判断计算解的精度

$$A=\begin{bmatrix}2.001 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix},\quad \delta A=\begin{bmatrix}0 & -0.0001\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A+\delta A=\begin{bmatrix}2.001 & -1.0001\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\quad \delta b=\begin{bmatrix}0.0001\\0\end{bmatrix}$$

$$b+\delta b=\begin{bmatrix}2.0001\\1\end{bmatrix}$$

病态方程组 P92

对于病态方程组，通常不能用常规方法求解，这里介绍一种求解病态方程组的方法：迭代求精法

计算步骤：

1）用选主元LU分解求解方程组 Ax=b，将其解 作为迭代初始向量 $x^{(0)}$，即 $\bar{x}\Rightarrow x^{(0)}, 0\Rightarrow k$；

2）计算残向量 $r^{(k)}=b-Ax^{(k)}$;

3）用选主元LU分解求解方程组 $Ax=r^{(k)}$，得解 作为丢失的残向量 $e^{(k)}$，即 $\tilde{x}\Rightarrow e^{(k)}$；

4）$x^{(k)}+e^{(k)}\Rightarrow x^{(k+1)}$

5）如果 $\|e^{(k)}\|_\infty<\varepsilon$ 则终止计算，$x^{(k+1)}$ 是近似解；

6）如果 k<N，则 k+1⇒ k,转2）；

7）计算超出N步，停止。

$$e^{(k)}\approx A^{-1}r^{(k)}=A^{-1}(b-Ax^{(k)})=x^*-x^{(k)}$$

## 作业

**习题 4**

**P108:**

**1(1)(2), 2,3,6-9**