北京科技大学研究生 2012-2013 学年第一学期《计算方法》

考试试题解答

一、填空题(每空题 2 分，共 20 分)

1. $x_1 \approx 1.234$ 具有4位有效数字， $f(x)=\sqrt{1+2x}$ 则 $f(x_1)$ 的绝对误差限大致为 0.000268491447.

解：绝对误差限

$$\delta f(x_1) \le |f'(x_1)|\delta x| = \left|\frac{1}{\sqrt{1+2*x_1}}\right| \times 0.0005 = 0.0002684914497574344$$

2. 设 A 是一个 5×10 的矩阵， B 是一个 10×6 的矩阵， C 是一个 6×5 的矩阵， D 是一个 5×3 的矩阵，根据矩阵乘法结合率， $F=ABCD$ 可按如下公式计算（1） $F=[A(BC)]D$ （2） $F=(AB)(CD)$，则公式（2）效率更高，其计算量为 480flops。

解：计算乘法次数

（1） $10\times5\times6+5\times5\times10+5\times3\times5=625$ （flops）

（2） $5\times6\times10+6\times3\times5+5\times3\times6=480$ （flops）

3. 已知向量 $x=(2,3,4)^T$，存在household矩阵H使得 $Hx=(2,5,0)^T$，则

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.6 & 0.8\\ 0 & 0.8 & -0.6\end{pmatrix}$$

解：首先找二阶矩阵 H_1 使得 $H_1\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$，令 $v=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$，取 $w=v-\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$，

$u=\frac{w}{\|w\|_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$，则 $H_1=I-2u^Tu=I-\frac{2}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.8\\0.8 & -0.6\end{bmatrix}$ 满足要求。再令

$H=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & H_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0.6 & 0.8\\0 & 0.8 & -0.6\end{bmatrix}$，就有 $Hx=\begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix}$

4. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 101\\1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_F=\sqrt{10204}=2\sqrt{2551}\approx101.0148504$，

$cond(\mathbf{A})_\infty=\frac{102^2}{100}=104.04$。

解： $\|A\|_F = \sqrt{1^2+101^2+1^2+1^2} = \sqrt{10204}$

$$\boldsymbol{cond_\infty(A) = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{100}\begin{bmatrix} 1 & -101 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 & 1.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{cond_\infty(A) = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 102\times 1.02 = 104.04}$$

5. 已知由数据(0,0), (1,2)和(2,y)三点构造出的二次插值多项式中 x^2 的系数为 1，则 y=6 。

解：设二次插值多项式为 $p(x) = ax^2 + bx + c$

令 $\begin{cases} c = 0 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=y \end{cases}$ ，令 $a=1$，解得 $b=1, y=6$

注：$N(x) = 2x + x(x-1) = x^2 + x \qquad y = N(2) = 6$

又解：

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0	0		
1	2	2	
2	y	y−2	(y−4)/2

所以二次插值多项式为 $p(x) = 0 + 2x + \frac{y-4}{2}x(x-2)$，令 x^2 的系数为 1，得到 y=6 。

6. 按下列数据表构造适合的三次样条插值函数 $S(x)$，则有 $S'(0) = -5$

x	-1	0	1
y	-1	1	3
y'	4		28

解：用三弯矩法。

所给的是**第一种边界条件：**

$$S'(x_0) = f_0', S'(x_n) = f_n'$$

于是

$$S(x)=\begin{cases} M_0\dfrac{(x_1-x)^3}{6h_0}+M_1\dfrac{(x-x_0)^3}{6h_0} & \\ \quad +(y_0-\dfrac{M_0h_0^2}{6})\dfrac{x_1-x}{h_0}+(y_1-\dfrac{M_1h_0^2}{6})\dfrac{x-x_0}{h_0}, & -1\le x<0 \\ M_1\dfrac{(x_2-x)^3}{6h_1}+M_2\dfrac{(x-x_1)^3}{6h_1} & \\ \quad +(y_1-\dfrac{M_1h_1^2}{6})\dfrac{x_2-x}{h_1}+(y_2-\dfrac{M_2h_1^2}{6})\dfrac{x-x_1}{h_1}, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

$h_0=h_1=1$， $x_0=-1, x_1=0, x_2=1$， $y_0=-1, y_1=1, y_2=3$，代人上式得到

$$S(x)=\begin{cases} M_0\dfrac{(-x)^3}{6}+M_1\dfrac{(x+1)^3}{6} & \\ \quad +(1+\dfrac{M_0}{6})x+(1-\dfrac{M_1}{6})(x+1), & -1\le x<0 \\ M_1\dfrac{(1-x)^3}{6}+M_2\dfrac{x^3}{6} & \\ \quad +(1-\dfrac{M_1}{6})(1-x)+(3-\dfrac{M_2}{6})x, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

由 $S'(x_0)=4, S'(x_2)=28$，得到

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}M_0+(1+\dfrac{M_0}{6})+(1-\dfrac{M_1}{6})=4, & -1\le x<0 \\ \dfrac{1}{2}M_2-(1-\dfrac{M_1}{6})+(3-\dfrac{M_2}{6})=28, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

再令 $S'(0+)=S'(0-)$ 得到

$$\frac{1}{2}M_1+(1+\frac{M_0}{6})+(1-\frac{M_1}{6})=-\frac{1}{2}M_1-(1-\frac{M_1}{6})+(3-\frac{M_2}{6})$$

（*）与（**）联立得到

$$\begin{cases} -2M_0-M_1=12 \\ M_1+2M_2=156 \\ M_0+4M_1+M_2=0 \end{cases}$$

解之得到

$$\begin{cases} M_0=6 \\ M_1=-24 \\ M_2=90 \end{cases}$$

注意到

$$S(0^-)=\left[-M_0\frac{x^2}{2}+M_1\frac{(x+1)^2}{2}+(1+\frac{M_0}{6})+(1-\frac{M_1}{6})\right]_{x=0}$$

得到

$$S'(0)=S'(0^-)=\frac{1}{2}M_1+2+\frac{M_0}{6}-\frac{M_1}{6}=-5$$

7. 利用积分$\int_2^8\frac{1}{x}dx=\ln 4$计算$\ln 4$时，要求误差不超过$0.5\times10^{-5}$，若采用复化梯形公式，至少应取950个节点，若采用复化Simpson公式，至少应取52个节点.

解：**用复合梯形公式。截断误差为**

$$R_T(f)=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)=-\frac{6h^2}{12}\cdot\frac{2}{\xi^3}\quad（h=\frac{8-2}{n}=\frac{6}{n}）$$

$$|R_T(f)|=\frac{1}{\xi^3}h^2\le\frac{1}{8}h^2=\frac{36}{8n^2}=\frac{9}{2n^2}$$

令

$$\frac{9}{2n^2}\le 0.5\times10^{-5}$$

得到

$$n\ge\sqrt{\frac{9}{2\times0.5\times10^{-5}}}=948.6833$$

至少应取950个节点

用复合Simpson公式，分为2n等分，$h=\frac{b-a}{2n}$，截断误差为

$$R_S(f)=-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi)=-\frac{6h^4}{180}(-1)(-2)(-3)(-4)\xi^{-5}$$

$$|R_S(f)|=\frac{6h^4}{180}\times4!\xi^{-5}\le\frac{24}{30\times32}\times\left(\frac{8-2}{2n}\right)^4=\frac{162}{5n^4}$$

令

$$\frac{162}{5n^4}\le 0.5\times10^{-5}$$

得到

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{162}{5\times 0.5\times 10^{-5}}} = \sqrt[4]{6480000} = 50.4538$$

所以至少应取52个节点

二、(10分)用牛顿法求 $f(x)=x^3-2x^2+x-7=0$ 在区间[2,3]内的根，取初始值 $x_0=2.5$，

要求误差 $<10^{-5}$。

解： $f(x)=x^3-2x^2+x-7$　　　　　　$f'(x)=3x^2-4x+1$

迭代公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3-2x_k^2+x_k-7}{3x_k^2-4x_k+1}=\dfrac{2x_k^2(x_k-1)+7}{(3x_k-1)(x_k-1)}$

计算过程

$x_1 = 2.64102564102564$

$x_2 = 2.63115058167142$

$x_3 = 2.63109929891747$

$x_4 = 2.63109929753899$

$x^* = 2.63109929753899$

[迭代3步即可]

三、(10分)使用 Dolittle 三角分解求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3=7 \\ -x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ 2x_1-3x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

解： $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -7/5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -28/5 \end{bmatrix}$

求解 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -7/5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 4/3 \\ -14/5 \end{bmatrix}$

求解 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -28/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -4/3 \\ -14/5 \end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

四、（16分）分别用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法解方程组

$$\begin{pmatrix} 20 & 3 & 2 \\ 2 & 15 & -3 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix}$$

精确至2位有效数字。初始向量均取 $(1,1,1)^T$

解：Jacobi 迭代格式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{24 - 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}}{20} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{30 - 2x_1^{(k)} + 3x_3^{(k)}}{15} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{12 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{8} \end{cases}$

$x_1 = (0.950, 2.067, 1.25)$ ，　$x_2 = (0.765, 2.123, 1.123)$ ，　$x_3 = (0.769, 2.123, 1.138)$ ，

$x_3 = (0.767, 2.125, 1.139)$

$X \approx (0.77, 2.13, 1.139)$

Seidel 迭代格式 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{24 - 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}}{20} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{30 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_3^{(k)}}{15} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{12 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{8} \end{cases}$

【或 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{6}{5} - \dfrac{3}{20} x_2^{(k)} - \dfrac{1}{10} x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{46}{25} + \dfrac{1}{50} x_2^{(k)} + \dfrac{16}{75} x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 1.12 + \dfrac{13}{800} x_2^{(k)} - \dfrac{17}{1200} x_3^{(k)} \end{cases}$ 】

$x_1 = (0.950, 2.073, 1.122)$　　$x_2 = (0.777, 2.121, 1.138)$　　$x_3 = (0.768, 2.125, 1.138)$

$x_4 = (0.767, 2.125, 1.138)$

$X \approx (0.77, 2.12, 1.14)$

五、**(10 分)** 试求一个不超过 4 次多项式 $p(x)$ ，使得 $p(0)=0, p'(0)=1, p(1)=1, p'(1)=2, p'(2)=3$ 。

解：**方法 1：泰勒公式**

设 $p(x)=p(0)+p'(0)x+ax^2+bx^3+cx^4=x+ax^2+bx^3+cx^4$**，**

$p'(x)=1+2ax+3bx^2+4cx^3$

$$\begin{aligned} p(1)&=1+a+b+c=1 \\ p'(1)&=1+2a+3b+4c=2 \\ p'(2)&=1+4a+12b+32c=3 \end{aligned} \quad \textbf{解得} \quad \begin{aligned} a&=-1.5 \\ b&=2 \\ c&=-0.5 \end{aligned}$$

$p(x)=x-1.5x^2+2x^3-0.5x^4$

方法 2：待定系数法

设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$**，** $p'(x)=b+2cx+3dx^2+4ex^3$

$$\begin{aligned} p(0)&=a=0 \\ p(1)&=a+b+c+d+e=1 \\ p'(0)&=b=1 \\ p'(1)&=b+2c+3d+4e=2 \\ p'(2)&=b+4c+12d+32e=3 \end{aligned} \quad \textbf{解得} \quad \begin{aligned} a&=0 \\ b&=1 \\ c&=-1.5 \\ d&=2 \\ e&=-0.5 \end{aligned}$$

$p(x)=x-1.5x^2+2x^3-0.5x^4$

方法 3： $p'(x)$ **为三次多项式，由** $p'(0)=1, p'(1)=2, p'(2)=3$ **插值可得一插值多项式** $q(x)=x+1$**，** 所以 $p'(x)=x+1+Ax(x-1)(x-2)$**， 其中 A 为待定系数**

积分得 $p(x)=\frac{x^2}{2}+x+A(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2)+B$ **其中 A,B 为待定系数**

$p(0)=B=0 \qquad p(1)=\frac{3}{2}+\frac{A}{4}+B=1$ **得** $A=-2, B=0$

所以 $p(x)=\frac{x^2}{2}+x-2(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2)=-\frac{1}{2}x^4+2x^3-\frac{3}{2}x^2+x$

六、(12 分) 用最小二乘法求一个形如 $y=a+bx+cx^2$ 的经验公式，使与下列数据相拟合

X	-3	-1	0	2	4
Y	26	25.96	0	15	52.64

解：依题意 设 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x, \varphi_2(x)=x^2$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=5 \qquad (\varphi_0,\varphi_1)=\sum x_i=2 \qquad (\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_1,\varphi_1)=\sum x_i^2=30$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\sum x_i^3=44 \quad (\varphi_2,\varphi_2)=\sum x_i^4=354 \quad (\varphi_0,y)=\sum y_i=119.6$$

$$(\varphi_1,y)=\sum x_i y_i=136.6 \quad (\varphi_2,y)=\sum x_i^2 y_i=1162.2$$

解方程

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) \\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0,y) \\ (\varphi_1,y) \\ (\varphi_2,y) \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 30 \\ 2 & 30 & 44 \\ 30 & 44 & 354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119.6 \\ 136.6 \\ 1162.2 \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.8 \\ 0.3 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

所求二阶拟合多项式为

$$y=8.8+0.3x+2.5x^2$$

七、(12 分) 试确定下面求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx C[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)]$$

使其代数精度尽可能高。(1)给出最高的代数精度；（2）使用此公式计算积分 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$，给出其误差。

解：公式若有 3 次代数精度，需有

$$\begin{cases} C(1+1+1)=\int_{-1}^{1} dx=2 \\ C(x_0+x_1+x_2)=\int_{-1}^{1} xdx=0 \\ C(x_0^2+x_1^2+x_2^2)=\int_{-1}^{1} x^2dx=\dfrac{2}{3} \\ C(x_0^3+x_1^3+x_2^3)=\int_{-1}^{1} x^3dx=0 \end{cases}$$

解得：$C=\dfrac{2}{3}, x_0=0, x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故求积公式为$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\dfrac{2}{3}[f(0)+f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})+f(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})]$

当 $f(x)=x^4$ $\quad I(x^4)=\int\limits_{-1}^{1} x^4 dx=\dfrac{2}{5}\neq I_2(x^4)=\dfrac{2}{3}\left[\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right]=\dfrac{1}{3}$ 最高代数精度为 3

（2）$\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{2}$

$$I_2=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+0^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right]=\frac{14}{9}$$

误差 $\quad \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{14}{9}\approx 0.015242574$

八、(12 分)用改进的欧拉方法求解初值问题$\begin{cases} y'=\dfrac{1}{1+x^2}-2y^2,\ 0\le x\le 1 \\ y(0)=0 \end{cases}$，取步长 $h=0.25$，

计算 $y(0.25), y(0.5)$ 的近似值并与准确值 $y(x)=x/(1+x^2)$ 比较.

解: $k_1=f(x_n,y_n)=\dfrac{1}{1+x_n^2}-2y_n^2$, $k_2=f(x_{n+1},y_n+k_1h)=\dfrac{1}{1+x_{n+1}^2}-2(y_n+k_1h)^2$,

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[k_1+k_2]$$

$y_0=0$，$x_0=0$，$x_1=0.25$，$k_1=1$， $k_2=0.8161764706$， $y_1=0.2270220589$，

真实值 $y(0.25)=0.2352941176$， 误差0.0082720587

$x_2=0.50$，$k_1=0.8380984402$， $k_2=0.4188540118$，$y_2=0.3841411153$

真实值 $y(0.50)=0.4$， 误差0.01585588846

x_i	k_1	k_2	y_i
0.25	**1**	**0.81617647058824**	**0.22702205882353**
0.50	**0.83809844020329**	**0.41885401178942**	**0.38414111532262**