

## 第二章 数值计算的理论基础

泛函分析这门现代数学学科，虽然起源于19世纪，但形成一门系统的数学却是20世纪的事；它从早期数学的许多分枝中抽取精华，并且不断地加以系统化成为更一般的抽象形式。而数值计算却是一门实用学科，主要以来自实际的数值问题为研究对象，虽然计算中用了非常复杂的现代工具，但本质上只是数的四则运算。表面上看来这两门学科没有什么联系，但事实上数值计算发生革命性变化的原因之一，正是运用了泛函分析。

本章介绍泛函分析中的一些基本概念。这一方面有利于后面各章中对数值问题的讨论；另一方面，通过数值问题导出泛函分析的一些概念，也有利于我们理解泛函分析的一些内容。



## 2.1、距离与极限

### 2.1.1 距离

距离是常见的概念之一。几何中线段的长度是其两个端点的距离，一个实数与其近似值的绝对误差也是距离。仔细研究来自通常距离的一些结论，会发现它们所依赖的基础——距离定义是很简单的，如果抛开直观的几何假设，可以把普通的距离概念推广到任何一个集合中的两个元素。



如果把系统的状态看作一个空间中的点，则距离就是表示两点之间远近的一个数。要使这个数确实反映出距离的本质，它至少应有下面三个属性：

- 1、任意一点到它自己的距离等于零；两不同点之间的距离大于零；
- 2、从  $x$  到  $y$  的距离与从  $y$  到  $x$  的距离相等；
- 3、由两点之间直线段为最短引申出来的三角不等式成立。



由此, 我们给出距离的定义如下:

定义 1. 设  $S$  是一个非空集合, 如果在  $S \times S$  到  $R^+$  上有一个函数  $d(\cdot, \cdot)$ , 它满足以下条件:

$$(1) \quad d(x, y) \geq 0; \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

我们称  $d$  为  $S$  上的一个距离, 称  $S$  按距离  $d$  构成一个距离空间, 记为  $(S, d)$ 。在不发生混淆的情况下, 简记为  $S$ 。



上面的定义抽取了通常距离概念中最本质的内容，利用这定义不但可以描述通常的距离，而且可以很容易地将这距离概念推广到抽象的距离空间上。距离是衡量集合中两个元素“相差”多少的一个量，这种“相差”含义就是广义的距离。它一般可以根据具体的集合和要讨论的问题来定义，需要指出的是，同一集合上可以定义出几种不同的距离。例如，由平面上的二维点组成的集合  $S$  中，对任意的  $x, y \in S$ ，可定义出至少如下三种距离。



$$\mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2)$$

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$



例 2.1. 实数集  $R$  或复数集  $C$  按距离

$$d(x, y) = |x - y|$$

是距离空间, 这里  $|\cdot|$  表示绝对值。

例 2.2.  $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R\}$ , 对

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

定义距离为

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

则可验证  $d(x, y)$  满足定义 1 的三条性质, 从而  $R^n$  按  
这个距离是距离空间。



例 2.3. 区间  $[a, b]$  上的连续 (实或复值) 函数的全体  $C[a, b]$  形成距离空间, 其中距离取为

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$



如果在本例中定义

$$d^{(1)}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

则这这也是一个距离。





例 2.4. 空间  $S = \{x = (\xi_k) | (\xi_k) \text{ 为无穷数列}\}$ ,  
任意  $x = (\xi_k), y = (\eta_k)$ , 定义

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \quad (1)$$

则  $S$  按此距离构成一个距离空间。



证明: 因为  $\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \leq 1$ , 且级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$  收敛, 所以(1)

式的右端是收敛的, 从而  $d(x, y)$  总是有意义的, 它显然满足定义 1 中的前两条性质, 今往证它满足三角不等式。

因为函数  $f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$  是  $[0, +\infty)$  上的单调

增加函数, 所以对  $0 \leq t_1 \leq t_2$  有  $\frac{t_1}{1+t_1} \leq \frac{t_2}{1+t_2}$

再从  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , 所以 (取  $t_1 = |x + y|, t_2 = |x| + |y|$ )

$$x = (\xi_k), y = (\eta_k),$$

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\frac{|x+y|}{1+|x+y|} &\leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned}$$

从而对  $z = (\zeta_k)$  有

$$\begin{aligned}\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|} &= \frac{|(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)|}{1+|(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)|} \\ &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1+|\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1+|\zeta_k - \eta_k|}\end{aligned}$$

由此即知  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ 。

因此，本例结论正确。

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|}$$



## 2.1.2 极限

微积分中的极限描述的是一组变元的变化趋势，其本质是通过“充分靠近”某个固定量引入的，而体现“靠近”的描述正是距离的意思。因此，可以在距离空间中引入极限概念。

**定义 2-1 :** 设  $(S, d)$  是一个距离空间， $x_n \in S$  ( $n = 1, 2, \dots$ )， $x \in S$ ，如果当  $n \rightarrow \infty$  时，点列  $\{x_n\}$  满足  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ ，则称  $\{x_n\}$  按距离  $d$  收敛于  $x$ ，记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ，或  $x_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ )，此时  $x$  也称为点列  $\{x_n\}$  的极限， $\{x_n\}$  称为收敛点列。



从定义可知，距离空间的极限是通过数列  $d(x_n, x)$  的极限引入的，因此，距离空间的收敛点列  $\{x_n\}$  具有微积分中收敛数列的相应结论，例如在微积分中有 C a u c h y 数列收敛的结论，因此在距离空间中也有 C a u c h y 点列收敛的结论，这里数列中的有关概念推广到距离空间要参照定义作相应变动

如果距离空间  $(S, d)$  中的每一个 C a u c h y 点列都收敛于  $S$  中的一点，则  $(S, d)$  称为完备的。

$n$  维向量空间  $R^n$  在欧氏距离的定义下构成的  $n$  维欧氏空间是完备的。这个空间中点列的收敛等价于每个分量的收敛。



## 2.2 压缩映射

**定义 2.4** 设  $X$  和  $Y$  是两个集合，如果存在一个法则  $F$ ，使对任何一个元素  $x \in X$ ，都存在惟一一个元素  $y \in Y$  与之对应，则  $F$  称为集合  $X$  到集合  $Y$  的一个映射，简记为  $F: X \rightarrow Y$ 。元素  $y$  称为元素  $x$  在映射  $F$  下的像，记为  $y = F(x)$ ； $x$  称为  $y$  在  $F$  下的原像；而  $X$  称为映射  $F$  的定义域； $Y$  称为  $F$  的值域。当  $X = Y$  时， $F$  称为集合  $X$  到自身的一个映射；此时，也称  $F$  是集合  $X$  上的一个变换。



**例 2.5** 设  $X$  为定义在  $R$  上的所有连续可微函数构成的集合, 在  $X$  上定义

$$Dx(t) = x'(t), \quad x(t) \in X$$

则  $D$  是  $X$  到  $C(-\infty, +\infty)$  ( $R$  上的连续函数) 的一个映射. 通常称  $D$  为微分算子.

**例 2.6** 设  $x \in R^3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 定义

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

这里,  $f_i(x_1, x_2, x_3) (i = 1, 2)$  是三元函数. 则  $F$  是  $R^3$  到  $R^2$  的一个映射.



**定义 2.5** 设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $G: X \rightarrow X$

是集合  $X$  上的一个映射. 如果存在常数  $0 \leq L < 1$ , 使得

$$d(G(x), G(y)) \leq Ld(x, y) \quad (2.1.7)$$

则称  $G$  为集合  $X$  上的一个压缩映射.

**定义 2.6** 设  $(X, d)$  是一个度量空间,  $g: X \rightarrow X$

是集合  $X$  上的一个映射. 若点  $p \in X$  满足  $p = g(p)$ , 则  $p$

称为映射  $g$  的一个不动点. 点列  $p_{n+1} = g(p_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$

称为不动点迭代法,  $g(x)$  称为迭代映射函数.





**定理** 设  $(X, d)$  是一个完备的度量空间,  $g: X \rightarrow X$  是集合  $X$  上的一个压缩映射, 则  $g$  有唯一的不动点.

**证明:** 在  $X$  中任取一点  $x_0$ , 从  $x_0$  开始作一迭代程序: 令

$$x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), \dots$$

这样就有

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (L^{n+p-1} + L^{n+p-2} + \dots + L^n) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{L^n - L^{n+p}}{1-L} d(x_1, x_0) < \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$



由于  $0 \leq L < 1$ ，所以  $\{x_n\}$  是  $X$  中的 Cauchy 序列，所以有极限。在

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

两边求极限即知  $\{x_n\}$  收敛到  $x = g(x)$  的根。

再证极限的唯一性。若有两个极限  $x^*$  和  $x^{**}$ ，则

$$d(x^*, x^{**}) = d(g(x^*), g(x^{**})) \leq Ld(x^*, x^{**})$$

但  $0 \leq L < 1$ ，欲使上式成立，必须  $d(x^*, x^{**}) = 0$ ，即

$x^* = x^{**}$ 。证毕。



**注意:** 利用压缩映射  $G$  可在  $X$  中构造一个点列:

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), k = 0, 1, \dots, x^{(0)} \in X$$

$G$  的映内性与压缩性将保证点列在  $X$  中收敛于  $G$  的不动点. 不动点迭代法在方程求根与非线性方程组求解中有重要应用, 关于此问题, 我们在第 3、4、5 章将详细讨论.



## 2.3 内积

**定义 2.7** 设  $X$  为一个非空集合,  $P$  是一个数域, 在  $X$  中规定两种运算:

(1) 加法, 任取  $x, y \in X$ , 都存在一个确定的元素,  $z = x + y \in X$ ;

(2) 数乘, 任取  $x \in X, k \in P$ , 都有一个确定的元素  $kx \in X$ .

若加法满足下述 (1) — (4) 规则, 数乘满足 (5) — (8) 规则:

(1)  $x + y = y + x$ ,

(2)  $(x + y) + z = x + (y + z), z \in X$ ,

(3)  $X$  中有零元素  $0$ , 使任取  $x \in X$ , 都有  $x + 0 = x$ ,

(4) 任取  $x \in X$ , 存在一个负元素  $-x \in X$ , 使  $x + (-x) = 0$ ,

(5) 数域  $P$  中有单位元  $1$ , 使  $1 \cdot x = x$ ,

(6)  $k(lx) = (kl)x, k, l \in P$ ,

(7)  $k(x + y) = kx + ky, k \in P$ ,

(8)  $(k + l)x = kx + lx, k, l \in P$ ,

则  $X$  称为数域  $P$  上的线性空间.



**例** 元素属于数域  $R$  的  $m \times n$  矩阵，按矩阵的加法和矩阵与数的数量乘法，构成数域  $R$  上的一个线性空间，用  $R^{m \times n}$  表示.

**例** 全体实函数，按函数的加法和数与函数的数量乘法，构成一个实数域上的线性空间.

**例** 定义在闭区间  $[a, b]$  上的连续实函数的全体对于连续实函数的加法和实数与连续实函数的乘法来说构成实数域  $R$  上一个线性空间, 常用  $C[a, b]$  来表示.

向量组的线性无关、线性相关等概念，请参见高等代数教材。



**定义 2.9** 设  $X$  是实数域  $R$  上的线性空间, 如果任取  $x, y \in X$ , 都对应着一个实数  $(x, y)$  满足条件:

(1) 对称性  $(x, y) = (y, x)$ ,

(2) 齐次可加性

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \quad \alpha, \beta \in R, \quad z \in X,$$

(3) 正定性  $(x, x) \geq 0$ , 且  $(x, x) = 0$  当且仅当  $x = 0$ ,

则称  $(x, y)$  是  $X$  中的内积. 称定义了内积的线性空间为内积空间 (或欧几里得空间).

关于内积空间的性质、正交的概念与性质、Cauchy-Schwarz 不等式等内容请参看高等代数教材。



## 2.4、范数

**定义 2.13** 设  $X$  是数域  $R$  上的线性空间, 如果定义在  $X$  上的实值函数  $f(x)$  满足下列条件:

(1)  $f(x) \geq 0$ , 且  $f(x) = 0$  当且仅当  $x = 0$ ,  $x \in X$ ; (正定性)

(2)  $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$ ,  $x \in X$ ,  $\lambda \in R$ ; (齐次性)

(3)  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ ,  $x, y \in X$ ; (三角不等式)

则  $f(x)$  称为  $x$  的范数. 常用  $\| \cdot \|$  表示, 即  $f(x) = \|x\|$ . 如果一个线性空间  $X$  定义了范数  $\| \cdot \|$ , 则称  $X$  是赋范线性空间, 简记为  $(X, \| \cdot \|)$ .

注意范数与距离的区别, 范数是定义在线性空间上的一元函数, 而距离是定义在集合上的二元函数, 且对定义的集合没有特殊要求.

一个赋范线性空间总是度量空间. 事实上, 设  $X$  是赋范线性空间, 对于任意  $x, y \in X$ , 令

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (2.3.1)$$

则可验证式 (2.3.1) 是定义在  $X$  上的距离, 称为在  $X$  上由范数  $\| \cdot \|$  确定的距离.



如果一个线性空间  $L$  定义了范数  $\| \cdot \|$ ，则称  $L$  是**赋范线性空间**，简记为  $(L, \| \cdot \|)$

从定义可知，范数是以集合为定义域的实函数，它与距离的区别在于范数是集合上的一元函数，而且集合必须是线性空间；距离是集合上的二元函数，对集合没有特殊要求。

**如赋范线性空间和距离空间的关系：**

**利用范数可以定义距离。**事实上，只要令

$$d(x, y) = \|x - y\|。$$

则可验证它是一个距离。





# 几个基本概念及性质

## 1. 向量范数:

$R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_i \in R\}$  按向量加法与数乘构成线性空间, 对

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

可定义范数为

$$\|x\| = d(x, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$



## 2. 矩阵范数:

设  $A$  是  $n \times n$  矩阵, 定义

$$\|A\| = \max_{\|x\| > 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

泛函分析中已证得

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$



## 三种常用的向量范数:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

例：设  $\mathbf{x} = (1, -4, 0, 2)^T$  求它的向量范数

设  $A$  是  $n \times n$  矩阵, 则有

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

## 三种常用的矩阵范数:

设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{kj}| \quad \text{列范数}$$
$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \quad \text{行范数}$$
$$\|A\|_f = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{kj}|^2}$$
$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda} \quad \lambda \text{ 是 } A^T A \text{ 最大特征值.}$$

例：设 A，求它的矩阵范数



# 矩阵范数的性质：

如果  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ， $f(A) = \|A\|$  有以下性质

(1)  $\|A\| \geq 0$ ， $\|A\| = 0$  当且仅当  $A = \mathbf{O}$ ；（正定性）

(2)  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ ， $\lambda \in \mathbf{R}$ ；（齐次性）

(3)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ， $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ；（三角不等式）

(4)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

