有限元及其弱解形式

Abstract: 介绍变分法及其相应的弱解表达式

Keywords: 弱解、变分法

1 Introduction

弦的平衡问题：

设一根长度为l的弦，两端分别固定在定点$A(0,0), B(l,0)$, 若没有外力的作用，它平衡在x轴上，若有一个连续的负荷$f(x)$ 作用在弦上，则弦变形后也可以达到平衡状态。

假设力平衡时的位移为$u(x)$,则u 满足微分方程

$$-Tu_{xx} = f(x), x \in (0, l) \tag{1.1}$$

和边值条件

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{1.2}$$

这里T 是弦的张力。

最小位能原理和变分法

一个物体在静态平衡时具有最小的位能。这个原理在力学和物理学中有着极其重要的应用。

假设弦变形前的能量为

$$W_1 = \int_0^l T dx \tag{1.3}$$

而弦变形后的能量,若假设u_{xx} 很小，或者这样理解，变形很小，则有下列的近似

$$W_2 = \int_0^l T ds = \int_0^l T(1 + u_x^2)^{\frac{1}{2}} dx \approx \int_0^l T(1 + \frac{1}{2}u_x^2) dx \tag{1.4}$$

则弦的应变能（内能）和外力做功分别为：

$$W_S = W_2 - W_1 \approx \int_0^l \frac{1}{2}u_x^2 T dx, W_\Psi = \int_0^l f u dx \tag{1.5}$$

根据最小位能原理，弦的平衡问题可以表述为变分问题

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2 T dx-\int_0^l f u dx \Rightarrow \min \tag{1.6}$$

条件

$$\forall u\in M:\{u\in C^2[0,l]|u(0)=u(l)=0\} \tag{1.7}$$

这里M 称为可供选择的函数类.也就是说，要从这些满足条件的所有函数u中，找到一个最小的。这样就定义了一个从函数集合到实数的映射，因为这时的定义域是函数，则称之为泛函。我们把求解泛函的数值问题，称为变分问题，求解变分问题的方法称为变分法。

不妨把以上的变分问题记作$J(u)=\frac{1}{2}a(u,u)-F(u)\Rightarrow \min$

这个问题可以和数学分析上的极值有类似的地方。函数是定义在实数上，值域是数的集合。要想求函数的极值，一般情况下计算函数的导数，对自变量求导，计算可得驻点，一般情况下驻点就是所求的极值点。而对于泛函而言，定义域是一个函数集，那么如何来计算这种情况下所对应的极值？

假设$u=u^*+\lambda v(x)\in M$,这里u^*是上式的极小值，$\lambda v(x)$是扰动函数，是任意的满足一定条件的一个函数$v(x)\in M_0:\{v\in C^2[0,l]|v(0)=v(l)=0\}$，$\lambda$ 是实数，这样原来的计算函数的极值问题，就转化成含有参数λ，当λ取值为零时，恰好对应的就是极值的数学问题。

$$\varphi(\lambda)=J(u^*+\lambda v)\Rightarrow \min \tag{1.8}$$

则上述问题就变成了计算$\varphi'(0)=0$

这里$v(x)$称为试探函数，试探函数是任意的，但是必须满足$u^*+\lambda v\in M$,这样也就是说试探函数在固定边值处的函数值等于零。例如：若

$$\forall u\in M:\{u\in C^2[a,b]|u(a)=\alpha,u(b)=\beta\} \tag{1.9}$$

则

$$v(x)\in M_0:\{v\in C^2[a,b]|v(a)=v(b)=0\} \tag{1.10}$$

对上述转化后的问题求极值，

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)&=J(u^*+\lambda v)\\&=\frac{1}{2}\int_0^l (u_x^*+\lambda v_x)^2 T dx-\int_0^l f(u^*+\lambda v)dx\end{aligned} \tag{1.11}$$

对上式求导数可得：

$$\varphi'(\lambda)|_{\lambda=0}=\int_0^l T u_x^* v_x dx-\int_0^l f v dx=0 \tag{1.12}$$

根据上式1.12可以计算出u^*, 则u^*是变分问题的解，把上式(1.12)称为变分方程。类似于变分问题：可以把变分方程写成

$$a(u,v)=F(v) \tag{1.13}$$

这里$a(u,v)$是一个二次泛函，而$F(v)$为线性泛函。

二次泛函具有如下性质：

$$a(u_1+u_2,v)=a(u_1,v)+a(u_2,v),a(u,v)=a(v,u) \tag{1.14}$$

把该式进行分部积分可以得到如下表达式：

$$\begin{aligned}
&\int_0^l Tu_x^* v_x dx-\int_0^l fvdx\\
&=\int_0^l Tu_x^* dv-\int_0^l fvdx\\
&=Tu_x^* v|_0^l-\int_0^l (Tu_{xx}^*+f)vdx=0
\end{aligned} \tag{1.15}$$

根据v的任意性，则上述表达式可以表示为：$-Tu_{xx}=f(x),x\in(0,l)$.该表达式恰好是我们根据力学原理得到的微分表达式。

这样就引出了两个问题，一是计算原来的变分问题，可以通过引入参数λ,通过对参数λ进行求导，计算原变分问题的极值。即求变分方程的解。二是对变分方程进行分部积分，可以得到一个微分方程表达式，该式的解亦是我们要求的变分方程的解。

而要将微分方程转化为变分方程非常容易，只需要将微分方程两端乘以相应的试探函数并积分，即可以得到变分方程（虚功原理）。

从以上计算可以看出，变分问题的解的条件只需要其一阶导数解可积分，而对于原微分方程来讲则需要具有二阶连续的导数。这样也就说明变分方程对解的光滑性要求较低，而微分方程对解的要求条件较高。而且传统意义上来求解变分问题，人们总是习惯将其转化成欧拉方程来进行计算，这样就提高了对解的光滑性的要求。

1909年，Ritz 在“求解数学物理变分问题的一种新方法”中提出了变分问题的直接解法，找到了计算变分问题的近似解的新思想。后来Galerkin将Ritz方法用于求解虚功方程，使得直接解法的应用范围加以扩大。

选择一组完全的基函数$\varphi_i(x)(i=1,2,....)$ 和一个满足第一边值问题的函数$u_0(x)$,使得$u_0(a)=a,\varphi_i(a)=0,i=1,2,\cdots$ 这样就构成了一个空间

$$H_{0E}^1=span\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\} \tag{1.16}$$

所有的$\varphi_i(x)$在边界上为齐次的条件。则

$$
\begin{aligned}
&v(x)=\sum_{j=1}^{\infty} d_j\varphi_j(x), \forall v(x)\in H_{0E}^1\\
&H_E^1=span\{u_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\}\\
&u(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(x),
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

但是，真正来进行处理的时候，方程不可能为无穷维，则需要对上述问题进行截断处理，则上述方程可以变成：

$$
V_{0E}^1=span\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)\} \tag{1.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_n(x)=\sum_{j=1}^{n} d_j\varphi_j(x), \forall v(x)\in H_{0E}^1\\
&H_E^1=span\{u_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)\}\\
&u_n(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x).
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

那么在变分问题中，原来的方程就可以用以上的线性展开形式来代替：

$$
\begin{aligned}
&J(u_n)=\frac{1}{2}a(u_n,u_n)-F(u_n)\\
&=\frac{1}{2}a(u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x),u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x))-F(u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x))\\
&=\frac{1}{2}a(u_0(x),u_0(x))-F(u_0(x))+a(u_0(x),\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x))+\frac{1}{2}a(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x),\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x))\\
&-F(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x))
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

这时一个含有n个变元$c_1,c_2,\cdots c_n$的二次元函数的极值问题。若想计算以上表达式的极值，可以利用经典的微分学中的关于多元函数求极值的办法得到。

$$
\begin{aligned}
&\frac{J(u_n)}{\partial c_j}=a(u_0(x),\varphi_j(x))+\frac{1}{2}a(\varphi_j(x),\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x))+\frac{1}{2}a(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x),\varphi_j(x))-F(\varphi_j(x))\\
&=a(\varphi_j(x),u_0(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x))-F(\varphi_j(x))=0, j=1,2,\cdots,n
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

这样上述问题可以转化为

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = F(\varphi_j(x)) - a(\varphi_j(x), u_0(x)) \tag{1.22}$$

这样，上式就对应一个方程组，

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_1) & a(\varphi_n,\varphi_1) \\ a(\varphi_1,\varphi_2) & a(\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_2) & a(\varphi_n,\varphi_2) \\ \cdots\cdots & & & & \\ a(\varphi_1,\varphi_n) & a(\varphi_2,\varphi_n) & \cdots & a(\varphi_{n-1},\varphi_n) & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\varphi_1) - a(u_0,\varphi_1) \\ F(\varphi_2) - a(u_0,\varphi_2) \\ \cdots \\ F(\varphi_n) - a(u_0,\varphi_n) \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

(1.22)所对应的这个结果就直接等同于将u_n, v_n直接带入到变分方程后所得到的结果。即

$$a(u_n(x), u_n(x)) = F(v_n(x)) \tag{1.24}$$

可以写成

$$a(u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x), \sum_{j=1}^{n} d_j\varphi_j(x)) = 0 \tag{1.25}$$

根据二次泛函$a(\cdot,\cdot)$ 就决定了上述的方程所对应的矩阵是对称（正定）的，可以得到以上方程的解存在，并且解唯一。这样根据不同的思想得到同样的计算公式。但是只有$a(u,v)$正定对称时，两者才一致。否则只能用Galerkin法而不能用Ritz法。

例：用传统的Ritz-Galerkin方法求解边值问题：

$$\begin{cases} -u'' + u = -x, x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

选择完全满全的满足其次边值条件的基函数

$$\varphi_i(x) = x(1-x)x^{i-1}, i = 1, 2, \cdots \tag{1.27}$$

令

$$u_n(x) = x(1-x)(c_1 + c_2x + \cdots + c_nx^{n-1}) \tag{1.28}$$

令$n = 2$,则$u_1 = c_1x(1-x) + c_2x^2(1-x)$,经计算

$$\begin{cases} -\frac{3}{10}c_1 - \frac{3}{20}c_2 = -\frac{1}{12} \\ -\frac{3}{20}c_1 - \frac{13}{105}c_2 = -\frac{1}{20} \end{cases} \tag{1.29}$$

解得

$$c_1 = \frac{71}{369}, c_2 = \frac{7}{41}.u_2(x) = x(1-x)(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x) \tag{1.30}$$

其精确解为

$$u(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x \tag{1.31}$$

$$\begin{cases} 0 = f_1(x_1, x_2) \\ 0 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{1.32}$$

对应于流体方程，同样类似可以写出其对应的弱解形式，从而可以应用一些力学软件对其进行求解,例如薄膜问题。