第一章 线性规划

第七节 对偶理论——原规划和对偶规划最优解之间的关系

- 弱对偶定理
- 强对偶定理
- 松紧定理

一. 弱对偶定理:

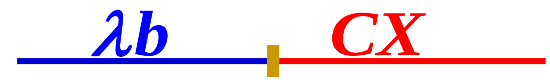
$(P)\quad \min S = CX$

$\qquad AX = b$

$\qquad X \geq 0$

$(D)\quad \max Z = \lambda b$

$\qquad \lambda A \leq C$



定理1-7:

设X 和 λ 分别是(P)和(D)的可行解，则有$CX \geq \lambda b$.

证明:

$\because \lambda A \leq C,\quad X \geq 0 \qquad \therefore \lambda \underbrace{AX}_{b} \leq CX \qquad \therefore \lambda b \leq CX$ ■

推论1:

若 X^0和λ^0分别是(P)和(D)的可行解，且 $CX^0 = \lambda^0 b$,

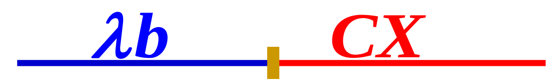
则 X^0和λ^0分别是(P)和(D)的最优解。

弱对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad\qquad (D)\quad \max Z = \lambda b$$

$$AX = b \qquad\qquad \lambda A \le C$$

$$X \ge 0$$



定理1-7：

设X 和 λ 分别是(P)和(D)的可行解，则有$CX \ge \lambda b$.

推论1：

若 X^0和λ^0分别是(P)和(D)的可行解，且 $CX^0 = \lambda^0 b$,

则 X^0和λ^0分别是(P)和(D)的最优解。

证明：

设X 是(P)的任意可行解，由定理1-7知：

$CX \ge \lambda^0 b = CX^0$ 所以 X^0是(P)的最优解。■

第一章 线性规划

第七节 对偶理论——原规划和对偶规划解之间的关系

- 弱对偶定理
- 强对偶定理
- 松紧定理

二. 强对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad\qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad\qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

定理1-8：

(P)有有限的最优解 X^* $\Leftrightarrow$ (D)有有限的最优解λ^*，且相应的目标函数值相等，即 $CX^* = \lambda^* b$。

证明： $\Rightarrow \because X^*$是(P)的最优解，$\therefore$ 可设 X^* 是最优基本可行解。

设对应的最优基为B，

$$C - C_B B^{-1} A \ge 0 \longrightarrow \underbrace{C_B B^{-1}}_{}{}^{\lambda^*} A \le C$$

则$X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\longrightarrow \lambda^* A \le C \quad \lambda^*\text{是}(D)\text{的可行解}$$

$$\because \lambda^* b = C_B B^{-1} \underline{b} = C_B B^{-1} \underline{AX^*} = C_B B^{-1}(B,N)\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix} = (C_B, C_B B^{-1} N)\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

AX^* (B,N)

$$= C_B X_B^* = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix} = CX^*$$

$\therefore \lambda^*$是(D)的最优解。■

强对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \leq C$$

定理1-8：

(P)有有限的最优解 X^* $\Leftrightarrow$ (D)有有限的最优解λ^*，且相应的目标函数值相等，即 $CX^* = \lambda^* b$。

推论3：

若X^*是(P)的最优基本可行解，B是相应的最优基，则单纯形乘子 $\pi = C_B B^{-1}$是(D)的最优解。

二. 强对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

定理1-8：

(P)有有限的最优解 X^* $\Leftrightarrow$ (D)有有限的最优解λ^*，且相应的目标函数值相等，即 $CX^* = \lambda^* b$。

证明： $\Rightarrow$ $\because$ X^*是(P)的最优解，$\therefore$ X^*是最优基本可行解。

设对应的最优基为B，

$$C - C_B B^{-1} A \ge 0 \longrightarrow \underbrace{C_B B^{-1}}_{\lambda^*} A \le C$$

则$X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\longrightarrow \lambda^* A \le C \quad \lambda^*\text{是}(D)\text{的可行解}$$

$$\because \lambda^* b = C_B B^{-1} \underline{b} = C_B B^{-1} \underline{A} X^* = C_B B^{-1}(B, N)\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix} = (C_B, C_B B^{-1} N)\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= C_B X_B^* = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix} = CX^*$$

$\therefore$ λ^*是(D)的最优解。■

强对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \leq C$$

定理1-8：

(P)有有限的最优解 $X^* \Leftrightarrow (D)$有有限的最优解λ^*，且相应的目标函数值相等，即 $CX^* = \lambda^* b$。

推论3：

若X^*是(P)的最优基本可行解，B是相应的最优基，

则单纯形乘子 $\pi = C_B B^{-1}$是(D)的最优解。

推论1：

若(P)和(D)中有一个有可行解，但没有有限的最优解，则另一个问题无可行解。

强对偶定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\quad \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \leq C$$

定理1-8：

(P)有有限的最优解 $X^{*} \Leftrightarrow (D)$有有限的最优解$\lambda^{*}$，且相应的目标函数值相等，即 $CX^{*} = \lambda^{*}b$。

推论1：

若(P)和(D)中有一个有可行解，但没有有限的最优解，则另一个问题无可行解。

证明： 反证法：

设(P)有可行解 X^{0}，但没有有限的最优解，

即$\min CX = -\infty$，则(D)没有可行解。若(D) 有可行解 λ^{0}，

则由定理1-7，$CX \geq \lambda^{0}b \Rightarrow -\infty = \min CX \geq \lambda^{0}b$，矛盾。

所以(D)没有可行解。■

第一章 线性规划

第七节 对偶理论——原规划和对偶规划解之间的关系

- 弱对偶定理
- 强对偶定理
- 松紧定理

三. 松紧定理：

$$(P)\quad \min S = CX \qquad (D)\ \max Z = \lambda b$$
$$AX = b \qquad \lambda A \le C$$
$$X \ge 0$$

定理1-9：

$$C - \lambda^0 A \ge 0$$
$$c_j - \lambda^0 p_j \ge 0$$

设 X^0, λ^0分别是(P)和(D)的可行解，

则 X^0, λ^0分别是(P)和(D)的最优解 $\rightleftarrows$ $(C-\lambda^0 A)X^0 = 0$

$$\sum_{j=1}^{n}(c_j - \lambda^0 p_j)x_j^0 = 0 \longrightarrow (c_j - \lambda^0 p_j)x_j^0 = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

证明：

⇒ 设 X^0, λ^0分别是(P)和(D)的最优解，由定理1-8有

$$CX^0 = \lambda^0 b = \lambda^0 AX^0 \longrightarrow (C-\lambda^0 A)X^0 = 0$$

⇐ $$(C-\lambda^0 A)X^0 = 0 \longrightarrow CX^0 = \lambda^0 AX^0 = \lambda^0 b$$

由定理1-7的推论1， X^0, λ^0分别是(P)和(D)的最优解。■

第一章 线性规划

第七节 对偶理论——原规划和对偶规划解之间的关系

- 弱对偶定理
- 强对偶定理
- 松紧定理