两种算法比较：

$$(P)\ \min S = CX \qquad AX = b \qquad X \geq 0$$

$$(D)\ \max Z = \lambda b \qquad \lambda A \leq C$$

单纯形法

$-C_B B^{-1} b$	$C - C_B B^{-1} A \geq 0$
$B^{-1} b \geq 0$	$B^{-1} A$

$y_{0q} < 0 \rightarrow x_q$进基 $\rightarrow$ 1) $-\infty$ 2) $\min S$

$S^1 = y_{00} + y_{0q}\theta < y_{00} = S^0 \downarrow$

$\theta =$ 最小非负比值 $\rightarrow x_p$离基

$\rightarrow B^{-1} b \geq 0$

对偶单纯形法

$\bar{\lambda} = \lambda - \varepsilon u^r$,

$-C_B B^{-1} b$	$C - C_B B^{-1} A \geq 0$
$B^{-1} b \geq 0$	$B^{-1} A$

$\lambda = C_B B^{-1}$

$y_{r0} < 0 \rightarrow x_{Jr}$离基 $\rightarrow$ 1) $+\infty$ 2) $\max Z$

$\bar{\lambda} b = \lambda b - \varepsilon y_{r0} > \lambda b \uparrow$

$\varepsilon =$ 最小非负比值 $\rightarrow x_k$进基

$\rightarrow C - C_B B^{-1} A \geq 0$

第一章 线性规划

第九节 线性规划问题的灵敏度分析

$$(P)\ \min S = CX \qquad \text{已知} C, A, b, \text{求}\ X^*$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

灵敏度分析解决以下两个问题：

1) c_j, a_{ij}, b_i 在什么范围内变化时，X^*不变。

2) 如果 X^* 发生变化，如何用最简便的方法求出新的最优解。

第一章 线性规划

第九节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数C的灵敏度分析
- 约束右端项b的灵敏度分析
- 约束矩阵A的灵敏度分析

例1-20

某工厂计划生产三种产品 A_1, A_2, A_3， 三种产品每件的收益分别是2,3,1，资源总数为：人工为1，材料为3。每件产品所需人工和材料数如右表，试决定最优的生产方案使该厂收益最大。

	A_1	A_2	A_3	资源
人工	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1
材料	$1/3$	$4/3$	$7/3$	3
收益	2	3	1	

解： 设 A_1, A_2, A_3 的产量分别为 x_1, x_2, x_3

$$\max S = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \le 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

标准形 $\longrightarrow$

$$\max S = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

复习

$$(P_1)\ \min S = CX \quad AX = b \quad X \ge 0$$

$$(P_2)\ \max S = CX \quad AX = b \quad X \ge 0$$

(P_1)的最优性判别定理：

对于基B，若$B^{-1}b \ge 0$, $C - C_B B^{-1} A \ge 0$ 则$X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$是$(P_1)$的最优解。

若有某个 $y_{0j} = c_j - c_B B^{-1} p_j < 0$,

x_j进基做基变量可使目标值↓（非退化）

(P_2)的最优性判别定理：

对于基B，若$B^{-1}b \ge 0$, $C - C_B B^{-1} A \le 0$ 则$X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$是$(P_2)$的最优解。

若有某个 $y_{0j} = c_j - c_B B^{-1} p_j > 0$,

x_j进基做基变量可使目标值↑.（非退化）

例1-20 $\max S = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j = c_j$

$C_B = (0, 0)$

$y_{00} = C_B B^{-1} b$

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0
x_5	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1
	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

A

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
初始表 x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−6	0	1	−1	−6	0
x_1	3	1	1	1	3	0
x_5	2	0	1	2	−1	1
	−8	0	0	−3	−5	−1
最优表 x_1	1	1	0	−1	4	−1
x_2	2	0	1	2	−1	1

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$? ✗

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$? ✗

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$? ✓

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	2	3	1	0	0	
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	
	B^{-1}	b	B		p_3	E		
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1	
	$-C_B B^{-1} b$	-8	0	0	-3	-5	-1	$c_j - C_B B^{-1} p_j$
最优表	x_1	1	1	0	-1	4	-1	
	x_2	2	0	1	2	-1	1	
		$B^{-1}b$	E		$B^{-1}p_3$	B^{-1}		

最优解：$X^* = (1,2,0,\cancel{0,0})^T, S^* = 8$

最优基：$B = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

第一章 线性规划

第九节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数*C*的灵敏度分析
- 约束右端项*b*的灵敏度分析
- 约束矩阵*A*的灵敏度分析

一、C的灵敏度分析

(1) c_j 是非基变量 x_j 的系数；

(2) c_{J_r}是第r 个方程的基变量x_{J_r} 的系数；

一、C的灵敏度分析

(1) c_j 是非基变量 x_j 的系数；

设 $c_j \to c_j + \Delta c_j$, 其他参数(C中其他分量, A, b)都不变。

改变量Δc_j只影响 x_j 的检验数 y_{0j}：

			x_1	x_2	x_3	x_j	x_4	x_5
		0	2	3	1	$c_j \to$	$c_j+\Delta c_j$	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	p_j	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	$c_j+\Delta c_j-C_B B^{-1}p_j \le 0$		1
$-C_B B^{-1}b$		-8	0	0	-3	$c_j-C_B B^{-1}p_j \le 0$	-5	-1
最优表	x_1	1	1	0	-1	$B^{-1}p_j$	4	-1
	x_2	2	0	1	2		-1	1
		$B^{-1}b$						

最优解：$X^*=(1,2,0,\cancel{0,0})^T,\ S^*=8$

最优基：$B=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

一、 C的灵敏度分析

(1) c_j 是非基变量 x_j 的系数；

设 $c_j \to c_j + \Delta c_j$，其他参数都不变。

改变量 Δc_j 只影响 x_j 的检验数 y_{0j}：

设最优表中 x_j 的原检验数 $y_{0j} = c_j - c_B B^{-1} p_j \le 0$

新检验数 $y'_{0j} = (c_j + \Delta c_j) - c_B B^{-1} p_j$

$= y_{0j} + \Delta c_j$ 仍 ≤ 0

则最优解不变。

续例

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		−8	0	0	−3	−5	−1
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1
	x_2	2	0	1	2	−1	1

$y'_{0j} = y_{0j} + \Delta c_j$

x_3 的系数 $c_3 = 1$ 有改变量 Δc_3

1) 当 $y'_{03} = y_{03} + \Delta c_3 = -3 + \Delta c_3 \le 0$ 时，即 $\Delta c_3 \le 3$,

即 A_3 的单位收益 $\bar{c}_3 = c_3 + \Delta c_3 \le 1 + 3 = 4$ 时，原最优方案不变。

$X^* = (1,2,0,\cancel{0,0})^T$，生产 A_3 是不经济的。

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1 → **6**	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		−8	0	0	−3 → **2**	−5	−1
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1
	x_2	2	0	1	2	−1	1

x_3的系数 $c_3=1$有改变量Δc_3 1)当$\Delta c_3 \le 3$时，X^*不变

2) 当 $\Delta c_3 > 3$, 即A_3的单位收益 $\bar{c}_3 = c_3 + \Delta c_3 > 4$, 如增加到

$6 = c_3 + \Delta c_3 \longrightarrow \Delta c_3 = 5$时，$y_{03}' = y_{03} + \Delta c_3 = -3+5 = 2 > 0$,

X^*不再最优。x_3进基，即生产A_3可以提高收益。

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1 → **6**	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		−8	0	0	2	−5	−1
	x_1	1	1	0	−1	4	−1
	x_2	2	0	1	2	−1	1
		−10	0	−1	0	[illegible]	[illegible]
最优表	x_1	2	1	$1/2$	0	[illegible]	[illegible]
	x_3	1	0	$1/2$	1	[illegible]	[illegible]

$$X^* = (2,0,1)^T$$

$$S^* = 10$$

一、C的灵敏度分析

(1) c_j 是非基变量x_j 的系数；

(2) c_{J_r}是第r 个方程的基变量x_{J_r} 的系数；

一、C的灵敏度分析

(2) c_{J_r}是第r 个方程的基变量x_{J_r}的系数

当c_{J_r}有改变量Δc_{J_r}时，则C_B发生变化：$C_B \to C_B + \Delta C_B$

$$\begin{array}{l} \qquad\ \ x_{J_1},\cdots,x_{J_r},\cdots,x_{J_m} \\ C_B = (c_{J_1},\cdots,c_{J_r},\cdots,c_{J_m}) \end{array}$$

$$C_B + \Delta C_B = (c_{J_1},\cdots,c_{J_r} + \Delta c_{J_r},\cdots,c_{J_m})$$

所有非基变量检验数 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j$ 都随之变化，为使原最优解不变，所有非基变量的新检验数

$$y'_{0j} = c_j - (C_B + \Delta C_B) B^{-1} p_j \le 0$$

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		−8	0	0	−3	−5	−1
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1
	x_2	2	0	1	2	−1	1

B^{-1} b B p_3 p_4 p_5 B^{-1}

$B^{-1}b$ E $B^{-1}p_3$ $B^{-1}p_4$ $B^{-1}p_5$

$$y'_{0j}=c_j-(C_B+\Delta C_B)B^{-1}p_j$$

$$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\le 0$$

$$X^*=(1,2,0,0,0)^T$$

$$y'_{03}=1-(2+\Delta c_1,3)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\Delta c_1-3\le 0\rightarrow \Delta c_1\le 3$$

$$y'_{04}=0-(2+\Delta c_1,3)\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=-4\Delta c_1-5\le 0\rightarrow \Delta c_1\ge -5/4$$

$$y'_{05}=0-(2+\Delta c_1,3)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\Delta c_1-1\le 0\rightarrow \Delta c_1\le 1$$

$$-5/4\le \Delta c_1\le 1$$

线性规划1-9

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		−8	0	0	−3	−5	−1
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1
	x_2	2	0	1	2	−1	1

$y'_{0j} = c_j - (C_B + \Delta C_B) B^{-1} p_j$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$

$X^* = (1, 2, 0, 0, 0)^T$

$-5/4 \le \Delta c_1 \le 1$

$\bar{c}_1 = c_1 + \Delta c_1$ 在[2-5/4, 2+1]=[3/4, 3]内变化时，原X^*不变，

第一章 线性规划

第九节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数*C*的灵敏度分析
- 约束右端项*b*的灵敏度分析
- 约束矩阵*A*的灵敏度分析

二、b的灵敏度分析

当第r个方程右端项 $b_r \to \bar{b}_r$，即 $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \to \bar{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

而其他参数不变时，问 b_r 在什么范围内变化时，最优基B不变？

分析： 因为b的变化不影响检验数 $y_{0j}=c_j-C_B B^{-1}p_j$，

所以当 $b\to\bar{b}$ 时，在最优表中 $B^{-1}b \to B^{-1}\bar{b}$，

$\geqslant 0$ 若仍 $\geqslant 0$

则最优基B不变。

但最优解和最优值都发生变化：

$$X^*=\begin{pmatrix} B^{-1}\bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S^*=C_B B^{-1}\bar{b}$$

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
			0	0	−3	−5	−1
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1
		2	0	1	2	−1	1

$\bar{b} \Leftarrow b$

B

$-C_B B^{-1}\bar{b} \Leftarrow -C_B B^{-1} b$

$B^{-1}\bar{b} \Leftarrow B^{-1} b$

B^{-1}

$B^{-1} p_j$

$X^* = (1,2,0)^T$

$S^* = 8$

最优基

$B = (p_1, p_2)$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 时，为使最优基B不变，

$$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\bar{b}_1 - 3 \\ -\bar{b}_1 + 3 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow \frac{3}{4} \leq \bar{b}_1 \leq 3$$

初始表

$\bar{b} \Leftarrow b$ $\quad B$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
$-C_BB^{-1}\bar{b} \Leftarrow -C_BB^{-1}b$		0	0	-3	-5	-1
x_1	1	1	0	-1	4	-1
	2	0	1	2	-1	1

最优表

$B^{-1}\bar{b} \Leftarrow B^{-1}b$ $\quad B^{-1}$

$X^* = (1,2,0)^T$

$S^* = 8$

最优基

$B = (p_1, p_2)$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 时，为使最优基B不变，$\dfrac{3}{4} \le \bar{b}_1 \le 3$

但 X^*, S^*变化为： $X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}\bar{b} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad S^* = C_BB^{-1}\bar{b}$

$$\frac{3}{4} \le \bar{b}_1 \le 3$$

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	-23	0	0	-3	-5	-1
x_1	13	1	0	-1	4	-1
x_2	-1	0	1	2	-1	1

B

B^{-1}

$$B = (p_1, p_2)$$

不是可行基

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ 时，$B^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$S = C_B B^{-1}\bar{b} = (2,3)\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix} = 23$$

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	-23	0	0	-3	-5	-1
x_1	13	1	0	-1	4	-1
x_2	-1	0	1	2	-1	1

B B^{-1}

$$B=(p_1,p_2)$$

不是可行基

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

当 $b=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\rightarrow\bar{b}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ 时，$B^{-1}\bar{b}=\begin{pmatrix}13\\-1\end{pmatrix}$ $\quad S=C_BB^{-1}\bar{b}=23$

但此时所有检验数仍 ≤ 0, 所以B是正则基。

可用对偶单纯形法求新的最优解。

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	-23	0	0	-3	-5	-1
x_1	13	1	0	-1	4	-1
x_2	-1	0	1	2	-1	1

$$\max S = CX \quad AX = b \quad X \geq 0$$

$$\min S = CX \quad AX = b \quad X \geq 0$$

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \,\middle|\, y_{rj} < 0\right\} = \frac{y_{0k}}{y_{rk}} \rightarrow$$ x_k为进基变量

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{y_{0j}}{-y_{rj}} \,\middle|\, y_{rj} < 0\right\} = \frac{y_{0k}}{y_{rk}} \rightarrow$$ x_k 为进基变量

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
初始表 x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−23	0	0	−3	−5	−1
x_1	13	1	0	−1	4	−1
x_2	−1	0	1	2	−1	1
x_1						
x_4						

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−23	0	0	−3	−5	−1
x_1	13	1	0	−1	4	−1
x_2	−1	0	1	2	−1	1
x_1						
x_4	1	0	−1	−2	1	−1

初始表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	−23	0	0	−3	−5	−1
x_1	13	1	0	−1	4	−1
x_2	−1	0	1	2	−1	1
x_1	9	1	4	7	0	3
x_4	1	0	−1	−2	1	−1

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1	0	0
初始表	x_4	4	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		−23	0	0	−3	−5	−1
	x_1	13	1	0	−1	4	−1
	x_2	−1	0	1	2	−1	1
		−18	0	−5	−13	0	−6
最优表	x_1	9	1	4	7	0	3
	x_4	1	0	−1	−2	1	−1

$$X^* = (9,0,0)^T$$

$$S^* = 18$$

第一章 线性规划

第九节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数*C*的灵敏度分析
- 约束右端项*b*的灵敏度分析
- 约束矩阵*A*的灵敏度分析

作业：P96　11（1）（2）（3）（4）（5）（6）

作业：P84　3（1）（2）（3）（4）（5）（6）

		求min的问题	求max的问题
最优性判别		$B^{-1}b \geq 0$ $C - C_B B^{-1} A \geq 0$	$B^{-1}b \geq 0$ $C - C_B B^{-1} A \leq 0$
单纯形法	进基	$y_{0q} < 0, \quad x_q$ 进基	$y_{0q} > 0, \quad x_q$ 进基
	离基	$\min\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0\} = \frac{y_{p0}}{y_{pq}}$	$\min\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0\} = \frac{y_{p0}}{y_{pq}}$
对偶单纯形法	离基	$y_{r0} < 0, \quad x_{J_r}$ 离基	$y_{r0} < 0, \quad x_{J_r}$ 离基
	进基	$\min\{\frac{y_{0j}}{-y_{rj}} \mid y_{rj} < 0\} = \frac{y_{0k}}{-y_{rk}}$	$\min\{\frac{y_{0j}}{y_{rj}} \mid y_{rj} < 0\} = \frac{y_{0k}}{y_{rk}}$

小结

一、C的灵敏度分析 ——改变C中一个元素

(1) c_j 是非基变量 x_j 的系数

设最优表中 x_j的原检验数 $y_{0j} = c_j - c_B B^{-1} p_j \le 0$

若新检验数 $y'_{0j} = y_{0j} + \Delta c_j$仍 ≤ 0 则最优解不变。

否则， x_j 进基，用单纯形法找新的最优解。

(2) c_{J_r}是第r 个方程的基变量x_{J_r}的系数

为使原最优解不变，需所有非基变量的新检验数

$y'_{0j} = c_j - (C_B + \Delta C_B) B^{-1} p_j \le 0$ （不等式组）

否则，用单纯形法找新的最优解。

二、*b*的灵敏度分析

当 $b \to \overline{b}$ 时，在最优表中 $B^{-1}b \to B^{-1}\overline{b}$,

≥0　若仍≥0

则最优基B不变。但最优解和最优值都发生变化，

新最优解和最优值为 $X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}\overline{b} \\ 0 \end{pmatrix}$,　$S^* = C_B B^{-1}\overline{b}$

若 $B^{-1}\overline{b} \not\geq 0$,　用对偶单纯形法找新的最优解。

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		0	2	3	1	0	0	
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1	
		−8	0	0	−3	−5	−1	$-C_B B^{-1}$
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1	
	x_2	2	0	1	2	−1	1	
					$B^{-1}p_3$	$B^{-1}p_4$	$B^{-1}p_5$	

要会从最优表中找所需信息！！

第一章 线性规划

第九节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数*C*的灵敏度分析
- 约束右端项*b*的灵敏度分析
- 约束矩阵*A*的灵敏度分析

约束矩阵A的灵敏度分析

- 某个元素a_{ij} 有改变量Δa_{ij}
- 增加新的一列(即增加一个新的变量)
- 增加新的一行(即增加一个新的约束)

三、A的灵敏度分析

(1) 某个元素 a_{ij} 有改变量 Δa_{ij}，且它是非基列 p_j 的分量：

$$p_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \rightarrow \bar{p}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} + \Delta a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

		x_1	x_2	x_3	x_j	x_4	x_5
	0	2	3	1	c_j	0	0
初始表 x_4	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$p_j \to p_j+\Delta p_j$		0
x_5	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	[illegible]			1
$-C_B B^{-1}b$	-8	0	0	-3	$c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$	-5	-1
最优表 x_1	1	1	0	-1	$B^{-1}p_j \to B^{-1}(p_j+\Delta p_j)$	4	-1
x_2	2	0	1	2		-1	1

B

$B^{-1}b$

$$c_j - C_B B^{-1}(p_j+\Delta p_j) \le 0$$

最优解：$X^* = (1,2,0,\cancel{0,0})^T, S^* = 8$

最优基：$B = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

三、A的灵敏度分析

(1) 某个元素 a_{ij} 有改变量 Δa_{ij}，且它是非基列 p_j 的分量：

$$p_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \to \bar{p}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij}+\Delta a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

非基变量 x_j 的原检验数 $y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\le 0$

非基变量 x_j 的新检验数 $y'_{0j}=c_j-C_BB^{-1}\bar{p}_j\le 0$

则原最优解不变。

若 $y'_{0j}=c_j-C_BB^{-1}\bar{p}_j>0$，则原最优解不再是最优解。

让 x_j 进基进行换基运算求出新的最优解。

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	2	3	1	0	0
初始表 x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$		
初始表 x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
	-8	0	0	-3	-5	-1
最优表 x_1	1	1	0	-1	4	-1
最优表 x_2	2	0	1	2	-1	1

B　　B^{-1}

$X^* = (1,2,0)^T$

$S^* = 8$

$y'_{0j} = c_j - C_B B^{-1} \bar{p}_j \le 0$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$

最优基

$p_1, p_2)$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{13} = 1/3$有改变量Δa_{13}，求Δa_{13}的范围使原X^*不变。

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \to \bar{p}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 + \Delta a_{13} \\ 7/3 \end{pmatrix} \qquad \lambda = C_B B^{-1} = (2,3)\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (5 \quad 1)$$

$$y'_{03} = c_3 - C_B B^{-1} \bar{p}_3 = 1 - (5,1)\begin{pmatrix} 1/3 + \Delta a_{13} \\ 7/3 \end{pmatrix} = -3 - 5\Delta a_{13} \le 0 \to \Delta a_{13} \ge -3/5$$

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$		
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		-8	0	0	-3	-5	-1
最优表	x_1	1	1	0	-1	4	-1
	x_2	2	0	1	2	-1	1

B　　B^{-1}

$X^* = (1,2,0)^T$

$S^* = 8$

最优基

(p_1, p_2)

$y'_{0j} = c_j - C_B B^{-1} \bar{p}_j \le 0$

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \le 0$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{13} = 1/3$ 有改变量 Δa_{13}，求 Δa_{13} 的范围使原 X^* 不变。

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \to \bar{p}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 + \Delta a_{13} \\ 7/3 \end{pmatrix} \quad y'_{03} = c_3 - C_B B^{-1} \bar{p}_3 = -3 - 5\Delta a_{13} \le 0 \quad \Delta a_{13} \ge -3/5$$

即 $\bar{a}_{13} = a_{13} + \Delta a_{13} \ge \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = -\frac{4}{15}$，原最优解不变。

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	2	3	1	0	0
初始表	x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0
	x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1
		−8	0	0	−3	−5	−1
最优表	x_1	1	1	0	−1	4	−1
	x_2	2	0	1	2	−1	1

B $\quad$ B^{-1}

$X^* = (1,2,0)^T$

$S^* = 8$

最优基

$B = (p_1, p_2)$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

注意：不去讨论基变量 x_{J_j} 的系数列 p_{J_j} 的某个元素 a_{iJ_j} 的改变对 X^* 的影响。比如：p_1 中的1/3改变，

$$p_1\text{变} \rightarrow B\text{变} \rightarrow B^{-1}\text{变} \rightarrow \begin{cases} y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j\text{变} \\ B^{-1}b\text{变，} C_B B^{-1} b\text{变} \end{cases}$$

约束矩阵的A灵敏度分析

- 某个元素a_{ij} 有改变量Δa_{ij}
- 增加新的一列(即增加一个新的变量)
- 增加新的一行(即增加一个新的约束)

三、A的灵敏度分析

(2) 增加新的一列(即增加一个新的变量)

设增加变量 x_{n+1} ,对应的成本系数为c_{n+1}， 系数列 p_{n+1}

即在单纯形表中新增加一列：

$$c_{n+1}$$
$$x_{n+1}$$
$$p_{n+1}$$

则在最优表中 x_{n+1} 的检验数为：$y_{0n+1} = c_{n+1} - C_B B^{-1} p_{n+1}$

若 $y_{0n+1} \le 0$, 则原最优解不变；

若 $y_{0n+1} > 0$, 则原最优解不再最优。x_{n+1} 进基，求新的最优解。

例1-20

$$\max S = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

	A_1	A_2	A_3	资源	x_6 A_4
人工	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
材料	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{1}{3}$
收益	2	3	1		c_6

问单位收益c_6为多少时，才有利于A_4的投产？

即c_6为何值时，$y_{06} > 0$？

分析：

$y_{06} > 0$ → x_6进基 → $x_6 > 0$ → A_4投产

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	0	2	3	1	0	0	c_6	$S^* = 8$
初始表 x_4	1	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1	0	$1/3$	
初始表 x_5	3	$1/3$	$4/3$	$7/3$	0	1	$1/3$	
	-8	0	0	-3	-5	-1	$c_6 - C_B B^{-1} p_6$	
最优表 x_1	1	1	0	-1	4	-1	$B^{-1} p_6$	
最优表 x_2	2	0	1	2	-1	1		

B (初始表中 x_1, x_2 列)　　B^{-1} (最优表中 x_4, x_5 列)

$$y_{06} = c_6 - \underline{C_B B^{-1}} p_6 = c_6 - (5,1)\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \qquad X^* = (1,2,0,0)^T$$

$$= c_6 - 2 \begin{cases} \le 0 \rightarrow \text{当} c_6 \le 2\text{时}, \ x_6 = 0, \text{即生产} A_4 \text{不利} \\ > 0 \rightarrow \text{当} c_6 > 2\text{时}, \ x_6 > 0, \text{即生产} A_4 \text{有利} \end{cases}$$

(进基)

约束矩阵的A灵敏度分析

- 某个元素a_{ij} 有改变量Δa_{ij}
- 增加新的一列(即增加一个新的变量)
- 增加新的一行(即增加一个新的约束)

三、A的灵敏度分析

$$\min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

(3) 增加新的一行(即增加一个新的约束)

设增加新的约束为：$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \cdots + a_{m+1,n}x_n \leq b_{m+1}$

a) 如果原最优解满足新约束，则原最优解仍是最优的。

b) 如果原最优解不满足新约束，则原最优解不再最优。

为了寻求新的最优解，在新约束中加松弛变量 x_{n+1}，

$$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \cdots + a_{m+1,n}x_n + x_{n+1} = b_{m+1}$$

在原最优表中增加新的一行(对应新约束)，然后用对偶单纯形法求新的最优解。

例1-20

增加一个新约束：

工时	1	2	1	b_3
	A_1	A_2	A_3	资源
人工	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1
材料	$1/3$	$4/3$	$7/3$	3
收益	2	3	1	

生产三种产品每件所需检验工时分别为1，2，1，且可供检验的时间为b_3

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le b_3$$

求 b_3 的范围使原最优解不变。

分析：

a) 将原最优解 $X^* = (1,2,0)^T$ 代入新约束：

$$5 = 1 + 2\times 2 + 0 \le b_3$$

即当 $b_3 \ge 5$ 时，原最优解不变。

例1-20

增加一个新约束：

工时	1	2	1	b_3
	A_1	A_2	A_3	资源
人工	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1
材料	$1/3$	$4/3$	$7/3$	3
收益	2	3	1	

生产三种产品每件所需检验工时分别为1，2，1，且可供检验的时间为b_3

$$x_1+2x_2+x_3\le b_3$$

求 b_3 的范围使原最优解不变。

b) 当检验工时 $b_3<5$ 时，如 $b_3=4$，此时新约束为 $x_1+2x_2+x_3\le 4$. 加入该约束后，原最优解已不可行。为了寻求新的最优解，在新约束中引入松弛变量 x_6，即 $x_1+2x_2+x_3+x_6=4$ 加到原最优表中的第三行进行迭代。

原最优表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-8	0	0	-3	-5	-1	0
x_1	1	1	0	-1	4	-1	0
x_2	2	0	1	2	-1	1	0
x_6	4	1	2	1	0	0	1

$r_3 - r_1$

$r_3 - 2r_2$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 4$

原最优表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	−8	0	0	−3	−5	−1	0
x_1	1	1	0	−1	4	−1	0
x_2	2	0	1	2	−1	1	0
x_6	4	1	2	1	0	0	1
	−8	0	0	−3	−5	−1	0
x_1	1	1	0	−1	4	−1	0
x_2	2	0	1	2	−1	1	0
x_6	−1	0	0	−2	−2	−1	1

$r_3 - r_1$

$r_3 - 2r_2$

$$\varepsilon = \min\{\frac{-3}{-2}, \frac{-5}{-2}, \frac{-1}{-1}\} = 1$$

x_5为进基变量

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
原最优表		−8	0	0	−3	−5	−1	0
	x_1	1	1	0	−1	4	−1	0
	x_2	2	0	1	2	−1	1	0
	x_6	4	1	2	1	0	0	1
		−8	0	0	−3	−5	−1	0
	x_1	1	1	0	−1	4	−1	0
	x_2	2	0	1	2	−1	1	0
	x_6	−1	0	0	−2	−2	−1	1
最优表		−7	0	0	−1	−3	0	−1
	x_1	2	1	0	1	6	0	−1
	x_2	1	0	1	0	−3	0	1
	x_5	1	0	0	2	2	1	−1

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{-3}{-2}, \frac{-5}{-2}, \frac{-1}{-1}\right\} = 1$$

x_5为进基变量

$$X^* = (2,1,0)^T$$

$$S^* = 7$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4$$

约束矩阵的*A*灵敏度分析

- 某个元素a_{ij} 有改变量Δa_{ij}
- 增加新的一列(既增加一个新的变量)
- 增加新的一行(既增加一个新的约束)

第一章 线性规划

第九节 线性规划问题的灵敏度分析

- 目标函数成本系数*C*的灵敏度分析
- 约束右端项*b*的灵敏度分析
- 约束矩阵*A*的灵敏度分析

作业：P96 11（1）（2）（3）（4）（5）（6）

作业：P84 3（1）（2）（3）（4）（5）（6）