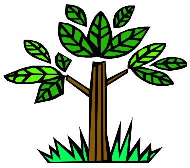
2. 数值计算的理论基础

- 内积
- 范数



内积

1 线性空间

若在一个非空集合上规定了线性运算（加法和数乘运算），并且线性运算还满足一定的运算法则，就称非空集合为线性空间。

线性空间是为了解决实际问题而引入的，即把实际问题看作线性空间，进而通过研究线性空间来解决实际问题.

定义 1 设 V是一个非空集合，R为实数域．如果对于任意两个元素$\alpha,\beta \in V$，总有唯一的一个元素$\gamma \in V$与之对应，称为α与β的和，记作

$$\gamma = \alpha + \beta$$

若对于任一数$\lambda \in R$与任一元素$\alpha \in V$，总有唯一的一个元素$\delta \in V$与之对应，称为λ与α的积，记作

$$\delta = \lambda\alpha$$

如果上述的两种运算满足以下八条运算规律，那么V就称为数域R上的线性空间.

设$\alpha,\beta,\gamma \in V;\lambda,\mu \in R$

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) 在V中存在零元素 0,对任何$\alpha \in V$,都有

$$\alpha+0=\alpha;$$

(4)对任何$\alpha \in V$,都有α的负元素$\beta \in V$,使

$$\alpha+\beta=0;$$

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$;

(7) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$;

(8) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$.

线性空间举例

例 1 实数域上的全体 $m\times n$矩阵，对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间，记作 $R^{m\times n}$.

$$\because A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n},\quad \lambda A_{m\times n}=D_{m\times n},\lambda \in R$$

上述的两种运算满足八条运算规律．

$\therefore R^{m\times n}$是一个线性空间.

特别，全体n 维实向量的集合R^n按n 维向量的加法和数乘运算构成实数域R上的线性空间。

例2 闭区间［*a, b*］上全体连续函数构成函数集合 $C[a,b]$．在其上规定线性运算

$$f+g=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$f,g\in C[a,b]$$
$$\lambda f=(\lambda f)(x)=\lambda f(x),\ f\in C[a,b],\lambda\in R.$$

$C[a,b]$ 构成线性空间，称为连续函数空间.

特别, 次数不超过n的实系数多项式的全体按多项式的加法与数与多项式的乘法，构成R上的线性空间。记作$P[x]_n$

$$(a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0)+(b_n x^n+\cdots+b_1x+b_0)$$
$$=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in P[x]_n$$
$$\lambda(a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0)$$
$$=(\lambda a_n)x^n+\cdots+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)\in P[x]_n$$

$P[x]_n$对线性运算封闭。

R^n、$R^{n\times n}$及$C[a,b]$, $P[x]_n$ 是数值计算中用得最多的线性空间。

2、线性相关、线性无关 P35

定义2 设函数组 $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n$ 定义在［*a, b*］上，若存在一组不全为零的常数$k_i(i=1,2,\cdots,n)$使

$$\sum_{i=1}^n k_i\phi_i(x)\equiv 0 \qquad a\le x\le b$$

则称函数组 $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n$ 在［*a, b*］上线性相关，否则，称它们在［*a, b*］上线性无关。

1) $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 在（-∞，∞）上线性无关。

2) $1,\cos^2x,\sin^2x$ 在（-∞，∞）上线性相关。

定义3 若元素组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关，

$$S=span\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\left\{x=\sum_{i=1}^n a_ix_i,a_i\in R\right\}$$

称S是由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 张成的n维线性空间， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为S的一组基。

例如在R^n中，$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$线性无关，

且$\forall\alpha\in R^n$，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$,均有$x=\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i,a_i\in R.$

因此ε_1，$\varepsilon_2,\cdots$，ε_n是R^n的一组基。

例3 在线性空间$P[x]_4$中, $p_1=1,p_2=x,p_3=x^2$, $p_4=x^3,p_5=x^4$就是它的一个基.

任一不超过4次的多项式

$$p=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

可表示为

$$p=a_0p_1+a_1p_2+a_2p_3+a_3p_4+a_4p_5$$

2. 内积 P30

定义4 设L是一个线性空间，若任取 $x,y\in L$，都对应着一个实数(x,y)满足下述条件：

(1) 对称性 $(x,y)=(y,x)$;

(2) 线性与分配律

$$(ax+by,z)=a(x,z)+b(y,z);a,b\in R$$

(3) 正定性 $(x,x)\ge 0$,且$(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$

则称(x,y)是L中的内积。

称定义了内积的线性空间为内积空间。

例　在R^n中，令

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

在$C[a, b]$中，令

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

可验证它们分别是R^n与$C[a, b]$中的内积。

定理4　设L是一个内积空间，对任何$x,y\in L$都有

证明　$$(x, y)^2 \le (x, x)(y, y) \qquad (1)$$

$\forall \alpha \in R$, 考察内积

$$(\alpha x+y, \alpha x+y) = \alpha(x, \alpha x+y)+(y, \alpha x+y)$$
$$= \alpha(\alpha x+y, x)+(\alpha x+y, y)$$
$$= \alpha^2(x,x)+2\alpha(x,y)+(y,y) \ge 0 \qquad \alpha\text{的二次式}$$

由一元二次方程根的判　　别式，有

$$4(x,y)^2-4(x,x)(y,y)\le 0 \Leftrightarrow (x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$$

（1）称为Cauchy-Schwarz不等式

$$(x, y)^2 \le (x, x)(y, y)$$

例4　在R^n中，令　$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

在$C[a, b]$中，令　$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

$$(x, y)^2 \le (x, x)(y, y)$$

Cauchy-Schwarz不等式具有重要应用

1）定义元素的夹角　　当$x, y \in L, x\ne 0, y \ne 0$时，

$$0 \le \frac{|(x, y)|}{\sqrt{(x, x)}\cdot\sqrt{(y, y)}} \le 1$$

设x与y的夹角为$(x\hat{,} y)$，则

$$\cos(x\hat{,} y) = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\cdot\sqrt{(y, y)}},$$

$$0 \le (x\hat{,} y) \le \pi$$

当 $<\alpha, \beta> = \frac{\pi}{2}$ 时，称元素 α与β 正交（垂直）.

当 $\alpha \ne 0, \beta \ne 0$ 时，

$$<\alpha, \beta> = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\langle\alpha, \beta\rangle = 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = 0$$

定义5　若 $(\alpha, \beta) = 0$，则称元素 α与β 正交.

●L中的零元与L中任何元素都正交。
●内积空间L中，任何一组非零的且彼此正交的元素组称为 L的一个<u>正交系</u>。

例如在R^n中，

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\text{是}R^n\text{的一组正交基。}$$

三角函数系　$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$

是C [-π，π] 上的一个<u>正交系</u>。

范数 P37

定义6 设L是一个线性空间，如果定义在L上的实值函数P(x)满足下列条件:
(1) $P(x)\geq 0$且 $P(x)=0$ 时$x=0$，$x\in L$
(2) $P(\lambda x)=|\lambda|P(x)$，$x\in L$，$\lambda$是实数
(3) $P(x+y)\leq P(x)+P(y)$，$x, y\in L$
则P(x)称为x的范数，范数常用$\|\cdot\|_p$或$\|\cdot\|$表示，即，$P(x)=\|x\|$。
如果一个线性空间L定义了范数$\|\cdot\|$，则称L是赋范线性空间，简记为$(L, \|\cdot\|)$。

一个内积空间总是赋范线性空间.

由于$(x,x)\geq 0$，可在内积空间定义范数 $\|x\|=(x, x)^{1/2}$ 称为由内积导出的范数.

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

在R^n中，根据内积 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, x, y \in R^n$

可导出的范数: $\|x\| = (x, x)^{1/2} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$

称为向量x的2-范数，记作$\|x\|_2$.

由内积 $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$$\|f\|_2 = (f(x), f(x))^{1/2} = [\int_a^b f^2(x)dx]^{1/2}$$

称为函数 f(x) 的2-范数.

利用范数的定义, Cauchy-Schwarz 不等式可表为

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

元素的夹角可表为

$$\cos(x \hat{,} y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

范数的本质是描述线性空间中元素的“长度”或“大小”，在同一个线性空间中，可以定义不同的范数。

利用范数的定义: $\|x\|=(x,x)^{1/2}$, Cauchy-Schwarz不等式

$$(x,y)^2\leq(x,x)(y,y)$$

可表为

$$|(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|$$

元素的夹角 $\cos(x \hat{,} y) = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}} \quad 0 \leq (x \hat{,} y) \leq \pi$

可表为 $\cos(x \hat{,} y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad x \neq 0, y \neq 0.$

范数的本质是描述线性空间中元素的“长度”或“大小”，在同一个线性空间中，可以定义不同的范数。

几种常见范数

1）、函数范数 P38
在连续函数空间$C[a, b]$中，常用的范数为

$$\|f\|_\infty = \max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\|f\|_2 = [\int_a^b f^2(x)dx]^{1/2}$$

2）向量范数 三种常用的向量范数: P39

设 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n}|x_k|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}$$

以上范数可以统一表示为

$$\|x\|_p$$

称为p范数。$(p = 1, 2, \infty)$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$ 验证：当 $p(x)=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$ 时，以下3条成立

(1) $p(x)=\sum_{k=1}^{n}|x_k|\ge 0,\quad p(x)=0 \Leftrightarrow x_k=0, k=1,\cdots,n \Leftrightarrow x=0.$

(2) $p(\lambda x)=\sum_{k=1}^{n}|\lambda x_k| = |\lambda|\sum_{k=1}^{n}|x_k| = |\lambda|\,p(x)$

(3) $p(x+y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k| \le \sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)=p(x)+p(y)$

(1) P(x)≥0 且 P(x)=0 时x=0，$x\in L$
(2) P(λx)=｜λ｜P(x)，$x\in L$，λ是实数
(3) P(x+y)≤P(x)+P(y)，$x, y\in L$

例：设 x=(1，-4，0，2)^T 求它的向量范数.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4}|x_i| = 1+4+2=7$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}x_i^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le 4}|x_i| = \max\{1,4,0,2\} = 4$$

性质 P39

（1）X, Y∈R^n，｜‖X‖−‖Y‖｜≤ ‖X−Y‖

(1) 证明：∵ ‖X‖=‖X−Y+Y‖≤ ‖X−Y‖+‖Y‖

∴ ‖X‖− ‖Y‖ ≤ ‖X−Y‖ ①

又∵ ‖Y‖=‖Y−X+X‖≤ ‖X−Y‖+‖X‖

∴ ‖X‖− ‖Y‖≥− ‖X−Y‖②

综合① ②，得 ｜‖X‖−‖Y‖｜≤ ‖X−Y‖

（2）设‖X‖$_a$ ‖X‖$_b$是R^n上的任意两种向量范数，则存在正数M_{ab}与m_{ab}，使对一切X ∈R^n，有

m_{ab}‖X‖$_a$ ≤ ‖X‖$_b$ ≤M_{ab} ‖X‖$_a$

性质（2）称为向量范数的等价性质。

例 证明：$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

证明：

$$\because \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| \ge \max_{1\le i\le n}|x_i| = \|x\|_\infty \quad (1)$$

又 $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| \le n\max_{1\le i\le n}|x_i| = n\|x\|_\infty \quad (2)$$

综合（1）（2）不等式得证。

$$x' y = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i \le (\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)^{1/2} = \|x\|_2 \bullet \|y\|_2$$

例 证明：$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$

证明：$\because (\sum_{i=1}^{n}x_i y_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n}x_i^2)(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)$

$$\therefore (\sum_{i=1}^{n}|x_i|)^2 = (\sum_{i=1}^{n}(|x_i|\cdot 1))^2 \le (\sum_{i=1}^{n}x_i^2)n$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}|x_i| \le \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2} = \sqrt{n}\|x\|_2 \quad (1)$$

又 $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \le (\sum_{i=1}^{n}|x_i|)^2, \therefore \|x\|_2 \le \|x\|_1 \quad (2)$

综合（1）（2）不等式得证。

向量序列

若按照某一法则，对每个 $k\in N^+$，都对应一个确定的向量$x^{(k)}$，这些向量 $x^{(k)}$ 按下标k从小到大排列：$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}, \cdots$称为向量序列，简记为$\{x^{(k)}\}$.

例如

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 2^k \\ k \\ k+1 \end{pmatrix},\ x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \cdots$$

30

定义 **向量序列的极限** P40

$d(x,y)=\|x-y\|,\ x,y\in L$

d称为在Rⁿ中，由范数‖ • ‖定义的距离。

按上述距离的定义，在 Rⁿ中，引入向量序列极限的概念。

定义7 :若 $\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|=0$

则称向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛于向量x^*，记作$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$.

定理2 :$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}x_j^{(k)}=x_j^*\quad j=1,2,\ldots,n$

$x_j^{(k)}$及x_j^*分别是向量$x^{(k)}$及x^*的第j个分量

证明：$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|_\infty=0$

$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}|x_i^{(k)}-x_i^*|=0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}(x_i^{(k)}-x_i^*)=0\quad \forall i$

$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*\quad \forall i$ 证毕。

例 设

$$x^{(k)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{k}\\ 2^{1/k}\\ \frac{k}{k+1}\end{pmatrix},\qquad \lim_{k\to\infty}x^{(k)}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

定理2 :$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}x_j^{(k)}=x_j^*\quad j=1,2,\ldots,n$

$x_j^{(k)}$及x_j^*分别是向量$x^{(k)}$及x^*的第j个分量

P41

3）矩阵范数

定义 8 设A是n 阶矩阵，$x\in R^n$，称

$$\|A\|_p=\max_{\substack{x\ne0\\x\in R^n}}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}\quad 或\quad \|A\|_p=\max_{\substack{\|x\|=1\\x\in R^n}}\|Ax\|_p$$

为矩阵A的(算子）范数。p=1,2,∞

可以证明上式满足范数定义，即有

（1）$\|A\|\ge0$，$\|A\|=0$，当且仅当 $A=0$.

（2）对任意实数λ，$\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|$.

（3）对任意 $B\in R^{n\times n}$，$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$

$$\|A\|_p=\max_{\substack{x\ne0\\x\in R^n}}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$ 算子范数具有如下性质：

(1) $\|Ax\|_p\le\|A\|_p\cdot\|x\|_p$ 矩阵范数与向量范数的相容性

$$\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}\le\|A\|_p \Leftrightarrow \|Ax\|_p\le\|A\|_p\cdot\|x\|_p,\quad x\ne0$$

(2) $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$

$$\|AB\|=\max_{\substack{x\ne0\\x\in R^n}}\frac{\|ABx\|}{\|x\|}\le\max_{\substack{x\ne0\\x\in R^n}}\frac{\|A\|\cdot\|Bx\|}{\|x\|}=\|A\|\cdot\|B\|$$

计算 $\|A\|_p=\max_{\substack{x\ne0\\x\in R^n}}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$，$p=1,2,\infty$. P41-42

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{k=1}^n|a_{kj}|$ 列范数

$\|A\|_\infty=\max_{1\le j\le n}\sum_{k=1}^n|a_{jk}|$ 行范数

$\|A\|_2=\sqrt{\lambda}$ 谱范数

λ是A^TA最大特征值.

向量2范数的推广：$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{kj}|^2}$ F 范数

算子范数$\|A\|_p$（P=1, 2, ∞）与F范数是四种常用的矩阵范数。

由矩阵算子范数导出如下三种范数：P41-42

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\cdots\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \vdots\\ a_{n1}\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$

$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{k=1}^n|a_{kj}|$ 列范数

$\|A\|_\infty=\max_{1\le j\le n}\sum_{k=1}^n|a_{jk}|$ 行范数

$\|A\|_2=\sqrt{\lambda}$ 谱范数

λ是A^TA最大特征值.

向量2范数的推广：$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{kj}|^2}$ F 范数-P35

算子范数$\|A\|_p$（P=1, 2, ∞）与F范数是四种常用的矩阵范数。

例 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1\\ 4 & 10 & -1\end{bmatrix}$ 求 $\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_2,\|A\|_F$

解 $\|A\|_1$=max{7,17,2}=17

$\|A\|_\infty$=max{3,8,15}=15

$\|A\|_F=(1+4+4+25+2+16+100)^{1/2}=12.33$

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}21 & 52 & -6\\ 52 & 129 & -15\\ -6 & -15 & 2\end{bmatrix}\quad \lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)=151.71$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}=12.32$$

矩阵序列极限 P43

设 $\{A^{(k)}\}$是一个矩阵序列，A^*是一个矩阵

定义9 ：若 $\underset{k\to\infty}{Lim}\|A^{(k)}-A^*\|=0$

则称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$收敛于矩阵A^*，记作$\underset{k\to\infty}{Lim}A^{(k)}=A^*$

其中$\|\cdot\|$是$R^{n\times n}$上任何一种矩阵范数。

定理3 $\underset{k\to\infty}{Lim}A^{(k)}=A^*\Leftrightarrow \underset{k\to\infty}{Lim}a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^*\quad i,j=1,2,\ldots,n$

$a_{ij}^{(k)}$及a_{ij}^*分别是矩阵$A^{(k)}$及A^*的第i行、第j列的元素。

例题 设 $A^{(k)}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{k} & 1+\frac{1}{k} & 0\\ 0 & 2^{1/k} & -2^{-k}\\ 0 & \frac{k}{k+1} & 1\end{bmatrix}$，求$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}$.

解：由定理3，

$$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

谱半径 P44

定义10 设 n 阶方阵A的特征值为$\lambda_i(i=1,2,3\ldots\ldots n)$,

则称 $\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$

为矩阵A的谱半径.

例 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，求$\rho(A)$.

解

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)[((1-\lambda)^2+1]$$

A的特征值为： $\lambda_1=-1,\quad \lambda_{2,3}=1\pm i.$

$$\rho(A)=\max_{1\le i\le 3}|\lambda_i|=\sqrt{2}$$

定理4 矩阵范数与谱半径之间的关系为: $\rho(A)\le\|A\|$。

证明：设 λ_i 和x_i是矩阵A的任一特征值和对应的特征向量，

则有$Ax_i=\lambda_i x_i$ 。 两边取范数，有

$$|\lambda_i|\,\cancel{\|x_i\|}=\|\lambda_i x_i\|=\|Ax_i\|\le\|A\|\,\cancel{\|x_i\|}$$

$\because x_i\neq0$, $\therefore \|x_i\|>0$

不等式两边消去$\|x_i\|$， 得 $|\lambda_i|\le\|A\|$，$i=1,2,\ldots n$

从而 $\rho(A)=\max|\lambda_i|\le\|A\|$

在Matlab中，norm用来求矩阵或向量范数，norm是内部函数，其使用方式如下：

对于矩阵A: norm(A)与norm(A,2)一样，表示$\|A\|_2$； P44

norm(A,1)表示 $\|A\|_1$；

norm(A, inf)表示 $\|A\|_\infty$；

norm(A, 'fro')表示 $\|A\|_F$.

对于向量 x: norm(x)与norm(x,2)一样，表示$\|x\|_2$；

norm(x,1)表示 $\|x\|_1$； norm(x, inf)表示 $\|x\|_\infty$.

小结

- 内积
- 范数

作业

习题 2
P45:
4, 7, 9, 11,12,14,15