第一章 线性规划

- 第一节 线性规划的数学模型
- 第三节 图解法及几何理论

第一章 线性规划

第一节 线性规划的数学模型

- 线性规划问题举例
- 线性规划问题的数学模型
- 线性规划问题的标准形
- 将一般的线性规划模型化为标准形

例1:（营养问题） 某饲料厂利用n种原料生产混合饲料，已知每种原料的单价为c_j(元/公斤)，又知第j种原料含第i种营养成分的数量为a_{ij}(克/公斤)。要求每公斤混合饲料中含第i种营养成分的数量至少是a_i(克)。

问： 应如何选用各种原料即确定各种原料的数量，使每公斤混合饲料的成本最低？

原料 / 营养成分	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	a_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	a_m
	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

例1：**成本最低**

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

解： 设每公斤混合饲料应取原料 B_j 的数量为 x_j 公斤

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge a_m \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

	x_1	x_2		x_n	
	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	a_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	a_m
	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

例2:（下料问题）某车间有一批长度为500厘米的条材，要截成长度分别为85厘米和70厘米的两种毛坯，其中长85厘米的毛坯需要3000根，长70厘米的毛坯需要5000根。

问：应如何下料，才能使所用的原料数量最少？

解:

下料方式:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
85厘米	5	4	3	2	1	0	3000
70厘米	1	2	3	4	5	7	5000
余料长度	5	20	35	50	65	10	

例2：设用 B_j 种下料方式的条材根数为 x_j 根

解：

原料数量最少

	B_1 (x_1)	B_2 (x_2)	B_3 (x_3)	B_4 (x_4)	B_5 (x_5)	B_6 (x_6)	
85厘米	5	4	3	2	1	0	3000
70厘米	1	2	3	4	5	7	5000
余料长度	5	20	35	50	65	10	

$$\min S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 0x_6 = 3000 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 7x_6 = 5000 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

例3：（连续投资问题）

某部门在今后5年内(每年年初)考虑给下列项目投资，已知：

投资 年初 项目	1	2	3	4	5	投资要求
A	√	√	√	√		次年末回收本利115%
B			√			第5年末回收本利125%，最大投资额不超过40万元
C		√				第5年末回收本利140%，最大投资额不超过30万元
D	√	√	√	√	√	购买国债，当年归还，并加利息6%

该部门现有资金100万元，问它应如何确定这些项目每年的投资额，使到第5年末拥有的资金本利总额为最大？

投资项目 \ 年初	1	2	3	4	5	投资要求
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}		次年末回收本利115%
B			x_{3B}			第5年末回收本利125%，最大投资额不超过40万元
C		x_{2C}				第5年末回收本利140%，最大投资额不超过30万元
D	x_{1D}	x_{2D}	x_{3D}	x_{4D}	x_{5D}	购买国债，当年归还，并加利息6%

(1) 确定变量：$x_{iA}, x_{iB}, x_{iC}, x_{iD}$ 分别表示第 i 年初项目A,B,C,D的投资额

(2) 投资额应等于资金额：

第一年：该部门年初有资金100万元，所以有

$$x_{1A} + x_{1D} = 100\text{（万元）}$$

投资 年初 / 项目	1	2	3	4	5	投资要求
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}		次年末回收本利115%
B			x_{3B}			第5年末回收本利125%，最大投资额不超过40万元
C		x_{2C}				第5年末回收本利140%，最大投资额不超过30万元
D	x_{1D}	x_{2D}	x_{3D}	x_{4D}	x_{5D}	购买国债，当年归还，并加利息6%

(2)投资额应等于资金额：

第一年：该部门年初拥有资金100万元，所以有

$$x_{1A}+x_{1D}=100$$

第二年：该部门年初拥有资金 $x_{1D}(1+6\%)$ ，所以有

$$x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=1.06x_{1D}$$

第三年：该部门年初拥有资金 $x_{1A}(1+15\%)+x_{2D}(1+6\%)$ ，所以有

$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=1.15x_{1A}+1.06x_{2D}$$

投资 年初 项目	1	2	3	4	5	投资要求
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}		次年末回收本利115%
B			x_{3B}			第5年末回收本利125%，最大投资额不超过40万元
C		x_{2C}				第5年末回收本利140%，最大投资额不超过30万元
D	x_{1D}	x_{2D}	x_{3D}	x_{4D}	x_{5D}	购买国债，当年归还，并加利息6%

(2) 投资额应等于资金额：

第三年：该部门年初拥有资金 $x_{1A}(1+15\%)+x_{2D}(1+6\%)$，所以有

$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=1.15x_{1A}+1.06x_{2D}$$

第四年：该部门年初拥有资金 $x_{2A}(1+15\%)+x_{3D}(1+6\%)$，所以有

$$x_{4A}+x_{4D}=1.15x_{2A}+1.06x_{3D}$$

第五年：该部门年初拥有资金 $x_{3A}(1+15\%)+x_{4D}(1+6\%)$，所以有

$$x_{5D}=1.15x_{3A}+1.06x_{4D}$$

此外，$x_{3B}\le 40,\ x_{2C}\le 30$

投资项目 \ 年初	1	2	3	4	5	投资要求
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}		次年末回收本利115%
B			x_{3B}			第5年末回收本利125%，最大投资额不超过40万元
C		x_{2C}				第5年末回收本利140%，最大投资额不超过30万元
D	x_{1D}	x_{2D}	x_{3D}	x_{4D}	x_{5D}	购买国债，当年归还，并加利息6%

(3) 目标函数：

要求第5年末该部门拥有的资金额达到最大，因此

$$\max Z = 1.15x_{4A} + 1.40x_{2C} + 1.25x_{3B} + 1.06x_{5D}$$

(4) 数学模型：

$$\max Z = 1.15x_{4A} + 1.40x_{2C} + 1.25x_{3B} + 1.06x_{5D}$$

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1D} = 100 \\ x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} = 1.06x_{1D} \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} = 1.15x_{1A} + 1.06x_{2D} \\ x_{4A} + x_{4D} = 1.15x_{2A} + 1.06x_{3D} \\ x_{5D} = 1.15x_{3A} + 1.06x_{4D} \\ x_{3B} \le 40,\ x_{2C} \le 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1D} = 100 \\ -1.06x_{1D} + x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} = 0 \\ -1.15x_{1A} - 1.06x_{2D} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} = 0 \\ -1.15x_{2A} - 1.06x_{3D} + x_{4A} + x_{4D} = 0 \\ -1.15x_{3A} - 1.06x_{4D} + x_{5D} = 0 \\ x_{3B} \le 40,\ x_{2C} \le 30 \\ x_{iA}, x_{iB}, x_{iC}, x_{iD} \ge 0,\quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

进一步讨论说明：

对一般的问题，可能没有年初投资当年底获得本息的项目D，通常应考虑投资金额不超过现有金额，则有：

$$\max Z = 1.15x_{4A} + 1.40x_{2C} + 1.25x_{3B} + 1.06x_{5D}$$

$$x_{1A} + x_{1D} \le 100$$

$$x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} \le 100 - x_{1A} - x_{1D} + 1.06x_{1D}$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} \le 100 - x_{1A} + 0.06x_{1D} - x_{2A} - x_{2C} - x_{2D} + 1.15x_{1A} + 1.06x_{2D}$$

……

第一章 线性规划

第一节 线性规划的数学模型

- 线性规划问题举例
- 线性规划问题的数学模型
- 线性规划问题的标准形
- 将一般的线性规划模型化为标准形

二. 线性规划的数学模型：

例1：

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq a_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq a_m \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

例2：

$$\min S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 0x_6 = 3000 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 7x_6 = 5000 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

例3：

$$\max S = 1.15x_{4A} + 1.40x_{2C} + 1.25x_{3B} + 1.06x_{5D}$$

$$\begin{cases} x_{1A} + x_{1D} = 100 \\ -1.06x_{1D} + x_{2A} + x_{2C} + x_{2D} = 0 \\ -1.15x_{1A} - 1.06x_{2D} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3D} = 0 \\ -1.15x_{2A} - 1.06x_{3D} + x_{4A} + x_{4D} = 0 \\ -1.15x_{3A} - 1.06x_{4D} + x_{5D} = 0 \\ x_{3B} \le 40,\ x_{2C} \le 30 \\ x_{iA}, x_{iB}, x_{iC}, x_{iD} \ge 0, \quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

二. 线性规划的数学模型：

(*LP*) ***Linear Programming***

$$\max_{(\min)} S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \Longrightarrow \max_{(\min)} S = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n * b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n * b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n * b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j * b_i \\ i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{array}$$

$$* \Longrightarrow =, \geq, \leq$$

$$(LP)\ \min S=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=CX \qquad C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j * b_i \quad i=1,2,\cdots,m \qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$x_j\ge 0,\ \ j=1,2,\cdots,n$$

可行解： 若 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足所有的约束条件，则称X为可行解。

可行域： (LP)可行解的全体构成的集合称为可行域D。

最优解： 若$X^*\in D$，且对$\forall X\in D$有$CX^*\le CX$，则称X^*为(LP)的最优解。

最优值： $S^*=CX^*$

第一章 线性规划

第一节 线性规划的数学模型

- 线性规划问题举例
- 线性规划问题的数学模型
- 线性规划问题的标准形
- 将一般的线性规划模型化为标准形

三. 线性规划的标准型：

$$\min_{(\max)} S=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j * b_i \quad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \ge 0,\ \ j=1,2,\cdots,n$$

(LP)

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \ge 0,\ \ j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$$\longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \ge 0,\ \ j=1,2,\cdots,n$$

注释： 单纯形法是针对线性规划问题的标准形进行求解的。

第一章 线性规划

第一节 线性规划的数学模型

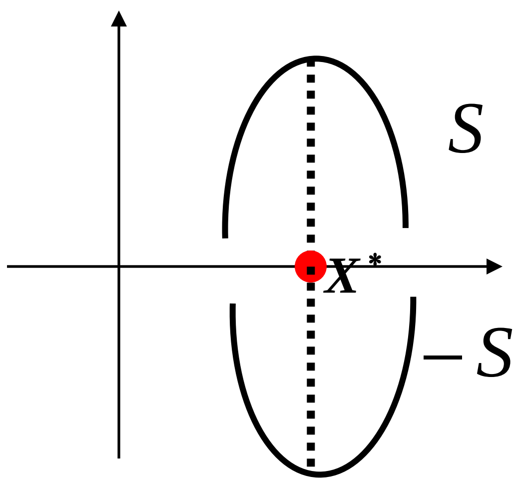
- 线性规划问题举例
- 线性规划问题的数学模型
- 线性规划问题的标准形
- 将一般的线性规划模型化为标准形

四. 将一般的线性规划数学模型化为标准形

例1：

$$\max S = 4x_1 + 3x_2 \longrightarrow \min(-S) = -4x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$



x_3 称为**松弛变量**

x_4 称为**剩余变量**

四. 将一般的线性规划数学模型化为标准形：

例2：

$$\max S = -x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min(-S) = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 \le 5 \\ x_1 - 3x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2\text{为自由变量} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$x_2 = x_3 - x_4$$

$$x_3, x_4 \ge 0$$

$$\downarrow$$

$$\min(-S) = x_1 - 2x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 8x_3 + 8x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 = 4 \\ x_1, x_3, x_4 \ge 0 \\ x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

第一章 线性规划

第一节 线性规划的数学模型

- 线性规划问题举例
- 线性规划问题的数学模型
- 线性规划问题的标准形
- 将一般的线性规划模型化为标准形

第一章 线性规划

- 第一节 线性规划的数学模型
- 第三节 图解法及几何理论

第一章 线性规划

第三节 图解法及几何理论

- 图解法
- 线性规划问题解的几种情况
- 几何理论

一. 图解法：（只适用于二维的问题）

例1：

$$\max S = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$S = 3x_1 + 4x_2$$

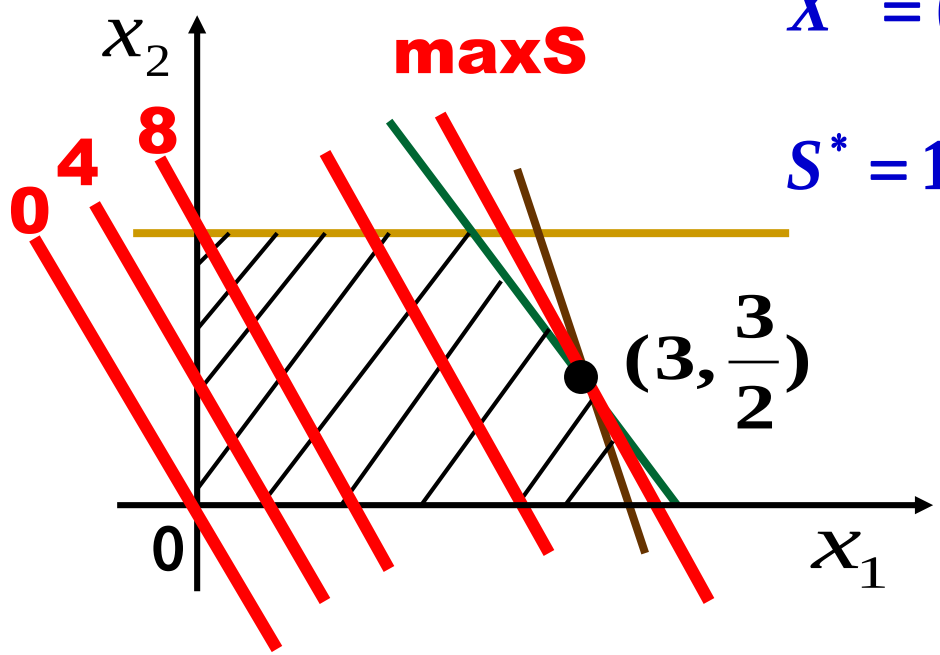
$$\Downarrow$$

$$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{S}{4}$$

1. 画出可行域
2. 画出目标函数等值线
3. 移动等值线求最优解

$$X^* = (3, \frac{3}{2})^T$$

$$S^* = 15$$



二. 线性规划问题解的几种情况：

1. 有唯一的最优解

例2：

$$\max S = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例1：$\max S = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

直线

优解

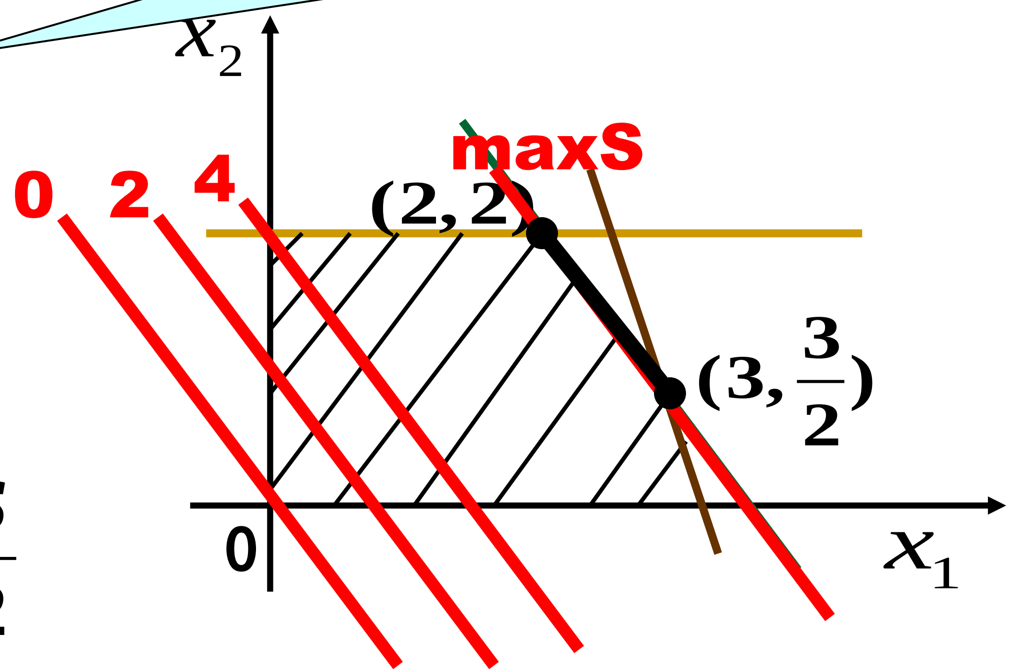
有可行解

$S^* = 6$

$$S = x_1 + 2x_2$$

⇓

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{S}{2}$$



二. 线性规划问题解的几种情况：

1. 有唯一的最优解

2. 有无穷多个最优解

例3：

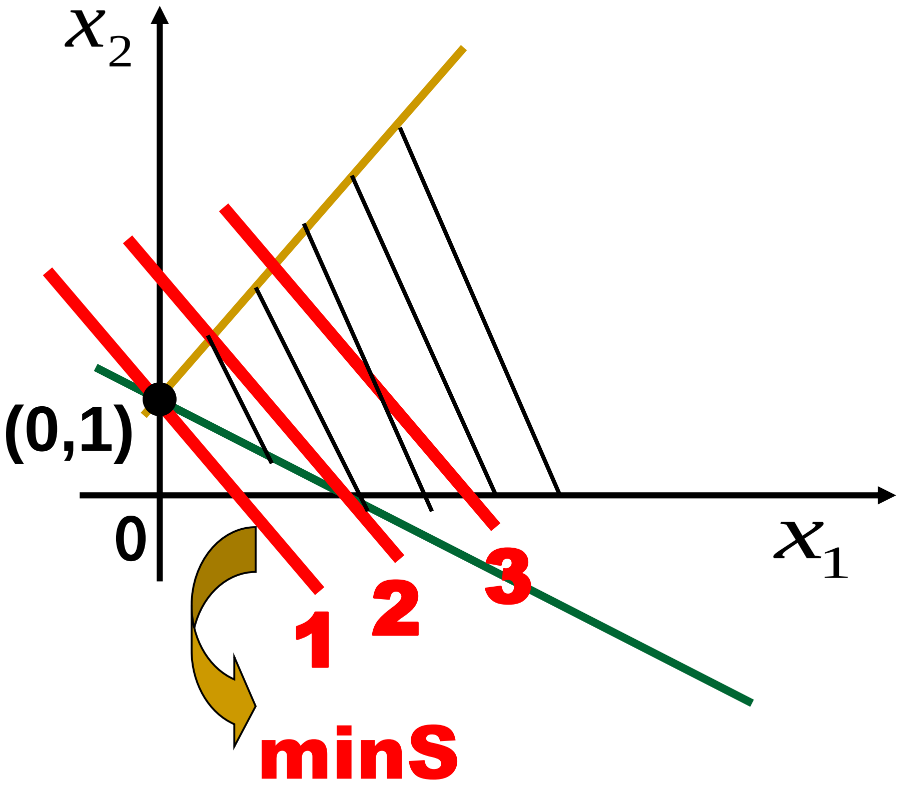
$$\min S = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$S = x_1 + x_2$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = -x_1 + S$$



$$X^* = (0, 1)^T$$

$$S^* = 1$$

二. 线性规划问题解的几种情况：

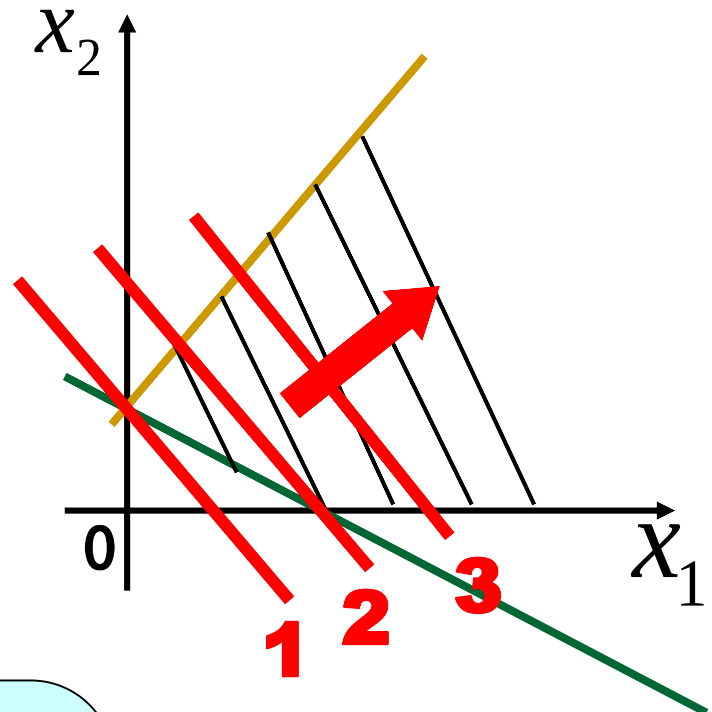
1. 有唯一的最优解

2. 有无穷多个最优解

例4：

$$\max S = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$\max S = +\infty$$

称为**没有有限的最优解**

例3： $\min S = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

二. 线性规划问题解的几种情况：

1. 有唯一的最优解

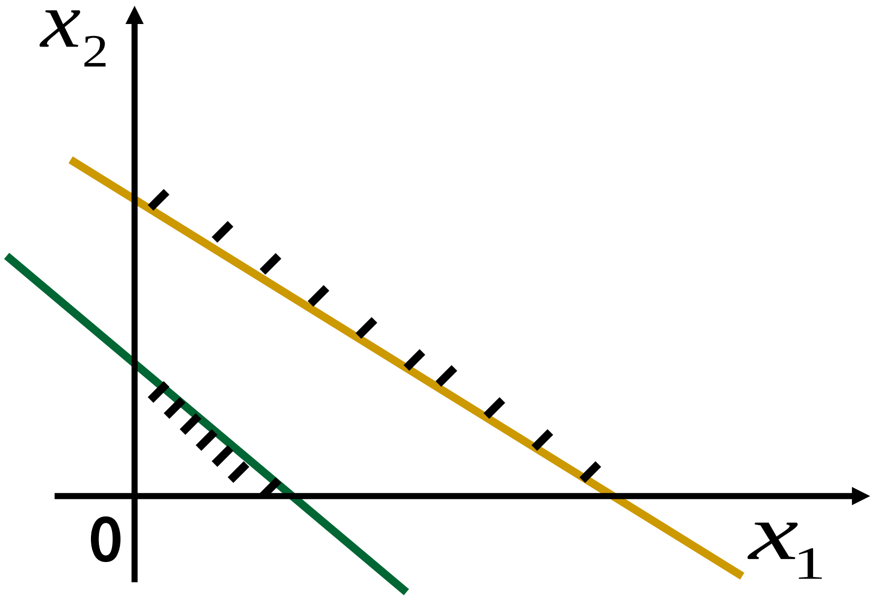
2. 有无穷多个最优解

3. 没有有限的最优解

例5：

$$\min S = 3x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



$D =$ 空集

没有可行解，

故没有最优解。

二. 线性规划问题解的几种情况：

1. 有唯一的最优解

2. 有无穷多个最优解

3. 没有有限的最优解

4. 没有可行解，故没有最优解

无解

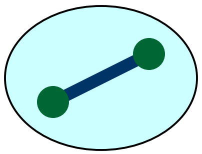
第一章 线性规划

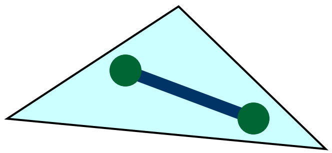
第三节 图解法及几何理论

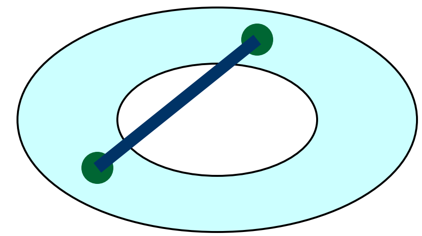
- 图解法
- 线性规划问题解的几种情况
- 几何理论

三. 几何理论：

凸集的几何定义： 若一个集合的任意两点的连线（直线段）仍在这个集合中，则称这个集合为凸集。

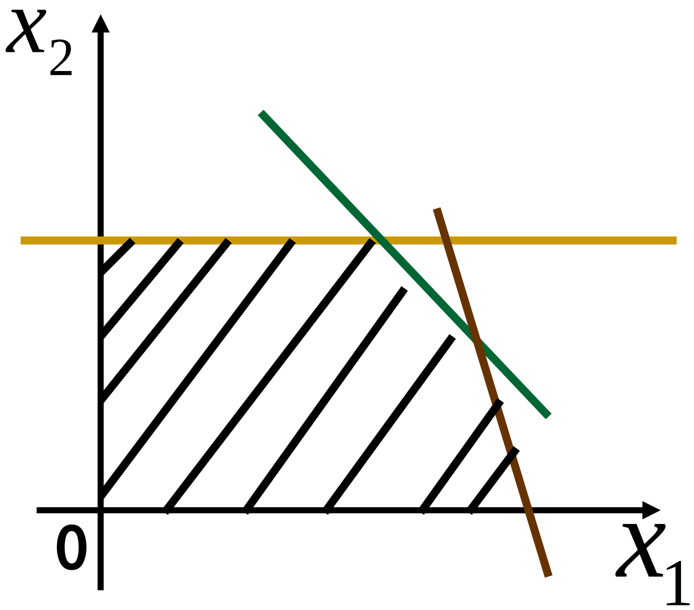




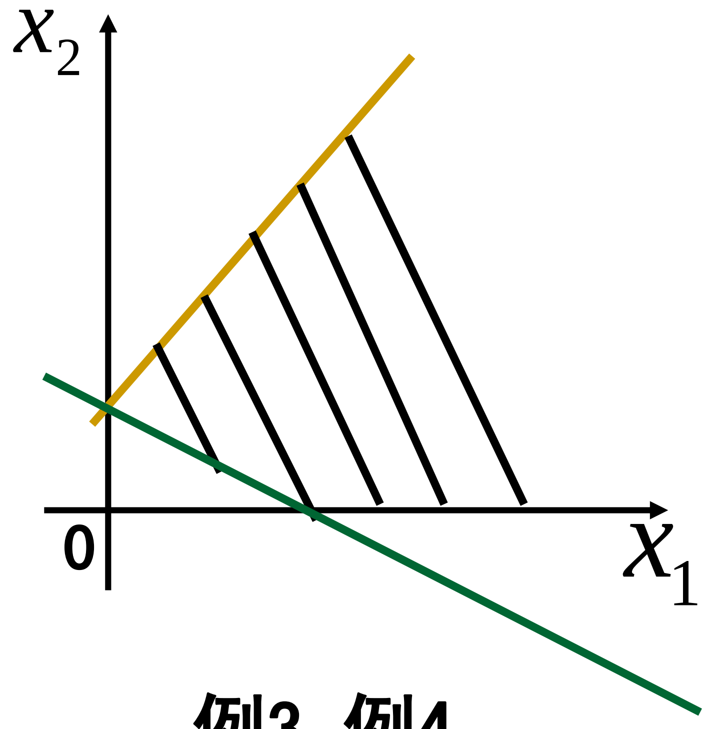


结论：

1. (LP)的可行域是凸集。



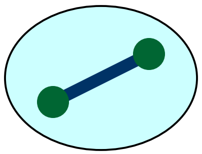
例1 例2

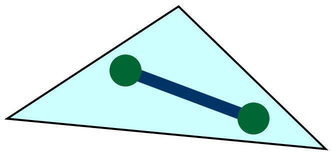


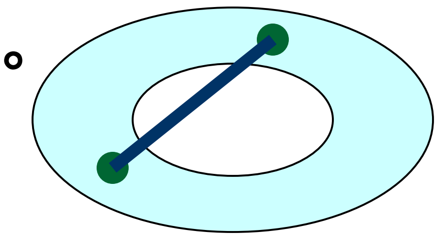
例3 例4

三. 几何理论：

凸集的几何定义：若一个集合的任意两点的连线（直线段）仍在这个集合中，则称这个集合为凸集。

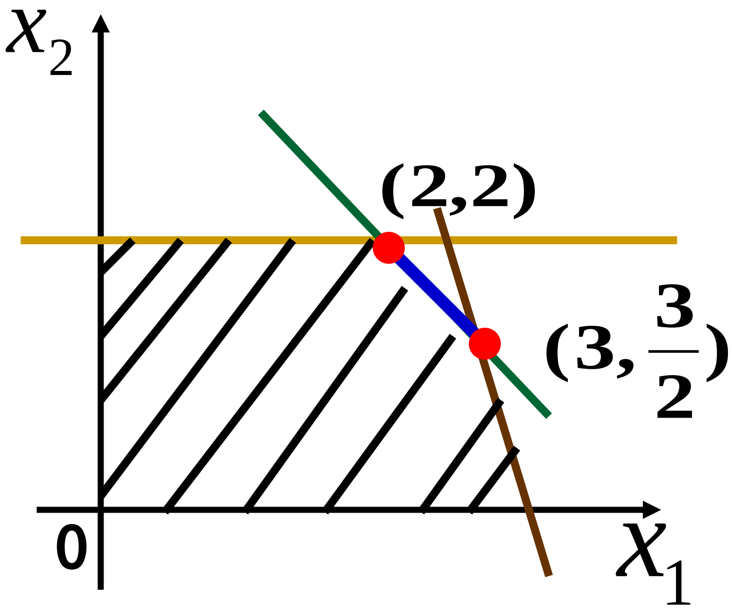


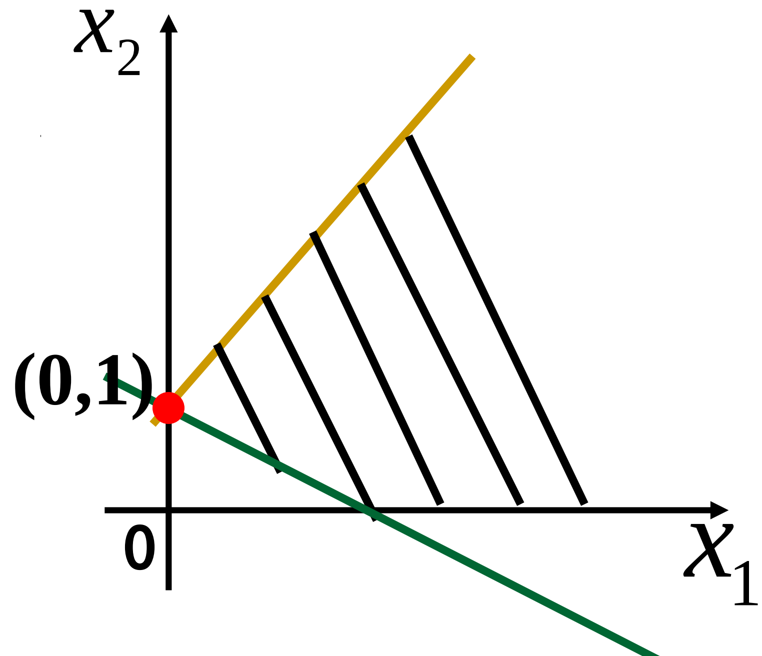




结论：

1. (LP)的可行域是为凸集。
2. (LP)若有有限的最优解，则一定可以在可行域的某个顶点上达到。





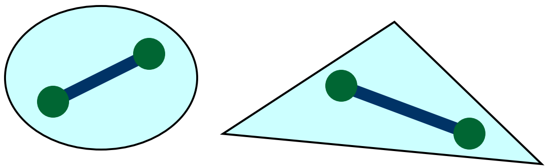
例1 $X^*=(3,\frac{3}{2})^T$

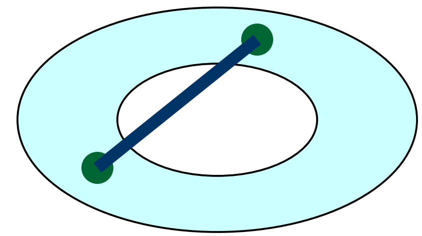
例3 $X^*=(0,1)^T$

例2 $X^*=$ 两点间线段上所有可行解

三. 几何理论：

凸集的几何定义： 若一个集合的任意两点的连线（直线）仍在这个集合中，则称这个集合为凸集。





结论：

1. (LP)的可行域是为凸集。
2. (LP)若有有限的最优解，则一定可以在可行域的某个顶点上达到。
3. （**等价定理**）(LP)可行域的顶点等价于线性规划的基本可行解。

第一章 线性规划

第三节 图解法及几何理论

- 图解法
- 线性规划问题解的几种情况
- 几何理论

第一章 线性规划

- 第一节 线性规划的数学模型
- 第三节 图解法及几何理论

第二版作业：P93　1、3、5(1)(2)(6)

第三版作业：P40　1、3、5(1)(2)(6)