$$\min f(X)$$

$$s.t.\begin{cases} h_i(X)=0 & i=1,2,\cdots,m \\ g_j(X)\geq 0 & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

约束极值问题

$$\min_{X\in R^n} f(X)$$

无约束极值问题

非线性规划的解法：

- 无约束极值问题的解法
  - 最速下降法 ★
  - 牛顿法
  - 拟牛顿法
  - 共轭梯度法 ★
- 约束极值问题的解法
  - 罚函数法 ★　乘子法
  - 可行方向法　既约梯度法
  - 投影梯度法

第三章 非线性规划

第一节 非线性规划的数学模型及基本概念

第三节 一维搜索

第四节 无约束优化问题的解法

最速下降法

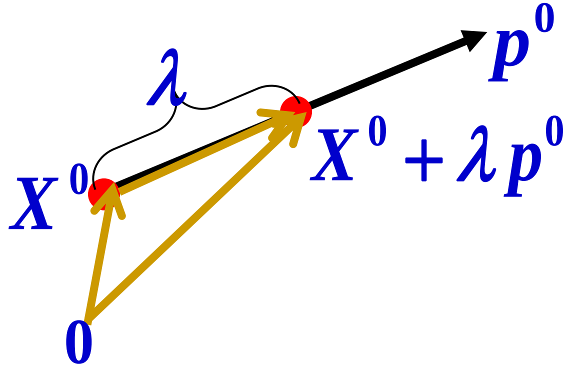
共轭梯度法

第六节 罚函数解法

第三章 非线性规划

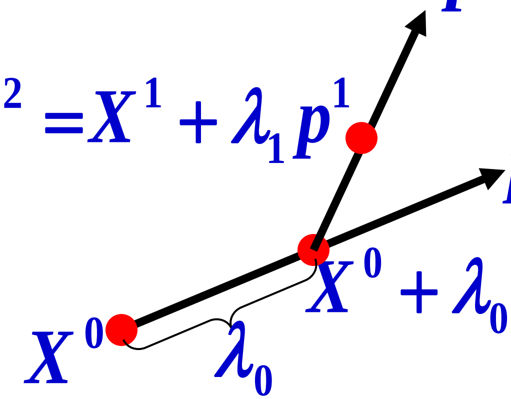
第三节 一维搜索

一维搜索是求解一元函数的无约束极值问题$\min\limits_{\lambda \in R} F(\lambda)$的数值解法。它是求解$n$元函数的无约束极值问题$\min\limits_{X \in R^n} f(X)$ 的重要组成部分。



第三章 非线性规划

$$\min_{\lambda\in R} F(\lambda) \qquad \min_{X\in R^n} f(X)$$



$$f(X^2)<f(X^1)<f(X^0)$$

$$f(X^k)\downarrow$$

$$X^k\to X^*$$

$$f(X^1)=f(X^0+\lambda_0 p^0)=\min_{\lambda\ge 0} f(X^0+\lambda p^0)$$

$$=\min_{\lambda\ge 0} F_0(\lambda)$$

$$f(X^2)=f(X^1+\lambda_1 p^1)=\min_{\lambda\ge 0} f(X^1+\lambda p^1)=\min_{\lambda\ge 0} F_1(\lambda)$$

第三章 非线性规划

第三节 一维搜索

一维搜索是求解一元函数的无约束极值问题$\min\limits_{\lambda \in R} F(\lambda)$的数值解法。它是求解$n$元函数的无约束极值问题$\min\limits_{X \in R^n} f(X)$的重要组成部分。

第三章 非线性规划

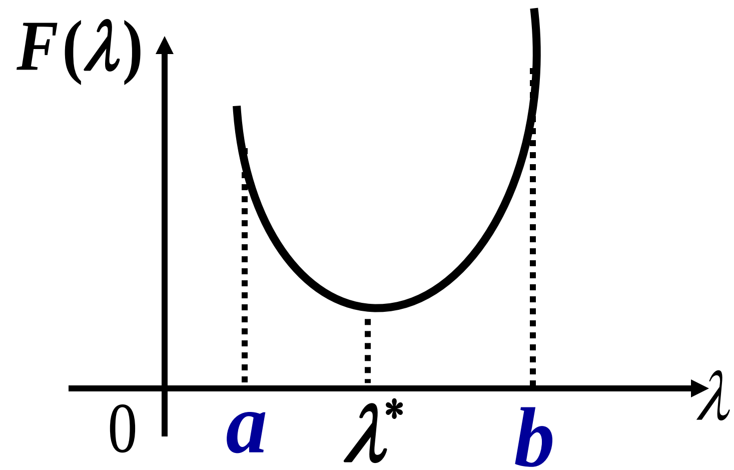
第三节 一维搜索

- 搜索区间的定义
- 序贯试验方法
- *Fibonacci*方法
- 0.618法

一. 搜索区间的定义

假设在区间$[a, b]$上，$F(\lambda)$有唯一的极小点λ^*.

则区间$[a, b]$称为单峰区间或搜索区间。



求单峰区间$[a,b]$的数值迭代的方法略。

第三章 非线性规划

第三节 一维搜索

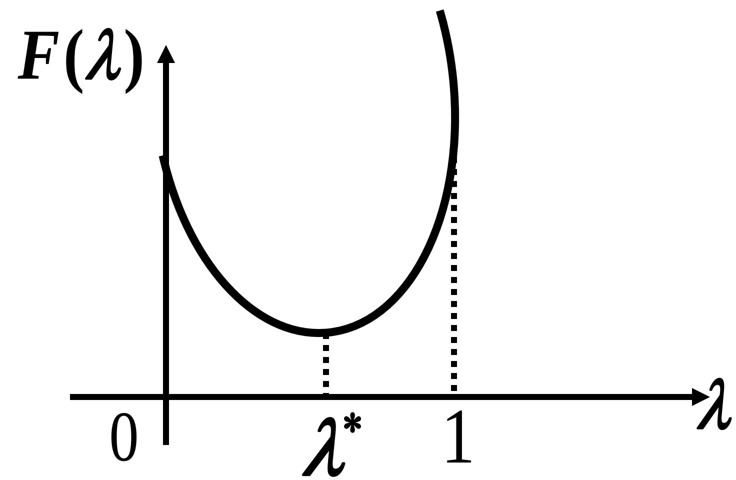
- 搜索区间的确定
- 序贯试验方法
- *Fibonacci*方法
- 0.618法

二. 序贯试验方法

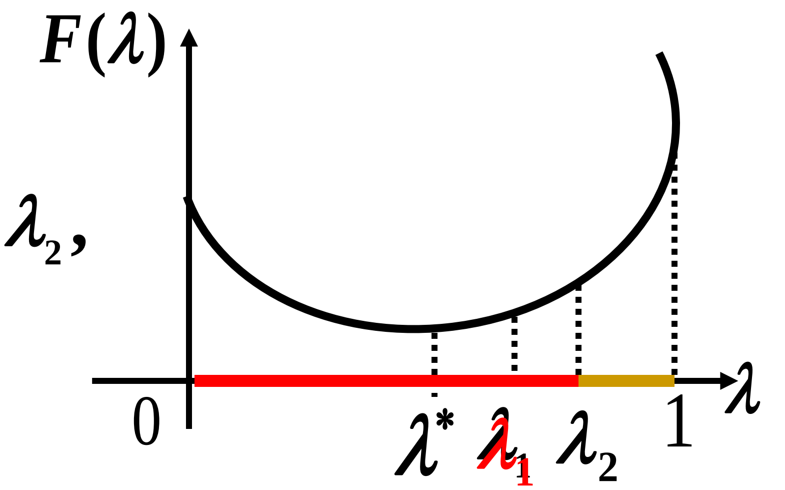
$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda) \longrightarrow \min_{\lambda\in[a,b]} F(\lambda)$$

设$F(\lambda)$ 在[0, 1]上有唯一的极小点 λ^*.

$F(\lambda)$在 λ^*的左侧严格 ↓，在 λ^* 的右侧严格↑



二. 序贯试验方法 $\min\limits_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda)$

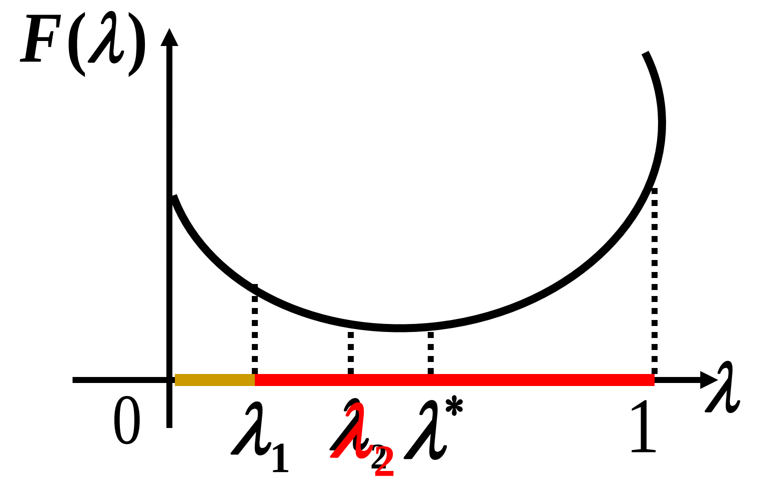


首先取 $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$， 且 $\lambda_1<\lambda_2$,

计算并比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$

(1) 当$F(\lambda_1)\le F(\lambda_2)$ 时,

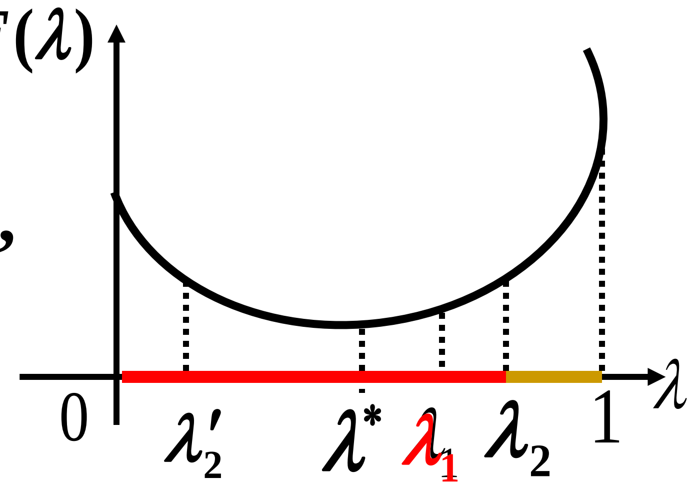
必有$\lambda^*\le\lambda_2$. 且保留区间 $[0,\lambda_2]$ 有一个保留点 λ_1



(2) 当$F(\lambda_1)\ge F(\lambda_2)$ 时,

必有$\lambda^*\ge\lambda_1$. 且保留区间 $[\lambda_1,1]$ 有一个保留点 λ_2

二. 序贯试验方法　$\min\limits_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda)$



首先取 $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$，且 $\lambda_1<\lambda_2$，计算并比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$

(1) 当$F(\lambda_1)\le F(\lambda_2)$ 时，

必有$\lambda^*\le\lambda_2$. 且保留区间$[0,\lambda_2]$ 有一个保留点λ_1

以下步骤是：

每次在保留区间内另取一个不同于保留点的点，计算该点的函数值并与保留点的函数值进行比较，如同开始那样的原则缩小区间。如此进行下去，最终可以使保留区间长度$\le$精度ε ，于是得到λ^*满足给定精度要求的近似解。

第三章 非线性规划

第三节 一维搜索

- 搜索区间的确定
- 序贯试验方法
- *Fibonacci*方法
- 0.618法

第三章 非线性规划

三. *Fibonacci*方法

- *Fibonacci*数列
- *Fibonacci*方法的迭代原理
- *Fibonacci*方法的收敛结论
- *Fibonacci*方法的迭代步骤
- *Fibonacci*方法的评价

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda) \longrightarrow \min_{\lambda\in[a,b]} F(\lambda)$$

Fibonacci **法是按** ***Fibonacci*** **数列取点的序贯试验法**

Fibonacci数列$\{F_k\}$： $F_0 = F_1 = 1,$

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, k = 1,2,3,\cdots$$

写出$\{F_k\}$的前15项：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15
F_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

第三章 非线性规划

三. *Fibonacci*方法

- *Fibonacci*数列
- *Fibonacci*方法的迭代原理
- *Fibonacci*方法的收敛结论
- *Fibonacci*方法的迭代步骤
- *Fibonacci*方法的评价

三. *Fibonacci*法 $\quad \min\limits_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda)$

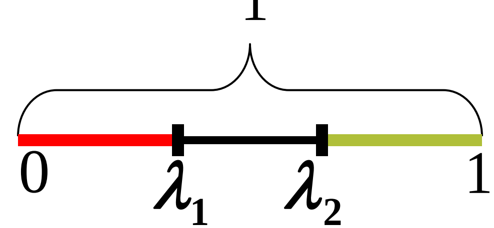
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15
F_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

第一次迭代:

在[0, 1]中取两个初始点:

$$\lambda_1=\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}\left(=\frac{55}{144}\right), \qquad \lambda_2=\frac{F_n}{F_{n+1}}\left(=\frac{89}{144}\right)$$

$$\because \lambda_1+\lambda_2=\frac{F_{n-1}+F_n}{F_{n+1}}=1 \quad 即 \lambda_1=1-\lambda_2$$



$\therefore \lambda_1, \lambda_2$是[0, 1]中的对称点

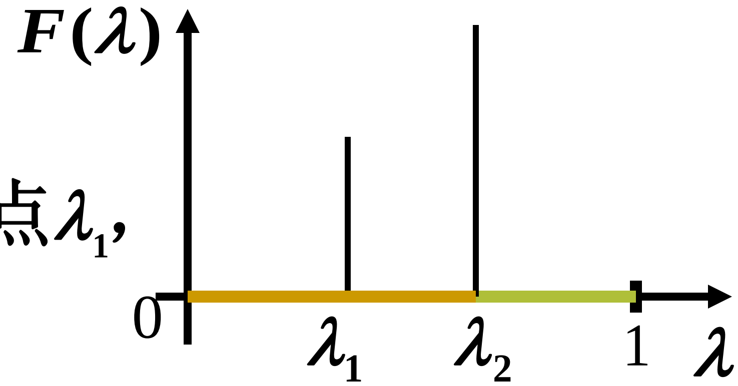
三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda) \qquad l_1=\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

第一次迭代:

在[0, 1]中取两个初始点: $\lambda_1=\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ $\lambda_2=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$

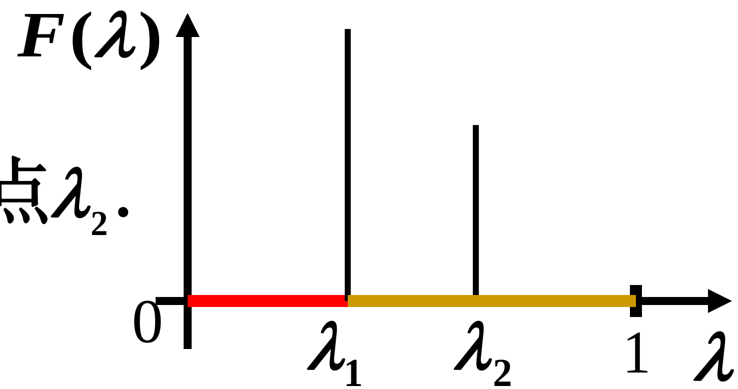
计算比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$



(1) 若 $F(\lambda_1)\le F(\lambda_2)$,

则 $\lambda^*\le\lambda_2$, 即 $\lambda^*\in[0,\lambda_2]$,保留点$\lambda_1$,

$$l_1=\lambda_2-0=\lambda_2=\frac{F_n}{F_{n+1}}$$



(2) 若 $F(\lambda_1)>F(\lambda_2)$,

则 $\lambda^*\ge\lambda_1$, 即 $\lambda^*\in[\lambda_1,1]$,保留点$\lambda_2$.

$$l_1=1-\lambda_1=1-\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda) \qquad l_1 = \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

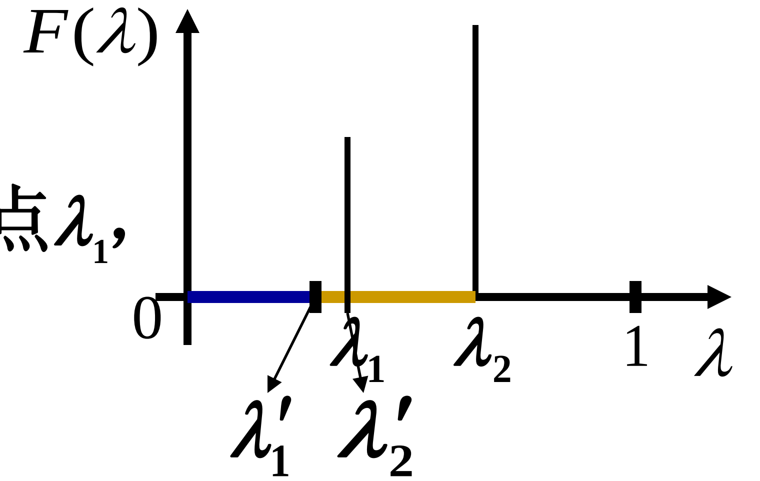
第一次迭代:

在[0, 1]中取两个初始点: $\lambda_1 = \dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}} \quad \lambda_2 = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$

计算比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$

(1) 若 $F(\lambda_1) \le F(\lambda_2)$,

则 $\lambda^* \le \lambda_2$， 即 $\lambda^* \in [0, \lambda_2]$,保留点 λ_1,



第二次迭代:

令 $\lambda_1 = \lambda_2'$

$\because$ 新点 λ_1'与λ_2'对称， 即

$$\therefore \lambda_1' = \frac{F_n}{F_{n+1}} - \lambda_2' = \frac{F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n-2}}{F_{n+1}}$$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda)$$

$$l_1=\frac{F_n}{F_{n+1}} \qquad l_2=\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$$

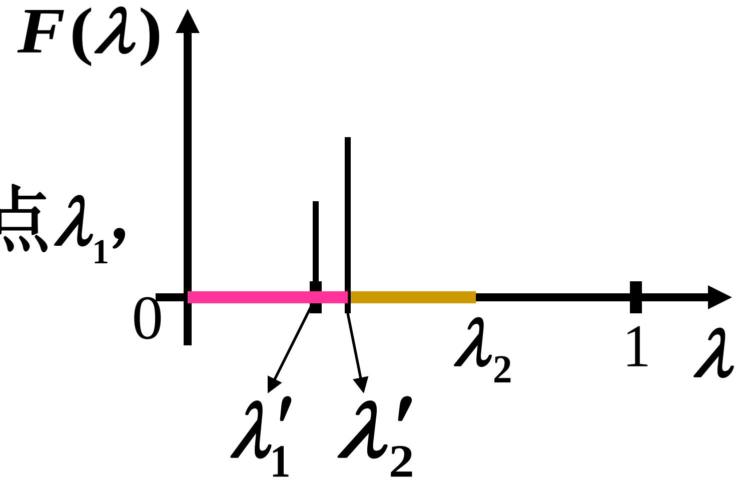
第一次迭代:

在[0, 1]中取两个初始点: $\lambda_1=\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ $\lambda_2=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$

计算比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$

(1) 若 $F(\lambda_1)\le F(\lambda_2)$,

则 $\lambda^*\le\lambda_2$, 即$\lambda^*\in[0,\lambda_2]$,保留点$\lambda_1$,



第二次迭代:

令$\lambda_1=\lambda_2'$ 新点 $\lambda_1'=\dfrac{F_{n-2}}{F_{n+1}}$

(1) 若 $F(\lambda_1')\le F(\lambda_2')$, 则$\lambda^*\in[0,\lambda_2']$, $l_2=\lambda_2'-0=\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda)$$

$$l_1 = \frac{F_n}{F_{n+1}} \qquad l_2 = \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$$

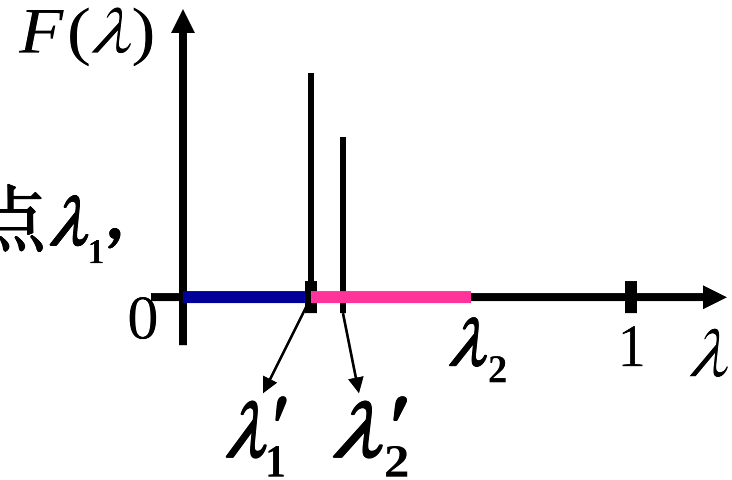
第一次迭代:

在[0, 1]中取两个初始点: $\lambda_1 = \dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}} \quad \lambda_2 = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$

计算比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$

(1) 若 $F(\lambda_1) \le F(\lambda_2)$,

则 $\lambda^* \le \lambda_2$, 即 $\lambda^* \in [0, \lambda_2]$, 保留点 λ_1,



第二次迭代:

令 $\lambda_1 = \lambda_2'$ 新点 $\lambda_1' = \dfrac{F_{n-2}}{F_{n+1}}$

1) 若 $F(\lambda_1') \le F(\lambda_2')$, 则 $\lambda^* \in [0, \lambda_2']$, $l_2 = \lambda_2' - 0 = \dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$

2) 若 $F(\lambda_1') > F(\lambda_2')$, 则 $\lambda^* \in [\lambda_1', \lambda_2]$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda)$$

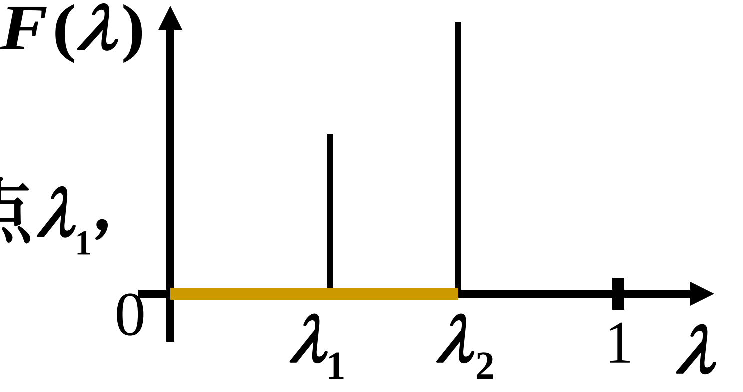
$$l_1=\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

第一次迭代:

在[0, 1]中取两个初始点: $\lambda_1=\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ $\lambda_2=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$

计算比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$

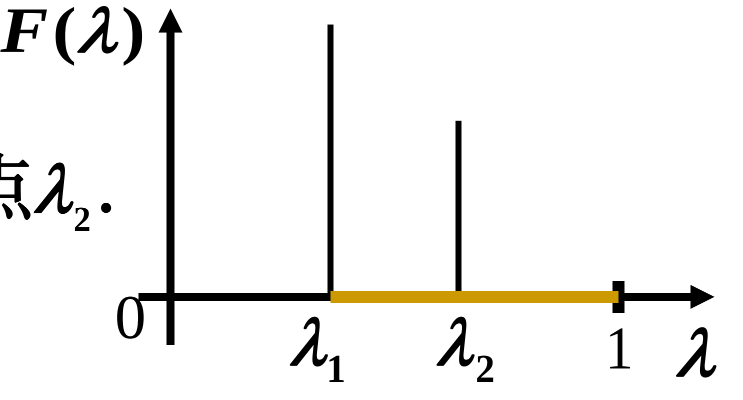
(1) 若 $F(\lambda_1)\le F(\lambda_2)$,



则 $\lambda^*\le\lambda_2$, 即 $\lambda^*\in[0,\lambda_2]$,保留点$\lambda_1$,

$$l_1=\lambda_2-0=\lambda_2=\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

(2) 若 $F(\lambda_1)>F(\lambda_2)$,



则 $\lambda^*\ge\lambda_1$, 即 $\lambda^*\in[\lambda_1,1]$,保留点$\lambda_2$.

$$l_1=1-\lambda_1=1-\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}=\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda)$$

$$l_1 = \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

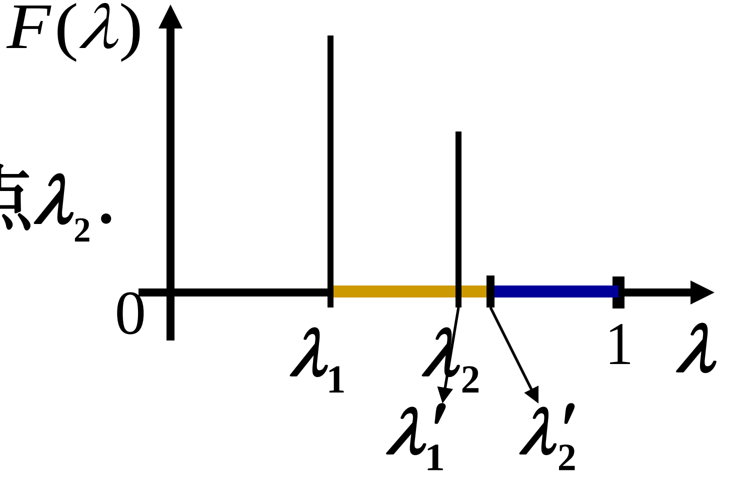
第一次迭代:

在[0, 1]中取两个初始点: $\lambda_1 = \dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ $\quad \lambda_2 = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$

计算比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$

(2) 若 $F(\lambda_1) > F(\lambda_2)$,

则 $\lambda^* \geq \lambda_1$， 即$\lambda^* \in [\lambda_1, 1]$, 保留点$\lambda_2$.



第二次迭代:

令$\lambda_2 = \lambda_1'$

$\because$新点 λ_2'与λ_1'对称， 即 $\lambda_1' - \lambda_1 = 1 - \lambda_2'$,

$$\therefore \lambda_2' = 1 - \lambda_1' + \lambda_1 = 1 - \frac{F_n}{F_{n+1}} + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}} = \frac{2F_{n-1}}{F_{n+1}}$$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda) \qquad l_1=\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

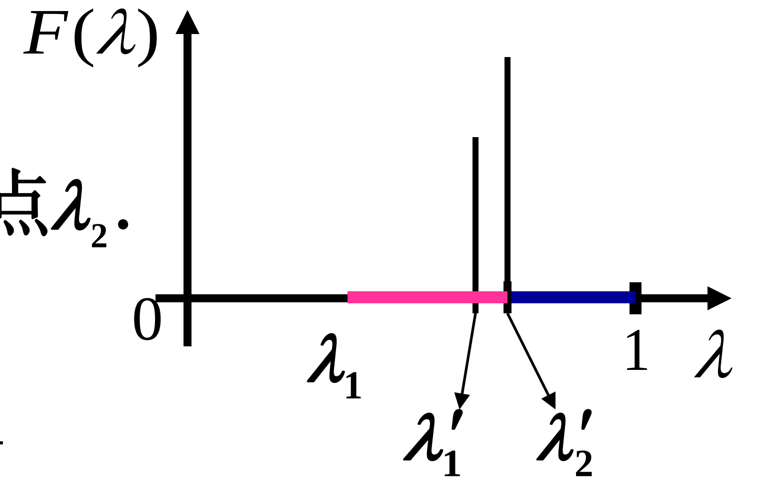
第一次迭代:

在[0, 1]中取两个初始点: $\lambda_1=\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ $\lambda_2=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$

计算比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$

(2) 若 $F(\lambda_1)>F(\lambda_2)$,

则 $\lambda^*\geq\lambda_1$， 即 $\lambda^*\in[\lambda_1,1]$, 保留点$\lambda_2$.



第二次迭代:

令$\lambda_2=\lambda_1'$ $\lambda_2'=1-\dfrac{F_n}{F_{n+1}}+\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$

(1) 若 $F(\lambda_1')\leq F(\lambda_2')$, 则$\lambda^*\in[\lambda_1,\lambda_2']$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda)$$

$$l_1 = \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

$$l_2 = \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$$

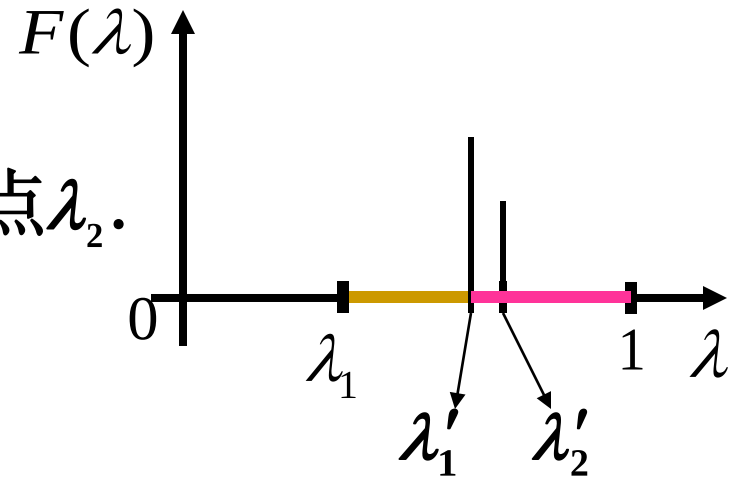
第一次迭代:

在[0, 1]中取两个初始点: $\lambda_1 = \dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ $\lambda_2 = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$

计算比较 $F(\lambda_1)$和$F(\lambda_2)$

(2) 若 $F(\lambda_1) > F(\lambda_2)$,

则 $\lambda^* \geq \lambda_1$， 即 $\lambda^* \in [\lambda_1, 1]$, 保留点$\lambda_2$.



第二次迭代:

令$\lambda_2 = \lambda_1'$ $\lambda_2' = 1 - \dfrac{F_n}{F_{n+1}} + \dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$

1) 若 $F(\lambda_1') \leq F(\lambda_2')$, 则$\lambda^* \in [\lambda_1, \lambda_2']$

2) 若 $F(\lambda_1') > F(\lambda_2')$, 则$\lambda^* \in [\lambda_1', 1]$, $l_2 = 1 - \lambda_1' = 1 - \dfrac{F_n}{F_{n+1}} = \dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$

问题： 如何确定F_{n+1}?

第三章 非线性规划

三、*Fibonacci*方法

- *Fibonacci*数列
- *Fibonacci*方法的迭代原理
- *Fibonacci*方法的收敛结论
- *Fibonacci*方法的迭代步骤
- *Fibonacci*方法的评价

三. Fibonacci法

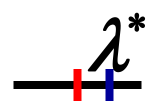
$\min F(\lambda)$ $\quad l_1 = \frac{F_n}{\ldots}$ $\quad l_2 = \frac{F_{n-1}}{\ldots}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

k	0	1	2	3	…………	n-1
l_k	1	$\frac{F_n}{F_{n+1}}$	$\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$	$\frac{F_{n-2}}{F_{n+1}}$	…………	$\frac{F_2}{F_{n+1}} = \frac{2}{F_{n+1}}$

此时保留区间中点与极小点λ^*之间的最大距离$\leq \frac{1}{F_{n+1}} < \varepsilon$

$\longrightarrow F_{n+1} > \frac{1}{\varepsilon} \longrightarrow F_{n+1}$



例如: $\varepsilon = 0.01 \quad F_{n+1} > \frac{1}{\varepsilon} = 100 \quad F_{n+1} = 144$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda) \longrightarrow \min_{\lambda\in[a,b]} F(\lambda)$$

按照上述步骤迭代下去，保留区间长度由1变为：

k	0	1	2	3	…………	n-1
l_k	1	$\frac{F_n}{F_{n+1}}\times 1$	$\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}\times 1$	$\frac{F_{n-2}}{F_{n+1}}\times 1$	………	$\frac{F_2}{F_{n+1}}=\frac{2}{F_{n+1}}$

保留区间长度由*b*-*a*变为：

k	0	1	2	3	…………	n-1
l_k	$b-a$	$\frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a)$	$\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b-a)$	$\frac{F_{n-2}}{F_{n+1}}(b-a)$	……	$\frac{F_2}{F_{n+1}}(b-a)=\frac{2}{F_{n+1}}(b-a)$

三. Fibonacci法

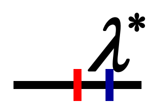
$$\min_{\lambda\in[0,1]} F(\lambda) \longrightarrow \min_{\lambda\in[a,b]} F(\lambda)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

k	0	1	2	3	…………	n-1
l_k	$b-a$	$\frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a)$	$\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b-a)$	$\frac{F_{n-2}}{F_{n+1}}(b-a)$	……	$\frac{F_2}{F_{n+1}}(b-a)=\frac{2}{F_{n+1}}(b-a)$

此时保留区间中点与极小点λ^*之间的最大距离$\le \frac{b-a}{F_{n+1}} < \varepsilon$

$\longrightarrow \boxed{F_{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon}} \longrightarrow F_{n+1}$



例如： $\varepsilon = 0.01, b-a=3$ $F_{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon} = 300$ $F_{n+1} = 377$

第三章 非线性规划

三. *Fibonacci*方法

- *Fibonacci*数列
- *Fibonacci*方法的迭代原理
- *Fibonacci*方法的收敛结论
- *Fibonacci*方法的迭代步骤
- *Fibonacci*方法的评价

三. Fibonacci法 $\min\limits_{\lambda\in[a,b]} f(\lambda)$

给定$\varepsilon>0, a, b(b>a)$

$F_{n-1}:=F_n:=1$

$F_{n+1}:=F_{n-1}+F_n$

$F_{n+1}>\dfrac{b-a}{\varepsilon}$?

No:

$F_{n-1}:=F_n$

$F_n:=F_{n+1}$

Yes:

F_{n+1}

$F_{n+1}:=F_{n-1}+F_n$

$2=1+1$

$3=1+2$

$5=2+3$

$8=3+5$

$13=5+8$

$21=8+13$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[a,b]} f(\lambda)$$

$$\text{给定}\ \varepsilon > 0, a, b\ (b > a)$$

$$F_{n-1} := F_n := 1$$

$$F_{n+1} := F_{n-1} + F_n$$

$$F_{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon}\ ?$$

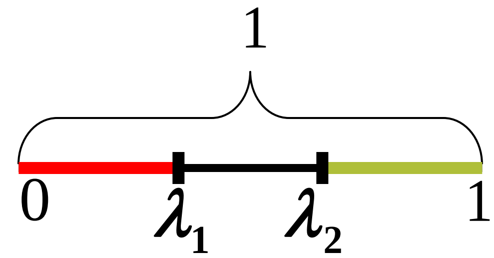
No:

$$F_{n-1} := F_n$$
$$F_n := F_{n+1}$$

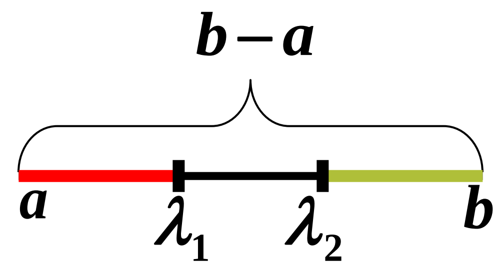
Yes:

$$\lambda_2 := a + \frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a),\ f_2 := f(\lambda_2)$$

$$\lambda_1 := a + b - \lambda_2,\ f_1 := f(\lambda_1)$$



$$\lambda_2 = \frac{F_n}{F_{n+1}} = 0 + \frac{F_n}{F_{n+1}}(1-0)$$



$$\lambda_1 - a = b - \lambda_2$$

三. Fibonacci法

$$\min_{\lambda\in[a,b]} f(\lambda)$$

$$\lambda_2 := a + \frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a),\ f_2 := f(\lambda_2)$$

$$\lambda_1 := a + b - \lambda_2,\ f_1 := f(\lambda_1)$$

$b - a < \varepsilon$?

Yes

$$\lambda^* = \frac{a+b}{2}$$

No

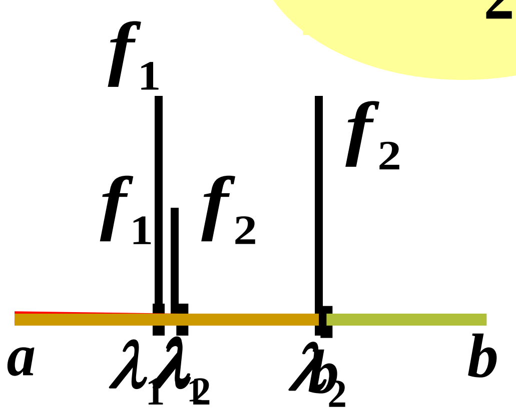
$f_2 > f_1$?

Yes

$$b := \lambda_2$$
$$\lambda_2 := \lambda_1$$
$$\lambda_1 := a + b - \lambda_2$$
$$f_2 := f_1$$
$$f_1 := f(\lambda_1)$$

No

$$a := \lambda_1$$
$$\lambda_1 := \lambda_2$$
$$\lambda_2 := a + b - \lambda_1$$
$$f_1 := f_2$$
$$f_2 := f(\lambda_2)$$



$$b - \lambda_2 = \lambda_1 - a$$

三. *Fibonacci*法

$$\min_{\lambda\in[a,b]} f(\lambda)$$

$$\lambda_2 := a + \frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a),\ f_2 := f(\lambda_2)$$

$$\lambda_1 := a + b - \lambda_2,\ f_1 := f(\lambda_1)$$

$b-a<\varepsilon$?

Yes: $$\lambda^* = \frac{a+b}{2}$$

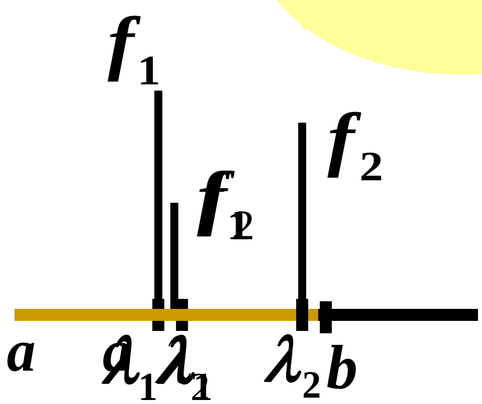
No: $f_2 > f_1$?

Yes:

$$b := \lambda_2$$
$$\lambda_2 := \lambda_1$$
$$\lambda_1 := a+b-\lambda_2$$
$$f_2 := f_1$$
$$f_1 := f(\lambda_1)$$

No:

$$a := \lambda_1$$
$$\lambda_1 := \lambda_2$$
$$\lambda_2 := a+b-\lambda_1$$
$$f_1 := f_2$$
$$f_2 := f(\lambda_2)$$



$$b-\lambda_2 = \lambda_1 - a$$

第三章 非线性规划

三. *Fibonacci*方法

- *Fibonacci*数列
- *Fibonacci*方法的迭代原理
- *Fibonacci*方法的收敛结论
- *Fibonacci*方法的迭代步骤
- *Fibonacci*方法的评价

三. *Fibonacci*法

$$\min_{\lambda\in[a,b]} F(\lambda)$$

优点:

*Fibonacci*方法是所有序贯试验法中对于给定的精度，最少计算函数值次数的算法. 从这个角度去评价, 可以说它是最优的.

缺点:

必须在开始计算之前, 首先计算满足精度要求的*Fibonacci*数F_{n+1}

例3−9(P147)自己做

第三章 非线性规划

三. *Fibonacci*方法

- *Fibonacci*数列
- *Fibonacci*方法的迭代原理
- *Fibonacci*方法的收敛结论
- *Fibonacci*方法的迭代步骤
- *Fibonacci*方法的评价

第三章 非线性规划

第三节 一维搜索

- 搜索区间的确定
- 序贯试验方法
- *Fibonacci*方法
- 0.618法

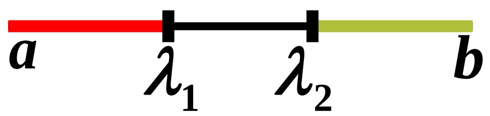
四. 0.618法

$$\min_{\lambda\in[a,b]} F(\lambda)$$

0.618法与*Fibonacci*法的区别：

只在于最初两个试验点 λ_1,λ_2 的取法不同：

***Fibonacci*法：** $\lambda_1 := a + \dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b-a)$ $\qquad$ $\lambda_2 := a + \dfrac{F_n}{F_{n+1}}(b-a)$



$$\lambda_1 - a = b - \lambda_2$$

$$\lambda_1 = a + b - \lambda_2$$

$$= a + b - a - \frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a)$$

$$= a + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b-a)$$

四. 0.618法

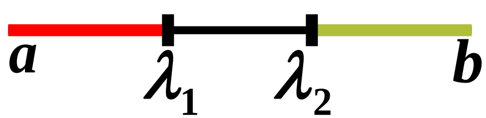
$$\min_{\lambda\in[a,b]} F(\lambda)$$

0.618法与*Fibonacci*法的区别：

只在于最初两个试验点 λ_1,λ_2 的取法不同：

***Fibonacci*法：** $\lambda_1 := a+\dfrac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b-a)$ $\qquad \lambda_2 := a+\dfrac{F_{n}}{F_{n+1}}(b-a)$

0.618法： $\lambda_1 := a+0.382(b-a)$ $\qquad \lambda_2 := a+0.618(b-a)$



$$\because b-\lambda_2=(b-a)-0.618(b-a)=0.382(b-a)$$

$$\lambda_1-a=0.382(b-a)$$

$\therefore b-\lambda_2=\lambda_1-a$, 即 λ_1与λ_2 是对称的。

四. 0.618法

$$\min_{\lambda\in[a,b]} F(\lambda)$$

0.618法与*Fibonacci*法的区别：

只在于最初两个试验点 λ_1,λ_2 的取法不同：

***Fibonacci*法：** $\lambda_1 := a + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}(b-a)$ $\lambda_2 := a + \frac{F_n}{F_{n+1}}(b-a)$

0.618法： $\lambda_1 := a + 0.382(b-a)$ $\lambda_2 := a + 0.618(b-a)$

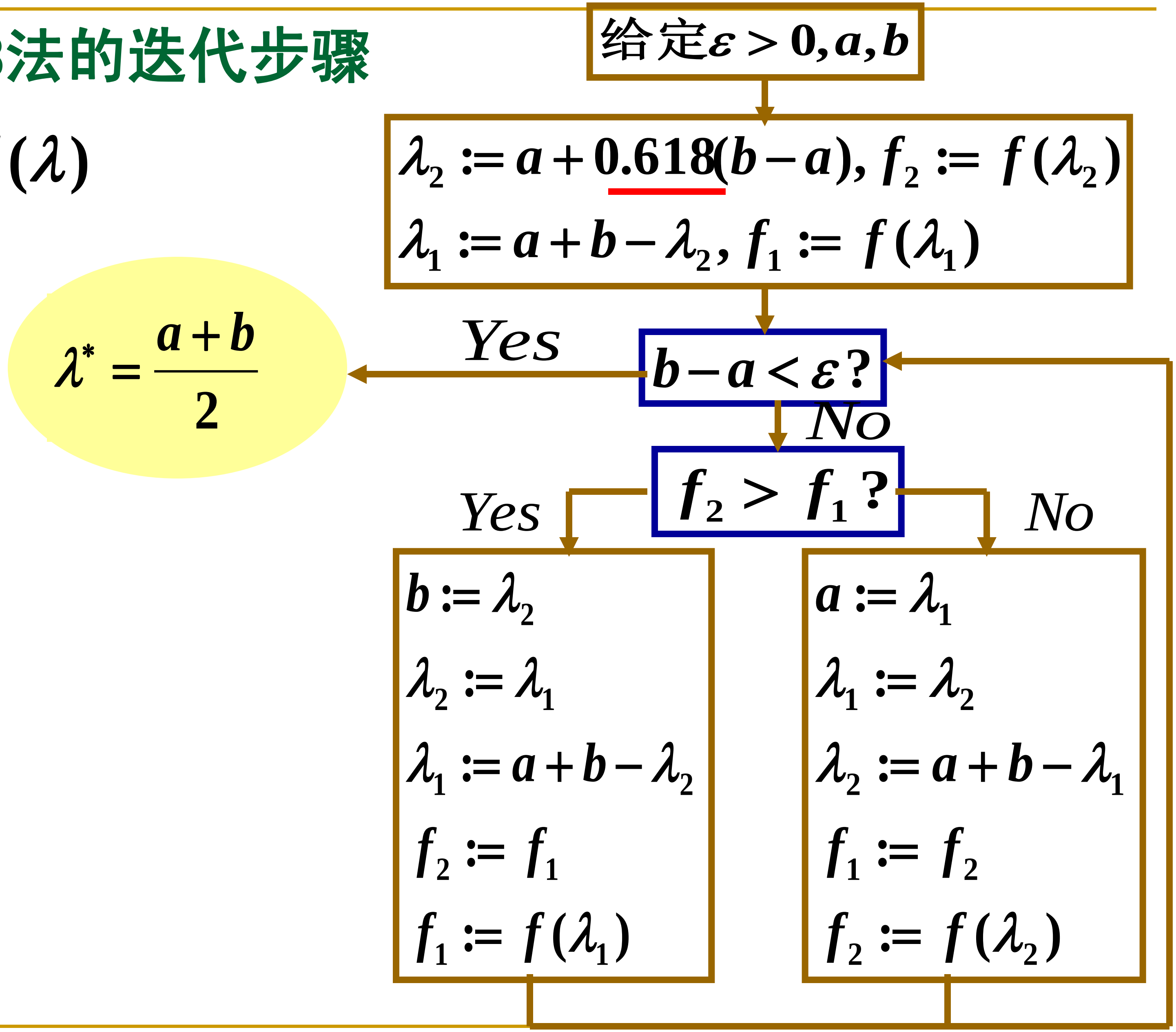
在0.618法中，用0.382代替了 $\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ ，用0.618代替了 $\frac{F_n}{F_{n+1}}$

可以证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}} = 0.618034$

0.618法是*Fibonacci*法的极限方法，但实现起来更容易，所以在实际问题中应用更广泛。

四. 0.618法的迭代步骤

$$\min_{\lambda\in[a,b]} f(\lambda)$$



第三章 非线性规划

第三节 一维搜索

- 搜索区间的确定
- 序贯试验方法
- *Fibonacci*方法
- 0.618法

作业：P245 12 13

作业：P155 12 13

五. 抛物线插值法 $\min\limits_{\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]} F(\lambda)$

若已求得 $\lambda_0\in(\lambda_1,\lambda_2)$，满足 $F(\lambda_1)\ge F(\lambda_0)$，$F(\lambda_0)\le F(\lambda_2)$

想法： 利用 $(\lambda_1,F(\lambda_1))$, $(\lambda_0,F(\lambda_0))$, $(\lambda_2,F(\lambda_2))$ 确定抛物线，

以该抛物线的极小点近似 $F(\lambda)$ 的极小点

如何确定抛物线？ $h(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2$

需确定 $a_0=?,\ a_1=?,\ a_2=?$

将三点代入，得

$$\begin{cases} h(\lambda_1)=F(\lambda_1)=a_0+a_1\lambda_1+a_2\lambda_1^2 \\ h(\lambda_0)=F(\lambda_0)=a_0+a_1\lambda_0+a_2\lambda_0^2 \\ h(\lambda_2)=F(\lambda_2)=a_0+a_1\lambda_2+a_2\lambda_2^2 \end{cases}$$

三个未知数

三个线性方程

$$\begin{cases} h(\lambda_1)=F(\lambda_1)=a_0+a_1\lambda_1+a_2\lambda_1^2 \\ h(\lambda_0)=F(\lambda_0)=a_0+a_1\lambda_0+a_2\lambda_0^2 \\ h(\lambda_2)=F(\lambda_2)=a_0+a_1\lambda_2+a_2\lambda_2^2 \end{cases}$$

可解得

$$\boxed{a_1=\frac{(\lambda_0^2-\lambda_2^2)F(\lambda_1)+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)F(\lambda_0)+(\lambda_1^2-\lambda_0^2)F(\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)},}$$

$$\boxed{a_2=\frac{-[(\lambda_0-\lambda_2)F(\lambda_1)+(\lambda_2-\lambda_1)F(\lambda_0)+(\lambda_1-\lambda_0)F(\lambda_2)]}{(\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)},}$$

无需求出 a_0，只要找 $h(\lambda)$的极小点，利用

$$h'(\bar{\lambda})=a_1+2a_2\bar{\lambda}=0 \Rightarrow \boxed{\bar{\lambda}=-a_1/(2a_2)}$$

当前有4个点： $(\lambda_1,F(\lambda_1))$, $(\lambda_0,F(\lambda_0))$, $(\bar{\lambda},F(\bar{\lambda}))$, $(\lambda_2,F(\lambda_2))$

当前有4个点：

$$(\lambda_1, F(\lambda_1)),\ (\lambda_0, F(\lambda_0)), (\bar{\lambda}, F(\bar{\lambda})),\ (\lambda_2, F(\lambda_2))$$

比较 $F(\lambda_0)$ 与 $F(\bar{\lambda})$ 的大小，**舍弃劣点外侧部分，缩小区间后，重复上述过程.**

若对给定误差 $\varepsilon > 0$, 满足 $|\lambda_0 - \bar{\lambda}| < \varepsilon$, **（充分接近）**

则视 $\bar{\lambda}$ 为 $F(\lambda)$ 在 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 上的近似极小点.

评注：

对于性态较好，比较光滑的函数，用抛物线插值法可较快逼近极小点；对于性态较差的函数，则采用Fibonacci方法或0.618法更好些。