7.4 Hermite 插值

- 一.问题描述
- 二.定义
- 三.构造Hermite插值
- 四. 余项定理
- 五.一般插值

P207

二.问题描述

- Hermite插值也叫带指定微商值的插值,它要构造一个插值函数,不但在给定节点上取函数值,而且取已知微商值,使插值函数和被插函数的密和程度更好 。

二.定义

x	x_0	x_1	……	x_n
y	y0	y1	……	yn
y'	y'0	y'1	……	y'n

P207

- 设 在区间[a , b] 上有 n+1个互异结点 $a=x_0<x_1<x_2<\dots\dots<x_n=b$, 函数 $f(x)$ 在结点上取值为
- $\begin{cases} f(x_i) = y_i \\ f'(x_i)=y'_i \quad i=0,1,2\dots\dots n \end{cases}$
- 求一个次数不高于2n+1次的插值多项式 $H(x)$ 满足2n+2个条件
- $\begin{cases} H(x_i) = y_i \\ H'(x_i)= y'_i \quad i=0,1,2\dots\dots n \end{cases}$
- 若$H(x)$存在,则称为函数 $f(x)$ 的Hermite 插值多项式.因为 $H(x)$是一个次数不高于2n+1次的多项式,常记为$H_{2n+1}(x)$.

存在唯一性定理

$(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$

或 $F(x)\equiv 0$

定理7-3:满足插值条件

$\begin{cases} H(x_i)= y_i \\ H'(x_i)= y'_i \quad i=0,1,2\dots\dots n \end{cases}$

且次数不大于2n+1的多项式是存在且唯一的。 P208

证明（唯一性）:令$p(x)$和$q(x)$是两个次数不高于2n+1的多项式且在插值结点都满足以上插值条件 ,即:

$p(x_i)=q(x_i)=y_i$, $p'(x_i)=q'(x_i)=y'_i$, $i=0,1,2\dots\dots n$

令 $F(x)=p(x)-q(x)$, 则 $F(x_i)=0$,$F'(x_i)=0$, $i=0,1,2,\dots\dots n$

x_i（$i=0,1,2,\dots n$）是 $F(x)$的2重根.

由于$p(x),q(x)$都是次数不高于2n+1的多项式,由代数基本定理知

$F(x)=p(x)-q(x)\equiv 0$,所以有 $p(x)\equiv q(x)$, 多项式唯一. ■

三.构造Hermit插值

P208

$H_{2n+1}(x_i)= y_i$

$H_{2n+1}'(x_i)= y'_i$

$i=0,1,2\dots\dots n$

法1(基函数法)

设Hermite插值多项式为

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i q_{n,i}(x)+\sum_{i=0}^{n} y'_i h_{n,i}(x) \quad (1)$$

类似Lagrange插值,要求

$q_{n,i}(x)$, $h_{n,i}(x)$是2n+1次的多项式,且满足

$\begin{cases} q_{n,i}(x_j)=\delta_{ij} \\ q'_{n,i}(x_j)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} h_{n,i}(x_j)=0 \\ h'_{n,i}(x_j)=\delta_{ij} \end{cases}$ 这里 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

$i,j=0,1,2\dots\dots n$

$q_{n,i}(x)$、 $h_{n,i}(x)$, $i=0,1,2\dots\dots n$ 称为Hermite基函数。

$\begin{cases} q_{n,i}(x)= [1-2l_{n,i}'(x_i)(x-x_i)][l_{n,i}(x)]^2 & (2) \\ h_{n,i}(x)= (x-x_i)[l_{n,i}(x)]^2 \quad i=0, 1, 2\dots\dots, n. & (3) \end{cases}$

这里 $l_{n,i}(x)=\dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i q_{n,i}(x)+\sum_{i=0}^{n} y'_i h_{n,i}(x)$$

2n+1次Hermite插值多项式.

数表:	x_0	x_1
	y_0	y_1
	y_0'	y_1'

三次Hermite插值多项式(n=1, 2n+1=3) P209

$H_3(x)=y_0 q_{1,0}(x)+y_1 q_{1,1}(x)+y_0' h_{1,0}(x)+y_1' h_{1,1}(x)$ (4)

其中 $q_{1,0}(x)==[1+2(x-x_0)/(x_1-x_0)][(x-x_1)/(x_0-x_1)]^2$ (5)

$q_{1,1}(x)=[1+2(x-x_1)/(x_0-x_1)][(x-x_0)/(x_1-x_0)]^2$ (6)

$h_{1,0}(x)=(x-x_0)[(x-x_1)/(x_0-x_1)]^2$ (7)

$h_{1,1}(x)=(x-x_1)[(x-x_0)/(x_1-x_0)]^2$ (8)

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i q_{n,i}(x)+\sum_{i=0}^{n} y_i' h_{n,i}(x)$$

三次Hermite插值函数的构造(n=1, 2n+1=3)

已知数表：

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1
y'	y_0'	y_1'

$$l_{1,0}(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ l_{1,1}(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

构造三次Hermite插值多项式$H_3(x)$.

解：$H_3(x)=y_0 q_{1,0}(x)+y_1 q_{1,1}(x)+y_0' h_{1,0}(x)+y_1' h_{1,1}(x)$ (4)

其中 $q_{1,0}(x)==[1+2(x-x_0)/(x_1-x_0)][(x-x_1)/(x_0-x_1)]^2$ (5)

$q_{1,1}(x)=[1+2(x-x_1)/(x_0-x_1)][(x-x_0)/(x_1-x_0)]^2$ (6)

$h_{1,0}(x)=(x-x_0)[(x-x_1)/(x_0-x_1)]^2$ (7)

$h_{1,1}(x)=(x-x_1)[(x-x_0)/(x_1-x_0)]^2$ (8)

- 例1：求过0、1两点构造一个三次插值多项式$H_3(x)$,满足条件: $H_3(0)=1$, $H_3'(0)=1/2$, $H_3(1)=2$, $H_3'(1)=1/2$.

- 解： $x_0=0, x_1=1; y_0=1, y_1=2; y_0'=1/2, y_1'=1/2;$
- 由式(5)-(8)得

$q_{1,0}(x)=(2x+1)(x-1)^2$， $q_{1,1}(x)=(3-2x)x^2$

$h_{1,0}(x)=x(x-1)^2$ ， $h_{1,1}(x)=x^2(x-1)$

- $H_3(x)=(1+2x)(x-1)^2+2(3-2x)x^2+0.5(x-1)^2x+0.5(x-1)x^2$
$=-x^3+1.5x^2+0.5x+1$

法2 利用Newton差商插值构造 Hermite 插值多项式

已给数据表：

x	x_0	x_1	……	x_n
f(x)	f(x0)	f(x1)	……	f(xn)
f '(x)	f '(x0)	f '(x1)	……	f '(xn)

$H_{2n+1}(x_i)=y_i$

$H_{2n+1}'(x_i)=y'_i$

$i=0,1,2……n$

定义新点列 $z_{2i}=z_{2i+1}=x_i$，$(i=0,1,…,n)$,得：$z_0, z_1, z_2, …, z_{2n+1}$

定义 $f[z_{2i}, z_{2i+1}]=f'(x_i)$, $(i=0,1,…,n)$,构造差商表：

z	$f(z)$	1阶差商	2阶差商	$\cdots$	$2n$阶差商
$z_0=x_0$	$f(z_0)$	$f[z_0,z_1]\overset{\Delta}{=}f'(x_0)$	$f[z_0,z_1,z_2]$	$\cdots$	$f[z_0,z_1,\cdots,z_{2n+1}]$
$z_1=x_0$	$f(z_1)$	$f[z_1,z_2]$	$f[z_1,z_2,z_3]$	$\cdots$	
$z_2=x_1$	$f(z_2)$	$f[z_2,z_3]\overset{\Delta}{=}f'(x_2)$	$f[z_2,z_3,z_4]$	$\cdots$	
$z_3=x_1$	$f(z_3)$	$f[z_3,z_4]$	$f[z_3,z_4,z_5]$	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$z_{2n}=x_n$	$f(z_{2n})$	$f[z_{2n},z_{2n+1}]\overset{\Delta}{=}f'(x_n)$			
$z_{2n+1}=x_n$	$f(z_{2n+1})$				

2n+1次 Hermite 插值多项式为

$$H_{2n+1}(x)=f[z_0]+\sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0,\cdots,z_k](x-z_0)(x-z_1)\cdots(x-z_{k-1})$$

特别，三次Hermite插值多项式为(n=1, 2n+1=3)

$$H_3(x)=f[z_0]+f[z_0,z_1](x-z_0)+f[z_0,z_1,z_2](x-z_0)(x-z_1)+$$
$$+f[z_0,z_1,z_2,z_3](x-z_0)(x-z_1)(x-z_2)$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f[z_0,z_1,z_2](x-x_0)^2+$$
$$f[z_0,z_1,z_2,z_3](x-x_0)^2(x-x_1)$$

- 例1：求过0、1两点构造一个三次插值多项式$H_3(x)$,满足条件: $H_3(0)=1$, $H_3'(0)=1/2$, $H_3(1)=2$, $H_3'(1)=1/2$.

解：构造差商表

定义 $z_0=z_1=0$, $z_2=z_3=1$

z_i	$f(z_i)$	1阶差商	2阶差商	3阶差商
0	1	1/2	1/2	−1
0	1	1	−1/2	
1	2	1/2		
1	2			

$$H_3(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f[z_0,z_1,z_2](x-x_0)^2+$$
$$f[z_0,z_1,z_2,z_3](x-x_0)^2(x-x_1)$$

所求 $H_3(x)=1+(1/2)x+(1/2)x^2-x^2(x-1)$

四. 余项定理

P209

定理7-4 若f(x)在区间[a, b]存在2n+2阶导数,则其Hermite插值余项为:

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)[\omega_{n+1}^2(x)]}{(2n+2)!}\quad \xi\in(a,b)\quad (1)$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)……(x-x_n)$$

特别,三次Hermite插值余项为

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)[\omega_2^2(x)]}{4!}\quad \xi\in(a,b)\quad (10)$$

$$\omega_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$$

定理7-4　若f(x)在区间[a,b]存在2n+2阶导数,则其Hermite插值余项为:

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)[\omega_{n+1}^2(x)]}{(2n+2)!}\quad \xi\in(a,b)\quad (1)$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)$$

证明:

当$x=x_i, i=0,1,2\ldots\ldots$时,左右两端为零,公式成立.

以下考虑 $x\neq x_i$, $x\in[a,b]$。　因为在结点 $x_0,x_1,\ldots\ldots x_n$ 上

$\begin{cases} f(x_i)=H_{2n+1}(x_i) \\ f'(x_i)=H_{2n+1}'(x_i) \end{cases}$　所以 $\begin{cases} R_{2n+1}(x_i)=f(x_i)-H_{2n+1}(x_i)=0 \\ R_{2n+1}'(x_i)=f'(x_i)-H_{2n+1}'(x_i)=0, \end{cases}$

因此　$x_i(i=0,1\ldots\ldots n)$为$R_{2n+1}(x)$ 的二重零点。

$R_{2n+1}(x)$可设为:　　$R_{2n+1}(x)=k(x)\,[\omega_{n+1}(x)]^2$

$R_{2n+1}(x)$可设为:　　$R_{2n+1}(x)=k(x)\,[\omega_{n+1}(x)]^2$

- $k(x)$为待定函数。做辅助函数 $F(z)=f(z)-H_{2n+1}(z)-k(x)\,[\omega_{n+1}(z)]^2$
- $F(x)=0$,所以$z=x$是$F(z)$的一个零点，此外 $x_0\ldots\ldots x_n$都是$F(z)$的二重零点， $F(z)$在$[a,b]$上有n+2个零点。
- 由洛尔定理， $F'(z)$在$[a,b]$上至少有2n+2个零点,
- $F''(z)$在$[a,b]$上至少有2n+1个零点.依此类推,
- $F^{(2n+2)}(x)$在插值区间$[a,b]$中至少存在一个零点，设为ξ，即 $F^{(2n+2)}(\xi)=0$。
- 故有　$0=F^{(2n+2)}(\xi)=f^{(2n+2)}(\xi)-0-(2n+2)!k(x)$

注意$[\omega_n$ $k(x)=f^{(2n+2)}(\xi)/(2n+2)!$ ■项式, $H_{2n+1}(z)$是2n+1次多项式,

$$R_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)[\omega_{n+1}^2(x)]}{(2n+2)!}\quad \xi\in(a,b)$$

五. 一般插值

实际问题中还会有其它的插值问题,这类问题可用多种方法解决.

例2　已知数据表:

x	0	1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	y_0'	

P210，例7-5

求过0,1两点的插值多项式 $p(x)$,满足条件 $p(0)=y_0$，$p'(0)=y_0'$， $p(1)=y_1$,并估计余项。

解：法一）（基函数法)它有三个条件,故 $p(x)$可设为二次多项式

$$p(x)=y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_0'h_0(x)$$

这里，$L_0(x), L_1(x), h_0(x)$是基函数.

$$p(x)=y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_0'\,h_0(x)$$

要求 $L_0(x), L_1(x), h_0(x)$都是二次多项式, 且满足

对 x_0=0有　$L_0(0)=1$　$L_1(0)=0$　$h_0(0)=0$

　　　　　$L_0'(0)=0$　$L_1'(0)=0$　$h_0'(0)=1$

对 x_1=1有　$L_0(1)=0$　$L_1(1)=1$　$h_0(1)=0$

经计算,得　$L_0(x)=(-x-1)(x-1)=1-x^2$　　P 210, 例7-5

$L_1(x)=x^2$，　$h_0(x)=x(1-x)$

- 从而　$p(x)=y_0(1-x^2)+y_1x^2+y_0'(1-x)x$

法二）令 $p(x)=f(0)+f[0,1]x+a\,x(x-1)$, 这里

$$f(0)=y_0,\quad f[0,1]=\frac{y_1-y_0}{1-0}=y_1-y_0$$

从而　$p(x)=y_0+(y_1-y_0)\,x+a\,x(x-1)$

$p'(x)=y_1-y_0+a(x-1)+ax$，由 $p'(0)=y_0'$

得　$a=y_1-y_0-y_0'$

从而　$p(x)=y_0+(y_1-y_0)x+(y_1-y_0-y_0')x(x-1)$

法三）令　$p(x)=ax^2+bx+c$

由：$p(0)=y_0$, $p(1)=y_1$，$p'(0)=y_0'$

得：$c=y_0$，　$b=y_0'$，　$a=y_1-y_0-y_0'$

从而　$p(x)=(y_1-y_0-y_0')x^2+y_0'x+y_0$

法四）构造差商表

z_i	$f(z_i)$	1阶差商	2阶差商
0	$\underline{y_0}$	$\underline{y_0'}$	$\underline{y_1-y_0-y_0'}$
0	y_0	y_1-y_0	
1	y_1		

$$p(x)=f[z_0]+f[z_0,z_1](x-z_0)+f[z_0,z_1,z_2](x-z_0)(x-z_1)$$

所求多项式为: $p(x)=y_0+y_0'x+(y_1-y_0-y_0')x^2$

其余项表达式为 $R(x)=f(x)-p(x)=\dfrac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^2(1-x)$

$R(0)=R'(0)=R(1)=0$

- 设 $R(x)=k(x)(1-x)x^2$，$k(x)$ 待求, $x\neq0,1$；作辅助函数
- $g(t)=f(t)-p(t)-k(x)(1-t)t^2$，$g(t)$ 有三个零点：0、1 、x；
- 利用洛尔定理， $g'(t)$ 有三个零点：ξ_{x0}、 ξ_{x1} 、 0
- … , $g^{(3)}(t)$ 至少有一个零点ξ， 即 $g^{(3)}(\xi)=0$。
- 由此可得 $k(x)=f^{(3)}(\xi)/3!$

作业

习题 7
P232: 14