流体及流动模型

Abstract: 介绍流体的相关概念，流体本构方程的推导

Keywords: 牛顿流体、非牛顿流体

1 Introduction

我们一直都问，学数学有什么用？这时我们应当知道的是那些地方可以用到数学，再者就是如何用数学去解决实际问题。而我们所学的数学知识就是联系这两点的桥梁。数学好比是鱼身子，或者说鱼干，而从实际中提炼出数学问题是鱼头，**应用数学方法或理论去解决实际问题是鱼尾。我们所应用的数学建模恰好就是这样的一门课程，可以贯穿问题的所有环节。简而言之，数学建模就是应用数学理论，根据实际问题的内在规律，做出必要的简化假设，得到一个数学结构。**数学向各个领域的渗透是当代数学发展的一个重要特点，更是我们学习数学建模的必要。

流体之所以异于固体，在于液体比较容易移动，要想改变固体的形状，必须要施加一定的力，也就是克服固体间不同的层之间的摩擦力。然而要改变流体的形状，相当得容易. 对于流体的运动，流体间的摩擦力（切向力）与流体的粘性这一性质有关.如果没有切向力，那么流体与固体壁面间的界面上存在着相对的切向速度差，这即存在滑移，相反，真实的流体中分子间引力的存在，使得流体附在固壁上并产生切应力。在流体的很薄的一层中速度的变化很大，如果来讲，可以这样说，水平方向的速度沿垂直方向的变化很大.

那么什么是粘性：考虑两个非常长的平行平板间的流体运动，其中一块静止，另一块平板则做等速运动，两平板间的距离为h.从实验结果来看，流体附在两个壁面上，这样，下壁面的速度为零，上平板上的流体的速度等于该平板的速度，而且平板间的流体的速度分布是线性的，则流体的速度正比于它到下平板的距离y。即$u(y) = y\frac{U}{h}$.为了维持运动，必须对流体施加一个力，这个力与流体的摩擦力相平衡（平板上单位面积上的作用力）$\frac{du}{dy} = \frac{U}{h}$ 。实验表明，这样的一个力应该正比于上平板的速度，反比于两平板的距离. 这样单位面积上的力，记为切应力$\mu\frac{du}{dy} = \tau$. 这个比例系数，取决于流体的性质,这也是分子间的作用力（粘性系数），对于一些流体，如水和酒精，很小，然而对于另外一些流体，如石油等，则非常大。

这个定律称之为Newton 摩擦力定律，满足这个关系（剪切应力和剪切变形速率）的流体，称牛顿流体. 否则称之为非牛顿流体.这个系数一般和流体的温度有关，所以在有些情况下把该系数定义为温度的函数，而且液体粘度会随着温度的升高而迅速减小.比较典型的表达式有$\mu(T)=exp(-\frac{T}{1+\beta T}), \mu(T)=\mu_\infty exp(-\frac{T-T_w}{T_w-T_\infty})$ 等等（M.M.Khader, A.M.Megahed. Ukr.J.Phys.2013,58(4)）而气体的粘度则随温度变化的规律表现出相反的趋势.而且，牛顿流体和非牛顿流体体现了不同的特征。某些原本被认为是牛顿流体的介质在精细的观测或特殊的情况下也被发现存在非牛顿流体的特性。例如：在水锤这一类瞬变运动中，由于特征时间比较短，水也会在瞬间呈现出弹性等非牛顿流体才可能存在的特征。在非牛顿现象中，比较典型的是黏弹性流体的Weissenberg效应，当即当圆杆旋转时,牛顿流体的液面向下凹, 但黏弹性流体的液面会沿圆杆向上爬升。液滴飞溅形成的王冠也有不同的特征。

尽管自然界的流动是如此地复杂，但是控制流体运动的基本物理定律却是简单的质量守恒、动量守恒和能量守恒定律。体积力（质量力）作用于流体质量上的非接触力，如重力（地心引力）；

面积力：为流体或者固体通过接触面施加在另一部分流体上的力，它是流体在运动过程中作用在流体内部假想的面积上的由于流体的变形和相互作用而在流体的内部产生的各种应力。在方程中出现时间说明密度是可以随着空间和时间变化的.$\rho=\rho_\infty(1-\beta(T-T_\infty))$. (Int.J.heat mass Transfer,28(1)(1985)199-206) .

Figure 1: Non-Newtonian fluids

Figure 2: Newtonian fluids

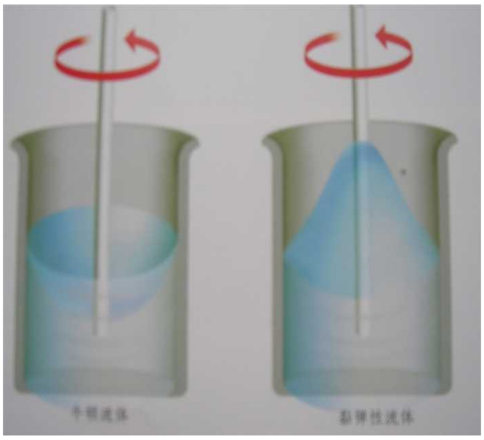

Figure 3: Weissenberg效应

2 质量守恒

在涉及到微分方程或者偏微分方程的模型构建的过程中，经常用到两个经典的数学公式

$$
\begin{aligned}
&f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x);\\
&f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

这两个公式之所以有用，在于一是线性化，二是相似替换。

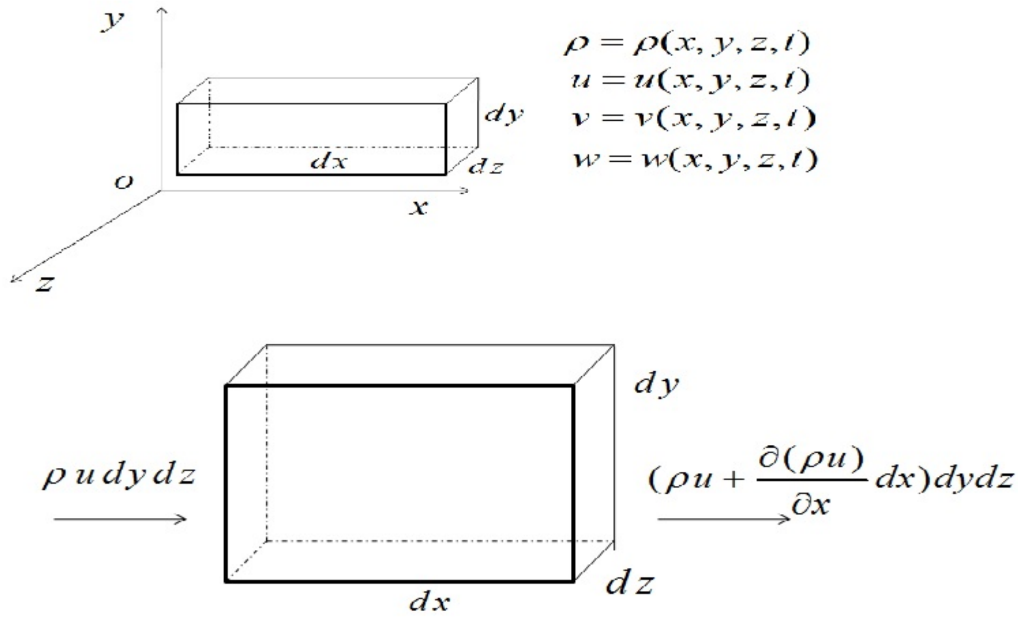

Figure 4: The model of continuum fluid

考虑在空间右手直角坐标系中，一个无穷小的元素空间，保持空间位置不变，与此同时有流体从该空间通过.速度和流体的密度可以看作是空间坐标和时间的函数，如图所示。则单位时间内该空间体中流体变化值等于流体的流入流出之差。

x 方向的流体的变化值等于从右侧面的流入与左侧的流体流出的差：

$$(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx) dydz - \rho udydz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dxdydz \tag{2.2}$$

类似，在y, z方向的流体的变化值为：

$$(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy) dxdz - \rho vdxdz = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dydxdz \tag{2.3}$$

和

$$(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz) dxdy - \rho wdxdy = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dzdxdy \tag{2.4}$$

则该空间内流体的总的变化值为：

$$(\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}) dzdxdy = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz \tag{2.5}$$

则该方程表示为：

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{2.6}$$

或者

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\bullet(\rho\mathbf{V})=0 \tag{2.7}$$

对该问题，我们可以从另外一个角度分析，得到连续性方程的另外一种表示形式。与刚才考虑的固定在空间中无限小的体积不同，现在考虑另外一种有限控制体，同样也是保持其空间位置不发生改变，但是形状是任意的，保持不变，流体从中流过。

这样流出该该控制体表面的流体的流量等于控制体内质量随时间的变化率。

根据其物理意义，可知流经小的面积的流体的流量为

$$\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.8}$$

对应于整个表面的流量为

$$\int\int_S\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.9}$$

应该等于其该控制体内质量的减少值

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_V\rho dV \tag{2.10}$$

则可以得到如下等式

$$\int\int_S\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}+\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_V\rho dV=0 \tag{2.11}$$

这样就给出了积分形式的连续性方程。

对于上述问题，根据高斯公式有

$$\int\int_S\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=\int\int\int_V\nabla\cdot(\rho\ \mathbf{V})dV=-\int\int\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV \tag{2.12}$$

移项可得：

$$\int\int\int_V\nabla\cdot(\rho\ \mathbf{V})+\frac{\partial\rho}{\partial t}dV=0. \tag{2.13}$$

由于积分体积的任意性，则上述被积函数为零，即

$$\nabla\cdot(\rho\ \mathbf{V})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{2.14}$$

这样从另外一个角度验证了连续性方程的一致性。

对于这两个不同的形式：一种是考虑无限小的体积，另外是一个有限的控制体，都

是有流体从该控制体流过。都是考虑空间的位置保持不变，即速度、密度等都是关于坐标x, y, z和时间t的函数，这也是我们所考虑的欧拉坐标系。

另外一种情况是考虑无限小的控制体和具有任意形状的控制体随着流体的运动，在这种情况下，考虑控制体内的粒子不发生改变，要跟踪每个粒子的速度,在这种情况下，可以给每个粒子一个标记，这种情况对应于拉格朗日坐标系。

动量方程

主要应用牛顿第二定律：$F = ma$,这里作用在空间体上的力包括体积力和面积力.合力F的方向,不一定沿截面的法线方向,若所在微面元的面积为dS,则所受面力大小为FdS.作用与垂直于x, y, z平面的应力分别为τ_x, τ_y, τ_z. 而作用在每个平面上的力可以分解为$\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}; \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}; \tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz}$

x 方向上的力

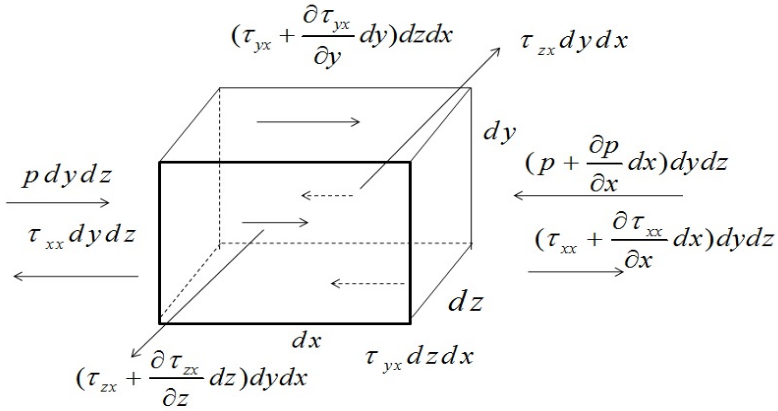

Figure 5: The force in x direction

x 方向的合力(面积力和体积力)

$$F_x = (\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x})dxdydz + \rho f_x dxdydz \tag{2.15}$$

空间体内的流体质量

$$m = \rho dxdydz \tag{2.16}$$

加速度为x方向的速度的导数

$$a_x = \frac{Du(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w \tag{2.17}$$

根据公式之间的关系，可以得到如下的表达式：

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w)=(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial x})+\rho f_x \tag{2.18}$$

类似的，可以计算其他两个方向y,z的动量方程：

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w)=(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y})+\rho f_y \tag{2.19}$$

$$\rho(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w)=(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial z})+\rho f_z \tag{2.20}$$

这里应力表达式可以表示为：

$$\tau_{xy}=\mu(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}),\tau_{xx}=\lambda(\nabla\bullet\mathbf{V})+2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.21}$$

其他类似。这就是经典的Navier-Stokes流体方程。描述流体运动的方程都可以用这两个方程来表达。主要应用了质量守恒和动量守恒以及Taylor公式。

那么，如何对这样的一组方程进行求解，一般情况下，根据特殊的边界条件和流体的流动情况。可以直接把实际的速度、黏性系数以及根据实际的边界条件，带入到上述方程中进行求解，这样来进行计算，一般要借助到相应的流体计算软件。而在很多情况下，则可以把上述问题直接转化成一个数学问题来进行处理，这就需要无量纲化。而无量纲化的过程一般情况下可以有两个应用，一是根据实际问题建立数学模型，二是把物理、力学问题转化成数学问题

GBKsong