第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量
  - 基本解、基
  - 基本可行解、可行基
  - 最优基本可行解、最优基
  - 非退化基本可行解
  - 退化基本可行解
- 基本定理

线性规划的标准形：

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \longrightarrow \min S = CX$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} AX = b \\ \\ X \geq 0 \end{array}$$

$$(LP)\ \min S = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$C = (c_1,$ … $(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$

$X = (x_1,$ … $= (a_{ij})_{m\times n}$

回溯：

消元法

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=8 \\ x_1+2x_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+2x_2=5 \end{cases}$$

初等行变换

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ x_2-x_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_3=3 \\ x_2-x_3=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

左乘逆矩阵

$$B^{-1}\underset{B}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

消元法 ⟷ 初等行变换 ⟷ 左乘逆矩阵

一. 基本概念：

$$(LP)\ \min S = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$C = (c_1,$

$X = (x_1$

$b = (b_1,$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

设$R(A) = m(m \leq n)$

因此A中有m列线性无关，不妨设前m列线性无关

$$A = (\overset{\text{基列}}{\underbrace{p_1, p_2, \cdots, p_m}_{B(\text{可逆})}}, \overset{\text{非基列}}{\underbrace{p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots, p_n}_{N(\text{非基矩阵})}}) = (B, N)$$

↓

称为(LP)的一个基（基矩阵）

注：(LP)的基不惟一。

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$R(A) = 2$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基

$$B_1 = (P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_4 = (P_2, P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = (P_1, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_5 = (P_3, P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = (P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_6 = (P_1, P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 不是基

$$(LP)\quad \min S = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$$AX = b$$

$$\downarrow \qquad (B, N)$$

$$\left(\underbrace{p_1, p_2, \cdots, p_m}_{\text{基列}}, \underbrace{p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots, p_n}_{\text{非基列}}\right)\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{matrix}\right\} X_B \\ \left.\begin{matrix}x_{m+1}\\ x_{m+2}\\ \vdots\\ x_n\end{matrix}\right\} X_N\end{pmatrix} = b$$

$$\downarrow$$

$$(B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b$$

基变量：与基列相对应的分量称为基变量

非基变量：与非基列相对应的分量称为非基变量

注释：基变量，非基变量由基列，非基列来确定。

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$

$R(A) = 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$A = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

该(*LP*)有5个基, 基列决定基变量：

$B_1 = (P_1, P_2)$ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$B_2 = (P_1, P_3)$ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$B_3 = (P_2, P_3)$ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$B_4 = (P_2, P_4)$ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$B_5 = (P_3, P_4)$ $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$$AX=b \Rightarrow (B,N)\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=b \Rightarrow BX_B+NX_N=b$$

$$\Rightarrow X_B+B^{-1}NX_N=B^{-1}b \Rightarrow \boxed{X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N}$$

例： $\begin{cases} x_1+x_2+0x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4=2 \end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix}1 & & 1 & 0 & & 1\\ & B & & & N & \\ 1 & & 2 & 2 & & 1\end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad R(A)=2$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1=0+2x_3-x_4 \\ x_2=1-2x_3-0x_4 \end{cases}$$

$$AX = b \Rightarrow (B,N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b \Rightarrow BX_B + NX_N = b$$

$$\Rightarrow X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b \Rightarrow \boxed{X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N}$$

令：$X_N = 0$ 则：$X_B = B^{-1}b \Rightarrow X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

基本解： $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是$AX = b$的解，称为(LP)

关于基B的基本解.

注：基本解完全由基来决定，一个基对应一个基本解。

$$AX=b \Rightarrow (B,N)\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix}=b \Rightarrow BX_B+NX_N=b$$

$$\Rightarrow X_B+B^{-1}NX_N=B^{-1}b \Rightarrow \boxed{X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N}$$

例： $\begin{cases} x_1+x_2+0x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+2x_3+x_4=2\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\ &B& &N\\ 1&2&2&1\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $R(A)=2$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{pmatrix}}$$

$$\Big\downarrow\ x_3=x_4=0$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

基本解

$$X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$ $\quad R(A)=2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \end{array} \qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基, 5个基对应5个基本解：

$B_1 = (P_1, P_2)$ $\quad X^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^1 = (0, 1, 0, 0)^T$

$B_2 = (P_1, P_3)$ $\quad X^2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^2 = (1, 0, 1/2, 0)^T$

$B_3 = (P_2, P_3)$ $\quad X^3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^3 = (0, 1, 0, 0)^T$

$B_4 = (P_2, P_4)$ $\quad X^4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^4 = (0, 1, 0, 0)^T$

$B_5 = (P_3, P_4)$ $\quad X^5 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $\quad X^5 = (0, 0, 1/2, 1)^T$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = B_2^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基⬅
  - 最优基本可行解、最优基
  - 非退化基本可行解
  - 退化基本可行解
- 基本定理

$$(LP)\ \min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

基本解： $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是$AX = b$的解，称为(LP)

基：

关于基B的基本解.

基本可行解： 若 $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \geq 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，则称$X$为$(LP)$关于

可行基：

可行基B的基本可行解。

（可行域的顶点）

$$AX=b \Rightarrow (B,N)\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=b$$

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}\geq 0$$

$$\Rightarrow X_B+B^{-1}NX_N=B^{-1}b \Rightarrow X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$$

例： $$\begin{cases}x_1+x_2+0x_3+x_4=1\\x_1+2x_2+2x_3+x_4=2\end{cases}\qquad A=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&1\\1&2\end{matrix}}_{B}\ \underbrace{\begin{matrix}0&1\\2&1\end{matrix}}_{N}\right)\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad R(A)=2$$

$$\Downarrow\ x_3=x_4=0$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

基本解

基本可行解

B是可行基

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$$

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$　　$R(A)=2$

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2\end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\quad j=1,2,3,4$$

$$A=\begin{array}{cccc}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\\ P_1\quad P_2\quad P_3\quad P_4\end{array}\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基, 5个基对应都是基本可行解：

$B_1=(P_1,P_2)$　$X^1=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^1=(0,1,0,0)^T$

$B_2=(P_1,P_3)$　$X^2=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^2=(1,0,1/2,0)^T$

$B_3=(P_2,P_3)$　$X^3=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^3=(0,1,0,0)^T$

$B_4=(P_2,P_4)$　$X^4=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^4=(0,1,0,0)^T$

$B_5=(P_3,P_4)$　$X^5=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$　$X^5=(0,0,1/2,1)^T$

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基✓
  - 最优基本可行解、最优基⬅
  - 非退化基本可行解
  - 退化基本可行解
- 基本定理

$$(LP)\quad \min S = CX$$

$$AX = b \rightarrow \boxed{X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N}$$

$$X \geq 0$$

$$S = CX = (\underbrace{c_1, c_2, \cdots, c_m}_{C_B}, \underbrace{c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots, c_n}_{C_N}) \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right) \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}}\right\} X_B \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}}\right\} X_N \end{matrix}$$

$$= (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = C_B X_B + C_N X_N$$

$$= C_B(B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N$$

$$= C_B B^{-1}b - C_B B^{-1}NX_N + C_N X_N$$

$$= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$$

$$\boxed{S = CX = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N}$$

$$\min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \ge 0$$

定理1-1（最优性判别定理）

对于 (LP) 的基 B，若有 $X_B^* = \underline{B^{-1}b \ge 0}$ 且 $C - C_B B^{-1}A \ge 0$ $(\underline{C_N - C_B B^{-1}N \ge 0})$ ，则基本可行解 $X^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$是$(LP)$的最优解，称为**最优基本可行解**，$B$称为**最优基**。最优值为 $C_B B^{-1}b$ 。

证明：对 $\forall X \in D$ 有

$$S = CX = C_B B^{-1}b + \underset{\ge 0}{\underline{(C_N - C_B B^{-1}N)X_N}}$$

$$\ge C_B B^{-1}b = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = CX^* \quad \therefore X^*\text{是最优解}$$ ■

$$S = CX = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$$

$$\min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \ge 0$$

证明：$C - C_B B^{-1} A \ge 0 \Leftrightarrow C_N - C_B B^{-1} N \ge 0$

$$\begin{aligned} C - C_B B^{-1} A &= (C_B, C_N) - C_B B^{-1}(B, N) \\ &= (C_B, C_N) - (C_B,\ C_B B^{-1} N) \\ &= (0,\ C_N - C_B B^{-1} N) \ ■ \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

定理1-1（最优性判别定理）

对于（LP）的基 B，若有 $X_B^* = \underline{B^{-1} b \ge 0}$ 且 $\underline{C - C_B B^{-1} A \ge 0}$ $\underline{(C_N - C_B B^{-1} N \ge 0)}$ ，则基本可行解 $X^* = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是(LP)的最优解，称为**最优基本可行解**，B称为**最优基**。

检验数向量　　非基变量检验数向量

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$$

例： $\min S=x_1+x_2+2x_3+2x_4$　　$R(A)=2$

$$\begin{cases}x_1+x_2+0x_3+x_4=1\\x_1+2x_2+2x_3+x_4=2\end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\quad j=1,2,3,4$$

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}P_1&P_2&P_3&P_4\end{array}\end{array}\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基, 5个基对应都是基本可行解：目标值：

$B_1=(P_1,P_2)$	$X^1=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$	$X^1=(0,1,0,0)^T$	1
$B_2=(P_1,P_3)$	$X^2=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$	$X^2=(1,0,1/2,0)^T$	2
$B_3=(P_2,P_3)$	$X^3=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$	$X^3=(0,1,0,0)^T$	1
$B_4=(P_2,P_4)$	$X^4=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$	$X^4=(0,1,0,0)^T$	1
$B_5=(P_3,P_4)$	$X^5=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$	$X^5=(0,0,1/2,1)^T$	3

$X^1,X^3,X^4=(0,1,0,0)^T$ 是最优解　　　最优目标值：1

B_1, B_3, B_4　都是最优基

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$ $\qquad R(A)=2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\quad j=1,2,3,4$$

$$A=\begin{pmatrix}\underset{B}{\begin{matrix}1&1\\1&2\end{matrix}}&\underset{N}{\begin{matrix}0&1\\2&1\end{matrix}}\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\geq 0$$

$X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ 是基本可行解，B是可行基。

$$C=(1,1,2,2)\quad C_B=(1,1)\quad C_N=(2,2)$$

$$\because C-C_BB^{-1}A=(1,1,2,2)-(1,1)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&2&1\end{pmatrix}=(0,0,2,1)\geq 0$$

$\therefore X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$ 是最优基本可行解，B是最优基。最优目标值:1

$$\because C_N-C_BB^{-1}N=(2,2)-(1,1)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}\,:\,C_BB^{-1}b=(1,1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1$$

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基✓
  - 最优基本可行解、最优基✓
  - 非退化基本可行解
  - 退化基本可行解
- 基本定理

对比概念： $\because R(A)=m \ \therefore A=(B,N), B-$可逆

$B-$基(可逆)	$X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}-$基本解$(AX=b)$
$B-$可行基	$X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}-$基本可行解，$B^{-1}b\ge 0$ $(AX=b, X\ge 0)$
$B-$最优基	$X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}-$最优基本可行解 $B^{-1}b\ge 0,\quad C-C_BB^{-1}A\ge 0$

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基✓
  - 最优基本可行解、最优基✓
  - 非退化基本可行解 ⬅
  - 退化基本可行解
- 基本定理

非退化的基本可行解：

若基本可行解 $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$中，$B^{-1}b > 0$，则称该基本可行解为非退化基本可行解。

退化的基本可行解：

若基本可行解$X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$中，$B^{-1}b \geq 0$, 且$B^{-1}b$中至少有一个分量为 0，则称该基本可行解为退化基本可行解。

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$ $\quad R(A) = 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 \overset{B}{\ } & 2 & 2 \overset{N}{\ } & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是退化的基本可行解，B是可行基。

$$C = (1, 1, 2, 2) \quad C_B = (1, 1) \quad C_N = (2, 2)$$

$$\because C - C_B B^{-1} A = (1, 1, 2, 2) - (1,1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 2, 1) \geq 0$$

$\therefore X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是退化的最优基本可行解，B是最优基。

$$\because C_N - C_B B^{-1} N = (2, 2) - (1,1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (2, 1) \geq 0$$

$$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$$

例： $\min S = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2\end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\quad j = 1,2,3,4$$

$$R(A) = 2$$

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}P_1 & P_2 & P_3 & P_4\end{array}\end{array}\qquad b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

该(LP)有5个基, 5个基对应都是基本可行解：

$B_1 = (P_1, P_2)$ $X^1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $X^1 = (0,1,0,0)^T$ 退化

$B_2 = (P_1, P_3)$ $X^2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $X^2 = (1,0,1/2,0)^T$ 非退化

$B_3 = (P_2, P_3)$ $X^3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $X^3 = (0,1,0,0)^T$ 退化

$B_4 = (P_2, P_4)$ $X^4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $X^4 = (0,1,0,0)^T$ 退化

$B_5 = (P_3, P_4)$ $X^5 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ $X^5 = (0,0,1/2,1)^T$ 非退化

$X^1, X^3, X^4 = (0,1,0,0)^T$ 是最优解 退化

$B_1,\ B_3,\ B_4$ 都是最优基

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基✓
  - 最优基本可行解、最优基✓
  - 非退化基本可行解✓
  - 退化基本可行解

➡ 基本定理

基本定理： $(LP)\ \min S = CX$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

对于线性规划问题的标准形有以下两个结论成立：

1. 若存在一个可行解，则必存在一个基本可行解；
2. 若存在一个最优解，则必存在一个最优基本可行解

注释：

1. 若线性规划的可行域非空，则一定有一个顶点；
2. 若线性规划有最优解，则它一定可以在可行域的一个顶点上达到。

第一章 线性规划

第二节 基本概念和基本定理

- 基本概念
  - 基变量、非基变量✓
  - 基本解、基✓
  - 基本可行解、可行基✓
  - 最优基本可行解、最优基✓
  - 非退化基本可行解✓
  - 退化基本可行解
- ✓ 基本定理

例： $\min Z = -3x_1 - x_2 - 2x_3$　找出所有的基本解，基本可行解，并确定最优解。

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 10 \\ 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_6 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B_1 = (P_1, P_2, P_3)$ $(|B_1| \neq 0)$ ➡ 基本解：$X_1 = (0, \frac{16}{3}, -\frac{7}{6}, 0, 0, 0)^T$

$$B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16/3 \\ -7/6 \end{pmatrix} \qquad B_4^{-1}b = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ -4 \\ 21/4 \end{pmatrix}$$

$B_4 = (P_1, P_2, P_6)$ $(|B_4| \neq 0)$ ➡ 基本解：$X_4 = (\frac{7}{4}, -4, 0, 0, 0, \frac{21}{4})^T$

例： $\min Z = -3x_1 - x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 10 \\ 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_6 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = (0, \frac{16}{3}, -\frac{7}{6}, 0, 0, 0)^T$$

$$X_4 = (\frac{7}{4}, -4, 0, 0, 0, \frac{21}{4})^T$$

16个基本解：

$X =$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
X_2	0	10	0	-7	0	0
X_3	0	3	0	0	7/2	0
X_4	7/4	-4	0	0	0	21/4
X_5	0	0	-5/2	8	0	0
X_6	0	0	3/2	0	8	0
X_7	1	0	-1/2	0	0	3
X_8	0	0	0	3	5	0
X_9	5/4	0	0	-2	0	15/4
X_{10}	0	3	-7/6	0	0	0
X_{11}	0	0	-5/2	8	0	0
X_{12}	0	0	0	3	5	0
X_{13}	3/4	0	0	0	2	9/4
X_{14}	0	10	0	-7	0	0
X_{15}	0	0	0	0	7/2	0
X_{16}	0	0	3/2	0	8	0

例：

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~~$X_1 = (0, \frac{16}{3}, -\frac{7}{6}, 0, 0, 0)^T$~~

16个基本解：**7个基本可行解：**

$X =$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
~~X_2~~	~~0~~	~~10~~	~~0~~	~~-7~~	~~0~~	~~0~~
X_3	0	3	0	0	7/2	0
~~X_4~~	~~7/4~~	~~-4~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~21/4~~
~~X_5~~	~~0~~	~~0~~	~~-5/2~~	~~8~~	~~0~~	~~0~~
X_6	0	0	3/2	0	8	0
~~X_7~~	~~1~~	~~0~~	~~-1/2~~	~~0~~	~~0~~	~~3~~
X_8	0	0	0	3	5	0

$X =$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
~~X_9~~	~~5/4~~	~~0~~	~~0~~	~~-2~~	~~0~~	~~15/4~~
~~X_{10}~~	~~0~~	~~3~~	~~-7/6~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~X_{11}~~	~~0~~	~~0~~	~~-5/2~~	~~8~~	~~0~~	~~0~~
X_{12}	0	0	0	3	5	0
X_{13}	3/4	0	0	0	2	9/4
~~X_{14}~~	~~0~~	~~10~~	~~0~~	~~-7~~	~~0~~	~~0~~
X_{15}	0	3	0	0	7/2	0
X_{16}	0	0	3/2	0	8	0

例：

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0\\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6\end{matrix}\end{array}\quad b=\begin{pmatrix}9\\10\\0\end{pmatrix}$$

$X_3=X_{15}\qquad X_6=X_{16}\quad X_8=X_{12}$

但 X_3 相应的基：$B_3=(P_1,P_2,P_5)$

X_{15} 相应的基：$B_{15}=(P_2,P_5,P_6)$

即不同的基对应相同的基本可行解。

7个基本可行解：

$X=$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
X_3	0	3	0	0	7/2	0
X_6	0	0	3/2	0	8	0
X_8	0	0	0	3	5	0

$X=$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
~~X_{12}~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~3~~	~~5~~	~~0~~
X_{13}	3/4	0	0	0	2	9/4
~~X_{15}~~	~~0~~	~~3~~	~~0~~	~~0~~	~~7/2~~	~~0~~
~~X_{16}~~	~~0~~	~~0~~	~~3/2~~	~~0~~	~~8~~	~~0~~

例： $\min Z = -3x_1 - x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 10 \\ 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 - x_6 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \end{array} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7个基本可行解：4个不同的基本可行解：

	$X =$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
-3	X_3	0	3	0	0	7/2	0
-3	X_6	0	0	3/2	0	8	0
0	X_8	0	0	0	3	5	0

	$X =$	$(x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6)$
-9/4	X_{13}	3/4	0	0	0	2	9/4

X_3, X_6是最优解，$\min Z = -3$