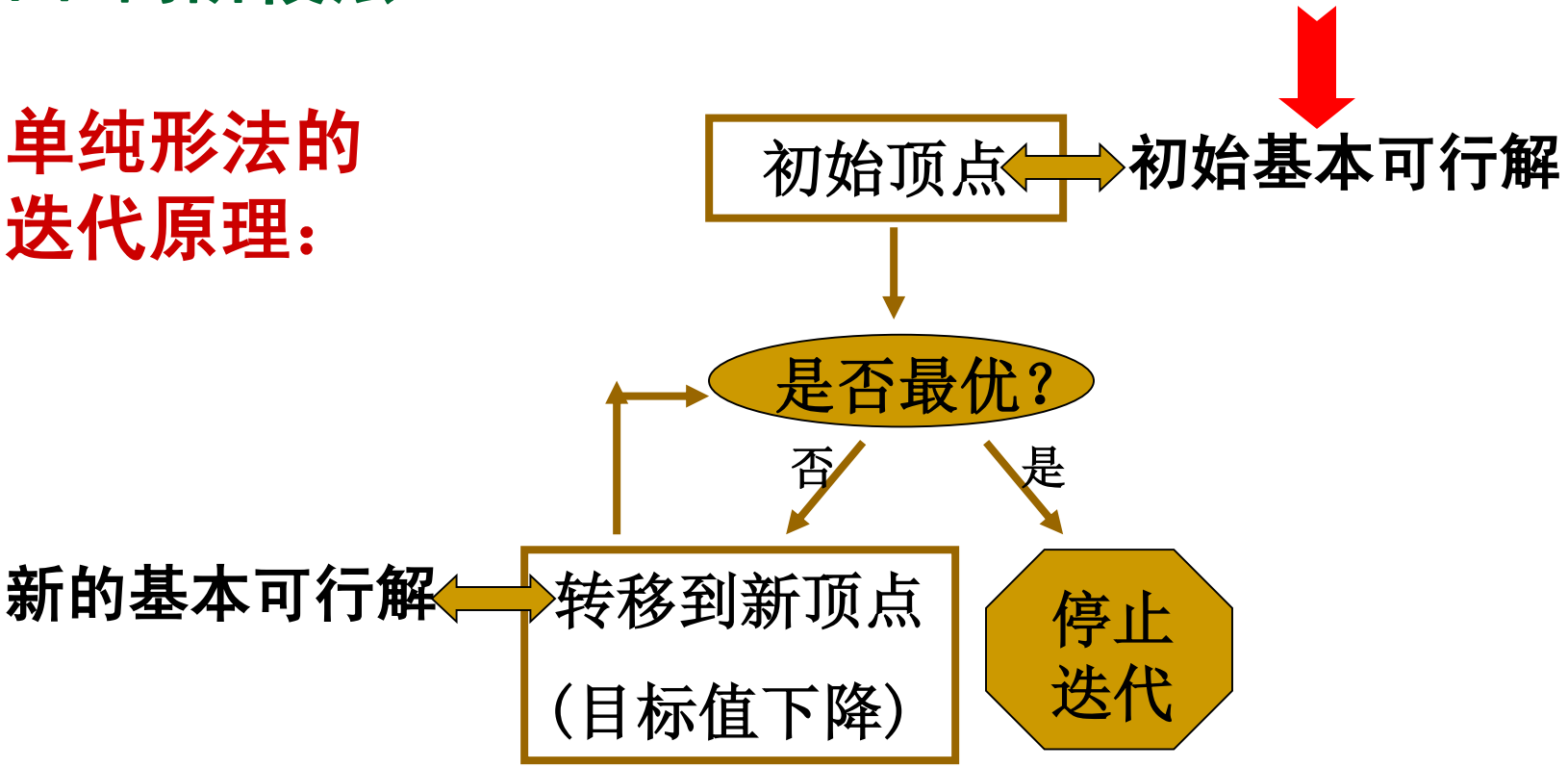
# 第一章 线性规划

## 第四节 单纯形法

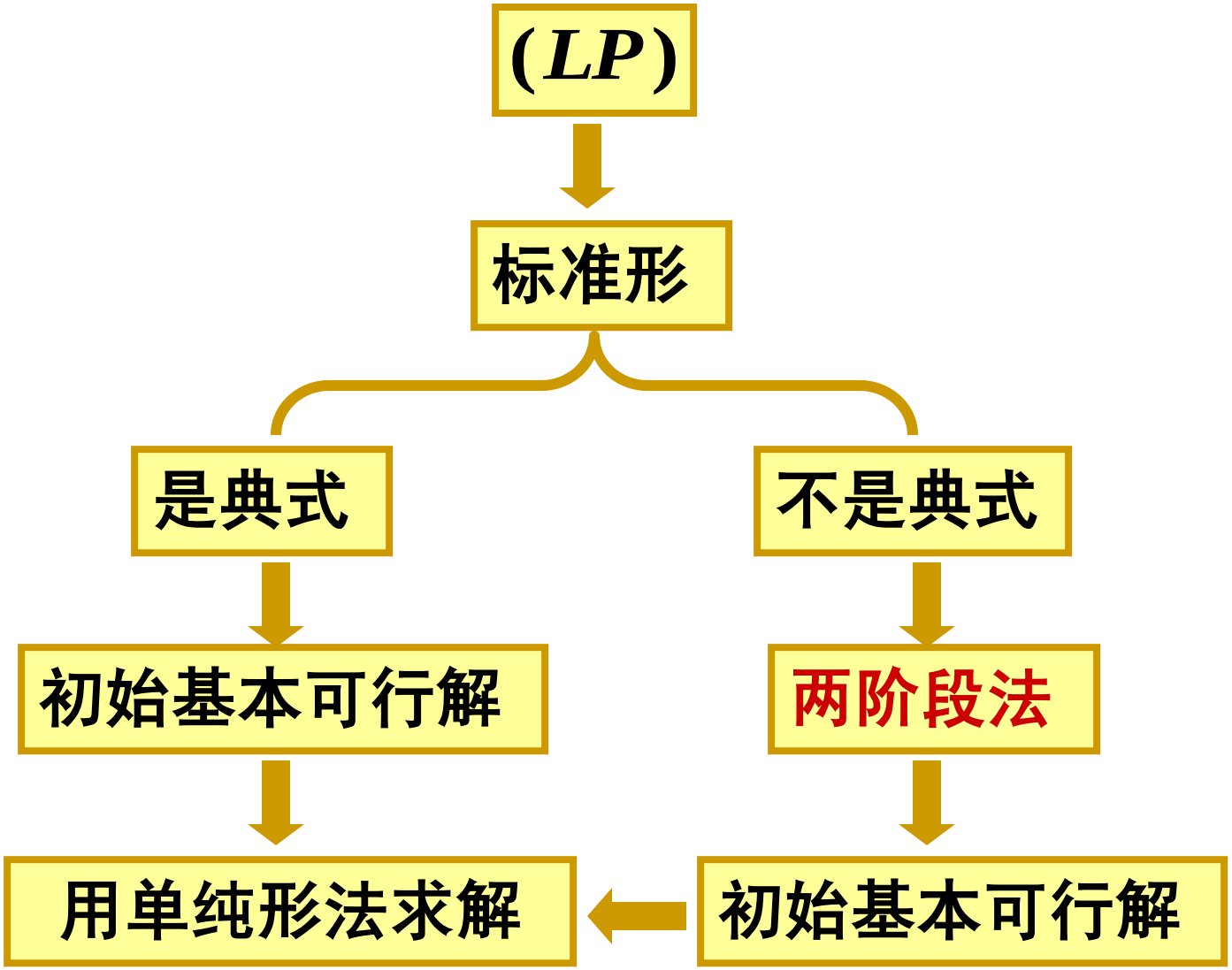
- 典式
- 迭代原理
- 单纯形法举例
- 两阶段法

# 四. 两阶段法：

**单纯形法的迭代原理：**



# 何时使用两阶段法：



## 例1-11

$$\max S = x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

标准形 →

$$\min(-S) = -x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

↓

以 $x_4, x_5$ 为基变量的典式

↓

$$X^0 = (0,0,0,10,5)^T$$

↓

用**单纯形法**求解

**注意：还有很多标准形不是典式**

**例：**

$$\min S = 4x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

→ 用**两阶段法**求解

## 两阶段法的思想：

**两阶段法：**

- **第一阶段：** 建立辅助($LP$)，求出原($LP$)的一个初始基本可行解。
- **第二阶段：** 再用单纯形法去求原($LP$)的最优解。

**第一阶段：** 建立辅助$(LP)$，求原$(LP)$的一个初始基本可行解。

原$(LP)$ → 辅助$(LP)$ $\min Z = \sum_{i=1}^{m} y_i$

$$\min S = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

→

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots n \\ y_i \geq 0, i = 1,2,\cdots m \end{cases}$$

→ 人工变量

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$AX + Y = b$$

$$X \geq 0, Y \geq 0$$

↓

典式 $X^0 = (0,0,\cdots,0,b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$

↓

用单纯形法求解

## 辅助(LP)

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i \quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+y_1=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+y_2=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+y_m=b_m \\ x_j\geq 0, j=1,2,\cdots n, y_i\geq 0, i=1,2,\cdots m \end{cases}$$

$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$

| | | | 0 | 0 | | 0 | 1 | 1 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_m$ |
| $C_B$ | $y_{0j}$ | $-\sum_{i=1}^{m} b_i$ | $-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$ | $-\sum_{i=1}^{m} a_{i2}$ | $\cdots$ | $-\sum_{i=1}^{m} a_{in}$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 0 |
| 1 | $y_1$ | $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | 1 | 0 | $\cdots$ | 0 |
| 1 | $y_2$ | $b_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | 0 | 1 | $\cdots$ | 0 |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | | | | | | | |
| 1 | $y_m$ | $b_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 1 |

初始单纯形表

用单纯形法求得辅助问题的最优解。

辅助$(LP)$ $\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$ 设辅助$(LP)$的最

$AX+Y=b$

$X\geq 0, Y\geq 0$

$Y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots$

则 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* \geq 0$

原$(LP)$

$\min S=CX$

$AX=b$

$X\geq 0$

**辅助$(LP)$的最优解与原$(LP)$的初始基本可行解的关系：**

1）若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^*>0$，则原$(LP)$无可行解。

**反证法：**

若原$(LP)$有可行解 $\overline{X}$，则 $A\overline{X}=b, \overline{X}\geq 0$

$\therefore \begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X} \\ 0 \end{pmatrix}$ 是辅助$(LP)$的可行解。

而$0=\sum_{i=1}^{m} \overline{y}_i=\overline{Z}<Z^*$，矛盾。所以原$(LP)$无可行解。

辅助$(LP)$ $\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$ 设辅助$(LP)$的最

$AX+Y=b$

$X\geq 0, Y\geq 0$

$Y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots$

则 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* \geq 0$

原$(LP)$

$\min S=CX$

$AX=b$

$X\geq 0$

**辅助$(LP)$的最优解与原$(LP)$的初始基本可行解的关系：**

1）若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^*>0$，原$(LP)$无可行解。

2）若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^*=0$，可得到原$(LP)$的一个初始基本可行解。

$\because$ 每个$y_i^*\geq 0$ $\therefore y_i^*=0, i=1,2,\cdots,m,$ 即$Y^*=0$

$\therefore AX^*+Y^*=b$ 且$X^*\geq 0$ $\rightarrow$ $AX^*=b$, $X^*\geq 0$ $\rightarrow$ $X^*$是原$(LP)$的可行解。

辅助$(LP)$ $\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$ 设辅助$(LP)$的最优解为$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$

$$AX+Y=b$$

$$X\geq 0, Y\geq 0$$

$$Y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T$$

则 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* \geq 0$

**辅助$(LP)$的最优解与原$(LP)$的初始基本可行解的关系：**

1）若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$，原$(LP)$无可行解。

2）若$Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^*=0$，可得到原$(LP)$的一个初始基本可行解。

$1^\circ$ 在辅助$(LP)$的最优解 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ 中，若 $y_i^*=0, i=1,2,\cdots,m$

都是非基变量，则$m$个基变量都在 $X^*$ 中，

$\therefore X^*$ 是原$(LP)$的初始基本可行解。

2) 若 $Z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* = 0$，则可得到原(*LP*)的一个初始基本可行解

1° 在辅助(*LP*)的最优解 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ 中，若 $y_i^* = 0, i = 1, 2, \cdots, m$

都是非基变量，则*m*个基变量都在 $X^*$ 中，

$\therefore X^*$ 是原(*LP*)的初始基本可行解。

| | | | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | $y_{0j}$ | $-\sum_{i=1}^{m} b_i$ | $-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$ | $-\sum_{i=1}^{m} a_{i2}$ | $\cdots$ | $-\sum_{i=1}^{m} a_{in}$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 0 |
| $x_m \rightarrow$ | $y_1$ | $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | 1 | 0 | $\cdots$ | 0 |
| $x_1 \rightarrow$ | $y_2$ | $b_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | 0 | 1 | $\cdots$ | 0 |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | | | | | | | |
| $x_2 \rightarrow$ | $y_m$ | $b_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 1 |

单纯形表

辅助$(LP)$ $\min Z=\sum_{i=1}^{m} y_i$ 设辅助$(LP)$的最优解为 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$

$$AX+Y=b$$

$$X\geq 0, Y\geq 0$$

$$Y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)^T$$

则 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* \geq 0$

**辅助$(LP)$的最优解与原$(LP)$的初始基本可行解的关系：**

1）若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* > 0$，原$(LP)$无可行解。

2）若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^* = 0$，可得到原$(LP)$的一个初始基本可行解。

$2^\circ$ 在辅助$(LP)$的最优解 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ 中，若有某个 $y_i^*=0$ 仍是基变量，

则可将 $y_i$ 与某个非基变量 $x_j(=0)$ 交换 $(y_{ij}\neq 0)$，

交换后可得到原$(LP)$的一个退化的初始基本可行解。

# 辅助(*LP*)得最优表

$x_j^* = 0$

| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_j$ | $x_n$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_{0j}$ | 0 | ★ | ★ | 0 ★ | ★ | ★ | ★ | | ★ |
| | $x_1$ | ★ | ★ | ★ | 0 ★ | ★ | ★ | ★ | | ★ |
| | $x_2$ | ★ | ★ | ★ | 0 ★ | ★ | ★ | ★ | | ★ |
| $x_j$ → | $y_i$ | $y_i^*=0$ | ★ | ★ | 1 $y_{ij} \neq 0$ | ★ | ★ | ★ | | ★ |
| | $x_m$ | ★ | ★ | ★ | 0 ★ | ★ | ★ | ★ | | ★ |

在 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ 中，若有某个 $y_i^* = 0$ 仍是基变量，则 $X^*$ 中只有 $m$-1个基变量，则可将 $y_i$ 与 $x_j(=0)$ 交换 $(y_{ij} \neq 0)$，交换后可得到原(*LP*)的一个退化的初始基本可行解。

辅助$(LP)$ $\min Z=\sum y_i$ 设最优解为 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$

$$AX+Y=b$$
$$X\geq 0, Y\geq 0$$

原$(LP)$
$\min S=CX$
$AX=b$
$X\geq 0$

**辅助$(LP)$的最优解与原$(LP)$的初始基本可行解的关系：**

1）若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^*>0$，则原$(LP)$无可行解。

2）若 $Z^*=\sum_{i=1}^{m} y_i^*=0$，则可得到原$(LP)$的一个初始基本可行解。

1°在辅助$(LP)$的最优解 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ 中，若 $y_i^*=0, i=1,2,\cdots,m$

都是非基变量，则 $X^*$ 是原$(LP)$的初始基本可行解。

2°在辅助$(LP)$的最优解 $\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}$ 中，若有某个 $y_i^*=0$ 仍是基变量，

则可将 $y_i$ 与某个非基变量 $x_j(=0)$ 交换 $(y_{ij}\neq 0)$，

交换后可得到原$(LP)$的一个退化的初始基本可行解。

## 两阶段法的思想：

两阶段法：

- **第一阶段：** 建立辅助$(LP)$求出原$(LP)$的一个初始基本可行解
- **第二阶段：** 再用单纯形法去求原$(LP)$的最优解

## 第二阶段：用单纯形法去求原($LP$)的最优解

## 第二阶段：用单纯形法去求原 (*LP*) 的最优解

| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_j$ | $x_n$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $y_{0j}$ | ★ | ★ | ★ | 0 | ★ | ★ | ★ | | ★ |
| | $x_1$ | ★ | ★ | ★ | 0 | ★ | ★ | ★ | | ★ |
| | $x_2$ | ★ | ★ | ★ | 0 | ★ | ★ | ★ | | ★ |
| | $x_j$ | 0 | ★ | ★ | 1 | ★ | ★ | ★ | | ★ |
| | $x_m$ | ★ | ★ | ★ | 0 | ★ | ★ | ★ | | ★ |

原 (*LP*) 的初始单纯形表

辅助 (*LP*) 的最优表

在辅助 (*LP*) 的最优表中删去人工列及检验数行，

补上原 (*LP*)的检验数行，即得到原 (*LP*) 的初始单纯形表(对应初始基本可行解)，再用单纯形法求原 (*LP*) 的最优解。

## 例1-13 求解线性规划问题：

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \quad y_{00} = C_B B^{-1} b$

$$\min S = 4x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

第一阶段

辅助$(LP)$ $\longrightarrow$

$$\min Z = y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \\ y_j \geq 0, j = 1,2 \end{cases}$$

辅助$(LP)$单纯形表

| | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ |
| $C_B$ | $X_B$ | -7 | -5 | -4 | -3 | 0 | 0 |
| 1 | $y_1$ | 4 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 1 | $y_2$ | 3 | 3 | 3 | 1 | 0 | 1 |

例1-13　第一阶段

$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$ ?

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -7 | -5 | -4 | -3 | 0 | 0 | |
| $y_1$ | 4 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | |
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | ×(1/3) |

初始表 ⟶ 表1 ⟶ 表2 ⟶ 最优表

$X^0$　　$X^1$　　$X^2$　　$X^*$

## 例1-13　第一阶段

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -7 | -5 | -4 | -3 | 0 | 0 | |
| $y_1$ | 2 | 0 | -1 | 4/3 | 1 | -2/3 | |
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | ×(-2) |

## 例1-13　第一阶段

| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -2 | 0 | 1 | -4/3 | 0 | 5/3 | |
| $y_1$ | 2 | 0 | -1 | 4/3 | 1 | -2/3 | |
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | ×5 |

## 例1-13　第一阶段

$$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$$

| 表1 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -2 | 0 | 1 | -4/3 | 0 | 5/3 | |
| $x_3$ | 3/2 | 0 | -3/4 | 1 | 3/4 | -1/2 | ×3/4 |
| $x_1$ | 1 | 1 | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | |

## 例1-13　第一阶段

| 表1 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -2 | 0 | 1 | -4/3 | 0 | 5/3 | |
| $x_3$ | 3/2 | 0 | -3/4 | 1 | 3/4 | -1/2 | ×(-1/3) |
| $x_1$ | 1/2 | 1 | 5/4 | 0 | -1/4 | 1/2 | |

## 例1-13　第一阶段

| 表1 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 3/2 | 0 | -3/4 | 1 | 3/4 | -1/2 |
| $x_1$ | 1/2 | 1 | 5/4 | 0 | -1/4 | 1/2 |

×4/3

例1-13　第一阶段　$y_{0j} = c_j -$

$$\min S = 4x_1 + x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

| 最优表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| $x_3$ | 3/2 | 0 | -3/4 | 1 | 3/4 | -1/2 |
| $x_1$ | 1/2 | 1 | 5/4 | 0 | -1/4 | 1/2 |

$$\min Z = y_1 + y_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \\ y_j \geq 0, j = 1,2 \end{cases}$$

$$X^* = (1/2, 0, 3/2, 0, 0)^T, Z^* = 0.$$

以得到原$(LP)$的初始基本可行解。

行第二阶段。

## 例1-13　第二阶段　$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$　$y_{00}=C_BB^{-1}b$

| | 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | 1 | 1 | | |
| | $X_B$ | -7/2 | 0 | -13/4 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | $x_3$ | 3/2 | 0 | -3/4 | 1 | 3/4 | -1/2 |
| 4 | $x_1$ | 1/2 | 1 | 5/4 | 0 | -1/4 | 1/2 |
| | | $B^{-1}b$ | $B^{-1}p_1$ | $B^{-1}p_2$ | $B^{-1}p_3$ | | |

在上面最优表中删去人工列和
添加原(*LP*)的检验数行，得到
单纯形表。

$$B=(p_3,p_1)=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}\quad B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$\min S=4x_1+x_2+x_3$$
$$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3=4\\3x_1+3x_2+x_3=3\\x_j\geq 0,\ j=1,2,3\end{cases}$$

## 例1-13　第二阶段　$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$ ?

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_B$ | -7/2 | 0 | -13/4 | 0 | |
| $x_3$ | 3/2 | 0 | -3/4 | 1 | |
| $x_2$ | 2/5 | 4/5 | 1 | 0 | ×4/5 |

# 例1-13　第二阶段

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -7/2 | 0 | -13/4 | 0 |
| $x_3$ | 9/5 | 3/5 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2/5 | 4/5 | 1 | 0 |

×3/4

# 例1-13　第二阶段

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -11/5 | 13/5 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 9/5 | 3/5 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2/5 | 4/5 | 1 | 0 |

×13/4

## 例1-13　第二阶段 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$ √

| 最优表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_B$ | -11/5 | 13/5 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 9/5 | 3/5 | 0 | 1 |
| $x_2$ | 2/5 | 4/5 | 1 | 0 |

得到原$(LP)$的最优解：

$$X^* = (0, 2/5, 9/5)^T, Z^* = 11/5$$

$$\min S = 4x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

## 例1-14 求解线性规划问题：$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$ $y_{00}=C_BB^{-1}b$

$\min S = x_1+2x_2+3x_3$ 第一阶段 $\min Z = y_1+y_2$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=4 \\ 4x_1-9x_2+14x_3=16 \\ x_j\ge 0, j=1,2,3 \end{cases} \xrightarrow{\text{辅助}(LP)} \begin{cases} x_1-2x_2+4x_3+y_1=4 \\ 4x_1-9x_2+14x_3+y_2=16 \\ x_j\ge 0, j=1,2,3 \\ y_j\ge 0, j=1,2 \end{cases}$$

辅助$(LP)$单纯形表

| 初始表 | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ |
| $C_B$ | $X_B$ | -20 | -5 | 11 | -18 | 0 | 0 |
| 1 | $y_1$ | 4 | 1 | -2 | 4 | 1 | 0 |
| 1 | $y_2$ | 16 | 4 | -9 | 14 | 0 | 1 |

例1-14　第一阶段

$$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$$

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | 0 |
| $x_1$ | 4 | 1 | -2 | 4 | 1 | 0 |
| $y_2$ | 16 | 4 | -9 | 14 | 0 | 1 |

×5

## 例1-14　第一阶段

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | 0 | |
| $x_1$ | 4 | 1 | -2 | 4 | 1 | 0 | ×(-4) |
| $y_2$ | 0 | 0 | -1 | -2 | -4 | 1 | |

例1-14　第一阶段 $y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j\geq 0$ ✓

| 最优表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | 0 | |
| $x_1$ | 4 | 1 | -2 | 4 | 1 | 0 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | -1 | ×(-1) |

已得辅助$(LP)$的最优表，$X^*=(4,0,0,0,0)^T, Z^*=0$

但人工变量 $y_2=0$仍是基变量，为使它离基，$y_2$所在第二行中的非零元均可做主元，如-1为主元，用 $x_2$替换 $y_2$为基变量。

## 例1-14　第一阶段

| 最优表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | 0 | |
| $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 8 | 9 | -2 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | -1 | ×2 |

## 例1-14　第一阶段

| 最优表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 8 | 9 | -2 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | -1 | ×(-1) |

## 例1-14　第一阶段

| 最优表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 8 | 9 | -2 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | -1 |

$$X^* = (4,0,0,0,0)^T, Z^* = 0$$

得到原$(LP)$的退化的初始基本可行解 $X^0 = (4,0,0)^T$

## 例1-14　第二阶段

| 最优表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 8 | 9 | -2 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 4 | -1 |

在上面最优表中删去人工列和检验数行，

## 例1-14　第二阶段　$y_{0j}=c_j-C_BB^{-1}p_j$　$y_{00}=C_BB^{-1}b$

| | 初始表 | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| | $X_B$ | -4 | 0 | 0 | -9 |
| 1 | $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 8 |
| 2 | $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 2 |

在上面最优表中删去人工列

添加原$(LP)$的检验数行，得

单纯形表。

$X^0=(4,0,0)^T$(退化解)　$S^0=$

$$\min S=x_1+2x_2+3x_3$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=4 \\ 4x_1-9x_2+14x_3=16 \\ x_j\geq 0,\ j=1,2,3 \end{cases}$$

## 例1-14　第二阶段　$y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -4 | 0 | 0 | -9 | |
| $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 8 | |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 2 | $\theta = 0$ |

# 例1-14　第二阶段

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -4 | 0 | 0 | -9 | |
| $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 8 | |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1/2 | 1 | ×1/2 |

# 例1-14　第二阶段

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -4 | 0 | 0 | -9 |
| $x_1$ | 4 | 1 | -4 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1/2 | 1 |

×(-8)

# 例1-14　第二阶段

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -4 | 0 | 9/2 | 0 |
| $x_1$ | 4 | 1 | -4 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1/2 | 1 |

×9

## 例1-14　第二阶段 $y_{0j} = c_j - C_B B^{-1} p_j \geq 0$ ✓

| 最优表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_B$ | -4 | 0 | 9/2 | 0 |
| $x_1$ | 4 | 1 | -4 | 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1/2 | 1 |

得到原$(LP)$的最优解：$X^* = (4, 0, 0)^T$ (退化解)

$$S^* = 4$$

## 例1-14　第二阶段

| 初始表 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_B$ | -4 | 0 | 0 | -9 | |
| $x_1$ | 4 | 1 | 0 | 8 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 2 | $\theta=0$ |

原$(LP)$的初始单纯形表。$X^0=(4,0,0)^T$(退化解)

$S^1=y_{00}+y_{03}\theta=4-9\theta=4$　　$S^0=4$

在退化情况下，负检验数相应的非基变量进基得到的新的基本可行解目标值未必下降。

# 第一章 线性规划

## 第四节 单纯形法

- 典式
- 迭代原理
- 单纯形法举例
- 两阶段法

作业：P95　7（1）（2）（3）

作业：P41　7（1）（2）（3）

# 课上练习

用单纯形法求解下列*LP*问题：

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 26x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & \\
s.t. & 10x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & -2 \\
 & -4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

最优解：$X^* = (0,1,3)^T$，　最优值：$-8$