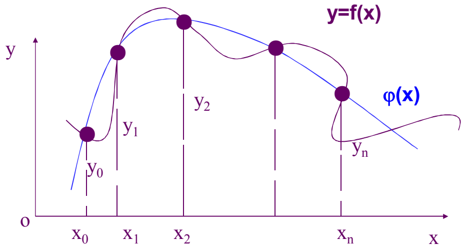
7 插值法 (Interpolation)

插值法是函数逼近的重要方法之一，有着广泛的应用。

目录

插值的任务就是由已知的观测点(x_i,y_i),为物理量(未知量)建立一个简单的、连续的解析模型φ(x)，以便能根据该模型推测该物理量在非观测点处的特性。



7.1 引言

插值法:由实验或测量的方法得到所求函数 y=f(x) 在互异点 x_0 , x_1, ... , x_n 处的值 y_0，y_1 , … , y_n ，

构造一个简单函数 φ(x) 作为函数 y=f(x) 的近似表达式

$$y= f(x) \approx \varphi(x)$$

使 $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi(x_1)=y_1$, …, $\varphi(x_n)=y_n$ ， (a)

这类问题称为插值问题。 f(x) 称为被插值函数，φ(x) 称为插值函数， x_0 , x_1, ... , x_n 称为插值节点。

(a)式称为插值条件。常用的插值函数是多项式与分段多项式。

误差函数 R(x)= f(x) - φ(x)称为插值余项。 P193

代数插值

当插值函数是代数多项式时，插值问题称为代数插值。

n次代数插值问题为:

给定n+1个点（x_0 , y_0),(x_1, y_1),... , (x_n ， y_n)，

求次数≤n的多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$， ….. (1)

满足插值条件

$$p_n(x_i)=y_i \qquad i= 0,1,2,\ldots, \quad n \quad \ldots\ldots (2)。$$

定理7-1 设x_0 ,x_1,…,x_n 是n+1个互异节点,函数$f(x)$在这组节点的值$y_k=f(x_k)$(k=0,1,…,n)是给定的，那么存在唯一的次数≤n的多项式p_n (x)满足 P195

$$p_n (x_k)= y_k,\ k=0,1,\ldots,n。$$

只要求出$P_n(x)$的系数a_0 ,a_1,…, a_n即可。

定理7-1 设x_0 ,x_1,…,x_n 是n+1个互异节点,函数$f(x)$在这组节点的值$y_k=f(x_k)$(k=0,1,…,n)是给定的，那么存在唯一的次数≤n的多项式p_n (x)满足

$$p_n (x_k)= y_k,\ k=0,1,\ldots,n。$$

证明

设所求次数≤n的多项式为 $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$,

由插值条件 $p_n(x_i)=y_i$ $i= 0,1,2,\ldots, \ n$

知P_n(x)的系数满足下列n+1个代数方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} P_n(x_0)= a_0+a_1x_0+ a_2x_0^2 + \ldots+a_nx_0^n=y_0 \\ P_n(x_1)= a_0+a_1x_1+ a_2x_1^2 + \ldots+a_nx_1^n=y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n(x_n)= a_0+a_1x_n+ a_2x_n^2 + \ldots+a_nx_n^n=y_n \qquad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n=y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n=y_n \end{cases} \qquad \ldots\ldots(3)$$

$a_i(i=0,1,2,\ldots,n)$的系数行列式是Vandermonde行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)\neq 0,\quad x_i\neq x_j, if\ i\neq j$$

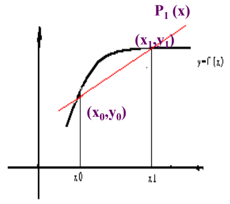
由于x_i互异，所以(4)右端不为零，从而方程组(3)的解 a_0 ,a_1 ,…a_n 存在且唯一。（Cramer ruler） 证毕

但遗憾的是方程组(3)是病态方程组,当阶数n越高时，病态越重。为此我们从另一途径寻求获得$P_n(x)$ 的方法----Lagrange插值和Newton插值。（上述方法称为基函数法）

7.2 Lagrange插值

线性插值(n=1) 给定2个点（x_0 , y_0),(x_1, y_1), P195

求次数≤1 的多项式$P_1(x)$，满足条件 $P_1(x_0)=y_0$， $P_1(x_1)=y_1$ 。



点斜式

$$p_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$p_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

对称式

令 $$l_{10}(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\qquad l_{11}(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$p_1(x)=y_0l_{10}(x)+y_1l_{11}(x) \qquad (5)$$

$$l_{10}(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\qquad l_{11}(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$p_1(x)=y_0l_{10}(x)+y_1l_{11}(x)$$

$l_{10}(x)$，$l_{11}(x)$是一次式,容易验证它们满足

$l_{10}(x_0)=1$, $l_{10}(x_1)=0$,

$l_{11}(x_0)=0$, $l_{11}(x_1)=1$.

$l_{10}(x)$, $l_{11}(x)$称为以x_0 , x_1 为节点的一次Lagrange插值基函数。

推广线性插值到n次插值。

n 次插值多项式 求次数≤n的多项式$P_n(x)$,使其满足

$P_n(x_0)=y_0$， $P_n(x_1)=y_1$, ... , $P_n(x_n)=y_n$

令 $P_n(x)=l_{n0}(x)y_0+l_{n1}(x)y_1+\cdots+l_{nn}(x)y_n$

这里,$l_{nj}(x)$,($j=0,1,\ldots,n$)是n 次多项式，满足条件

容易求得 $$l_{nj}(x_i)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

$$l_{nj}(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}=\prod_{i=0,i\neq j}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i} \qquad (7)$$

$l_{nj}(x)$($j=0,1,\ldots,n$)称为以x_0 , x_1,... , x_n为节点的n次Lagrange插值基函数。

基函数$l_{nj}(x)$($j=0,1,\ldots,n$)只依赖于节点x_0 , x_1,... , x_n P170

不依赖于被插值函数f(x)。

例1 已知 $x_0=100$ $y_0=10$

$x_1=121$ $y_1=11$ 分别用线性插值、二次

$x_2=144$ $y_2=12$ 插值求$\sqrt{115}$。

解：1）线性插值

取 x_0 x_1 为节点，构造线性插值$p_1(x)$

$$p_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=10\times\frac{x-121}{-21}+11\times\frac{x-100}{21}$$

$$\sqrt{115}\approx p_1(115)=\frac{11}{21}\times 15+\frac{10}{21}\times 6=10.714728$$

2）二次插值

取 $x_0\ x_1\ x_2$为节点，构造二次插值$p_2(x)$

$$p_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=\frac{10}{924}\times(x-121)(x-144)-\frac{11}{483}\times(x-100)(x-144)$$

$$+\frac{12}{1012}\times(x-100)(x-121)\qquad p_1(115)=10.714728$$

$$\sqrt{115}\approx p_2(115)=10.7228$$

$$\sqrt{115}=10.723805\ \cdots$$

比较线性插值与二次插值，二次插值具有更高的精度。

2、Lagrange插值的截断误差

P197

定理2: 设$P_n(x)$是过点x_0，x_1，x_2，…x_n的f(x)的n 次插值多项式，$f(x)\in C^{n+1}[a,b]$，其中[a，b]是包含点x_0，x_1，x_2，…,x_n的区间，则对任意给定的x∈[a，b]，总存在一点ξ∈（a，b）（依赖于x）使

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\quad \cdots(9)$$

式 (9) 称为Lagrange余项.

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\qquad a<\xi<b$$

上式称为带余项的Lagrange插值公式,只要f(x)具有n+1阶导数,就有上式成立。

证明: 显然 $R_n(x_i)=f(x_i)-P_n(x_i)=0$,i=0,1,…,n,

现在任意固定一点x∈ [a,b],x≠x_i (i=0,1,…,n),设 $R_n(x)=K(x)\ \omega_{n+1}(x)$,

引进辅助函数 $g(t)=f(t)-P_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)$, (*)

则g(t)在[a,b]上具有n+1阶连续导数，在t= x_0, x_1,…, x_n, x 诸点处函数值皆等于零。 即g(t)在[a,b]中有n+2个零点。

由Rolle定理知g'(t)在[a,b]中有n+1个零点。

如此反复，最后可推知$g^{(n+1)}(t)$在[a,b]中有1个零点ξ，即有 $g^{(n+1)}(\xi)=0$, $a<\xi<b$.

$$g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-P_n^{(n+1)}(t)-K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(t)$$

罗尔定理 设f(x)在[a,b]内连续，在(a,b)内可导，且有f(a)=f(b)；则在(a,b)内一定存在一点ξ，使得f'(ξ)=0。

因为$\omega_{n+1}(t)$是n+1次多项式， $\omega_{n+1}^{(n+1)}(t)=(n+1)!$,又因为$P_n(t)$是次数为n的多项式,因此$P_n^{(n+1)}(t)=0$ 。这样，

$$g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-K(x)(n+1)!$$

$$令t=\xi,\quad\Rightarrow g^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-K(x)(n+1)!=0$$

由此得
$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

代入$R_n(x)=K(x)\ \omega_{n+1}(x)$,即得结论。

证毕

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\ \xi\in(a,b)$$

特别当n=1时，有
$$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}\omega_2(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1),\ \xi\in(x_0,x_1)$$

设

$$\max_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|=M_{n+1}\qquad |R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

x 称为插值点，若 $x\in(x_0,x_n)$，称为内插值；

若 $x\notin(x_0,x_n)$，称为外插值。

内插精度高

例1 已知 $x_0=100\quad y_0=10$, $x_1=121\quad y_1=11$, $x_2=144\quad y_2=12$ 分别用线性插值、二次插值求$\sqrt{115}$。

解：1）取 $x_0\quad x_1$ 为节点，构造线性插值$p_1(x)$

$$\sqrt{115}\approx p_1(115)=\frac{11}{21}\times15+\frac{10}{21}\times6=10.714728$$

其截断误差为 $|R_1(x)|\le\frac{M_2}{2}|(x-100)(x-121)|$

其中 $M_2=\max_{100\le x\le121}|f''(x)|$，$f(x)=\sqrt{x}$, $M_2=\frac{1}{4}\times10^{-3}$

$$|R_1(115)|=\left|\sqrt{115}-p_1(115)\right|\le\frac{M_2}{2}|(115-100)(115-121)|=1.125\times10^{-2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2},\ f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2},$$

$p_2(115) = 10.7228$ 类似地,二次插值的截断误差为

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

其中 $M_3 = \max_{100\le x\le 144} |f'''(x)|, \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}, \; M_3 = \frac{3}{8}\times 10^{-5},$

于是

$$|R_2(115)| = |\sqrt{115} - p_2(115)|$$

$$\le \frac{1}{6}\times\frac{3}{8}\times 10^{-5}\times 15\times 6\times 29$$

$$< 1.632\times 10^{-3}$$

$$\sqrt{115} = 10.723805\cdots$$

例2: 在[-4, 4]上给出等距节点函数表，若用二次插值计算e^x的近似值，要使截断误差不超过10^{-6}, 问使用函数表的步长h 应为多少?

解：设 $x_{i-1}\le x\le x_{i+1}$, 则有

$x_{i-1}=x_i-h$, $x_{i+1}=x_i+h$, $x=x_i+th$ $(-1\le t\le 1)$

过三点 x_{i-1}, x_i, x_{i+1}的二次插值误差为:

$$|R_2(x)| = |e^x - p_2(x)| \le \frac{e^\xi}{6}|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$

$$= \frac{e^\xi}{6}|t(t^2-1)|h^3 \le \frac{\max_{-4\le x\le 4} e^x}{6}\max_{-1\le t\le 1}|t(t^2-1)|h^3 = \frac{e^4}{6}\times\frac{2\sqrt{3}}{9}h^3$$

$$\frac{e^4}{6}\times\frac{2\sqrt{3}}{9}h^3 \le 10^{-6} \Rightarrow h \le 10^{-2}\times\frac{3}{e}\times\frac{1}{\sqrt[3]{e}\times\sqrt[6]{3}} \approx 0.0065$$

由 h=8/n，得 n=1231

Lagrange算法直观，对称，易于建立多项式，缺点：没有承袭性，每增加一个节点，需要重新计算多项式，增加了计算量。

$$p_1(x) = y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$p_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

为了克服这个缺点，我们引进牛顿差商插值多项式.

7.3 Newton插值

P199

为了使Newton插值多项式具有承袭性，令n次插值多项式具有下列形式:

$$N_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$= N_{n-1}(x) + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

式中$c_0, c_1, \cdots, c_n$ 为插值多项式系数。

令

$$\phi_0(x) = 1, \phi_i(x) = (x-x_{i-1})\phi_{i-1}(x), \quad 1\le i\le n$$

$$N_n(x) = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n = N_{n-1}(x) + c_n\phi_n$$

φ_i, $(i=0,1,\ldots,n)$称为Newton插值基函数。

为便于表示$N_n(x)$, 引入差商（均差）概念.

- （1）差商(Divided Differences)及其性质

P200

定义1 给定一个函数表

x_0	x_1	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

其中$x_i \ne x_j$,当$i\ne j$时

记

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots, n.$$

$f[x_i]$称为$f(x)$关于x_i的零阶差商。

$f(x)$关于x_i, x_j的一阶差商定义为

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

•一般的,$f(x)$关于$x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$的$k$ 阶差商记做

$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

例：

I	0	1	2	3
xi	2	5	4	7
f(xi)	5	7	10	4

$$f[x_0,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2-x_0}=\frac{10-5}{4-2}=\frac{5}{2}$$

$$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}=\frac{4-10}{7-4}=\frac{-6}{3}=-2$$

$$f[x_0,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_0,x_2]}{x_3-x_0}=\frac{-2-5/2}{7-2}=\frac{-9}{10}$$

定理1: 差商具有如下性质 P201

(1)差商与函数值的关系为

$$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_0,x_2,x_1]$$

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$$

(2)差商的值与结点排列顺序无关

$$f[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n]=f[x_0,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n]$$

(3)设$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数且 $,x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$，则存在 $\xi\in[a,b]$使

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

若

$$f^{(n)}(x)=0,x\in[a,b]\Rightarrow f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=0.$$

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Let $f(x)=5x^7+4x^4+3x^3+2x+1$

$f[0,1,2,3,4,5,6,7]=$ **5.**

$f[-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5]=$ **0.**

$$N_n(x)=f(x_0)+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

由 $N_n(x_1)=f(x_1)$ $\quad f(x_1)=f(x_0)+c_1(x_1-x_0)$

$$\Rightarrow c_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1]$$

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$f(x_1)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x_1-x_0)$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x_2-x_1+x_1-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x_1-x_0)+f[x_0,x_1](x_2-x_1)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

$$f(x_2)=f(x_1)+f[x_0,x_1](x_2-x_1)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

移项，两边同除以x_2-x_1，得

$$\Rightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f[x_0,x_1]+c_2(x_2-x_0)\ =f[x_1,x_2]$$

从而：

$$c_2=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=f[x_0,x_1,x_2]$$

……..

依次类推，得： $c_n=f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$

将$c_0,c_1,\cdots,c_n$代入$N_n(x)$，得n次Newton差商插值多项式：

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$N_0(x)=f(x_0)$$

$$N_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)=N_0(x)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

……

$$N_{k+1}(x)=N_k(x)+f[x_0,\cdots,x_{k+1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$$

因此，每增加一个结点，Newton差商插值多项式只增加一项，克服了Lagrange插值的缺点。

n次Newton插值差商多项式：

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

x	f(x)	f[xi,xj]	f[xi,xj,xk]	……	f[x0,x1,…,xn]
x0	$\underline{f(x_0)}$				
x1	$f(x_1)$	$\underline{f[x0,x1]}$			
x2	$f(x_2)$	f[x1,x2]	$\underline{f[x0,x1,x2]}$		
x3	$f(x_3)$	f[x2,x3]	f[x1,x2,x3]	……	
……	……	……	……	……	
xn	$f(x_n)$	f[xn-1,xn]	f[xn-2,xn-1,xn]	……	$\underline{f[x0,x1,…,xn]}$

差商表(The divided-difference Table)

必须注意,n次代数插值问题的解是存在且唯一的，因此，Newton差商插值与Lagrange 插值只是形式上不同，若将它们按x的幂展开，所得的多项式是完全一样的。

必须注意,n次代数插值问题的解是存在且唯一的，因此，Newton差商插值与Lagrange 插值只是形式上不同，若将它们按x的幂展开，所得的多项式是完全一样的。

定理2 Newton 插值差商多项式的余项为

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,x_1,\dots x_n]\,\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ P175

特别，$R_1(x)=f(x)-N_1(x)=f[x,x_0,x_1]\,\omega_2(x)$

其中 $\omega_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$

$R_2(x)=f(x)-N_2(x)=f[x,x_0,x_1,x_2]\,\omega_3(x)$

其中 $\omega_3(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

P201

定理2 Newton 插值差商多项式的余项为

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,x_1,\dots x_n]\,\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

特别，$R_1(x)=f(x)-N_1(x)=f[x,x_0,x_1]\,\omega_2(x)$

其中 $\omega_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$

$R_2(x)=f(x)-N_2(x)=f[x,x_0,x_1,x_2]\,\omega_3(x)$

其中 $\omega_3(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

(3)设$f(x)$在$[a,b]$上有n阶导数且，$x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$，则存在$\xi\in[a,b]$使

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

证明　设$N_n(x)$是过节点$x_0\,x_1\dots x_n$ f(x)的n次Newton差商插值多项式,则有

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

令 $g(x)=f(x)-N_n(x)$　则 $g(x_i)=f(x_i)-N_n(x_i)=0$，$i=0,1,\dots,n$.

即g(x)在[a,b]中有n+1个零点。由Rolle定理g'(t)在[a,b]中有n个零点;

如此反复，可知$g^{(n)}(t)$在[a,b]中有1个零点ξ，即有 $g^{(n)}(\xi)=0$，$a<\xi<b$.　因此　$0=f^{(n)}(\xi)-N_n^{(n)}(\xi)$

因为　$N_n^{(n)}(\xi)=n!f[x_0,x_1,\dots x_n]$，

所以，　$0=f^{(n)}(\xi)-n!f[x_0,x_1,\dots x_n]$，　结论得证。

例1:给定数据表f(x)=lnx数据表

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.78846	0.87547	0.95551	1.02962	1.09861

1.构造差商表

2.用二次Newton差商插值多项式，近似计算f(2.25)的值

3.写出四次Newton差商插值多项式$N_4(x)$

解: 1.差商表

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
2.20	$\underline{0.78846}$				
2.40	0.87547	$\underline{0.43505}$			
2.60	0.95551	0.40020	$\underline{-0.087125}$		
2.80	1.02962	0.37055	−0.074125	0.021667	
3.00	1.09861	0.34495	−0.064000	0.016875	−0.00599

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
2.20	$\underline{0.78846}$				
2.40	0.87547	$\underline{0.43505}$			
2.60	0.95551	0.40020	$\underline{-0.087125}$		
2.80	1.02962	0.37055	−0.074125	0.021667	
3.00	1.09861	0.34495	−0.064000	0.016875	−0.00599

2.用二次Newton差商插值多项式，近似计算f(2.25)的值

$$N_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$=0.78846+0.43505(x-2.20)-0.087125(x-2.20)(x-2.40)$

$f(2.25)\approx N_2(2.25)=0.810866$　具有3位有效数字.

3.写出四次Newton差商插值多项式$N_4(x)$

$$N_4(x)=N_2(x)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$N_4(x)=0.78846$
$+0.43505(x-2.20)$
$-0.087125(x-2.20)(x-2.40)$
$+0.021667(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60)$
$-0.00599(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60)(x-2.80)$

$N_4(2.25)=0.8109314$　　具有5位有效数字.

$ln(2.25)=0.81093020\ldots$

（3）Newton差分插值
（等距节点插值公式）

本节讨论等距节点的Newton插值多项式，当节点等距时，利用差分的概念，可使Newton插值多项式得到简化。

向前差分（Forward-Difference）　　P204

定义2 设有等距节点 $x_i=x_0+ih\ (i=0,1,\ldots,n)$,其中$h>0$是步长。记　$y_i=f(x_i)\ (i=0,1\ldots,n)$

$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$　称为$f(x)$在点x_i处的一阶向前差分。

$\Delta^n y_i=\Delta^{n-1}y_{i+1}-\Delta^{n-1}y_i$称为f(x)在点$x_i$处的$n$阶向前差分。

规定 $y_i=\Delta^0 y_i$　为$f(x)$在点x_i处的零阶差分。

例 $f(x)=x^2$，$x_i=i\ (i=1,2,\ldots,n)$, 求$\Delta^n f(x_i),(i=1,\ldots,n-1)\ n\geq 3$

解：$\Delta f(x_i)=f(x_{i+1})-f(x_i)=(i+1)^2-i^2=2i+1$

$\Delta^2 f(x_i)=\Delta f(x_{i+1})-\Delta f(x_i)=2(i+1)+1-(2i+1)=2$

$\Delta^3 f(x_i)=\Delta^2 f(x_{i+1})-\Delta^2 f(x_i)=2-2=0$

$\Delta^n f(x_i)=0\quad n\geq 3$

差分与差商的关系

$$f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+m}]=\frac{\Delta^m f(x_i)}{m!h^m}=\frac{\Delta^m y_i}{m!h^m}$$

向后差分（Backward-Difference)

定义3 设节点 $x_i=x_0+ih\ (i=0,1,\ldots,n)$,其中$h>0$是步长。记　$y_i=f(x_i)\ (i=0,1\ldots,n)$

$\nabla y_i=y_i-y_{i-1}$　称为$f(x)$在点x_i处的一阶向后差分。

$\nabla^n y_i=\nabla^{n-1}y_i-\nabla^{n-1}y_{i-1}$称为$f(x)$在点$x_i$处的$n$阶向后差分。

规定 $y_i=\nabla^0 y_i$　为$f(x)$在点x_i处的零阶差分。

$\nabla^2 y_i=\nabla y_i-\nabla y_{i-1}\quad =y_i-2y_{i-1}+y_{i-2}$

$$f[x_i,x_{i-1},\cdots,x_{i-m}]=\frac{\nabla^m f(x_i)}{m!h^m}\quad (2)$$

Newton差分插值多项式

Newton向前差分公式(Newton Forward-Difference Formula)

设：$x_0<x_1<\ldots<x_n$，$x_i=x_{i-1}+h=x_0+i\,h$　(i=1, 2, …, n)

当 $x\in[x_0,x_1]$时，令$x=x_0+sh$，$0\leq s\leq 1$

Newton差商插值多项式为：

$$\boxed{N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}$$

将 $x-x_i=(s-i)h$, 代入上式，得

$$N_n(x)=f(x_0)+shf[x_0,x_1]+\cdots+s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0,\cdots,x_n]$$

$$=f(x_0)+\sum_{k=0}^{n}s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0,\cdots,x_k] \quad (3)$$

根据

$$f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+m}]=\frac{\Delta^m f(x_i)}{m!h^m}=\frac{\Delta^m y_i}{m!h^m},$$

(3)式变为

$$N_n(x)=f(x_0)+\frac{\Delta y_0}{h}sh+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}s(s-1)h^2+\cdots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}s(s-1)\cdots(s-n+1)h^n$$

$$N_n(x)=f(x_0)+s\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}s(s-1)+\cdots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}s(s-1)\cdots(s-n+1) \quad (4)$$

$$x=x_0+sh$$

(4) 式称为Newton向前差分公式， 205

(*Newton Forward Differrenc e Formula*)

余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}s(s-1)\cdots(s-n)h^{n+1}$$

$$\xi\in(x_0,x_n)$$

当节点等距分布，插值点x靠近表头(x_0)时，亦采用Newton向前差分插值公式。

Newton向后差分公式

(Newton Backward -Difference Formula)

当 $x\in[x_{n-1},x_n]$时，令$x=x_n+sh$，$-1\le s\le 0$

将节点按由大到小的顺序排列，即

$x_n>x_{n-1}>\ .\ .\ .\ >x_0$，$x_{n-i}=x_n-ih$

Newton差商插值多项式为：

$$N_n(x)=f(x_n)+f[x_n,x_{n-1}](x-x_n)+\cdots+f[x_n,\cdots;x_0](x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)$$

将 $x-x_{n-i}=(s+i)h$，代入上式，得

$$N_n(x)=f(x_n)+shf[x_n,x_{n-1}]+\cdots+s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n f[x_n,\cdots,x_0]$$

$$=f(x_n)+\sum_{k=1}^{n}s(s+1)\cdots(s+k-1)h^k f[x_n,\cdots,x_{n-k}]$$

$$N_n(x)=f(x_n)+shf[x_n,x_{n-1}]+\cdots+s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n f[x_n,\cdots,x_0]$$

$$=f(x_n)+\sum_{k=1}^{n}s(s+1)\cdots(s+k-1)h^k f[x_n,\cdots,x_{n-k}] \qquad x=x_n+sh$$

$$\because\ f[x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-i}]=\frac{\nabla^i f(x_n)}{i!h^i}$$

206

$$\boxed{N_n(x)=f(x_n)+\frac{\nabla f(x_n)}{1}s+\frac{\nabla^2 f(x_n)}{2!}s(s+1)+\cdots+\frac{\nabla^n f(x_n)}{n!}s(s+1)\cdots(s+n-1) \quad (5)}$$

(5)式称为Newton向后差分插值公式。

$$N_n(x)=f(x_n)+\frac{\nabla f(x_n)}{1}s+\frac{\nabla^2 f(x_n)}{2!}s(s+1)+\cdots+\frac{\nabla^n f(x_n)}{n!}s(s+1)\cdots(s+n-1) \quad (5)$$

余项为 $x=x_n+sh$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}s(s+1)\cdots(s+n)h^{n+1}$$

$$\xi\in(x_0,x_n)$$

当插值点x靠近表尾(x_n)时，亦采用Newton向后差分插值公式。

利用Newton差分插值，计算函数f(x)在x^*处的近似值分为以下步骤：

1）根据等距节点表，构造差分表，
2）根据 x^*的位置，建立Newton差分插值多项式。

差分表

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	…	Δ^n
x_0	y_0					
x_1	y_1	Δy_0				
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$			
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		$\Delta^n y_0$
x_{n-3}	y_{n-3}	Δy_{n-3}			⋮	
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}$		
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}$			
x_n	y_n	Δy_{n-1}				

$\boxed{\nabla^i y_n = \Delta^i y_{n-i}}$

$$N_n(x) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}s(s-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}s(s-1)\cdots(s-n+1), \quad x = x_0 + sh$$

$$N_n(x) = y_n + \nabla y_n s + \frac{\nabla^2 y_n}{2!}s(s+1) + \cdots + \frac{\nabla^n y_n}{n!}s(s+1)\cdots(s+n-1), \quad x = x_n + sh$$

差分表

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	…	Δ^n
x_0	y_0					
x_1	y_1	Δy_0				
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$			
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		$\Delta^n y_0$
x_{n-3}	y_{n-3}	Δy_{n-3}			⋮	
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}$		
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}$			
x_n	y_n	Δy_{n-1}				

$\boxed{\nabla^i y_n = \Delta^i y_{n-i}}$

例2 给出如下函数表：

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	2	17	64	47

构造三阶Newton差分插值多项式，计算f(0.5)与f(3.5)。

解 造差分表

x_i	$f(x_i)$				
0	1				
1	2	1			
2	17	15	14		
3	64	47	32	18	
4	47	-17	-64	-96	-114

$\boxed{\Delta^i y_0}$ $\boxed{\nabla^i y_n}$

计算f(0.5)用三阶Newton向前差分插值多项式.

3.5靠近表尾，构造三阶Newton向后差分插值公式.

x_i	$f(x_i)$				
0	1				
1	2	1			
2	17	15	14		
3	64	47	32	18	
4	47	-17	-64	-96	-114

计算f(0.5)

$$N_3(x) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}s(s-1) + s(s-1)(s-2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!}, \quad x_0 = 0.$$

$N_3(x)=1+s+7s(s-1)+3s(s-1)(s-2)$ ，

这里 $x=x_0+sh=s$ ， $f(0.5)\approx N_3(0.5)=2.875$。

x_i	$f(x_i)$				
0	1				
1	2	1			
2	17	15	14		
3	64	47	32	18	
4	47	-17	-64	-96	-114

计算 f(3.5).

因为点 3.5 靠近表尾,我们用向后差分插值公式计算f(3.5).

$$N_3(x) = y_4 + \frac{\nabla y_4}{1}s + \frac{\nabla^2 y_4}{2!}s(s+1) + \frac{\nabla^3 y_4}{3!}s(s+1)(s+2)$$

$N_3(x)=47-17s-32s(s+1)-16s(s+1)(s+2)$，这里$x=4+s$,当$x=3.5$时, $s=-0.5$ $f(3.5)\approx N_3(3.5)=69.5$

作业

习题 7
P230:
1, 3, 9, 10, 11

上机作业**5**：

数值实验：**7-2**