层次分析法

Abstract: 定量得对一些主观上的决策问题进行分析，通过层次分析法，建立起合适的量化准则，从而对原问题作出合理的选择。

Keywords: 主观决策、量化分析

1 Introduction

在日常生活中，我们经常碰到许多的决策问题，而这些需要决策的问题往往受到很多因素的影响，要考虑的因素就有多有少，有大有小。这时我们用的最多的一个词：权衡利弊得失。这时候人的主观因素就会起着相当主要的作用，很难进行量化。这时就会给一般的数学方法来解决问题带来了本质性的困难。对于主观性的东西，我们要想取得一些可靠的数据，往往采用问卷调查的方式进行，但是在问卷调查的过程中，往往存在着许多的非确定性的因素,而且对于问卷调查需要耗费大量的时间，这样同样促使产生了新的主观量化的方法。T.L.Saaty等人在70年代提出了一种能有效的处理这样一类问题的使用方法–层次分析法。这是一种定性和定量相结合的、系统化、层次化的分析方法。这种方法从某种意义上类似于人对一个复杂问题的思维、决策过程。

以选择旅游地点为例，你会选择费用、景色、居住和饮食等一些因素反复比较、斟酌，根据这些条件在你心中所占的分量的大小比重，而且进一步根据每一个准则会将你的旅游目标进行对比，最终确定下要选择的目的地。

这一思路实际上也就是将决策问题分为三个层次来进行处理：

1、最上层为目标层，最下层为方案层，中间为准则层。

2、通过来比较确定各个准则对于目标的权重，以及各方案对于每一准则的权重。在人的思维当中这样的思维过程通常是定性的，而在层次分析中给出定量方法。

3、将各层对上层的权重系数进行综合，最终可以确定方案层对目标层的权重。那么这种综合的计算又如何来算，如何在计算的过程中对问题进行定量化的处理

根据所对应的准则，对应于每个方案，都要确定出相对应的权重系数，从而根据所得到的权重系数来判断方案的选取。这就需要建立起目标层、方案层之间的联系，综合上下两层的系数，然后作出决定。

因为这里各个因素间的关系并不具有直接的对比性，所以当元素间的比较采用的是两两对比，同样不同之间的比较应该有一个范围，这样两两对比采用相对尺度。尽量减少性质不同的因素相互比较的困难，提高准确度。假设要比较某一层n个元素$C_1, C_2, \cdots, C_n$对上一层一个因素的影响。例如取C_i和C_j,用a_{ij}表示对上一元素的影响，全部的比较结果可以形成**成对比较矩阵**。

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, a_{ij} > 0, a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \tag{1.1}$$

根据矩阵A的特点，也称之为正互反矩阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

但是需要注意的是这里的各个元素之间不具有传递性，即一般情况下，$a_{ij} * a_{jk} \neq a_{ik}$.这我们称之为成对比较的不一致性。

当我们建立起这一成对比较阵后，如何再与我们所需要的权重系数结合起来，也就是权重系数如何计算出来？这时我们从一致性的角度来进行分析，也就是说当元素满足传递性时，是否可以计算出我们所需要的权重系数。为了达到这一目的，我们首先建立一致性矩阵：假设一单位重量的物体落在地上，摔成了n份，则每份的重量为w_i,其和为1. 则其两两比较$a_{ij} = w_i/w_j$形成一下矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

显然这一矩阵满足一致性的条件，而且容易计算该矩阵的秩为1，其唯一的非零特征根为n.其特征向量恰好是第一列的值，而第一列元素之间的比值恰好可以作为各个元素间的权重系数。这样一致性矩阵的非零特征根所对应的特征向量就是我们要求的权重系数。

根据元素的连续性，这样若矩阵存在不一致性，当不一致性与一致性矩阵差别不大的时候，其特征根及其对应的特征向量差别也应该不大。也就是说当a_{ij} 相对于一致性在一个允许的范围内的时候，其求得的特征向量可以作为其权重系数。

那么又提出了一个新的问题，不一致性在一个允许的范围内？由什么来确定不一致的允许范围？根据已知定理可以知道，正互反阵的最大特征根$\lambda > n$对应的特征向量即我们需要

求得权重系数。若$\lambda = n$,则n是一致阵。

这样，若λ与n的差别越大，则矩阵的不一致性程度就越严重，Saaty用

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1} \tag{1.4}$$

定义为一致性指标。而根据矩阵A的对角线上的元素均为1，可以计算其特征值之和$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n\lambda$,由此可见一致性指标相当于除$\lambda$ 外的其余$n-1$个特征根的平均值。

那么一致性指标究竟应该限制在什么样的一个范围内？就需要引入随机一致性指标RI。实际上用计算机模拟得到的值来代替实际计算大样本的计算结果。对于固定的n，随机地构造正互反阵，这时就涉及到元素的选取问题。也就是元素间的两两比较应该以什么样的标准，即比较尺度。Saaty 等人提出了1-9尺度，即a_{ij}的取值范围是1,2,....,9及其对应的倒数。在进行比较时，用1，3，5，7，9表示影响相同、稍强、强、明显地强、绝对地强，而2，4，6，8则是介于两者之间。其倒数则影响与上相反。其理由如下：

1.从心理学家的角度来看，如果成对比较的因素太多，则将超过人的判断能力，最多大致在7 ± 2范围。

2.Saaty也曾经应用其他不同的尺度来构建成对比较阵，并且将得到的结果与实际情况进行比较，发现1-9尺度不仅简单，而且对应于简单的尺度最好，而且其结果不劣于复杂的尺度。

回到刚才的问题，构造随机一致性指标。通过随机构造足够多的n阶正互反阵，根据其CI的平均值作为随机一致性指标。若构造的正互反阵的一致性指标与随机一致性指标之比$CR = \frac{CI}{RI} < 0.1$，则认为矩阵A的不一致程度在容许的范围之内，可用其特征向量作为权向量。这样对于正互反阵就解决了权重系数的计算和选取问题。

这样，根据以上的矩阵可以计算出特征值为$\lambda = 5.073 > 5$,其特征向量为$w = (0.263, 0.475, 0.055, 0.099, 0.110)$,并可以进一步计算出$CI = 0.018$,根据已有的随机一致性指标$RI = 1.12$,可以计算，其$CR = 0.018/1.12 < 0.1$，则通过一致性检验。则以上的特征向量可以作为权向量。

这样根据计算结果得到第二层对第一层的权向量，用同样的方法可以构造第三层方案层对第二层的每一个准则的成对比较阵。

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1/4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

以上对应的是旅游地对准则优越性的比较尺度。

Table 1: 旅游决策问题第三层的计算结果

k	1	2	3	4	5
$w_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

这样我们可以计算方案P_1在目标中的组合权重对应于相应项的乘积之和：

$$0.595 * 0.263 + 0.082 * 0.475 + 0.429 * 0.055 + 0.633 * 0.099 + 0.166 * 0.110 = 0.300 \tag{1.7}$$

类似，可以得到其他对应的组合权向量为

$$w^{(3)} = (0.300, 0.246, 0.456) \tag{1.8}$$

结果表明P_3的权重系数接近于1/2.这样就可以选择P_3作为旅游的选择地点。

一般情况下，还要对上述请况进行组合一致性检验，也就是说，每步都有误差，那么是否存在误差。这就需要一致性检验。

当然，在该问题中，还存在其他的一些定理的证明，例如正互反阵的特征值、特征向量的证明等。