第五章 动态规划

第五节 动态规划的应用

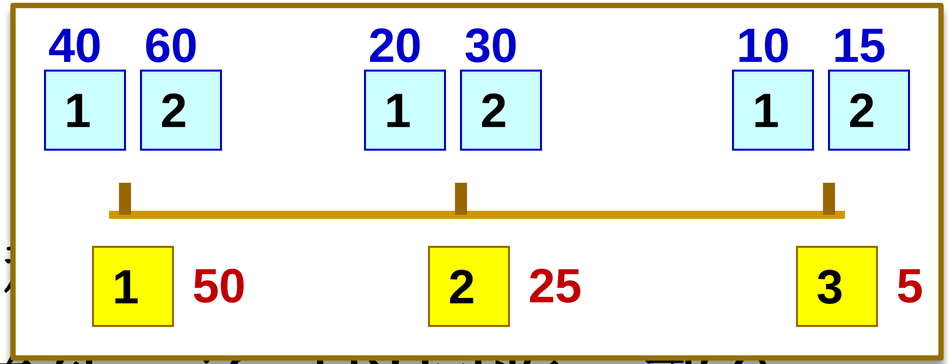
- 最短路问题
- 投资分配问题
- 背包问题
- 多阶段生产安排问题
- 生产与库存问题

第五节 动态规划的应用

四. 多阶段生产安排问题

- 问题的提出
- 建立动态规划基本方程
- 计算举例

四. 多阶段生产安排问题



1. 问题的提出

有某种原料，可用于两

产后，除产生一定的收益外，还可以回收一部分。生产信息由下表给出：

问题：今有原料 c 吨，计划进行n个阶段的生产，问每阶段如何分别确定两种生产方式原料的投入量，使总收益最大？

生产方式	方式1	方式2
收益函数	$g_1(x)$	$g_2(x)$
回收函数	a_1x	a_2x

x是原料投入量

a_1, a_2是原料回收率

$0 < a_1,\ \ a_2 < 1$

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(x)=$ 原料投入量为x 吨,进行k个阶段的生产所得的最大总收益。

四. 多阶段生产安排问题

1. 问题的提出

有某种原料，可用于两种方式的生产。原料用于生产后，除产生一定的收益外，还可以回收一部分。生产信息由下表给出：

问题： 今有原料 c 吨，计划进行n个阶段的生产，问每阶段如何分别确定两种生产方式原料的投入量，使总收益最大？　**所求：** $f_n(c)$

生产	方式1	方式2
收益函数	$g_1(x)$	$g_2(x)$
回收函数	$a_1 x$	$a_2 x$

x是原料投入量

a_1, a_2是原料回收率

$0 < a_1,\ a_2 < 1$

2. 建立动态规划基本方程

设 $f_k(x)=$ 原料投入量为x 吨,进行k个阶段的生产所得的最大总收益。

分析:

$$\overbrace{\text{第1阶段} \qquad\qquad \text{后}k\text{-1个阶段}}^{k\text{个阶段}}$$

$0\le y\le x$ 方式1 方式2

原料投入量x 吨 $\quad y \quad x-y \quad a_1y+a_2(x-y)$

总收益 $\quad g_1(y)+g_2(x-y)+f_{k-1}[a_1y+a_2(x-y)]$

原料回收量 $\quad a_1y+a_2(x-y)$

$$\therefore\ \boxed{f_k(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_{k-1}[a_1y+a_2(x-y)]\}}$$

$k=2,3,\cdots n$

$$\boxed{f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)\}}$$

3. 计算举例

例5 在多阶段生产安排问题中，

设收益函数分别为：$g_1(x)=0.6x$(万元)

$g_2(x)=0.5x$(万元)

回收率分别为：$a_1=0.1, a_2=0.4$

生产阶段数为：$n=3$

原料投入量：$x=100$吨　　求：$f_3(100)$

3. 计算举例

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)\}$$

例5 在多阶段生产安排问题中，

$g_1(x)=0.6x$ $a_1=0.1, a_2=0.4$

$g_2(x)=0.5x$ $n=3$ $x=100$ 求：$f_3(100)$

解：

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{0.6y+0.5(x-y)\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{0.5x+0.1y)\}=0.6x \quad (y=x)$$

y x-y

1 2

1

当投入量为x，只进行一个阶段生产时，最优策略是把全部原料都投入生产方式1，所得最大收益为0.6x (万元)。

$f_1(x)=0.6x\ (y=x)$

3. 计算举例

例5 $g_1(x)=0.6x$(万元)　$a_1=0.1, a_2=0.4$　$n=3$

$g_2(x)=0.5x$(万元)　$x=100$吨　求：$f_3(100)$

解：

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_1[a_1y+a_2(x-y)]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{0.6y+0.5(x-y)+0.6[0.1y+0.4(x-y)]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{0.74x-0.08y\}$$

$$=0.74x\ (y=0)$$

$$f_k(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_{k-1}[a_1y+a_2(x-y)]\}$$

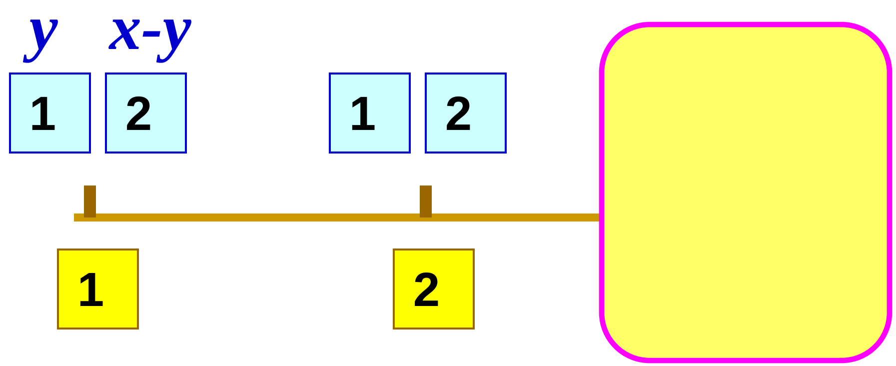
3. 计算举例

例5 $g_1(x)=0.6x$(万元) $a_1=0.1, a_2=0.4$ $n=3$

$g_2(x)=0.5x$(万元) $x=100$吨 求：$f_3(100)$

解：

$$f_2(x)=0.74x\ (y=0)$$



当投入量为x，进行两个阶段生产时，最优策略：第一阶段把全部原料都投入生产方式2，第二阶段把所有回收原料都投入生产方式1，则两个阶段所得最大收益为$0.74x$ (万元)。

$f_2(x)=0.74x\ (y=0)$

3. 计算举例

例5 $g_1(x)=0.6x$(万元) $a_1=0.1, a_2=0.4$ $n=3$

$g_2(x)=0.5x$(万元) $x=100$吨 求：$f_3(100)$

解：

$$f_3(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_2[a_1y+a_2(x-y)]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{0.6y+0.5(x-y)+0.74[0.1y+0.4(x-y)]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{0.796x-0.122y\}$$

$$=0.796x\ (y=0)$$

$$f_k(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_{k-1}[a_1y+a_2(x-y)]\}$$

3. 计算举例

例5 $g_1(x)=0.6x$(万元)　$a_1=0.1, a_2=0.4$　$n=3$

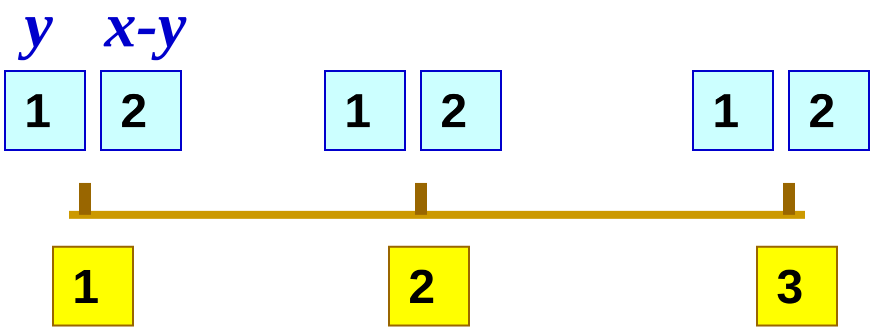
$g_2(x)=0.5x$(万元)　$x=100$吨　求：$f_3(100)$

解：

$$f_3(x)=0.796x\ (y=0)$$

$$f_3(100)=0.796\times 100$$

$$=79.6(\text{万元})$$



当投入量为x，进行三个阶段生产时，最优策略：第一阶段把全部原料都投入生产方式2，第二阶段把所有回收原料都投入生产方式2，第三阶段把所有回收原料都投入生产方式1，则三个阶段所得最大收益为0.796x (万元)。

3. 计算举例

例4 $g_1(x)=0.6x$(万元)　$a_1=0.1, a_2=0.4$　$n=3$

$g_2(x)=0.5x$(万元)　$x=100$吨　求：$f_3(100)$

解：$f_1(x)=0.6x\ (y=x)$

$f_2(x)=0.74x\ (y=0)$

$f_3(x)=0.796x\ (y=0)$

结论：原料投入量：x 吨

阶段数	第一阶段 方式1	第一阶段 方式2	最大收益
1	x	0	$0.6x$
2	0	x	$0.74x$
3	0	x	$0.796x$

$$f_3(100) = 79.6\,(\text{万元})$$

3. 计算举例

例5 $g_1(x) = 0.6x\,(\text{万元})$ $a_1 = 0.1, a_2 = 0.4$ $n = 3$

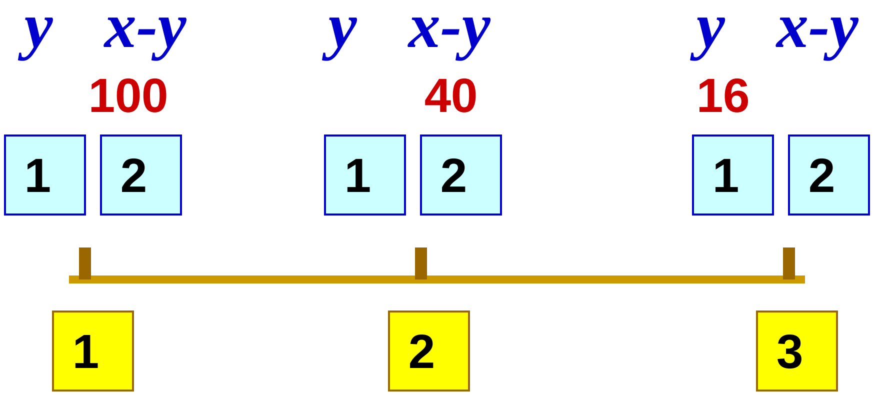
$g_2(x) = 0.5x\,(\text{万元})$ $x = 100$吨 求：$f_3(100)$

解：

$$f_1(x) = 0.6x \quad (y = x)$$

$$f_2(x) = 0.74x \quad (y = 0)$$

$$f_3(x) = 0.796x \quad (y = 0)$$



分析阶段收益和阶段回收量：

原料投入量：100 吨，安排3个阶段生产时，

第几阶段	阶段收益	阶段原料回收量
1	$0.5 \times 100 = 50(\text{万元})$	$0.4 \times 100 = 40(\text{吨})$
2	$0.5 \times 40 = 20(\text{万元})$	$0.4 \times 40 = 16(\text{吨})$
3	$0.6 \times 16 = 9.6(\text{万元})$	$0.1 \times 16 = 1.6(\text{吨})$

$f_3(100)=79.6$ (万元)

3. 计算举例

例5 $g_1(x)=0.6x$ (万元) $\quad a_1=0.1, a_2=0.4 \quad n=3$

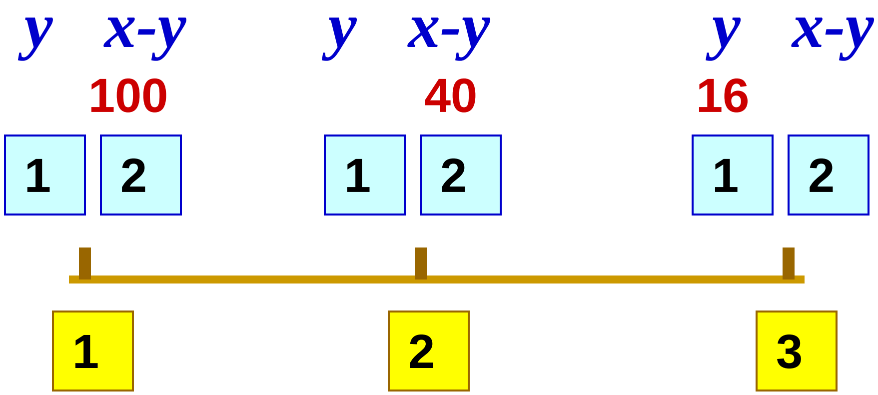
$g_2(x)=0.5x$ (万元) $\quad x=100$吨 $\quad$ 求：$f_3(100)$

解：

$f_1(x)=0.6x\ (y=x)$

$f_2(x)=0.74x\ (y=0)$

$f_3(x)=0.796x\ (y=0)$



结论： 安排3个阶段生产时，

原料投入量： 100 吨

$$f_3(100)=0.796\times100=79.6$$
$$=50+20+9.6$$

第几阶段	阶段收益
1	$0.5\times100=50$(万元)
2	$0.5\times40=20$(万元)
3	$0.6\times16=9.6$(万元)

$$f_2(40)=0.74\times40=29.6$$
$$=20+9.6$$

$$f_1(16)=0.6\times16=9.6$$

第五节 动态规划的应用

四. 多阶段生产安排问题

- 问题的提出
- 建立动态规划基本方程
- 计算举例

第五章 动态规划

第五节 动态规划的应用

- 最短路问题
- 投资分配问题
- 背包问题
- 多阶段生产安排问题
- 生产与库存问题

作业1

求多阶段生产安排问题的最优策略。

其中收益函数为：$g_1(x)=8x$

$g_2(x)=5x$

回收率为：$a_1=0.7, a_2=0.9$

生产阶段数为：$n=5$

原料投入量：$x=100$吨

求：$f_5(100)$

第五节 动态规划的应用

五. 生产与库存问题

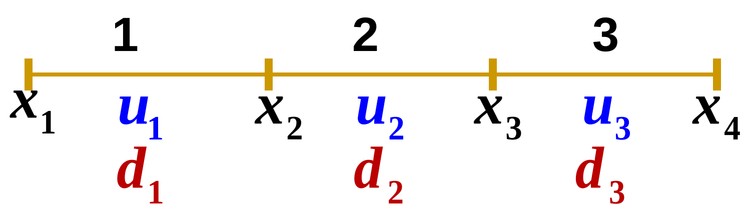
- 问题的提出
- 建立动态规划基本方程
- 计算举例

五. 生产与库存问题

- 生产与库存问题是实际生产中经常遇到的问题。增加产量可以降低生产成本，但当产量超过市场需求时，就会造成产品积压，增加库存费用。如果按市场需求安排生产，当订单小时会造成开工不足，当订单大时，会加班加点造成生产成本的增加。因此，合理利用库存调节产量、满足市场需求是十分有意义的。

五. 生产与库存问题

- 所谓生产与库存问题，就是一个生产部门在已知生产成本、库存费用和各阶段市场需求的条件下如何决定各阶段的产量，使计划期内的费用总和为最小的问题。

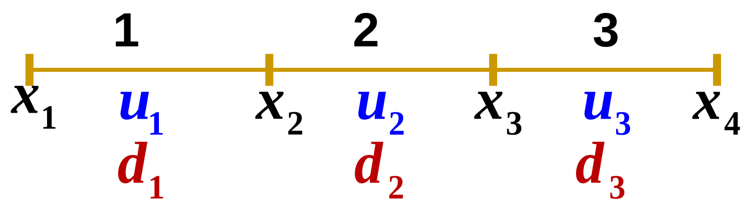


- 生产与库存模型也适用于商业经营管理。只需将产量变成采购量就可以得到采购与库存模型。

1. 问题的提出

设某一生产部门，生产计划周期为n个阶段，已知

	已知
x_1	最初库存量
d_k	阶段k的市场需求量
N	生产的固定成本
L	生产单位产品的费用
h	单位产品的阶段库存费用
M	仓库容量
B	阶段生产能力



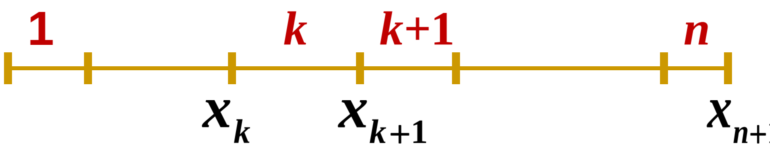
问题：应如何安排各个阶段的产量，使计划周期内（n个阶段）的费用总和为最小。

2. 建立动态规划基本方程

	已知
x_1	最初库存量
d_k	阶段k的市场需求量
N	生产的固定成本
L	生产单位产品的费用
h	单位产品的库存费用
M	仓库容量
B	阶段生产能力

设 x_k —— 阶段k的初始库存量；

➢由于计划末期的库存量通常也是给定的，为简便起见，假定 $x_{n+1}=0$



➢阶段k的库存量 x_k 既不能超过库存容量M，也不应超过阶段k至阶段n的需求总量，即：

$$0 \le x_k \le \min\{M, d_k + d_{k+1} + \cdots + d_n\},\ k = 1, 2, \cdots, n$$

2. 建立动态规划基本方程

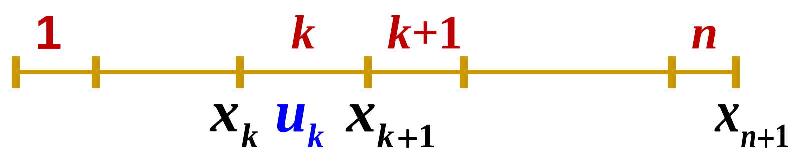
	已知
x_1	最初库存量
d_k	阶段k的市场需求量
N	生产的固定成本
L	生产单位产品的费用
h	单位产品的库存费用
M	仓库容量
B	阶段生产能力

设 x_k -----阶段k的初始库存量；

u_k -----阶段k的产量；

$$x_{n+1}=0$$

$$0\le x_k\le \min\{M, d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n\}$$



- 阶段k的产量u_k在不超过生产能力B的条件下，应充分满足该阶段的需求d_k，同时还要满足计划末期的库存为0的要求， 即：$d_k-x_k\le u_k\le \min\{B, d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n-x_k\}$

$$x_k+u_k\ge d_k \Rightarrow u_k\ge d_k-x_k$$

$$u_k+x_k\le d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n \Rightarrow u_k\le d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n-x_k$$

2. 建立动态规划基本方程

	已知
x_1	最初库存量
d_k	阶段k的市场需求量
N	生产的固定成本
L	生产单位产品的费用
h	单位产品的库存费用
M	仓库容量
B	阶段生产能力

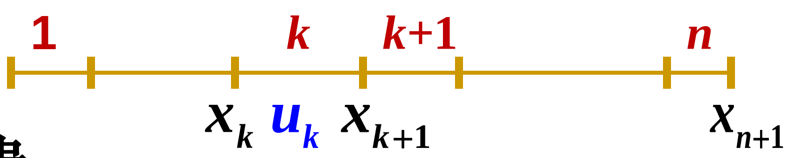
设 x_k -----阶段k的初始库存量；

u_k -----阶段k的产量； $x_{n+1}=0$

$$0\le x_k\le \min\{M, d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n\}$$

$$d_k-x_k\le u_k\le \min\{B, d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n-x_k\}$$

➢阶段k末或阶段k +1的初始库存量 $x_{k+1}=x_k+u_k-d_k$



➢阶段k的费用=生产费 +库存费：

$$N+Lu_k \qquad hx_{n+1}=h(x_k+u_k-d_k)$$

注：为简便起见，不计算本阶段销售产品的库存费

阶段k的费用 $r_k(x_k,u_k)=N+Lu_k+h(x_k+u_k-d_k)$

2. 建立动态规划基本方程

	已知
x_1	最初库存量
d_k	阶段*k*的市场需求量
N	生产的固定成本
L	生产单位产品的费用
h	单位产品的库存费用
M	仓库容量
B	阶段生产能力

设 x_k -----阶段*k*的初始库存量；

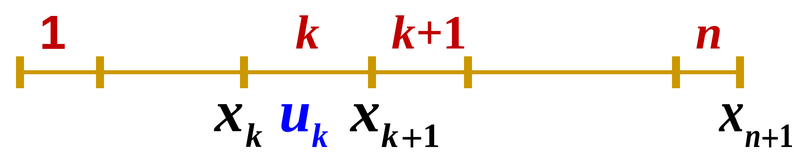
u_k -----阶段*k*的产量； $x_{n+1}=0$

$$0 \le x_k \le \min\{M, d_k + d_{k+1} + \cdots + d_n\}$$

$$d_k - x_k \le u_k \le \min\{B, d_k + d_{k+1} + \cdots + d_n - x_k\}$$

$$x_{k+1} = x_k + u_k - d_k$$

$$r_k(x_k, u_k) = N + Lu_k + h(x_k + u_k - d_k)$$



设 $f_k(x_k)=$ 阶段*k*的初始库存量

为 x_k 时，阶段*k*到计划期末的最小费用。

动态规划基本方程为：

$$f_k(x_k) = \min_{u_k}\{N + Lu_k + h(x_k + u_k - d_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

3. 计算举例

例5-10 求解生产与库存问题

求：$f_1(x_1)$

		已知
n	3	计划周期，阶段数
x_1	1	最初库存量
d_k		阶段k的市场需求量
N	8	生产的固定成本
L	2	生产单位产品的费用
h	2	单位产品的库存费用
M	4	仓库容量
B	6	阶段生产能力

$d_1=3,\ d_2=4,\ d_3=3,\ x_4=0$

1 2 3

x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 u_3 x_4

解：

当$k=3$时，$u_3=d_3-x_3=3-x_3$

$$f_4(x_4)=0,\qquad x_4=x_3+u_3-d_3=0$$

$$f_3(x_3)=\min_{u_3}\{N+Lu_3+h(x_3+u_3-d_3)+f_4(x_4)\}$$

$$=\min_{u_3}\{8+2u_3\}=8+2(3-x_3)$$

$$=14-2x_3$$

$$0\le x_3\le\min\{M,d_3\}=\min\{4,3\}=3$$

x_3	$f_3(x_3)$	u_3^*
0	14	3
1	12	2
2	10	1
3	8	0

f $0\le x_k\le\min\{M,d_k+d_{k+1}+\cdots$

3. 计算举例

例5-10 求解生产与库存问题

求：$f_1(x_1)$

解：

当$k=2$时，

$$x_3 = x_2 + u_2 - d_2$$

$$0 \le x_2 \le \min\{M, d_2 + d_3\} = \min\{4, 7\} = 4$$

$$4 - x_2 \le u_2 \le \min\{B, d_2 + d_3 - x_2\} = \min\{6, 7 - x_2\}$$

		已知
n	3	计划周期，阶段数
x_1	1	最初库存量
d_k		阶段k的市场需求量
N	8	生产的固定成本
L	2	生产单位产品的费用
h	2	单位产品的库存费用
M	4	仓库容量
B	6	阶段生产能力
$d_1=3,\ d_2=4,\ d_3=3,\ x_4=0$		

1　　2　　3

x_1　u_1　x_2　u_2　x_3　u_3　x_4

$$f_2(x_2) = \min_{u_2}\{8 + 2u_2 + 2(x_2 + u_2 - d_2) + f_3(x_3)\}$$

$$= \min_{u_2}\{8 + 2u_2 + 2(x_2 + u_2 - 4) + f_3(x_2 + u_2 - 4)\}$$

$$0\ \ d_k - x_k \le u_k \le \min\{B, d_k + d_{k+1} + \cdots + d_n - x_k\}, n$$

3. 计算举例

x_3	$f_3(x_3)$	u_3^*
0	14	3
1	12	2
2	10	1
3	8	0

例5–10 求解生产与库存问题 求：$f_1(x_1)$

解： 当$k=2$时，$x_3 = x_2 + u_2 - d_2 \quad 0 \le x_2 \le 4$

$$4 - x_2 \le u_2 \le \min\{6, 7 - x_2\}$$

$$f_2(x_2) = \min_{u_2}\{8 + 2u_2 + 2(x_2 + u_2 - 4) + f_3(x_2 + u_2 - 4)\}$$

4	0	4	14
5	0	5	12
3	1	3	14
5	2	5	8

	u_2	0	1	2	3	4	5	6	$f_2(x_2)$	u_2^*
	0					30	32	32	30	4
	1				28	30	32	34	28	3
x_2	2			26	28	30	32		26	2
	3		24	26	28	32			24	1
	4	22	24	26	28				22	0

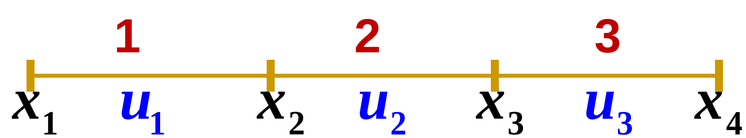
x_2	$f_2(x_2)$	u_2^*
0	30	4
1	28	3
2	26	2
3	24	1
4	22	0

3. 计算举例

例5-10 求解生产与库存问题

求：$f_1(x_1)$

		已知
n	3	计划周期，阶段数
x_1	1	最初库存量
d_k		阶段k的市场需求量
N	8	生产的固定成本
L	2	生产单位产品的费用
h	2	单位产品的库存费用
M	4	仓库容量
B	6	阶段生产能力
$d_1=3,\ d_2=4,\ d_3=3,\ x_4=0$		



解：

当$k=1$时，$\because x_1=1$

$$\therefore x_2=x_1+u_1-d_1=1+u_1-3=u_1-2$$

$$d_1-x_1\le u_1\le \min\{B,d_1+d_2+d_3-x_1\}$$

$$2\le u_1\le \min\{6,10-1\}=6$$

$$f_1(x_1)=\min_{u_1}\{8+2u_1+2(x_1+u_1-d_1)+f_2(x_2)\}$$

$$=\min_{u_1=2,3,4,5,6}\{8+2u_1+2(u_1-2)+f_2(u_1-2)\}$$

$$f_k \quad d_k-x_k\le u_k\le \min\{B,d_k+d_{k+1}+\cdots+d_n-x_k\} \quad {}_{+1})\}$$

3. 计算举例

		已知
n	3	计划周期，阶段数
x_1	1	最初库存量
d_k		阶段k的市场需求量
N	8	生产的固定成本

例5-10 求解生产与库存问题

求：$f_1(x_1)$

解：

当$k=1$时，$\because x_1=1\ \therefore x_2=u_1-2,\ 2\le u_1\le 6$

$$f_1(x_1)=\min_{u_1=2,3,4,5,6}\{8+2u_1+2(u_1-2)+f_2(u_1-2)\}=42,\ u_1^*=2$$

2 30
3 28
4 26

u_1	$\{\cdots\}$
2	42
3	44
4	46
5	48
6	50

x_2	$f_2(x_2)$	u_2^*
0	30	4
1	28	3
2	26	2
3	24	1
4	22	0

3. 计算举例

例5-10 求解生产与库存问题

求: $f_1(x_1)$

	1		2		3	
x_1	u_1	x_2	u_2	x_3	u_3	x_4
1	2	0	4	0	3	0

$$d_1 = 3,\ d_2 = 4,\ d_3 = 3,\ x_4 = 0$$

$$x_3 = x_2 + u_2 - d_2$$

解:

当$k=1$时, $\because x_1 = 1 \ \therefore x_2 = u_1 - 2 \rightarrow x_2^* = 0 \rightarrow u_2^* = 4 \rightarrow x_3^* = 0 \rightarrow u_3^* = 3$

$$f_1(x_1) = \min_{u_1=2,3,4,5,6} \{8 + 2u_1 + 2(u_1 - 2) + f_2(u_1 - 2)\} = 42,\ u_1^* = 2$$

x_2	$f_2(x_2)$	u_2^*
0	30	4
1	28	3
2	26	2
3	24	1
4	22	0

x_3	$f_3(x_3)$	u_3^*
0	14	3
1	12	2
2	10	1
3	8	0

最优产量u_k^*:

最优库存量x_k^*:

最小费用: 42

k	u_k^*	x_k^*
1	2	1
2	4	0
3	3	0

第五节 动态规划的应用

五. 生产与库存问题

- 问题的提出
- 建立动态规划基本方程
- 计算举例

第五章 动态规划

第五节 动态规划的应用

- 最短路问题
- 投资分配问题
- 背包问题
- 多阶段生产安排问题
- 生产与库存问题

作业1

求多阶段生产安排问题的最优策略。

其中收益函数为：$g_1(x) = 8x$

$g_2(x) = 5x$

回收率为：$a_1 = 0.7, a_2 = 0.9$

生产阶段数为：$n = 5$

原料投入量：$x = 100$吨

求：$f_5(100)$

作业2

P351 7

P283 7

解答：$g_1(x)=8x \quad g_2(x)=5x \quad a_1=0.7, a_2=0.9 \quad n=5$

$x=100$吨　求：$f_5(100)$

解：

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{8y+5(x-y)\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{5x+3y\}=8x \quad (y=x)$$

解答： $g_1(x)=8x \quad g_2(x)=5x \quad a_1=0.7, a_2=0.9 \quad n=5$

$x=100$吨　求：$f_5(100)$

解：

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)\}=8x \quad (y=x)$$

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_1[a_1y+a_2(x-y)]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{5x+3y+8[0.7y+0.9(x-y)]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{12.2x+1.4y\}$$

$$=13.6x \quad (y=x)$$

解答： $g_1(x)=8x \quad g_2(x)=5x \quad a_1=0.7, a_2=0.9 \quad n=5$

$x=100$吨 求：$f_5(100)$

解：

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)\}=8x \quad (y=x)$$

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_1[a_1y+a_2(x-y)]\}=13.6x \ (y=x)$$

$$f_3(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_2[a_1y+a_2(x-y)]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{5x+3y+13.6[0.9x-0.2y]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{17.24x+0.28y\}$$

$$=17.52x \ (y=x)$$

解答： $g_1(x)=8x \quad g_2(x)=5x \quad a_1=0.7, a_2=0.9 \quad n=5$

$x=100$吨　求：$f_5(100)$

解：

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)\}=8x \quad (y=x)$$

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_1[a_1y+a_2(x-y)]\}=13.6x \quad (y=x)$$

$$f_3(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_2[a_1y+a_2(x-y)]\}=17.52x \quad (y=x)$$

$$f_4(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_3[a_1y+a_2(x-y)]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{5x+3y+17.52[0.9x-0.2y]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{20.768x-0.504y\}$$

$$=20.768x \quad (y=0)$$

解答： $g_1(x)=8x \quad g_2(x)=5x \quad a_1=0.7, a_2=0.9 \quad n=5$

$x=100$吨 求：$f_5(100)$

解：

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)\}=8x \quad (y=x)$$

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_1[a_1y+a_2(x-y)]\}=13.6x \ (y=x)$$

$$f_3(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_2[a_1y+a_2(x-y)]\}=17.52x \ (y=x)$$

$$f_4(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_3[a_1y+a_2(x-y)]\}=20.768x \ (y=0)$$

$$f_5(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_4[a_1y+a_2(x-y)]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{5x+3y+20.768[0.9x-0.2y]\}$$

$$=\max_{0\le y\le x}\{23.6912x-1.1536y\}$$

$$=23.6912x \ (y=0)$$

解答： $g_1(x)=8x \quad g_2(x)=5x \quad a_1=0.7, a_2=0.9 \quad n=5$

$x=100$吨　求：$f_5(100)$

解：

$$f_1(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)\}=8x \quad (y=x)$$

$$f_2(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_1[a_1y+a_2(x-y)]\}=13.6x \quad (y=x)$$

$$f_3(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_2[a_1y+a_2(x-y)]\}=17.52x \quad (y=x)$$

$$f_4(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_3[a_1y+a_2(x-y)]\}=20.768x \quad (y=0)$$

$$f_5(x)=\max_{0\le y\le x}\{g_1(y)+g_2(x-y)+f_4[a_1y+a_2(x-y)]\}=23.6912x \quad (y=0)$$

$$f_5(100)=23.6912\times 100=2369.12$$

解答： $g_1(x)=8x \quad g_2(x)=5x \quad a_1=0.7, a_2=0.9 \qquad x=100$吨

解： $f_5(100)=2369.12$

1 $y=x$

2 $y=x$

3 $y=x$

4 $y=0$

5 $y=0$

结论：

y	x-y	y	x-y	y	x-y	y	x-y	y	x-y
	100		90	81		56.7		39.69	
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1		2		3		4		5	

第几阶段	阶段收益	回收原料数量
1	$5\times100=500$(万元)	$0.9\times100=90$(吨)
2	$5\times90=450$(万元)	$0.9\times90=81$(吨)
3	$8\times81=648$(万元)	$0.7\times81=56.7$(吨)
4	$8\times56.7=453.6$(万元)	$0.7\times56.7=39.69$(吨)
5	$+\ 8\times39.69=317.52$(万元)	$0.7\times36.69=25.683$(吨)

2369.12