第一章 线性规划

第十节 运输问题

- 产销平衡运输问题的数学模型
- 产销平衡运输问题的表上作业法
- 产销不平衡的运输问题

一. 产销平衡运输问题的数学模型：

设 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

问：应怎样调运货物才能使总运费最小？

(P)

$$\min S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2 \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2 \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

变量个数：$m \times n$

约束个数：$m + n$

$$X = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn})^T$$

一. 产销平衡运输问题的数学模型：

$$(P)\min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

$$(P)\ \min S=CX$$

$$AX=b$$

$$X\geq 0$$

一. 产销平衡运输问题的数学模型：

$$(P)\ \min S = CX \qquad AX=b \qquad X \geq 0$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\
A= & \begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{前}m\text{行} \\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{后}n\text{行} \end{array}$$

$$x_{ij} \quad p_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ m+j \\ \\ \end{array}$$

行数：$m+n$　列数：$m \times n$

$$\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\
x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\
x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \\
x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\
x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\
x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \\
x_{ij} \geq 0 \qquad AX=b
\end{cases}$$

可以求得：$R(A)=m+n-1$, 即$AX=b$中

所以(P)基本可行解中基

一. 产销平衡运输问题的数学模型：

$$(P)\min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 & u_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 & u_2 \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m & u_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 & v_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 & v_2 \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n & v_n \\ x_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

$$(P)\ \min S=CX$$
$$AX=b$$
$$X\geq 0$$

$$(D)\max Z=\lambda b$$
$$\lambda A\leq C$$
$$\lambda=(u_1,u_2,\cdots,u_m,v_1,v_2,\cdots,v_n)$$

一. 产销平衡运输问题的数学模型：

$$\max Z = \lambda b$$
$$\lambda A \le C$$

$$X = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn})$$

$$C = (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2n}, \cdots, c_{m1}, c_{m2}, \cdots, c_{mn})$$

$$\lambda = (u_1, u_2, \cdots, u_m, v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

$$\lambda A \le C$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 + v_1 \le c_{11} \\ u_1 + v_2 \le c_{12} \\ \cdots \\ u_1 + v_n \le c_{1n} \\ u_2 + v_1 \le c_{21} \\ u_2 + v_2 \le c_{22} \\ \cdots \\ u_2 + v_n \le c_{2n} \\ \cdots \\ u_m + v_1 \le c_{m1} \\ u_m + v_2 \le c_{m2} \\ \cdots \\ u_m + v_n \le c_{mn} \end{array}\right\} \boxed{u_i + v_j \le c_{ij}}$$

$$i = 1,2,\cdots,m$$
$$j = 1,2,\cdots,n$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

一. 产销平衡运输问题的数学模型：

$$(P)\min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 & u_1\\
x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 & u_2\\
x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m & u_m\\
x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 & v_1\\
x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 & v_2\\
x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n & v_n\\
x_{ij}\geq 0
\end{cases}$$

$$(D)\quad \max Z=\sum_{i=1}^{m}a_i u_i+\sum_{j=1}^{n}b_j v_j$$

$$u_i+v_j\leq c_{ij}\qquad i=1,2,\cdots,m$$
$$j=1,2,\cdots,n$$

$$(P)\quad \min S=CX$$
$$AX=b$$
$$X\geq 0$$

$$(D)\quad \max Z=\lambda b$$
$$\lambda A\leq C$$
$$\lambda=(u_1,u_2,\cdots,u_m,v_1,v_2,\cdots,v_n)$$

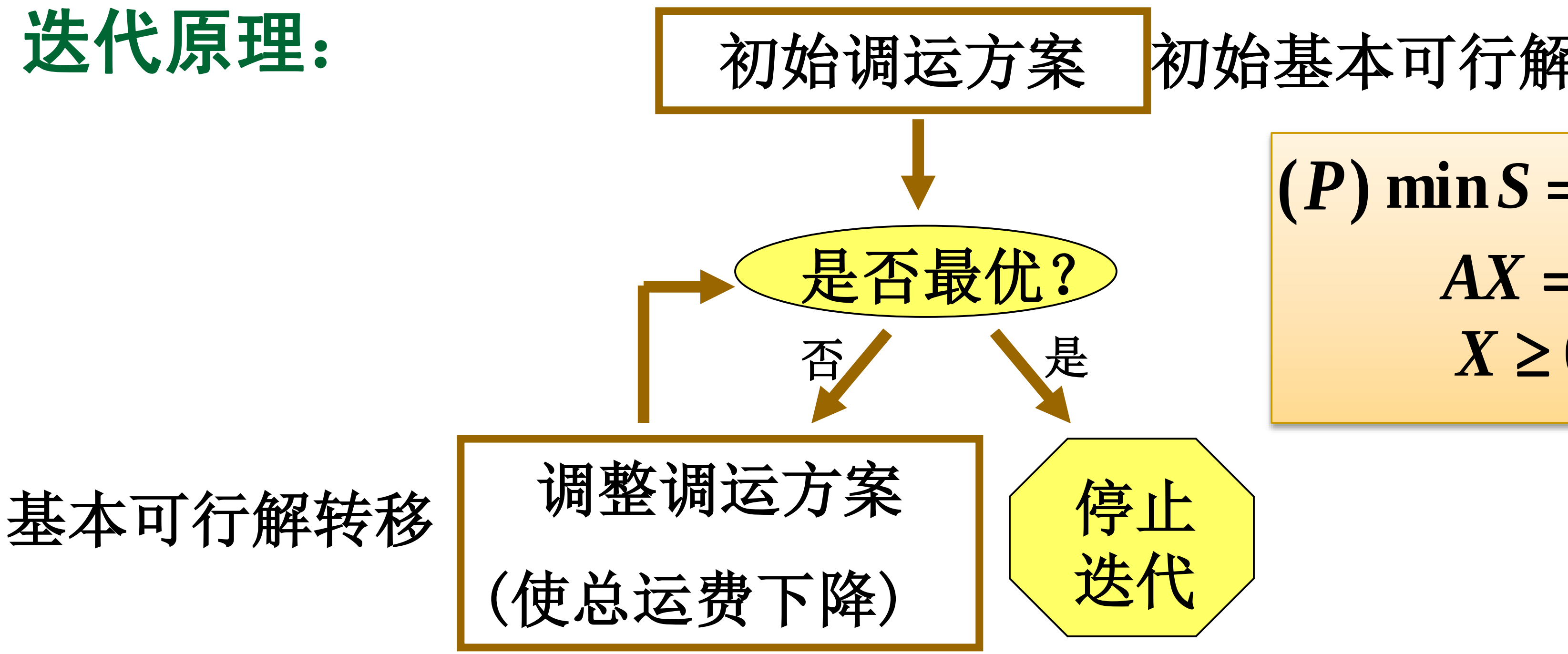
第一章 线性规划

第十节 运输问题

- 产销平衡运输问题的数学模型
- 产销平衡运输问题的表上作业法
- 产销不平衡的运输问题

二. 产销平衡运输问题的表上作业法：

迭代原理：



$$(P)\ \min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

迭代步骤： 1. 初始调运方案的求法--最小元素法

2. 建立最优性检验准则

3. 调运方案的调整--位势法

第一章 线性规划

二. 产销平衡运输问题的表上作业法

- 初始调运方案的求法—最小元素法
- 最优性检验准则
- 调运方案的调整—位势法

1. 初始调运方案的求法--最小元素法：例1-23

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1.5　20*	2	0.3　80*	3	~~100~~ ~~20~~
A_2	7　30*	0.8　20*	1.4	2　30*	~~80~~ ~~60~~ ~~30~~
A_3	1.2	0.3　50*	2	2.5	~~50~~
销量	~~50~~ ~~30~~	~~70~~ ~~20~~	~~80~~	~~30~~	230

基本思想： 就近供应，即找最小运价的格子，给尽可能大的运量。

1. 初始调运方案的求法--最小元素法：例1-23

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1.5 20^*	2	0.3 80^*	3	100
A_2	7 30^*	0.8 20^*	1.4	2 30^*	80
A_3	1.2	0.3 50^*	2	2.5	50
销量	50	70	80	30	230

$$(P)\ \min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$

初始调运方案：$X = (20,0,80,0,30,20,0,30,0,50,0,0,)^T$

定理1-12

用最小元素法得到的 $X = (x_{ij})$ 是 (P) 的一个基本可行解。

*格子中的运量 x_{ij} 为基变量（个数 = $m+n-1$），

没*格子中的运量 $x_{ij} = 0$ 为非基变量。

1. 初始调运方案的求法--最小元素法：例1-24

销地 产地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	1 1^*	2 ×	2 0^*	~~1~~
A_2	3 ×	1 2^*	3 0^*	~~2~~
A_3	2 ×	3 ×	1 4^*	~~4~~
销量	~~1~~	~~2~~	~~4~~	7

最小元素法需要注意两点：

1) 若填完一个画*的数后，它所在行、列的剩余量均为0，则规定只能在行、列之一的空格内打×，不能在该数所在行、列空格内同时打 ×

2) 若只剩下最后一行或一列没有填数或打×时，规定在每一个空格内只许填数，不许打×，即使变量取0也只能填0并在右上方画*（保证基变量个数为$m+n-1$）

第一章 线性规划

第十节 运输问题

- 产销平衡运输问题的数学模型
- 产销平衡运输问题的表上作业法
- 产销不平衡的运输问题

第一章 线性规划

二. 产销平衡运输问题的表上作业法

- 初始调运方案的求法—最小元素法
- 最优性检验准则
- 调运方案的调整—位势法

复习

一. 产销平衡运输问题的数学模型：

设 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

(P)

$$\min S = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\ge 0 \end{cases}$$

问：应怎样调运货物才能使总运费最小？

$$(P)\ \min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \ge 0$$

复习

产销平衡运输问题的数学模型：

$$
\begin{aligned}
(P)\ \min S &= CX \\
AX &= b \\
X &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn}
\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} x_{ij} \\ p_{ij} \end{array} = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{— } i \\ \\ \\ \\ \text{— } m+j \\ \\ \\ \end{array}
$$

行数：$m+n$　列数：$m \times n$

可以求得：$R(A)=m+n-1$，即$AX=b$中有效方程的个数，

所以(P)基本可行解中基变量个数为$m+n-1$

复习

一. 产销平衡运输问题的数学模型：

$$(P)\ \min S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 & u_1\\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 & u_2\\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m & u_m\\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 & v_1\\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 & v_2\\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n & v_n\\ x_{ij}\ge 0 \end{cases}$$

$$(D)\ \max Z=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$$

$$u_i+v_j\le c_{ij}\qquad i=1,2,\cdots,m$$
$$j=1,2,\cdots,n$$

$$(P)\ \min S=CX$$
$$AX=b$$
$$X\ge 0$$

$$(D)\ \max Z=\lambda b$$
$$\lambda A\le C$$
$$\lambda=(u_1,\cdots u_i,\cdots,u_m,v_1,\cdots v_j,\cdots,v_n)$$

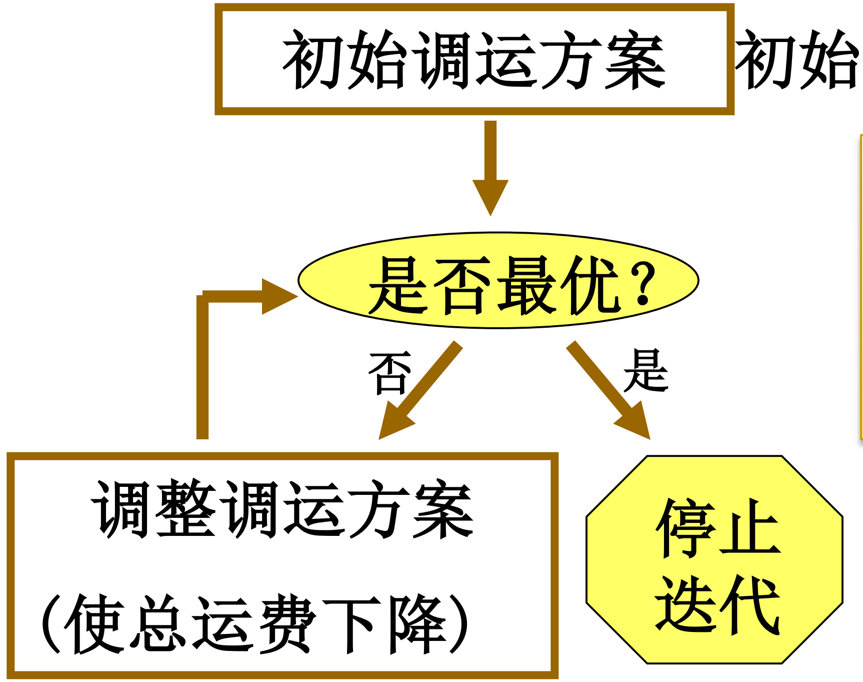
二. 产销平衡运输问题的表上作业法：

最小元素法

迭代原理：

初始基本可行解

$$(P)\ \min S = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geq 0$$



基本可行解转移

1. 初始调运方案的求法--最小元素法：例1-23

复习

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1.5　20*	2　×	0.3　80*	3　×	~~100~~ ~~20~~
A_2	7　30*	0.8　20*	1.4　×	2　30*	~~80~~ ~~60~~ ~~30~~
A_3	1.2　×	0.3　50*	2　×	2.5　×	~~50~~
销量	~~50~~ ~~30~~	~~70~~ ~~20~~	~~80~~	~~30~~	230

基本思想： 就近供应，即找最小运价的格子，给尽可能大的运量。

2. 建立最优性检验准则

$(P)\ \min S = CX$
$AX = b$
$X \geq 0$

$(D$

定理1-10（最优性判别定理）

设 $X=(x_{ij})$ 是(P)的基本可行解，$\lambda=(u_i,$

的可行解。若它们满足互补松弛条件：$x_{ij}(c_{ij}-$

则 $X=(x_{ij})$ 是(P)的最优解。

$i=$
$j=$

$$p_{ij}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\\ \\ \\ \\ m+j\\ \\ \\ \end{array}$$

证明： $\because X,\lambda$ 分别是(P)和(D)的可行解，由定

X,λ 分别是(P)和(D)的最优解 $\rightleftarrows$ $(C-\lambda$

$$(c_j-\lambda p_j)x_j=0,\ j=1,2,\cdots,n$$

$$(c_{ij}-\lambda p_{ij})x_{ij}=0,$$

$$\lambda p_{ij}=(u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_j,\cdots,v_n)\begin{pmatrix}\vdots\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ i\\ \\ m+j\\ \\ \end{array}$$
$$=u_i+v_j$$

$$\boxed{(c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij}=0}$$

$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$

2. 建立最优性检验准则　例1-23

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	a_1	u_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	a_2	u_2
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	a_3	u_3
销量	b_1	b_2	b_3	b_4		
	v_1	v_2	v_3	v_4		

—— 行位势数

—— 列位势数

$$(P)\quad \min S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3}x_{ij}=b_j,\quad j=1,2,3,4$$

$$x_{ij}\ge 0$$

$$(D)\quad \max Z=\sum_{i=1}^{3}a_iu_i+\sum_{j=1}^{4}b_jv_j$$

$$u_i+v_j\le c_{ij}\qquad i=1,2,3$$

$$j=1,2,3,4$$

变量m+n个；方程m+n-1个

2. 建立最优性检验准则 例1-23

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	1.5 20^*	2	0.3 80^*	3	100	$u_1=0$
A_2	7 30^*	0.8 20^*	1.4	2 30^*	80	$u_2=5.5$
A_3	1.2	0.3 50^*	2	2.5	50	$u_3=5$
销量	50	70	80	30	230	
	$v_1=1.5$	$v_2=-4.7$	$v_3=0.3$	$v_4=-3.5$		

$$\begin{cases} u_1+v_1=1.5 \\ u_1+v_3=0.3 \\ u_2+v_1=7 \\ u_2+v_2=0.8 \\ u_2+v_4=2 \\ u_3+v_2=0.3 \end{cases}$$

设 $X=(x_{ij})$ 是(P)的一个基本可行解，寻找(D)的一个可行解

$\lambda=(u_i,v_j)$ 使 $x_{ij}(c_{ij}-u_i-v_j)=0$ → *格子中，$c_{ij}-u_i-v_j=0$

$i=1,2,3,\ j=1,2,3,4$

*格子中，$c_{ij}=u_i+v_j$

令$u_1=0$，得到方程组的一个解：

$$\begin{array}{ccccccc} u_1, & u_2, & u_3, & v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \end{array}$$

$$\lambda=(0,\ 5.5,\ 5,\ 1.5,\ -4.7,\ 0.3,\ -3.5)$$

$$\min S=CX \quad AX=b \quad X\geq 0$$

$$\max Z=\lambda b \quad \lambda A\leq C$$

线性规划1-10

2. 建立最优性检验准则　例1-23

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	1.5　20^*	2	0.3　80^*	3	100	$u_1=0$
A_2	7　30^*	0.8　20^*	1.4	2　30^*	80	$u_2=5.5$
A_3	1.2	0.3　50^*	2	2.5	50	$u_3=5$
销量	50	70	80	30	230	
	$v_1=1.5$	$v_2=-4.7$	$v_3=0.3$	$v_4=-3.5$		

设 $X=(x_{ij})$ 是 (P) 的一个基本可行解，寻找 (D) 的一个可行解 $\lambda=(u_i,v_j)$ 使

*格子中，$c_{ij}=u_i+v_j$

最优性检验： 检验 $\lambda=(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3,v_4)$ 是否是 (D) 的可行解

$$\max Z=\lambda b$$
$$\lambda A\le C$$

$$u_i+v_j\le c_{ij}\qquad i=1,2,3\quad j=1,2,3,4$$

2. 建立最优性检验准则　例1-23

销地 / 产地	B_1		B_2		B_3		B_4		产量	
A_1	1.5	20^*	2		0.3	80^*	3		100	$u_1=0$
A_2	7	30^*	0.8	20^*	1.4	×	2	30^*	80	$u_2=5.5$
A_3	1.2		0.3	50^*	2		2.5		50	$u_3=5$
销量	50		70		80		30		230	

$v_1=1.5$　$v_2=-4.7$　$v_3=0.3$　$v_4=-3.5$

设 $X=(x_{ij})$ 是 (P) 的一个基本可行解，寻找 (D) 的一个可行解 $\lambda=(u_i,v_j)$ 使

$*$格子中，$c_{ij}=u_i+v_j$

最优性检验： 检验 $\lambda=(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3,v_4)$ 是否是 (D) 的可行解

$\longrightarrow u_i+v_j\le c_{ij}$? $\longrightarrow c_{ij}-u_i-v_j\ge 0$?

若 x_{ij} 的检验数 $\lambda_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j\begin{cases}=0, & *\text{格子中}, \\ \ge 0, & \text{没}*\text{格子中}\end{cases}$

则 λ 是 (D) 的可行解，$X=(x_{ij})$ 是 (P) 的最优解。

而 $\lambda_{23}=-4.4<0$

$\therefore \lambda$ 不是 (D) 的可行解，$X=(x_{ij})$ 不是 (P) 的最优解。

2. 建立最优性检验准则　例1-23

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	1.5　20^*	2	0.3　80^*	3	100	$u_1=0$
A_2	7　30^*	0.8　20^*	1.4	2　30^*	80	$u_2=5.5$
A_3	1.2	0.3　50^*	2	2.5	50	$u_3=5$
销量	50	70	80	30	230	
	$v_1=1.5$	$v_2=-4.7$	$v_3=0.3$	$v_4=-3.5$		

设 $X=(x_{ij})$ 是(*P*)的一个基本可行解，寻找(*D*)的一个可行解 $\lambda=(u_i,v_j)$ 使 *格子中，$c_{ij}=u_i+v_j$

最优性检验：

m+*n*个变量，m+n−1个方程　令 $u_1=0$

1)计算行、列位势数：由 $c_{ij}=u_i+v_j$ (*格子) 计算 u_i,v_j

2)计算 x_{ij} 检验数：　$\lambda_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ (没*格子)

若 λ_{ij} 都 ≥ 0，则 $X=(x_{ij})$ 是(*P*)的最优解。

若存在 $\lambda_{ij}<0$，则 $X=(x_{ij})$ 不是(*P*)的最优解。

第一章 线性规划

产销平衡运输问题的表上作业法

- 初始调运方案的求法—最小元素法
- 最优性检验准则
- 调运方案的调整—位势法

第一章 线性规划

调运方案的调整—位势法

- 确定进基变量
- 确定离基变量
  - 构造闭回路
  - 确定调整量
- 调整调运方案

3. 调运方案的调整--位势法(基本可行解的转移)

确定进基变量：

逐行检查，第一个负检验数对应的非基变量（没*格子中的运量）进基，可使总运费下降。

单纯形算法：

若非基变量 x_j 的检验数 $y_{0j} = c_j - \overset{\lambda}{\underline{C_B B^{-1}}} p_j < 0,$

则 x_j 进基可使新的基本可行解目标值↓，即： $S^1 = S^0 + y_{0j}\theta$

$\because y_{0j} < 0 \therefore \theta > 0$ 越大，目标值↓得越多。

运输问题的表上作业法：

若非基变量 x_{ij} 的检验数 $\lambda_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j < 0,$ $\lambda p_{ij} = u_i + v_j$

$$= c_{ij} - \lambda p_{ij} < 0,$$

则 x_{ij} 进基可使新的基本可行解目标值↓，

新的调运方案的总费用↓，即： $S^1 = S^0 + \lambda_{ij}\theta$

$\because \lambda_{ij} < 0 \therefore \theta > 0$ 越大，总费用↓得越多。

2. 建立最优性检验准则　例1-23

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	1.5　20^*	2	0.3　80^*	3	100	$u_1=0$
A_2	7　30^*	0.8　20^*	1.4　×	2　30^*	80	$u_2=5.5$
A_3	1.2	0.3　50^*	2	2.5	50	$u_3=5$
销量	50	70	80	30	230	
	$v_1=1.5$	$v_2=-4.7$	$v_3=0.3$	$v_4=-3.5$		

设 $X=(x_{ij})$ 是(P)的一个基本可行解，寻找(D)的一个可行解 $\lambda=(u_i,v_j)$ 使 *格子中，$c_{ij}=u_i+v_j$

最优性检验： 检验 $\lambda=(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3,v_4)$ 是否是(D)的可行解

若 x_{ij} 的检验数 $\lambda_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j \begin{cases} =0, & *格子中, \\ \geq 0, & 没*格子中 \end{cases}$　　x_{23}为进基变量

则 λ 是(D)的可行解，$X=(x_{ij})$ 是(P)的最优解。而 $\lambda_{23}=-4.4<0$

$\therefore \lambda$ 不是(D)的可行解，$X=(x_{ij})$ 不是(P)的最优解。

第一章 线性规划

调运方案的调整—位势法

- 确定进基变量
- 确定离基变量
  - 构造闭回路
  - 确定调整量
- 调整调运方案

闭回路：

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	x_{11}	x_{12}			a_1
A_2		x_{22}		x_{24}	a_2
A_3	x_{31}			x_{34}	a_3
销量	b_1	b_2	b_3	b_4	

$\{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{24}, x_{34}, x_{31}\}$是一个闭回路

闭回路的三个几何特征：

1）每个顶点都是“拐角点”

2）每条边不是水平就是垂直

3）每一行(列)若有闭回路的顶点,则有且仅有两个.

1）构造闭回路：

例1-23

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1.5 20^*	2	0.3 80^*	3	100
A_2	7 30^*	0.8 20^*	1.4	2 30^*	80
A_3	1.2	0.3 50^*	2	2.5	50
销量	50	70	80	30	230

定理1-13

若已知一个基本可行解，则对任意一个非基变量 x_{ij}，存在唯一的闭回路，它包含这个非基变量（没*格子），而闭回路的其余顶点都是基变量（*格子）.

1）构造闭回路：

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1.5 **20***	2	0.3 **80***	3	100
A_2	7 **30***	0.8 **20***	1.4	2 **30***	80
A_3	1.2	0.3 **50***	2	2.5	50
销量	50	70	80	30	230

例1-23

定理1-13

若已知一个基本可行解，则对任意一个非基变量 x_{ij}，存在唯一的闭回路，它包含这个非基变量(没*格子)，而闭回路的其余顶点都是基变量(*格子)

1）构造闭回路：

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1.5 **20***	2	0.3 **80***	3	100
A_2	7 **30***	0.8 **20***	1.4	2 **30***	80
A_3	1.2	0.3 **50***	2	2.5	50
销量	50	70	80	30	230

例1-23

定理1-13

若已知一个基本可行解，则对任意一个非基变量 x_{ij}，存在唯一的闭回路，它包含这个非基变量(没*格子)，而闭回路的其余顶点都是基变量(*格子)

1）构造闭回路：

例1-23

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1.5 **20***	2	0.3 **80***	3	100
A_2	7 **30***	0.8 **20***	1.4	2 **30***	80
A_3	1.2	0.3 **50***	2	2.5	50
销量	50	70	80	30	230

定理1-13

若已知一个基本可行解，则对任意一个非基变量 x_{ij}，存在唯一的闭回路，它包含这个非基变量(没*格子)，而闭回路的其余顶点都是基变量(*格子)

第一章 线性规划

调运方案的调整—位势法

- 确定进基变量
- 确定离基变量
- 构造闭回路
- 确定调整量
- 调整调运方案

2）确定调整量：

假设 $x_{11}=0$ 为非基变量，$\lambda_{11}<0$，则 x_{11} 为进基变量，

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	$x_{11}+\theta$	$x_{12}-\theta$			a_1
A_2		$x_{22}+\theta$		$x_{24}-\theta$	a_2
A_3	$x_{31}-\theta$			$x_{34}+\theta$	a_3
销量	b_1	b_2	b_3	b_4	

构造闭回路：

$$\{\underset{\downarrow\ (\text{没*格子})}{x_{11}}, \underbrace{x_{12}, x_{22}, x_{24}, x_{34}, x_{31}}_{\text{基变量(*格子)}}\}$$

问题： 调整量 $\theta>0$ 应取多大？ $S^1=S^0+\lambda_{11}\theta$

分析： 为使总费用下降，θ 越大越好. 但同时必须保证顶点处运量非负。

2）确定调整量：

假设 $x_{11}=0$ 为非基变量，$\lambda_{11}<0$，则 x_{11} 为进基变量，

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	$x_{11}+\theta$ 0	1 $x_{12}-\theta \geqslant 0$			a_1
A_2		$x_{22}+\theta$ 2		3 $x_{24}-\theta \geqslant 0$	
A_3	$x_{31}-\theta \geqslant 0$ 5			4 $x_{34}+\theta$	a_3
销量	b_1	b_2	b_3	b_4	

构造闭回路：

$$\{x_{11}, \underbrace{x_{12}, x_{22}, x_{24}, x_{34}, x_{31}}_{\text{基变量(*格子)}}\}$$

x_{11}：(没*格子)　基变量(*格子)

问题： 调整量 $\theta>0$ 应取多大？　$S^1=S^0+\lambda_{11}\theta$

分析： 为使总费用下降，θ 越大越好. 但同时必须保证顶点处运量非负.

结论： $\boxed{\theta=\min\{x_{12}, x_{24}, x_{31}\}=\text{奇数次顶点处的最小运量}}$

$=x_{24} \longrightarrow x_{24}$ 为离基变量

注意： 若闭回路中有两个奇数次顶点处的运量$=\theta$，则调整后只能有一个为离基变量(没*格子)，另一个仍为基变量 0^*

第一章 线性规划

调运方案的调整—位势法

- 确定进基变量
- 确定离基变量
  - 构造闭回路
  - 确定调整量

调整调运方案

调运方案的调整：

假设 $x_{11}=0$为非基变量，$\lambda_{11}<0$，则 x_{11}为进基变量，

销地 \ 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	$x_{11}+\theta$ 0	1 $x_{12}-\theta$			a_1
A_2		$x_{22}+\theta$ 2		3 $x_{24}-\theta$	a_2
A_3	$x_{31}-\theta$ 5			4 $x_{34}+\theta$	a_3
销量	b_1	b_2	b_3	b_4	

结论： $\theta=\min\{x_{12},x_{24},x_{31}\}=$ 奇数次顶点处的最小运量

$=x_{24} \rightarrow x_{24}$ 为离基变量

调整：

闭回路上 $\begin{cases} \text{偶数次顶点处的运量 } +\theta \\ \text{奇数次顶点处的运量 } -\theta \end{cases}$

不在闭回路顶点上的其它各运量不变。$S^1=S^0+\lambda_{11}\theta$

调整后，$x_{11}=\theta$为基变量，$x_{24}=0$ 为非基变量，得到的新的基本可行解(新的调运方案)使总运费下降。

第一章 线性规划

调运方案的调整—位势法

- 确定进基变量
- 确定离基变量
  - 构造闭回路
  - 确定调整量
- 调整调运方案

例1-23

$\lambda_{23} = 1.4 - 0.3 - 5.5 = -4.4$

$\lambda_{23}\theta = -4.4 \times 30 = -132$

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1.5 20^*	2 $\lambda_{12} > 0$	0.3 80^*	3 $\lambda_{14} > 0$	100
A_2	7 30^*	0.8 20^*	1.4 $\lambda_{23} < 0$	2 30^*	80
A_3	1.2	0.3 50^*	2	2.5	50
销量	50	70	80	30	230

$v_1 = 1.5$ $v_2 = -4.7$ $v_3 = 0.3$ $v_4 = -3.5$

$u_1 = 0$

$u_2 = 5.5$

$u_3 = 5$

$S^1 = S^0 + \lambda_{23}\theta$

$= 355 - 132 = 223$

1. 用最小元素法求出初始调运方案 $\theta = \min\{80, 30\} = 30$

2. 最优性检验：1)计算行、列位势数：利用 $c_{ij} = u_i + v_j$ (*格子)

2)计算 x_{ij} 检验数： $\lambda_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (没*格子)

若 λ_{ij} 都 ≥ 0，则 $X = (x_{ij})$ 是 (P) 的最优解。否则，

3. 调整调运方案：1)构造闭回路 2)确定调整量 θ

3)调整调运方案

例1-23

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	1.5　50^*	2	0.3　50^*	3	100	$u_1=0$
A_2	7　30^*	0.8　20^*	1.4　30^*	2　30^*	80	$u_2=5.5$
A_3	1.2	0.3　50^*	2	2.5	50	$u_3=5$
销量	50	70	80	30	230	
	$v_1=1.5$	$v_2=-4.7$	$v_3=0.3$	$v_4=-3.5$		

$$S^1 = S^0 + \lambda_{23}\theta$$
$$= 355 - 132 = 223$$

1. 用最小元素法求出初始调运方案　　$\theta = \min\{80,30\} = 30$

2. 最优性检验：1)计算行、列位势数：$c_{ij} = u_i + v_j$(*格子)

2)计算 x_{ij}检验数：　$\lambda_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$(没*格子)

若 λ_{ij}都 ≥ 0, 则$X=(x_{ij})$是(P)的最优解。否则，

3. 调整调运方案：1)构造闭回路　2)确定调整量 θ

3)调整调运方案

例1-23

$\lambda_{31} < 0$

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	1.5　50^*	2　$\lambda_{12} > 0$	0.3　50^*	3　$\lambda_{14} > 0$	100	$u_1 = 0$
A_2	7　$\lambda_{21} > 0$	0.8　20^*	1.4　30^*	2　30^*	80	$u_2 = 1.1$
A_3	1.2　$\lambda_{31} < 0$	0.3　50^*	2	2.5	50	$u_3 = 0.6$
销量	50	70	80	30	230	
	$v_1 = 1.5$	$v_2 = -0.3$	$v_3 = 0.3$	$v_4 = 0.9$		

$$S^1 = S^0 + \lambda_{23}\theta$$

$$= 355 - 132 = 223$$

$$\theta = \min\{50, 30, 50\} = 30$$

2. 最优性检验：1)计算行、列位势数：$c_{ij} = u_i + v_j$(*格子)

2)计算 x_{ij}检验数：　$\lambda_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$(没*格子)

若 λ_{ij}都 ≥ 0, 则$X = (x_{ij})$是(P)的最优解。否则，

3. 调整调运方案：1)构造闭回路　2)确定调整量 θ

3)调整调运方案

例1-23

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	1.5 20^*	2	0.3 80^*	3	100	$u_1 = 0$
A_2	7	0.8 50^*	1.4 30^*	2 30^*	80	$u_2 = 1.1$
A_3	1.2 30^*	0.3 20^*	2	2.5	50	$u_3 = 0.6$
销量	50	70	80	30	230	
	$v_1 = 1.5$	$v_2 = -0.3$	$v_3 = 0.3$	$v_4 = 0.9$		

$$\theta = \min\{50, 30, 50\} = 30$$

2. 最优性检验：**1)** 计算行、列位势数：$c_{ij} = u_i + v_j$（*格子）

2) 计算 x_{ij} 检验数：$\lambda_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$（没*格子）

若 λ_{ij} 都 ≥ 0, 则 $X = (x_{ij})$ 是 (P) 的最优解。否则，

3. 调整调运方案：**1)** 构造闭回路 **2)** 确定调整量 θ

3) 调整调运方案

例1-23

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	
A_1	1.5 20^*	2 $\lambda_{12}>0$	0.3 80^*	3 $\lambda_{14}>0$	100	$u_1=$ 0
A_2	7 $\lambda_{21}>0$	0.8 50^*	1.4 $\lambda_{23}>0$	2 30^*	80	$u_2=$ 0.2
A_3	1.2 30^*	0.3 20^*	2 $\lambda_{33}>0$	2.5 $\lambda_{34}>0$	50	$u_3=$ -0.3
销量	50	70	80	30	230	
	$v_1=$1.5	$v_2=$0.6	$v_3=$0.3	$v_4=$1.8		

$$X^* = (20,0,80,0,0,50,0,30,30,20,0,0)^T, S^* = 196$$

2. 最优性检验：1)计算行、列位势数：$c_{ij} = u_i + v_j$(*格子)

2)计算 x_{ij}检验数： $\lambda_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$(没*格子)

若 λ_{ij}都 ≥ 0, 则$X=(x_{ij})$是(P)的最优解。否则，

3. 调整调运方案：1)构造闭回路　2)确定调整量 θ

3)调整调运方案

第一章 线性规划

第十节 运输问题

- 产销平衡运输问题的数学模型
- 产销平衡运输问题的表上作业法
- 产销不平衡的运输问题

三. 产销不平衡运输问题：(1) 产大于销 $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

产地 \ 销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

方法： 产大于销 $\longrightarrow$ 产销平衡

三. 产销不平衡运输问题：（1）产大于销 $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	B_{n+1}	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	0 $x_{1,n+1}$	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	0 $x_{2,n+1}$	a_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	0 $x_{m,n+1}$	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	b_{n+1}	

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

↓

产销平衡的运输问题

三. 产销不平衡运输问题：(1) 产大于销　例1-26

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	1	3	5	3	5
A_2	0.5	4	2	7	6
A_3	2	0.8	1	4	8
销量	2	4	3	7	

总产量=19
总销量=16

三. 产销不平衡运输问题：(1) 产大于销　例1-26

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	1	3	5	3	0	**5**
A_2	0.5	4	2	7	0	**6**
A_3	2	0.8	1	4	0	**8**
销量	**2**	**4**	**3**	**7**	**3**	**19**

总产量=19
总销量=16

三. 产销不平衡运输问题：(1) 产大于销　例1-26

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	1 ×	3 ×	5 ×	3 5^*	0 ×	~~5~~
A_2	0.5 2^*	4 ×	2 ×	7 1^*	0 3^*	~~6~~ ~~4~~ ~~3~~
A_3	2 ×	0.8 4^*	1 3^*	4 1^*	0 ×	~~8~~ ~~4~~ ~~1~~
销量	~~2~~	~~4~~	~~3~~	~~7~~ ~~2~~ ~~1~~	~~3~~	19

1. 用最小元素法求出初始调运方案

三. 产销不平衡运输问题：(1) 产大于销　例1-26

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量	u_i
A_1	1　$\lambda_{11}>0$	3　$\lambda_{12}>0$	5　$\lambda_{13}>0$	3　5^*	0　$\lambda_{15}>0$	5	0
A_2	0.5　2^*	4　$\lambda_{22}>0$	2　$\lambda_{23}<0$	7　1^*	0　3^*	6	4
A_3	2	0.8　4^*	1　3^*	4　1^*	0	8	1
销量	2	4	3	7	3	19	
v_j	-3.5	-0.2	0	3	-4		

$\lambda_{23}<0$

$\theta=\min\{1,3\}=1$

1. 用最小元素法求出初始调运方案
2. 最优性检验：1)计算行、列位势数：$c_{ij}=u_i+v_j$(*格子)

   2)计算 x_{ij}检验数：　$\lambda_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$(没*格子)

   若 λ_{ij}都 ≥ 0，则 $X=(x_{ij})$是(P)的最优解。否则，

3. 调整调运方案：1)构造闭回路　2)确定调整量 θ

   3)调整调运方案

三. 产销不平衡运输问题：(1) 产大于销　例1-26

销地/产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量	u_i
A_1	1	3	5	3　5^*	0	5	0
A_2	0.5　2^*	4	2　1^*	7　1^*	0　3^*	6	4
A_3	2	0.8　4^*	1　2^*	4　2^*	0	8	1
销量	2	4	3	7	3	19	
v_j	-3.5	-0.2	0	3	-4		

$\theta = \min\{1,3\} = 1$

1. 用最小元素法求出初始调运方案
2. 最优性检验：1)计算行、列位势数：$c_{ij} = u_i + v_j$(*格子)

   2)计算 x_{ij}检验数：　$\lambda_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$(没*格子)

   若 λ_{ij}都 ≥ 0, 则$X = (x_{ij})$是(P)的最优解。否则，
3. 调整调运方案：1)构造闭回路　2)确定调整量 θ

   3)调整调运方案

三. 产销不平衡运输问题：(1) 产大于销　例1-26

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量	u_i
A_1	1　$\lambda_{11}>0$	3　$\lambda_{12}>0$	5　$\lambda_{13}>0$	3　5^*	0　$\lambda_{15}>0$	5	0
A_2	0.5　2^*	4　$\lambda_{22}>0$	2　1^*	7　$\lambda_{24}>0$	0　3^*	6	2
A_3	2　$\lambda_{31}>0$	0.8　4^*	1　2^*	4　2^*	0　$\lambda_{35}>0$	8	1
销量	2	4	3	7	3	19	
v_j	-1.5	-0.2	0	3	-2		

2. 最优性检验：1)计算行、列位势数：$c_{ij}=u_i+v_j$(*格子)

2)计算 x_{ij}检验数：　$\lambda_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$(没*格子)

若 λ_{ij}都 ≥ 0, 则 $X=(x_{ij})$是(P)的最优解。否则，

3. 调整调运方案：1)构造闭回路　2)确定调整量 θ

3)调整调运方案

三. 产销不平衡运输问题：（1）产大于销 例1-26

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量	u_i
A_1	1	3	5	3 5^*	0	5	0
A_2	0.5 2^*	4	2 1^*	7	0 3^*	6	2
A_3	2	0.8 4^*	1 2^*	4 2^*	0	8	1
销量	2	4	3	7	3	19	
v_j	-1.5	-0.2	0	3	-2		

$$X^* = (0,0,0,5,0,2,0,1,0,3,0,4,2,2,0)^T, S^* = 31.2$$

2. 最优性检验：1)计算行、列位势数：$c_{ij} = u_i + v_j$ (*格子)

2)计算 x_{ij}检验数： $\lambda_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (没*格子)

若 λ_{ij}都 ≥ 0, 则 $X = (x_{ij})$是(P)的最优解。否则，

3. 调整调运方案：1)构造闭回路 2)确定调整量 θ

3)调整调运方案

三. 产销不平衡运输问题：(2) 销大于产 $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

产地 \ 销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

方法： 销大于产 $\longrightarrow$ 产销平衡

三. 产销不平衡运输问题：(2) 销大于产 $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
A_{m+1}	0 $x_{m+1,1}$	0 $x_{m+1,2}$		0 $x_{m+1,n}$	a_{m+1}
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

$\downarrow$

产销平衡的运输问题

第一章 线性规划

第十节 运输问题

- 产销平衡运输问题的数学模型
- 产销平衡运输问题的表上作业法
- 产销不平衡的运输问题

作业：P97 14（1）（3）

作业：P85 5（1）（3）

课上练习

用单纯形法求解下列*LP*问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 26x_1 + x_2 - 3x_3 \\
s.t. \quad & 10x_1 + x_2 - x_3 \geq -2 \\
& -4x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

最优解：$X^* = (0,1,3)^T$， 最优值：-8