第三章 非线性规划

第五节 约束优化问题的最优性条件

回顾： 无约束优化问题的最优性条件

$$X^* \text{是} \min_{X \in R^n} f(X) \text{的局部最优解} \longrightarrow \nabla f(X^*) = 0$$

$$\longleftarrow \nabla f(X^*) = 0, \nabla^2 f(X^*) \text{正定}$$

任务： 讨论约束优化问题的**一阶必要条件**

$$(NP) \quad \min f(X)$$

$$s.t. \begin{cases} g_i(X) \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m \\ h_j(X) = 0, j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

一阶必要条件：

等式约束问题

$$(NP1)\quad \min f(X)$$
$$s.t.\ h_j(X)=0 \quad \mu_j$$
$$j=1,2,\cdots,p$$

Lagrange函数： $L(X,\mu)=f(X)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j h_j(X)$

结论：

设X^*是$(NP1)$最优解，则存在Lagrange乘子μ^*使

$$\nabla_X L(X^*,\mu^*)=\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0,\quad \mu^*=(\mu_1^*,\mu_2^*,\cdots,\mu_p^*)$$

即 X^*是$(NP1)$最优解 $\longrightarrow$ $\boxed{\nabla f(X^*)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0}$

一阶必要条件

μ^*称为X^*相应的Lagrange乘子

一阶必要条件：不等式约束问题

$$(NP2)\quad \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X) \geq 0 \quad \mu_i$$
$$i = 1, 2, \cdots, m$$

设X^*是(NP2)最优解，

起作用约束： $g_i(X^*) = 0,$

起作用约束指标集： $E = \{i \mid g_i(X^*) = 0, i = 1, \cdots, m\}$

定理5-1 Kuhn-Tucher条件(K-T条件)：

一阶必要条件

设X^*是局部极小点，$f, g_i, \forall i$ 在 X^*连续可微，$\nabla g_i(X^*), i \in E$ 线性无关，则存在 $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \cdots, \mu_m^*)$ 满足

$$\begin{cases} \nabla f(X^*) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* \nabla g_i(X^*) = 0 \\ \mu_i^* \geq 0,\ i = 1, 2, \cdots, m \\ \mu_i^* g_i(X^*) = 0,\ i = 1, \cdots, m \end{cases}$$

广义Lagrange函数： $L(X, \mu) = f(X) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i(X)$

一阶必要条件： $(NP)\quad \min f(X)$

$$s.t.\begin{cases} g_i(X)\geq 0, i=1,2,\cdots,m & \lambda_i \\ h_j(X)=0, j=1,2,\cdots,p & \mu_j \end{cases}$$

定理5-3 Kuhn-Tucher条件(K-T条件):

设X^*是局部极小点， $f,g_i,h_j,\forall i,j$ 在 X^*连续可微，$\nabla g_i(X^*), i\in E$ 和 $\nabla h_j(X^*), j=1,\cdots,p$ 线性无关，则存在 λ_i^*,μ_j^* 满足

$$\begin{cases} \nabla f(X^*)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla g_i(X^*)-\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0 \\ \lambda_i^*\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m \\ \lambda_i^* g_i(X^*)=0, i=1,\cdots,m \qquad \text{（互补条件）} \end{cases}$$

注意：相应于 $\geq$ 约束，要求 $\lambda_i^*\geq 0,\ i=1,\cdots,m$

例： 试写出 $\min f(X)=x_1$ 的K-T条件

$$
s.t.\begin{cases} g(X)=16-(x_1-4)^2-x_2^2\ge 0 & \lambda \\ h(X)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13=0 & \mu \end{cases}
$$

解： $\nabla f(X)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \nabla g(X)=\begin{pmatrix}-2(x_1-4)\\-2x_2\end{pmatrix},\ \nabla h(X)=\begin{pmatrix}2(x_1-3)\\2(x_2-2)\end{pmatrix},$

所以，Kuhn-Tucher条件（K-T条件）为

$$
\begin{cases} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}-2(x_1-4)\\-2x_2\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}2(x_1-3)\\2(x_2-2)\end{pmatrix}=0 \\ \lambda[16-(x_1-4)^2-x_2^2]=0 \\ \lambda\ge 0 \\ h(X)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13=0 \end{cases}
$$

可分析出哪些是可能的解点.

$$
\begin{cases} \nabla f(X^*)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla g_i(X^*)-\sum_{j=1}^{p}\mu_j^*\nabla h_j(X^*)=0 \\ \lambda_i^*\ge 0,\ i=1,2,\cdots,m \\ \lambda_i^* g_i(X^*)=0,\ i=1,\cdots,m \end{cases}
$$

例： 试写出 $\min f(X)=x_1$ 的K-T条件

$$s.t.\ \begin{cases} g(X)=16-(x_1-4)^2-x_2^2\geq 0 & \lambda \\ h(X)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13=0 & \mu \end{cases}$$

解： Kuhn-Tucher条件（K-T条件）为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}-2(x_1-4)\\-2x_2\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}2(x_1-3)\\2(x_2-2)\end{pmatrix}=0 & ★ \\ \lambda[16-(x_1-4)^2-x_2^2]=0, \quad \lambda\geq 0 & ★ \\ h(X)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13=0 & ★ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=3+\sqrt{13} \\ x_2=2 \\ \mu=\sqrt{13}/26 \\ \lambda=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \mu=0 \\ \lambda\neq 0 \rightarrow \lambda=\dfrac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=6.4 \\ x_2=3.2 \\ \mu=1/5 \\ \lambda\neq 0 \rightarrow \lambda=\dfrac{3}{40} \end{cases}$$

第三章 非线性规划

第六节 罚函数法（SUMT法）

$$(NP) \qquad \min f(X)$$

$$s.t. \begin{cases} g_i(X) \ge 0, i = 1, 2, \cdots, m \\ h_j(X) = 0, j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

- 外点罚函数法(外点法)
- 内点罚函数法(内点法)
- 混合点罚函数法（混合点法）

第三章 非线性规划

一. 外点罚函数法(外点法)

$$(NP)\qquad \min f(X)$$

$$s.t.\begin{cases} g_i(X)\geq 0, i=1,2,\cdots,m \\ h_j(X)=0, j=1,2,\cdots,p \end{cases}$$

- 外点法迭代原理
- 外点法迭代步骤
- 外点法举例
- 外点法的优缺点

一. 外点法迭代原理

$$(NP) \quad \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X) \geq 0$$
$$i = 1,2,\cdots,m$$

$$\Downarrow$$

$$(NP) \quad \min f(X)$$
$$s.t. \begin{cases} g_i(X) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m \\ h_j(X) = 0, j = 1,2,\cdots,p \end{cases}$$

一. 外点法迭代原理

$$(NP)\quad \min f(X)$$
$$s.t.\ \ g_i(X) \geq 0$$
$$i = 1,2,\cdots,m$$

基本思想:

通过建立罚函数, 将约束极值问题转化成一系列无约束极值问题去求解.

构造罚函数: $\varphi(X,M) = f(X) + \underline{M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2}$

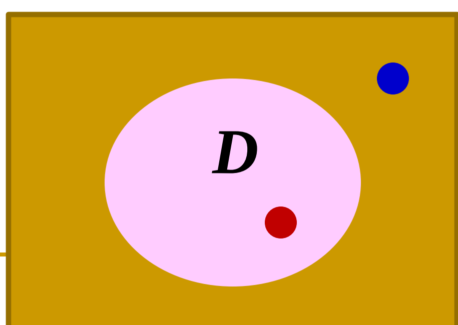
罚因子　　惩罚项

罚函数的特点:

$$\varphi(X,M)=\begin{cases} f(X), & X \in D \text{可行域} \\ f(X) + \text{很大的正数}, & X \notin D \end{cases}$$

(当M取值很大时)

$\Downarrow$



$$\min_{X \in R^n} \varphi(X,M)$$

至少$\exists i_0$使$g_{i_0}(X) < 0$

$\therefore$ 惩罚项$\geq Mg_{i_0}^2(X)$

一. 外点法迭代原理

$$(NP)\quad \min f(X)$$
$$s.t.\ \ g_i(X) \ge 0$$
$$i = 1,2,\cdots,m$$

基本思想:

通过建立罚函数, 将约束极值问题转化成一系列无约束极值问题去求解

构造罚函数: $\varphi(X,M) = f(X) + \underbrace{M}_{\text{罚因子}}\underbrace{\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2}_{\text{惩罚项}}$

罚函数的特点:

$$\varphi(X,M) = \begin{cases} f(X), & X \in D \\ f(X) + \text{很大的正数}, & X \notin D \end{cases}$$

$(NP) \longrightarrow$ 求解 $\min\limits_{X \in R^n} \varphi(X,M)$ 设其最优解为 $X^*(M)$,

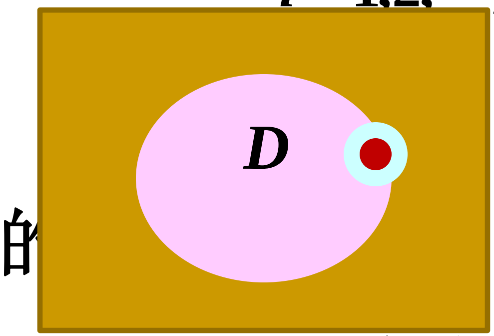
研究 $X^*(M)$ 与(NP)的最优解 X^* 之间的关系

一. 外点法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ \ g_i(X) \ge 0$$
$$i = 1,2,\cdots,m$$

$$\varphi(X,M) = f(X) + M\sum_{i=1}^{m}[\min(0, g_i(X))]^2$$

设 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ 最优解为 $X^*(M)$



研究 $X^*(M)$ 与(NP)的最优解 X^* 之间的

1^0 若 $X^*(M)\in D$ (可行域)，则 $X^*(M)$ 是 (NP) 最优解。

证明：

$\because X^*(M)$ 是 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ 的最优解， $\therefore$ 有：

$$\because f(X) \underset{\forall X\in D\cap N}{=} \varphi(X,M) \underset{\forall X\in N}{\ge} \varphi(X^*(M),M) \underset{X^*(M)\in D}{=} f(X^*(M))$$

$\therefore X^*(M)$ 是(NP)的最优解。

$$\varphi(X,M) = \begin{cases} f(X), & X\in D \\ f(X) + \text{很大的正数}, & X\notin D \end{cases}$$

一. 外点法迭代原理

$$(NP)\quad \min f(X)$$
$$s.t.\quad g_i(X)\ge 0$$
$$i=1,2,\cdots,m$$

$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2$$

设 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ 最优解为 $X^*(M)$

研究 $X^*(M)$ 与(NP)的最优解 X^* 之间的关系

1^0 若 $X^*(M)\in D$ (可行域)，则 $X^*(M)$ 是 (NP) 最优解。

2^0 若 $X^*(M)\notin D$, 当M很大时， $X^*(M)$也会相当靠近 (NP) 可行域D的边界，$\therefore$是(NP)的最优解X^*的近似解(通常约束极值问题的最优解X^*在可行域的边界上)

一. 外点法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X)\geq 0$$
$$i=1,2,\cdots,m$$

$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum[\min(0,g_i(X))]^2$$

设 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ 的最优解为 $X^*(M)$

2^0 若 $X^*(M)\notin D$，当 M 很大时， $X^*(M)$ 也会相当靠近 (NP) 可行域 D 的边界，$\therefore$ 是 (NP) 的最优解 X^* 的近似解

证明： $\because X^*(M)\notin D$， $\therefore$ 至少存在 i_0 使 $g_{i_0}(X^*(M))<0$

又 $\because X^*(M)$ 是 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ 的最优解，

$\therefore \varphi(X^*(M),M)=f(X^*(M))+\underline{M\sum[\min(0,g_i(X^*(M)))]^2}$ 是局部极小值

$\therefore$ 当 M 很大时，$\sum[\min(0,g_i(X^*(M)))]^2$ 会相当小。

即 $g_{i_0}^2(X^*(M))\leq\sum[\min(0,g_i(X^*(M)))]^2<\varepsilon^2 \longrightarrow |g_{i_0}(X^*(M))|<\varepsilon$

$\longrightarrow -\varepsilon<g_{i_0}(X^*(M))<0$

一. 外点法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X)\ge 0$$
$$i=1,2,\cdots,m$$

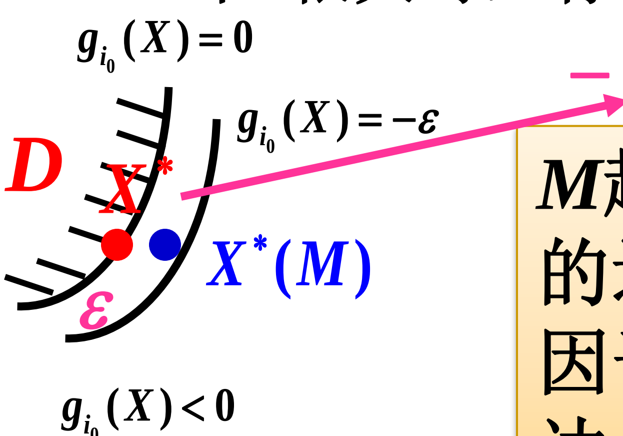
$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum[\min(0,g_i(X))]^2$$

设$\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M)$的最优解为$X^*(M)$

2^0 若 $X^*(M)\notin D$, 当M很大时， $X^*(M)$也会相当靠近(NP) 可行域D的边界，∴是(NP)的最优解X^*的近似解

证明： $\because X^*(M)\notin D$, $\therefore$至少存在 i_0 使 $g_{i_0}(X^*(M))<0$

当M很大时，有 $-\varepsilon<g_{i_0}(X^*(M))<0$



M越大, ε越小， $X^*(M)$ 越靠近D的边界，即越靠近X^*。∴ 增大罚因子M的作用是将$X^*(M)$拉向D的边界(即X^*)。

一. 外点法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X)\ge 0$$
$$i=1,2,\cdots,m$$

$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2$$

设 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M)$ 最优解为 $X^*(M)$

研究 $X^*(M)$ 与(NP)的最优解 X^* 之间的关系

1^0 若 $X^*(M)\in D$ (可行域)，则 $X^*(M)$ 是 (NP) 最优解。

2^0 若 $X^*(M)\notin D$, 当M很大时， $X^*(M)$也会相当靠近 (NP) 可行域D的边界，$\therefore$是(NP)的最优解X^*的近似解 (通常约束极值问题的最优解X^*在可行域的边界上)

问题：如何取M，使得$X^*(M)$是所需要的近似解？

一. 外点法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ \ g_i(X) \geq 0$$
$$i = 1,2,\cdots,m$$

$$\varphi(X,M) = f(X) + M\sum_{i=1}^{m}[\min(0, g_i(X))]^2$$

通过迭代逐渐增大罚因子M：

任意给定初始点$X^{(0)}$，初始罚因子$M_1(=1)>0$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M_1)$, 若 $X^{(1)}(M_1)\in D$, 则是(NP)的最优解. 否则M_2=10M_1

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M_2)$, 若 $X^{(2)}(M_2)\in D$, 则是(NP)的最优解. 否则M_3=10M_2

⋮ ⋮ ⋮

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M_k)$, 若 $X^{(k)}(M_k)\in D$, 则是(NP)的最优解. 否则M_{k+1}=10M_k

收敛结论：$\underset{\notin D}{X^{(k)}(M_k)} \xrightarrow[M_k\to\infty]{} X^*$——$(NP)$的最优解

通过建立罚函数, 将约束极值问题转化成一系列无约束极值问题去求解.

第三章 非线性规划

一. 外点罚函数法(外点法)

$$(NP) \qquad \min f(X)$$

$$s.t. \begin{cases} g_i(X) \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m \\ h_j(X) = 0, j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

- 外点法迭代原理
- 外点法迭代步骤
- 外点法举例
- 外点法的优缺点

二. 外点法迭代步骤

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ \ g_i(X) \geq 0$$
$$i = 1,2,\cdots,m$$

$$\varphi(X,M) = f(X) + M\sum_{i=1}^{m}[\min(0, g_i(X))]^2$$

1^0 给定$X^{(0)}$， $M_1(=1)>0$，$\varepsilon > 0, k := 1$

2^0 求 $\min\limits_{X\in R^n} \varphi(X, M_k)$的最优解 $X^{(k)}(M_k)$

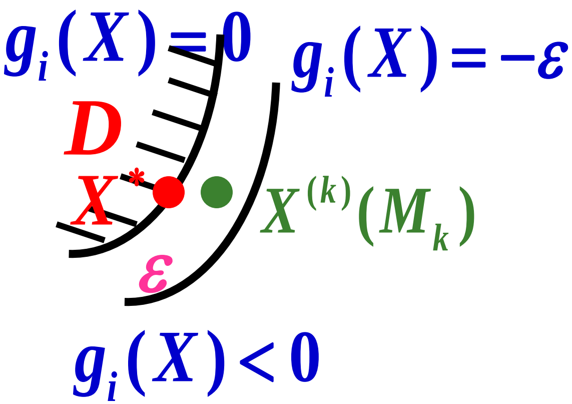
(用数值迭代的方法求解)

3^0 若 $g_i(X^{(k)}(M_k)) > -\varepsilon,\ \ i = 1,2,,\cdots m,$

则迭代终止，$X^* = X^{(k)}(M_k)$

否则取M_{k+1}=$C\ M_k$ ， 其中C = 5~10

令 k:= k+1 转2^0



第三章 非线性规划

一. 外点罚函数法(外点法)

$$(NP)\qquad \min f(X)$$

$$s.t.\begin{cases} g_i(X)\geq 0, i=1,2,\cdots,m \\ h_j(X)=0, j=1,2,\cdots,p \end{cases}$$

- 外点法迭代原理
- 外点法迭代步骤
- 外点法举例
- 外点法的优缺点

三. 外点法举例

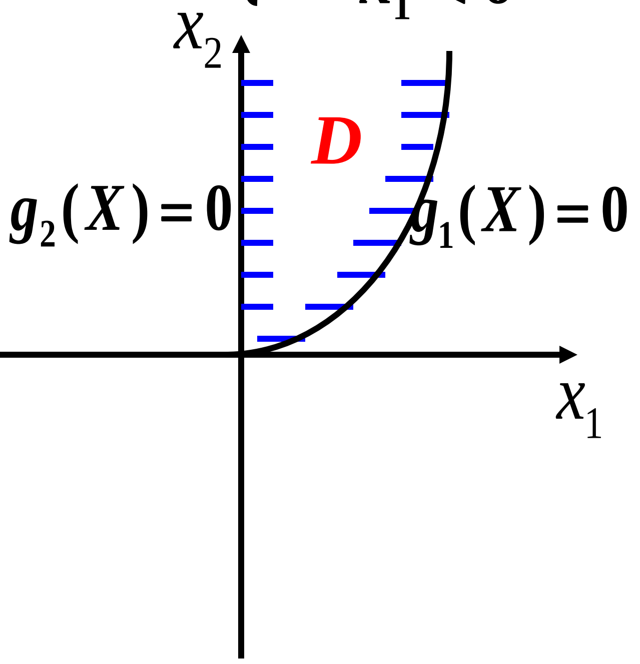
$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2$$

例3-18 $\min f(X)=x_1+x_2$ $\quad s.t.\begin{cases}-x_1^2+x_2\geq 0 \rightarrow g_1(X)\geq 0\\ x_1\geq 0 \rightarrow g_2(X)\geq 0\end{cases}$

解：$\varphi(X,M_k)=x_1+x_2+M_k\{[\min(0,-x_1^2+x_2)]^2+[\min(0,x_1)]^2\}$

$=x_1+x_2+M_k[(-x_1^2+x_2)^2+x_1^2]$ $\quad \because$ 外点法，$X\notin D$

$\therefore \begin{cases}-x_1^2+x_2<0\\ x_1<0\end{cases}$



三. 外点法举例

$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2$$

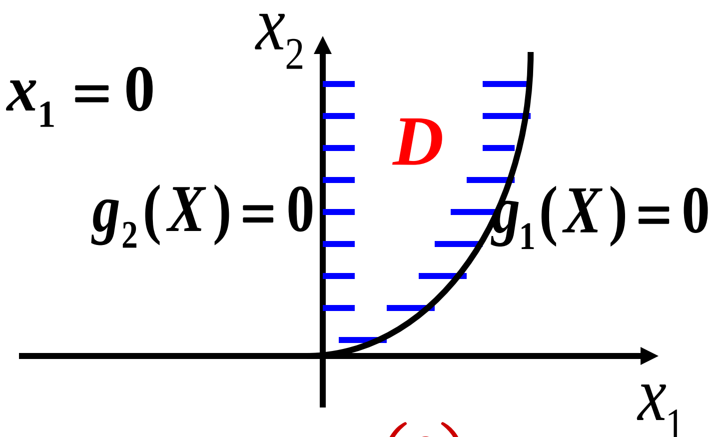
例3-18 $\min f(X)=x_1+x_2 \quad s.t\begin{cases}-x_1^2+x_2\ge 0\\ x_1\ge 0\end{cases}$

解： $\varphi(X,M_k)=x_1+x_2+M_k\{[\min(0,-x_1^2+x_2)]^2+[\min(0,x_1)]^2\}$

$$=x_1+x_2+M_k[(-x_1^2+x_2)^2+x_1^2]$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M_k)$ (用解析法) $\Rightarrow \nabla\varphi(X,M_k)=0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=1+2M_k(-x_1^2+x_2)(-2x_1)+2M_kx_1=0\\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}=1+2M_k(-x_1^2+x_2)=0\end{cases}$$



解得：$X^{(k)}(M_k)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2(M_k+1)}\\[2ex] \dfrac{1}{4(M_k+1)^2}-\dfrac{1}{2M_k}\end{pmatrix}\xrightarrow[M_k\to\infty]{} X^*=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

三. 外点法举例

$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2$$

例3−18 $\min f(X)=x_1+x_2 \quad s.t\begin{cases}-x_1^2+x_2\ge 0\\ x_1\ge 0\end{cases}$

解:

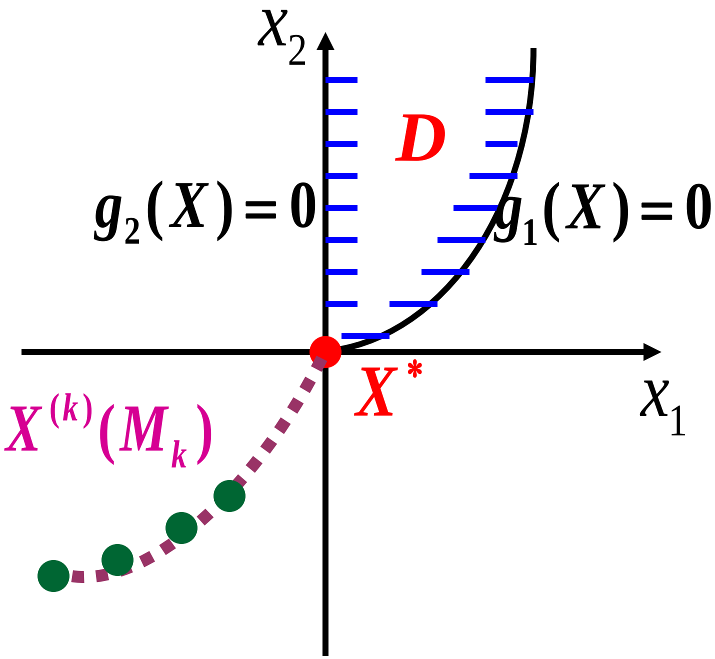
$$X^{(k)}(M_k)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2(M_k+1)}\\ \dfrac{1}{4(M_k+1)^2}-\dfrac{1}{2M_k}\end{pmatrix}\xrightarrow[M_k\to\infty]{}X^*=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$M_1=1 \qquad X^{(1)}(1)$

$M_2=10 \qquad X^{(2)}(10)$

$M_3=100 \qquad X^{(3)}(100)$

$M_4=1000 \qquad X^{(4)}(1000)$



一. 外点法迭代原理

$$(NP) \quad \min f(X)$$

$$s.t.\ g_i(X) \geq 0$$

$$i = 1,2,\cdots,m$$

$$(NP) \quad \min f(X)$$

$$s.t. \begin{cases} g_i(X) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m \\ h_j(X) = 0, j = 1,2,\cdots,p \end{cases}$$

外点法也适用于一般情况：$(NP)\ \min f(X)$

$$s.t.\begin{cases} g_i(X)\geq 0, i=1,2,\cdots,m \\ h_j(X)=0, j=1,2,\cdots,p \end{cases}$$

罚函数：

$$\varphi(X,M)=f(X)+M\sum_{i=1}^{m}[\min(0,g_i(X))]^2+M\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,M_k)$ 设其最优解为 $X^{(k)}(M_k)$

收敛结论： $\underset{\notin D}{X^{(k)}(M_k)}\xrightarrow[M_k\to\infty]{}X^*$ —— (NP)的最优解

等式约束的停机准则：

$$\because X^{(k)}(M_k)\xrightarrow[M_k\to\infty]{}X^* \quad \therefore h_j(X^{(k)}(M_k))\xrightarrow[M_k\to\infty]{}h_j(X^*)=0$$

$$\left|h_j(X^{(k)}(M_k))\right|<\varepsilon \quad j=1,2,\cdots,p$$

因此在迭代算法中需加入 $\left|h_j(X^{(k)}(M_k))\right|<\varepsilon,\ j=1,2,\cdots,p$

二. 外点法迭代步骤

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X) \geq 0$$
$$h_j(X) = 0$$

$$\varphi(X,M) = f(X) + M\sum_{i=1}^{m}[\min(0, g_i(X))]^2 + M\sum_{j=1}^{p} h_j^2(X)$$

1^0 给定$X^{(0)}$，$M_1(=1)>0, \varepsilon > 0, k := 1$

2^0 求 $\min\limits_{X\in R^n} \varphi(X, M_k)$ 的最优解 $X^{(k)}(M_k)$ (用数值迭代的方法求解)

3^0 若 $g_i(X^{(k)}(M_k)) > -\varepsilon$，$i = 1,2,,\cdots m$, $\left|h_j(X^{(k)}(M_k))\right| < \varepsilon\ j = 1,2,\cdots, p$

则迭代终止，$X^* = X^{(k)}(M_k)$

否则取M_{k+1}=$C\ M_k$，其中C = 5~10 令 k:= k+1 转2^0

第三章 非线性规划

一. 外点罚函数法(外点法)

$$(NP) \qquad \min f(X)$$

$$s.t. \begin{cases} g_i(X) \ge 0, i = 1, 2, \cdots, m \\ h_j(X) = 0, j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

- 外点法迭代原理
- 外点法迭代步骤
- 外点法举例
- 外点法的优缺点

四. 外点法的优缺点

优点:

1. 方法简单,计算方便.
2. 初始点选择容易,它可以在整个n维空间中选取.

缺点:

1. 当 $X^{(k)}(M_k)$ 接近最优解 X^* 时，即罚因子M_k很大时，罚函数 $\varphi(X, M_k)$ 的性质变坏,这就使得求解$\min_{X \in R^n} \varphi(X, M_k)$ 非常困难。

2. 外点法的中间结果不是可行解，不能作为近似最优解。只有迭代到最后才能得到最优解的近似解。

第三章 非线性规划

一. 外点罚函数法(外点法)

$$(NP) \qquad \min f(X)$$

$$s.t.\begin{cases} g_i(X) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m \\ h_j(X) = 0, j = 1,2,\cdots,p \end{cases}$$

- 外点法迭代原理
- 外点法迭代步骤
- 外点法举例
- 外点法的优缺点

第三章 非线性规划

第六节 罚函数法(SUMT法)

$$(NP) \qquad \min f(X)$$

$$s.t.\begin{cases} g_i(X) \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m \\ h_j(X) = 0, j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

- 外点罚函数法(外点法)
- 内点罚函数法(内点法)
- 混合点罚函数法(混合点法)

第三章 非线性规划

二. 内点罚函数法(内点法)

$$(NP)\ \min f(X)$$

$$s.t.\ g_i(X) \ge 0, i = 1,2,\cdots,m$$

- 内点法迭代原理
- 内点法迭代步骤
- 内点法举例
- 内点法的优缺点

一. 内点法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X) \geq 0$$

基本思想：

内点法要求迭代过程始终在可行域内进行.为此,把初始点取在可行域内,并在可行域的边界上设置一道"障碍",使迭代点靠近可行域的边界时,障碍函数值迅速增大,从而使迭代点始终留在可行域的内部.

构造障碍函数： $$\varphi(X, r_k) = f(X) + \underbrace{r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(X)}}_{\text{障碍项}} \quad (r_k > 0)$$

障碍因子

$$\text{或}\ \varphi(X, r_k) = f(X) - \underbrace{r_k \sum_{i=1}^{m} \ln(g_i(X))}_{\text{障碍项}}$$

一. 内点法迭代原理

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X)\geq 0$$

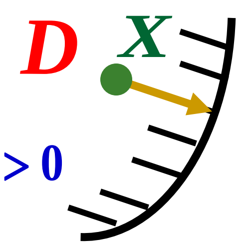
障碍函数： $\varphi(X,r_k)=f(X)+r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X)}$

或 $\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X))$

障碍函数的特点：

$$\varphi(X,r_k)=\begin{cases} f(X)+\text{有限的数值，} & X\in D\text{的内部} \\ +\infty & X\text{ 接近}D\text{的边界} \end{cases}$$

$X\in D$的内部 → $g_i(X)>0$, $i=1,2,\cdots,m$



X 接近D的边界

(比如: $g_{i_0}(X)=0$)

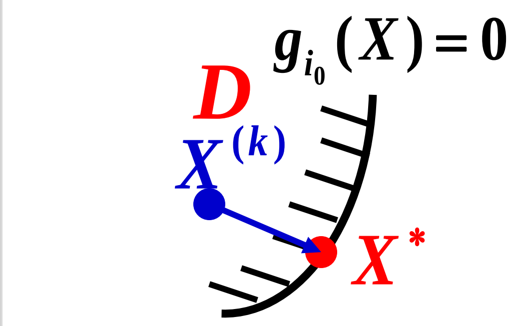
$$g_{i_0}(X)\to 0(>0)$$

则 $\frac{1}{g_{i_0}(X)}\to+\infty$ 或 $\ln(g_{i_0}(X))\to-\infty$

一. 内点法迭代原理

障碍函数： $\varphi(X,r_k)=f(X)+r_k\sum\dfrac{1}{g_i(X)}$

或 $\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum\ln(g_i(X))$



$g_{i_0}(X^{(k)})\to g_{i_0}(X^*)=0(>0)$

障碍函数的特点：

$$\varphi(X,r_k)=\begin{cases} f(X)+\text{有限的数值，} \\ +\infty & \text{当}X\text{接近}D\text{的边界} \end{cases}$$

$(NP)\longrightarrow$ 求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,r_k)$ 设其最优解为 $X^{(k)}(r_k)\subset D$ 的内部

通常(NP)的最优解 X^* 在D的边界上，为使 $X^{(k)}(r_k)\to X^*$

$$\varphi(X^{(k)}(r_k),r_k)=f(X^{(k)}(r_k))-\underline{r_k\sum\ln(g_i(X^{(k)}(r_k)))}\to f(X^*)$$

则 $\underline{r_k\sum\limits_{i=1}^{m}\overbrace{\ln(g_i(X^{(k)}))}^{\to -\infty}}\to 0$ 　　或 $\underline{r_k\sum\limits_{i=1}^{m}\overbrace{\dfrac{1}{g_i(X^{(k)})}}^{\to +\infty}}\to 0\longrightarrow r_k\to 0$ 且很快

收敛结论： 当 $r_k\to 0$ 且很快时，则 $X^{(k)}(r_k)\to X^*$

第三章 非线性规划

二. 内点罚函数法(内点法)

$$(NP)\ \min f(X)$$

$$s.t.\ \ g_i(X) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m$$

- 内点法迭代原理
- 内点法迭代步骤
- 内点法举例
- 内点法的优缺点

二. 内点法迭代步骤

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X) \geq 0$$
$$i = 1,2,\cdots,m$$

$$\varphi(X,r_k) = f(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(X)}$$

或 $\varphi(X,r_k) = f(X) - r_k \sum_{i=1}^{m} \ln(g_i(X))$

1^0 取 $r_1>0(=1)$，$\varepsilon > 0, k := 1$

2^0 取 $X^{(0)} \in D$ (P201/P167) 当 $r_k \to 0$ 且很快时，则 $X^{(k)}(r_k) \to X^*$

3^0 求 $\min\limits_{X \in R^n} \varphi(X,r_k)$ 的最优解 $X^{(k)}(r_k)$ (用数值迭代的方法)

4^0 检验 $X^{(k)}(r_k)$ 是否满足收敛准则，

若满足，则迭代终止，$X^* = X^{(k)}(r_k)$

否则取 $r_{k+1} = Cr_k$，其中 $C = 1/5$ 或 $1/10$。令 $k:=k+1$ 转 3^0

二. 内点法迭代步骤

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X) \geq 0$$
$$i=1,2,\ldots,m$$

$$\varphi(X,r_k) = f(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(X)}$$

$$\varphi(X^{(k)}(r_k),r_k) = f(X^{(k)}(r_k)) - r_k \sum_{i=1}^{m} \ln(g_i(X^{(k)}(r_k))) \rightarrow f(X^*)$$

收敛准则:

当 $r_k \rightarrow 0$ 且很快时,

即$r_k \sum_{i=1}^{m} \ln(g_i(X^{(k)})) \rightarrow 0$或$r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(X^{(k)})} \rightarrow 0$ 则$X^{(k)}(r_k) \rightarrow X^*$

$$1^0\ r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(X^{(k)})} \leq \varepsilon$$

$$2^0\ \left| r_k \sum_{i=1}^{m} \ln(g_i(X^{(k)})) \right| \leq \varepsilon$$

二. 内点法迭代步骤

$$(NP)\ \min f(X)$$
$$s.t.\ g_i(X)\geq 0$$
$$i=1,2,\cdots,m$$

$$\varphi(X,r_k)=f(X)+r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X)}$$

或$\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X))$

收敛准则：

$1^0\ r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X^{(k)})}\leq\varepsilon$

$2^0\ \left|r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X^{(k)}))\right|\leq\varepsilon$

$\because X^{(k)}(r_k)\to X^*$

$3^0\ \left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|\leq\varepsilon$

$\therefore$ 当k充分大时，$X^{(k)}$在X^*的ε邻域内。

$4^0\ \left|f(X^{(k)})-f(X^{(k-1)})\right|\leq\varepsilon$

二. 内点法迭代步骤

$$\varphi(X,r_k)=f(X)+r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X)}$$

或$\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X$

1^0 $\left|r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X^{(k)})}\right|\le\varepsilon$

2^0 $\left|r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X^{(k)}))\right|\le\varepsilon$

3^0 $\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|\le\varepsilon$

4^0 $\left|f(X^{(k)})-f(X^{(k-1)})\right|\le\varepsilon$

1^0 取r_1>0(=1)，$\varepsilon>0,\ k:=1$

2^0 取 $X^{(0)}\in D$ (P201/P167)

3^0 求$\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,r_k)$的最优解 $X^{(k)}(r_k)$ (用数值迭代的方法)

4^0 检验 $X^{(k)}(r_k)$ 是否满足收敛准则：

若满足，则迭代终止，$X^*=X^{(k)}(r_k)$

否则取$r_{k+1}=Cr_k$,其中C = 1/5或1/10。令$k:=k+1$转3^0

第三章 非线性规划

二. 内点罚函数法(内点法)

$$(NP)\ \min f(X)$$

$$s.t.\ g_i(X) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m$$

- 内点法迭代原理
- 内点法迭代步骤
- 内点法举例
- 内点法的优缺点

三. 内点法举例

$$\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X))$$

例3-18 $\min f(X)=x_1+x_2$ $\quad\begin{cases}-x_1^2+x_2\ge 0\\ x_1\ge 0\end{cases}$

解：

$$\varphi(X,r_k)=x_1+x_2-r_k\ln(-x_1^2+x_2)-r_k\ln x_1$$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,r_k)$

(解析法)

⇓

$\nabla\varphi(X,r_k)=0$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=1-\dfrac{r_k(-2x_1)}{-x_1^2+x_2}-\dfrac{r_k}{x_1}=0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}=1-\dfrac{r_k}{-x_1^2+x_2}=0\end{cases}$$

解得： $X^{(k)}(r_k)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{4}(-1+\sqrt{1+8r_k})\\ \dfrac{3}{2}r_k-\dfrac{1}{8}(-1+\sqrt{1+8r_k})\end{pmatrix}\xrightarrow[r_k\to 0]{}X^*=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

三. 内点法举例

$$\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X))$$

例3-18 $\min f(X)=x_1+x_2 \quad s.t\begin{cases}-x_1^2+x_2\ge 0\\ x_1\ge 0\end{cases}$

解：

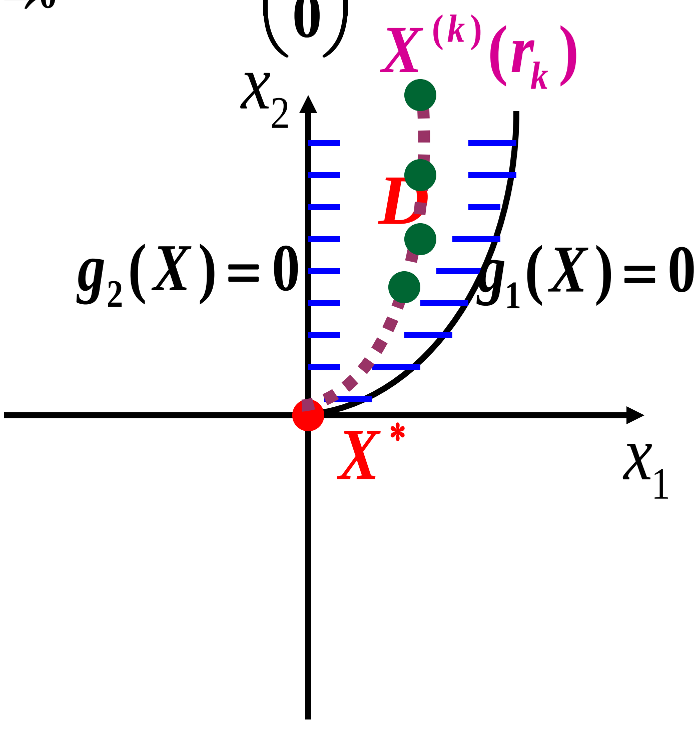
$$X^{(k)}(r_k)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(-1+\sqrt{1+8r_k})\\ \frac{3}{2}r_k-\frac{1}{8}(-1+\sqrt{1+8r_k})\end{pmatrix}\xrightarrow[r_k\to 0]{} X^*=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$r_1=1,\quad X^{(1)}(1)$

$r_2=\frac{1}{5},\quad X^{(2)}(1/5)$

$r_3=\frac{1}{25},\quad X^{(3)}(1/25)$

$r_4=\frac{1}{125},\quad X^{(4)}(1/125)$



第三章 非线性规划

二. 内点罚函数法(内点法)

$$(NP)\ \min f(X)$$

$$s.t.\ g_i(X) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m$$

- 内点法迭代原理
- 内点法迭代步骤
- 内点法举例
- 内点法的优缺点

四. 内点法的优缺点

优点:

由于迭代点总是在可行域内进行,每一个中间结果都是一个可行解,因此,中间停机的结果可作为近似解.

缺点:

1. 选取初始可行点困难;
2. 只能求解不等式约束问题。

第三章 非线性规划

二. 内点罚函数法（内点法）

$$(NP)\ \min f(X)$$

$$s.t.\ \ g_i(X) \geq 0, i = 1,2,\cdots,m$$

- 内点法迭代原理
- 内点法迭代步骤
- 内点法举例
- 内点法的优缺点

第三章 非线性规划

第六节 罚函数法(SUMT法)

$$(NP)\qquad \min f(X)$$

$$s.t.\ \begin{cases} g_i(X)\geq 0, i=1,2,\cdots,m \\ h_j(X)=0, j=1,2,\cdots,p \end{cases}$$

- 外点罚函数法(外点法)
- 内点罚函数法(内点法)
- 混合点罚函数法(混合点法)

三. 混合点法

$$(NP)\min f(X)$$

$$s.t.\begin{cases} g_i(X)\ge 0 \\ h_j(X)=0 \end{cases}$$

基本思想:

内点法只能求解不等式约束问题, 而外点法可以求解等式约束问题. 混合点法是用内点法来处理不等式约束, 用外点法来处理等式约束的一种罚函数法.

构造罚函数:

$$\varphi(X,r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln(g_i(X))+\frac{1}{\sqrt{r_k}}\sum_{j=1}^{p}h_j^2(X)$$

在迭代中, 令 $r_k\downarrow$ 且 $r_k\to 0$

求解 $\min\limits_{X\in R^n}\varphi(X,r_k)$ 的最优解 $X^{(k)}(r_k)$

收敛结论: $X^{(k)}(r_k)\xrightarrow[r_k\to 0]{} X^*$

第三章 非线性规划

第六节 罚函数法(SUMT法)

$$(NP) \qquad \min f(X)$$

$$s.t. \begin{cases} g_i(X) \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m \\ h_j(X) = 0, j = 1, 2, \cdots, p \end{cases}$$

- 外点罚函数法(外点法)
- 内点罚函数法(内点法)
- 混合点罚函数法(混合点法)

作业：P246 22(2) 23(2)

作业：P203 3(2) 4(2)