最优化模型

Abstract: 通过约束条件或者直接写出表达式来计算最大值或者最小值

Keywords: 单纯形法

1 Introduction

俗话说“十年树木，百年树人”，林业是一项投资大，周期长的的经营活动，需要种植、雇工、购买幼苗、种树成林，几十年后开始出售木材，向银行还本付息。显然，经营者需要考虑什么时候砍伐才能获得最大的经济效益？砍伐太早，树木尚未成材，出售得到的收入就会较少；伐木太晚，树木的生长已经变缓，木材量的增加换来的收入可能不满足抵消贷款利息的付出。

这样建立模型的时候，除了要考虑树木的生长规律、树木的砍伐、种植做适当的假设，还要考虑木材的销售、种植和砍伐的费用、银行贷款利率、通货膨胀等给出合理的假设。这样我们就需要从模型中需要考虑的不同的因素，综合进行考虑对利益的影响。

假设在t时刻树木的成才量为$x(t)$,r是固有增长率，x_m是最大成材量，经营者共种植N棵树，每棵树的生长规律相同。

$$x'(t) = rx(1 - \frac{x}{x_m}), x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

树木一次性砍伐结束.假设单位体积木材的售价为$p(t)$,砍伐树木、种植幼苗等费用为$c(t)$。则t时刻所得到的利润为

$$R(t) = Nx(t)p(t) - c(t) \tag{1.2}$$

通货膨胀率为γ,其定义为价格的相对上涨率$\gamma = \frac{p'(t)}{p(t)} = \frac{c'(t)}{c(t)}$.则可以假设$p = p(0), c = c(0)$,则

$$p(t) = p\exp(\gamma t), c(t) = c\exp(\gamma t) \tag{1.3}$$

银行的贷款利率为μ,即若$t = 0$时贷款为M_0, 则时刻t 应该归还本息共

$$M(t) = M_0 \exp(\mu t) \tag{1.4}$$

但是在进行计算的时候，我们需要考虑的是经营者的利润，但是不能简单地取作木头采伐后所得的利润。因为经营者贷款后要按照贷款的利率形式来还钱，所以这时我们应该先把t时刻的利润折算到$t=0$时刻，并记之为：

$$F(t)=\exp(-\mu t)R(t)=\exp(-\mu t)\exp(\gamma t)(Npx(t)-c)=\exp(\widehat{\gamma-\mu t}^{-\delta})\underbrace{(Npx(t)-c)}_{V(t)} \tag{1.5}$$

这里$\delta=\mu-\gamma$是贷款利率与通货膨胀之差，是经营人员应该付给银行的实际利率。

这样对原来问题的计算就转化为对上述方程的求极值问题。

$$F'=\exp(-\delta t)(V'-\delta V),F''=\exp(-\delta t)(V''-2\delta(V'-\delta V-\delta^2 V)) \tag{1.6}$$

若要在$t=t^*$取得最大值，则

$$V'=\delta V,V''<\delta^2 V \tag{1.7}$$

在计算的过程中，需要把树木的计算结果带入到上述的表达式中。可以得到：

$$V(t)=\frac{Npx_m}{1+b\exp(-\gamma t)}-c,1+b=\frac{x_m}{x_0} \tag{1.8}$$

在计算过程中，可以知道若x_0足够小，x_m足够大，则上式可以设为如下形式：

$$V(0)=Npx_0-c<0,V(\infty)=Npx_m-c>0. \tag{1.9}$$

这说明在初始的时刻是赔钱的，而随着时间的增加，就会逐渐盈利。而根据极大值的条件$V'=\delta V$,可以得到如下的表达式

$$(V(t^*)+c)(V_\infty-V(t^*)=\frac{Npx_m\delta}{r}V(t^*) \tag{1.10}$$

这应该是一个正值。根据二次曲线可以计算出所对应的$V(t^*)$. 比较经营者在第t年砍伐林木与第$t+1$年砍伐林木时的损失与得益，即$t=0$时刻的利润的变化$\frac{V(t+1)-V(t)}{\triangle t}=V'(t)$,而$V(t)\exp(\delta)-V(t)=\delta V(t)$,相当于存钱一年所得到的利率值与直接一年的收益之比值。若$V'(t)>\delta V(t)$，则砍伐太早，因为让林木少生长一年带来的损失大于这一年的收益；$V'(t)<\delta V(t)$,则砍伐太晚，因为早一年砍伐存入银行的收益没有超过让林木多生长一年的损失。则只有相等时对应的是最佳的砍伐时刻。

在经济学生$V'(t)$称为边际损失，$\delta V(t)$称为边际得益。

这是一个连续性的模型，考虑树木的采伐是一次性的。而在实际情况中，树木的采伐是

轮流的，因为在同样的区域，一般情况下种植的树木是同一种树木，而且植物的生长周期也会保持一致。当一颗树木被采伐掉后，就会种上新的植物幼苗。这样就会保证树木的数目不会发生改变，不会破坏森林的持续发展。于此同时，其他的树木也会继续生长。希望在这种情况下，找到一种能获得最优效益的采伐方案？

把树木从高到低依次划分n组，第i组所对应的高度区间在$[h_{i-1}, h_i]$，并且规定$h_0 = 0, h_\infty = \infty$，第$i$ 组树木每株树木的价值为p_i，以x_i表示第i 组树木的株数。

我们对初始分布作一个假设$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$为未采伐向量。下面我们知道的另外一个关系是树木生长过程中每种间隔高度被采伐的量$y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$，实际上也是每年新栽的幼苗的数量，因为这时所有的采伐后所栽的都是幼苗。另外一个问题，在采伐期间，一批树木仍然要自然成长，由小变大，但是未必所有的都会长到下面一个阶段去，可能一部分长势会较慢。这样每个阶段都会对应一个百分比g_i表示生长上去所占的百分比，而$1 - g_i$表示保留下来的没有生长上去的，那么用什么才能更好的表示这样的不同阶段的树木所占的比例，或者说生长情况呢？我们建立下面这样的一个矩阵：

$$G = \begin{pmatrix} 1-g_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & 1-g_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1-g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & g_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

$$Gx - y + (\sum_{i=1}^{n} y_i, 0, 0, \cdots, 0)' = x \tag{1.12}$$

因为我们希望保持树木在各个阶段的量保持不变，在等于上式的右端，当然根据右侧的初始分布，也可以改变对应的参数值。

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{n} y_i = g_1 x_1, \\ &y_{j+1} = g_j x_j - g_{j+1} x_{j+1}, j = 1, 2, ..., n-2, \\ &y_n = g_{n-1} x_{n-1}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

而且还有一个条件需要考虑，因为所有的y_i应该都大于零。则有下列条件成立

$$g_j x_j \geq g_{j+1} x_{j+1} \geq 0, j = 1, 2, ..., n-1 \tag{1.14}$$

而且还有一个附加条件，即树木的总数保持不变。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = s \tag{1.15}$$

这样，对原问题的最大值得分析就变成了求下列的表达式

$$\begin{aligned} & Max\sum_{i=2}^{n} p_i y_i = Max(p_2 g_1 x_1 + (p_3 - p_2) g_2 x_2 + ... + (p_n - p_{n-1}) g_{n-1} x_{n-1}) \\ & g_i x_i \geq g_{i+1} x_{i+1} \geq 0, i = 1, 2, ..., n-1 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = s \end{aligned} \tag{1.16}$$

这是一个含有多个变量的极值问题，要求的变量为$(g_1, g_2, g_3, g_4, ..., g_n)$. 把这样的问题推广到一般形式：在一组线性约束条件下，求一个线性函数的极值，这样的问题称为线性规划问题。为了对该这一系列的公式统一标准：所有的不等式的符号一律改写成$\geq$，同样$=$也做类似的处理，只需要改成$\leq\geq$ 就可以了。对于这样的线性规划问题，一般情况下可以用单纯形法来进行计算。实际上也就是一个最优解的搜索过程。**列表单纯形法：**

1、列出初始表格。这相当于从一个已知的基本可行解出发开始计算。（基本的可行解：根据方程组得到的解向量，一般情况下，线性方程组可能会有无穷多个解，找出其对应的一个解）

2、检验目标行除等号右端外的所有元素，如果它们都是非负的，则已经达到最优解，否则

3、将右端项除外，选择目标行最负项所在列作为主元素所在列，当最负的项有多个时，可以任选一个。这一列决定了新进入基本变量集合的解分量。

4、用主元素列目标行外的所有正项去除相应的右端，选择商最小的行作为主元素所在的行，这一行的选定决定了离开基本变量集合的解分量。

5、做主元素消去法，得到一组新的解，回到2.

$$Z = max(80x_1 + 45x_2) \tag{1.17}$$

约束条件为

$$\begin{cases} 20x_1 + 5x_2 \leq 400 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 450 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

首先引入松弛变量，将原问题化为标准形式：

$$Z = max(80x_1 + 45x_2 + 0x_3 + 0x_4) \tag{1.19}$$

约束条件为

$$\begin{cases} 20x_1 + 5x_2 + x_3 = 400 \\ 15x_1 + 10x_2 + x_4 = 450 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

该问题进一步可以表示成如下形式：

$$\begin{cases} 20x_1 + 5x_2 + x_3 = 400 \\ 15x_1 + 10x_2 + x_4 = 450 \\ -80x_1 - 45x_2 + Z = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

这个表格中，应用R表示等号右端的值。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & R \\ 20 & 5 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 15 & 10 & 0 & 1 & 0 & 450 \\ -80 & -45 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

1.容易看出可以得到一组基本可行解，$(x_1, x_2, x_3, x_4, Z) = (0, 0, 400, 450, 0)$ 这是以x_3, x_4为基本变量时的基本可行解。但是我们需要的是以x_1, x_2作为基本的变量。在最后一行，挑选最负的值（即负数的绝对值最大的值）所在的列所对应的元素作为新入选的基本变量。新增加一个，就要减少一个。用新入选的基本变量列中的所有正系数去除它所在行的右端项，在该表中即$400/20 = 20 < 400/15 = 30$, 在所在的商中选择最小的一个，20.这就意味着$x_3$将从基本变量集中消除。也就是第一行，第一列的元素作为主元。则上述表格可以变成

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & R \\ 1 & 1/4 & 1/20 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 25/4 & -3/4 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & -25 & 4 & 0 & 1 & 1600 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

2.容易看出可以得到一组基本可行解，$(x_1, x_2, x_3, x_4, Z) = (20, 0, 0, 150, 1600)$ 取25/4所在的元素作为主元素，可以得到第三个表格：

$$
\begin{pmatrix}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & Z & R \\
1 & 0 & 2/25 & -1/25 & 0 & 14 \\
0 & 1 & -3/25 & 4/25 & 0 & 24 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2200
\end{pmatrix} \tag{1.24}
$$

3.这时目标行中不再有负系数，计算结束。则可以得到上述问题的最优解$(x_1, x_2, Z) = (14, 24, 2200)$