

第二章 整数规划

第一节 整数规划问题的提出

- 线性规划最优解可能是整数,也可能不是整数.
- 实际问题当中有相当多的问题要求最优解必须是整数.
- 例如,所求解的是完成某任务需用的人数,购买机器的台数,设备维修的次数等.
- 对于线性规划问题,如果增加全部变量为整数的要求,就构成了线性整数规划问题.如果部分变量要求是整数,则称为混合整数规划问题.如果变量仅取0和1,则称为0-1整数规划问题.

整数规划——线性整数规划

- ➡ 分枝定界法
 - 割平面法
 - 分配问题的解法
 - 隐枚举法 (0-1整数规划)

第二节 分枝定界法

例2-1 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$

$$(2-1) \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ 2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

伴随规划

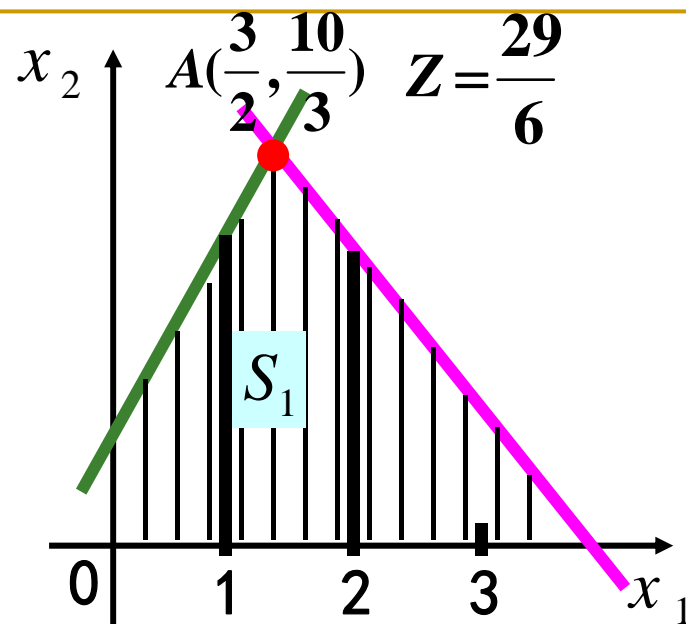
$$(2-1)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ 2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

分枝定界法的思想:

先不考虑整数条件, 即先求相应的伴随规划的最优解, 若得到的是整数解, 则问题得到解决. 否则将原问题分成几个分枝问题. 对于每个分枝问题求相应伴随规划的最优解, 若是整数解, 问题得到解决. 否则将它分枝再解, 直到求出最优整数解为止.

伴随规划

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \quad \bullet \\ (2-1)' \quad & \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \quad \bullet \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



求解 (2-1)', 得最优解: $A \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 10/3 \end{cases}, Z = \frac{29}{6}$

分枝定界法:

在 (2-1)' 的最优解A中, 选择一个非整数变量, 例如 $x_1 = 3/2$, 则 (2-1) 的最优解中, x_1 应满足: $x_1 \leq 1$ 或 $x_1 \geq 2$
($\because 1 < x_1 < 2$ 不符合整数条件)

整数规划2-2

伴随规划

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

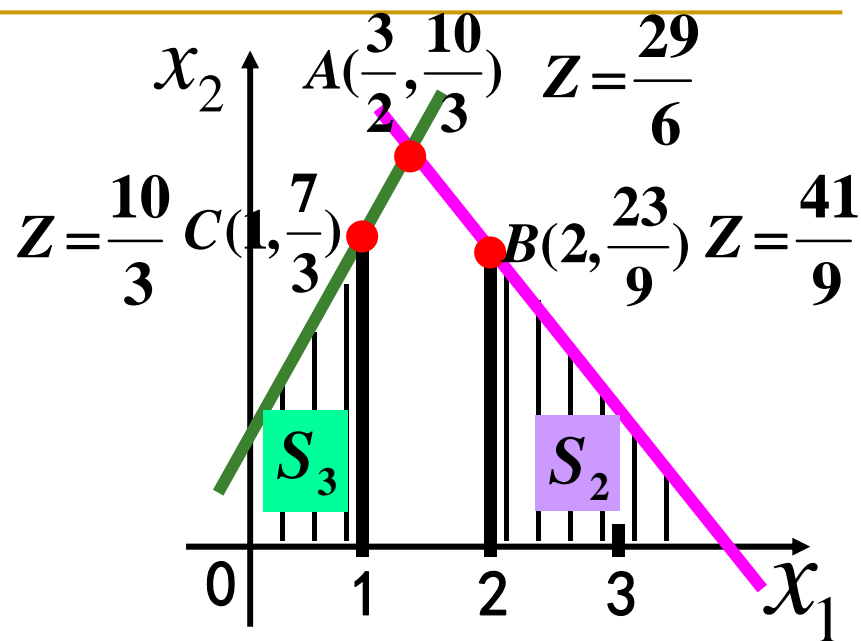
$$(2-1)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ 2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(求整数解)

分枝问题:

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 \leq 1$$



$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$(2-2)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$(2-3)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

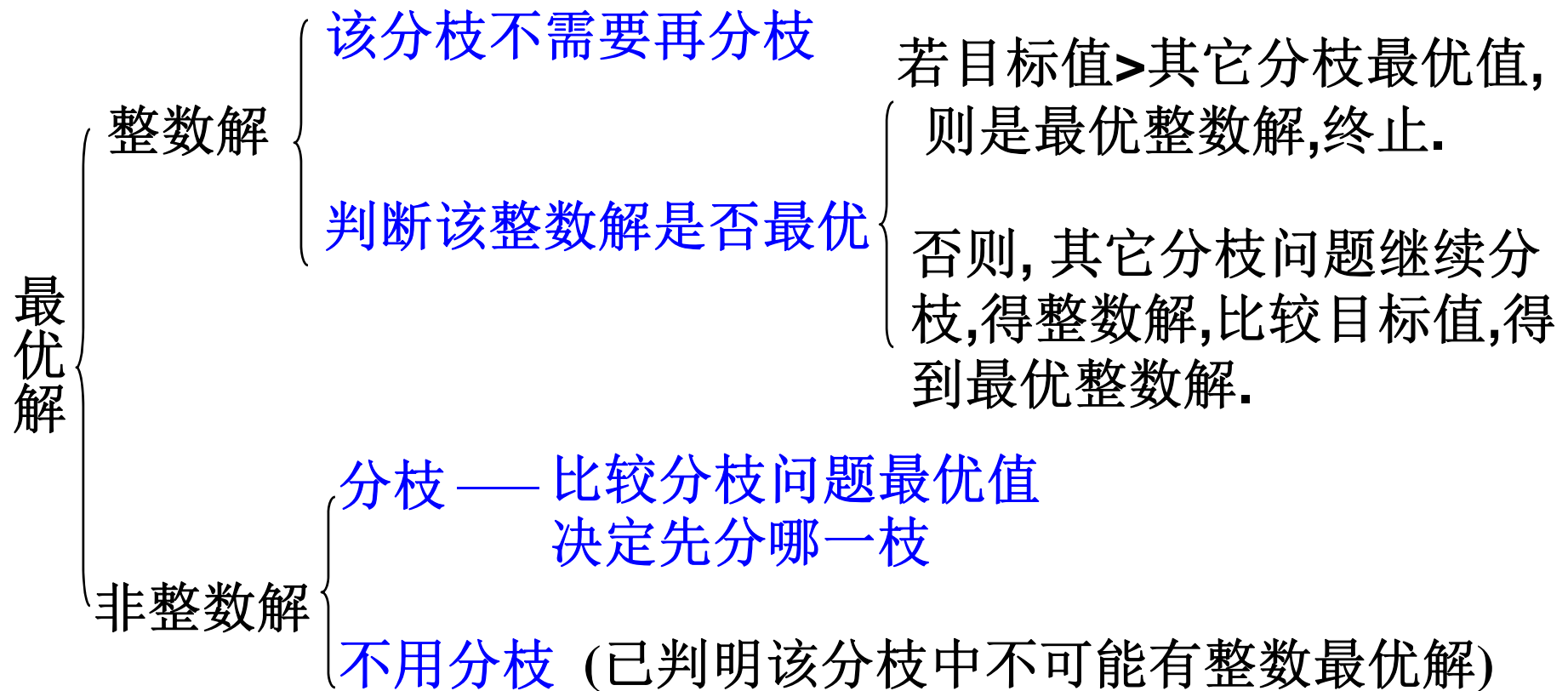
则 (2-1) 的最优解中, x_1 应满足: $x_1 \leq 1$ 或 $x_1 \geq 2$

分枝定界法的迭代原理

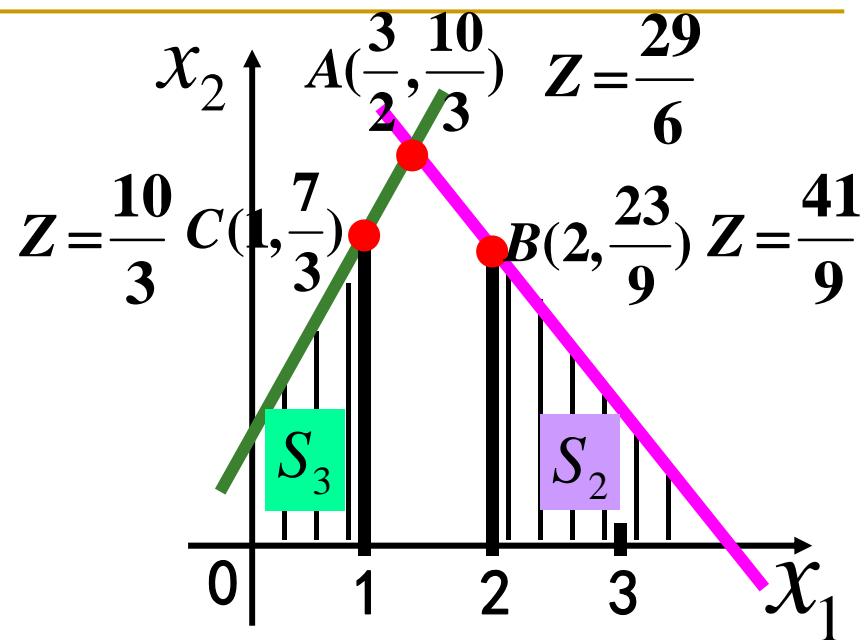
分枝问题(求整数解)



求解其伴随规划的最优解(单纯形法)



$$\begin{array}{ll}
 \max Z = x_1 + x_2 & \\
 \text{s.t.} & \\
 (2-2)' \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right. &
 \end{array}$$



在 $(2-2)'$ 的最优解 B 中, $x_2 = 23/9 = 2\frac{5}{9}$,
 则 $(2-2)$ 的最优解中, x_2 应满足: $x_2 \leq 2$ 或 $x_2 \geq 3$
 ($\because 2 < x_2 < 3$ 不符合整数条件)

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \end{aligned}$$

$$(2-2)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

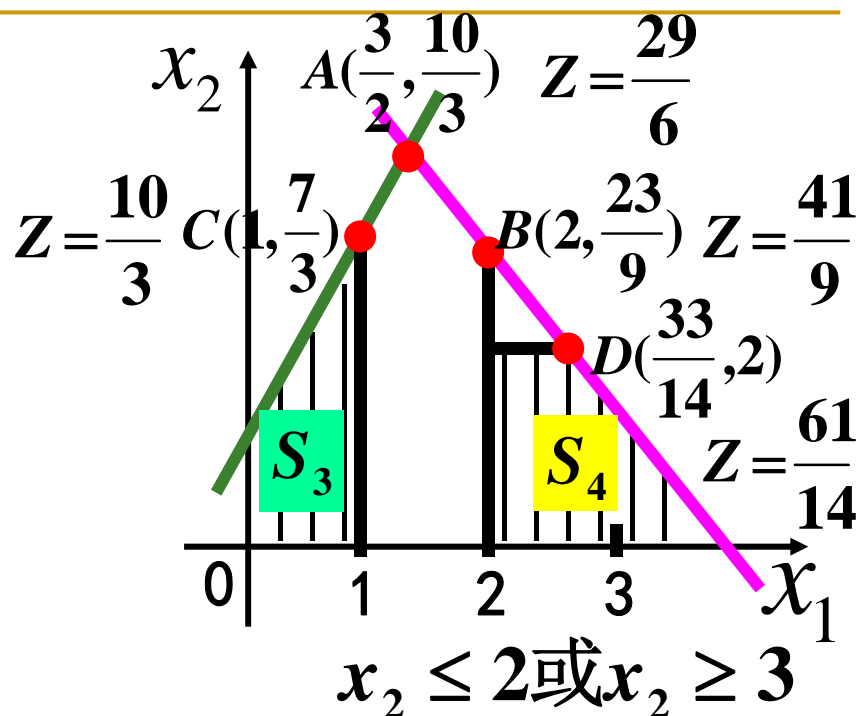
(求整数解) $x_1 \geq 2$ $x_2 \geq 0$
分枝问题: $x_2 \leq 2$ $x_2 \geq 3$

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \end{aligned}$$

$$(2-4)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \end{aligned}$$

$$(2-5)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \quad x_2 \geq 3 \end{cases} \because S_5 = \text{空集}$$



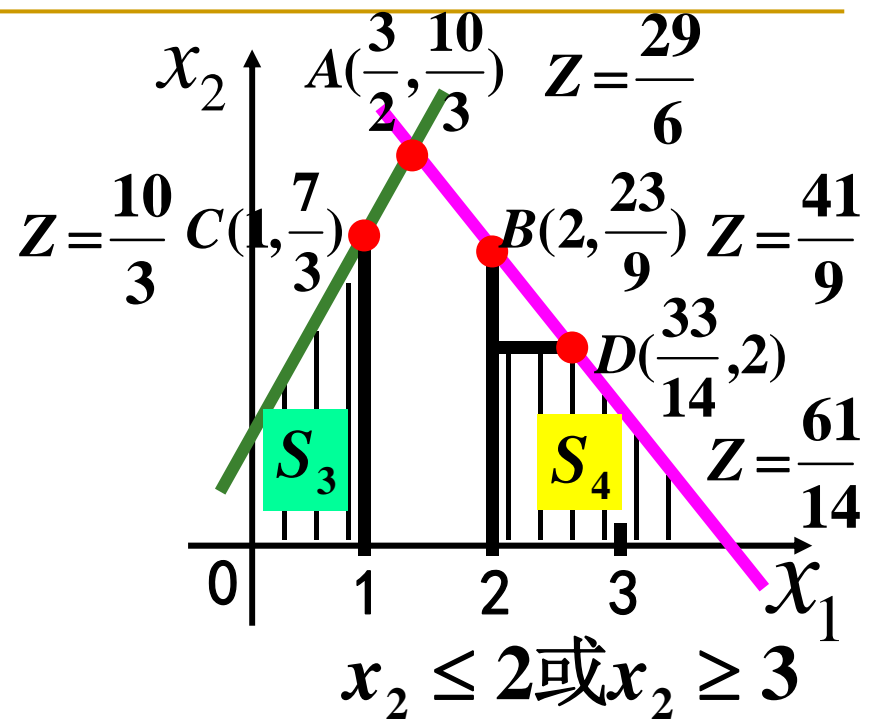
($\because 2 < x_2 < 3$ 不符合整数条件)

整数规划2-2

$$\begin{array}{ll}
 \max Z = x_1 + x_2 & \\
 \text{s.t.} & \\
 (2-2)' \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right. &
 \end{array}$$

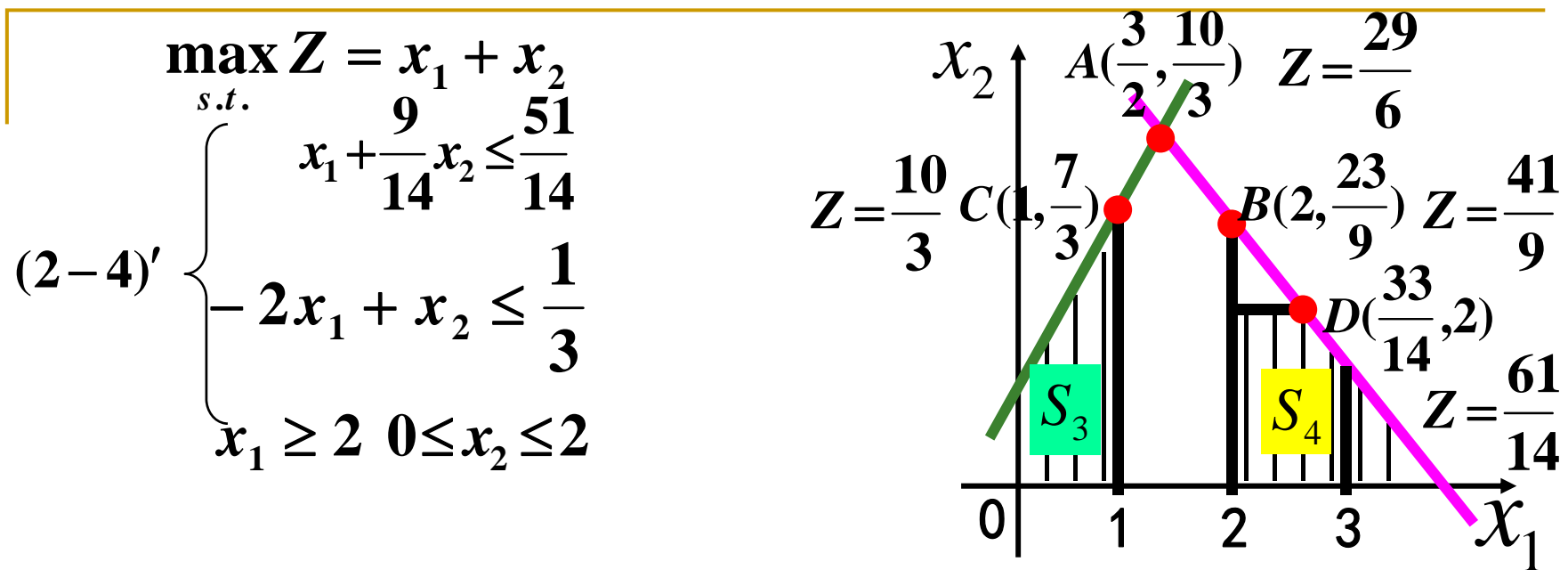


$$\begin{array}{ll}
 \max Z = x_1 + x_2 & \\
 \text{s.t.} & \\
 (2-4)' \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \end{array} \right. &
 \end{array}$$



$$\because Z = \frac{61}{14} > Z = \frac{10}{3}$$

\therefore 先分枝 (2-4)

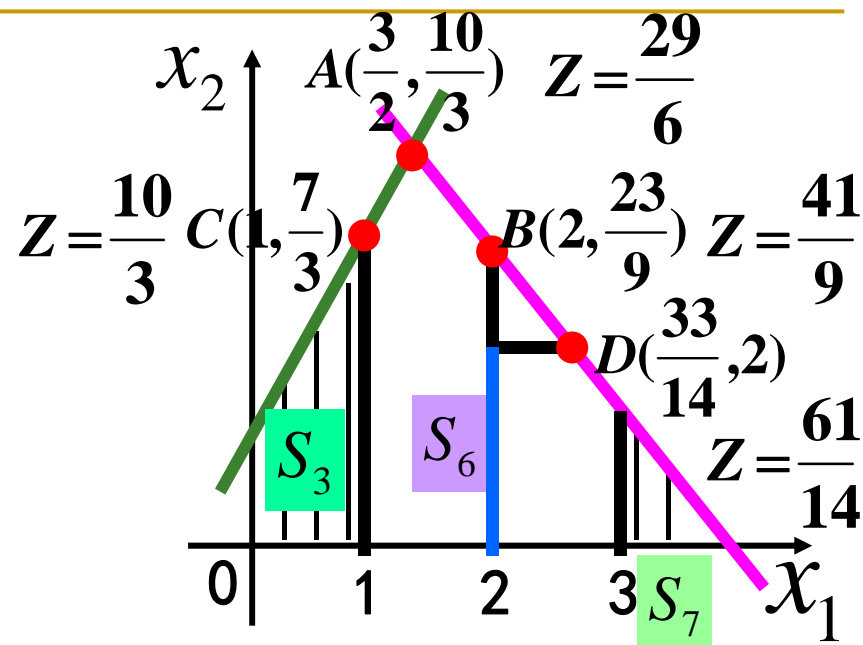


在 (2-4)' 的最优解 D 中, $x_1 = \frac{33}{14} = 2\frac{5}{14}$,

则 (2-4) 的最优解中, x_1 应满足: $x_1 \leq 2$ 或 $x_1 \geq 3$

($\because 2 < x_1 < 3$ 不符合整数条件)

$$\begin{aligned}
 & \max Z = x_1 + x_2 \\
 & \text{s.t.} \\
 & (2-4)' \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$



在 $(2-4)'$ 的最优解 D 中, $x_1 = 33/14 = 2\frac{5}{14}$,

则 $(2-4)$ 的最优解中, x_1 应满足: $x_1 \leq 2$ 或 $x_1 \geq 3$

($\because 2 < x_1 < 3$ 不符合整数条件)

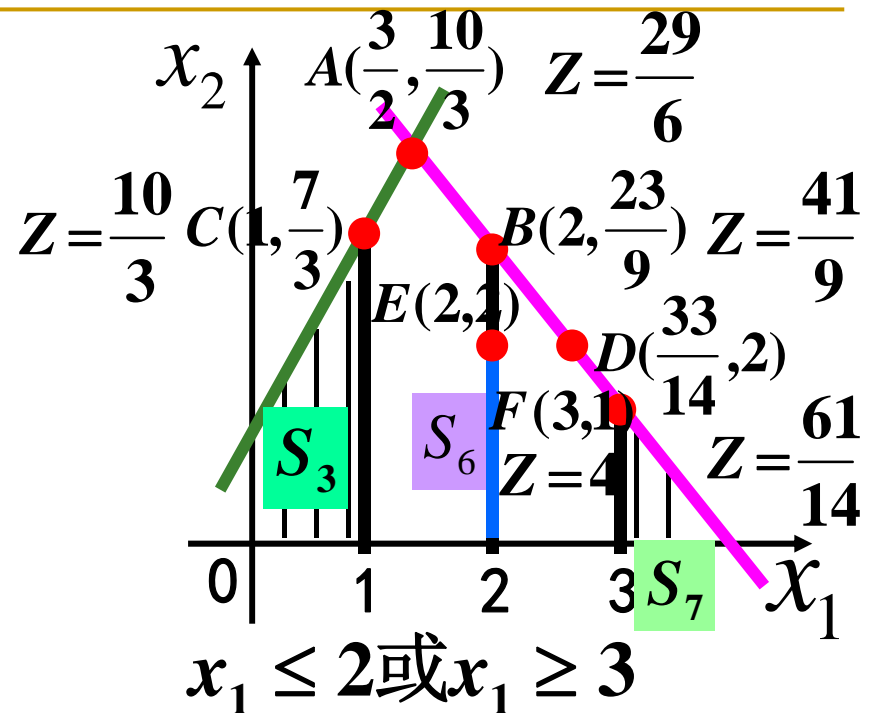
$$\begin{aligned}
 &\max Z = x_1 + x_2 \\
 &s.t. \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 2 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(求整数解)

分枝问题: $x_1 \leq 2$ $x_1 \geq 3$

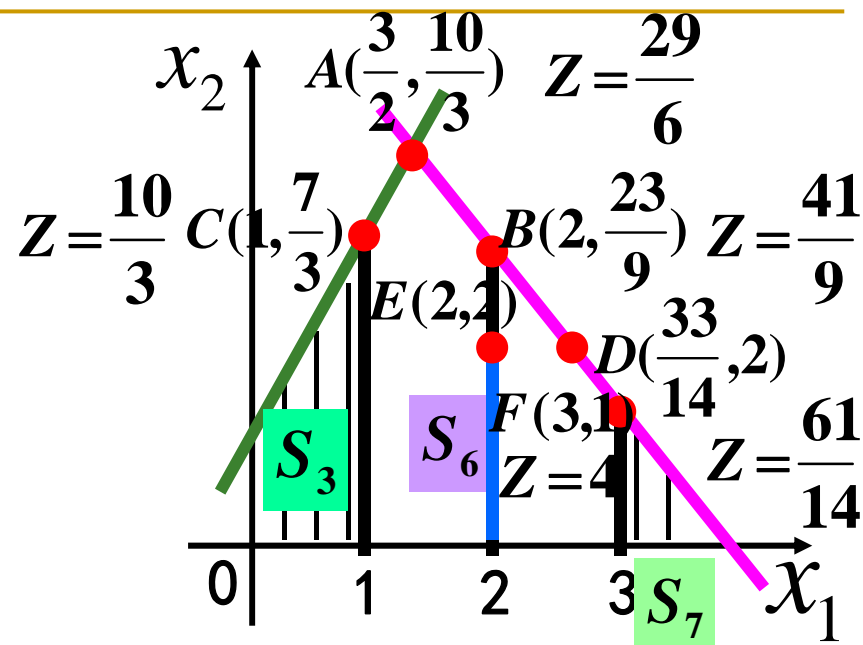
$$\begin{aligned}
 &\max Z = x_1 + x_2 \\
 &s.t. \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 = 2 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\max Z = x_1 + x_2 \\
 &s.t. \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 3 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$



例2-1 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ 2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$



$\because Z = \frac{10}{3} < Z = 4 \therefore (2-3)'$ 不必再分枝。

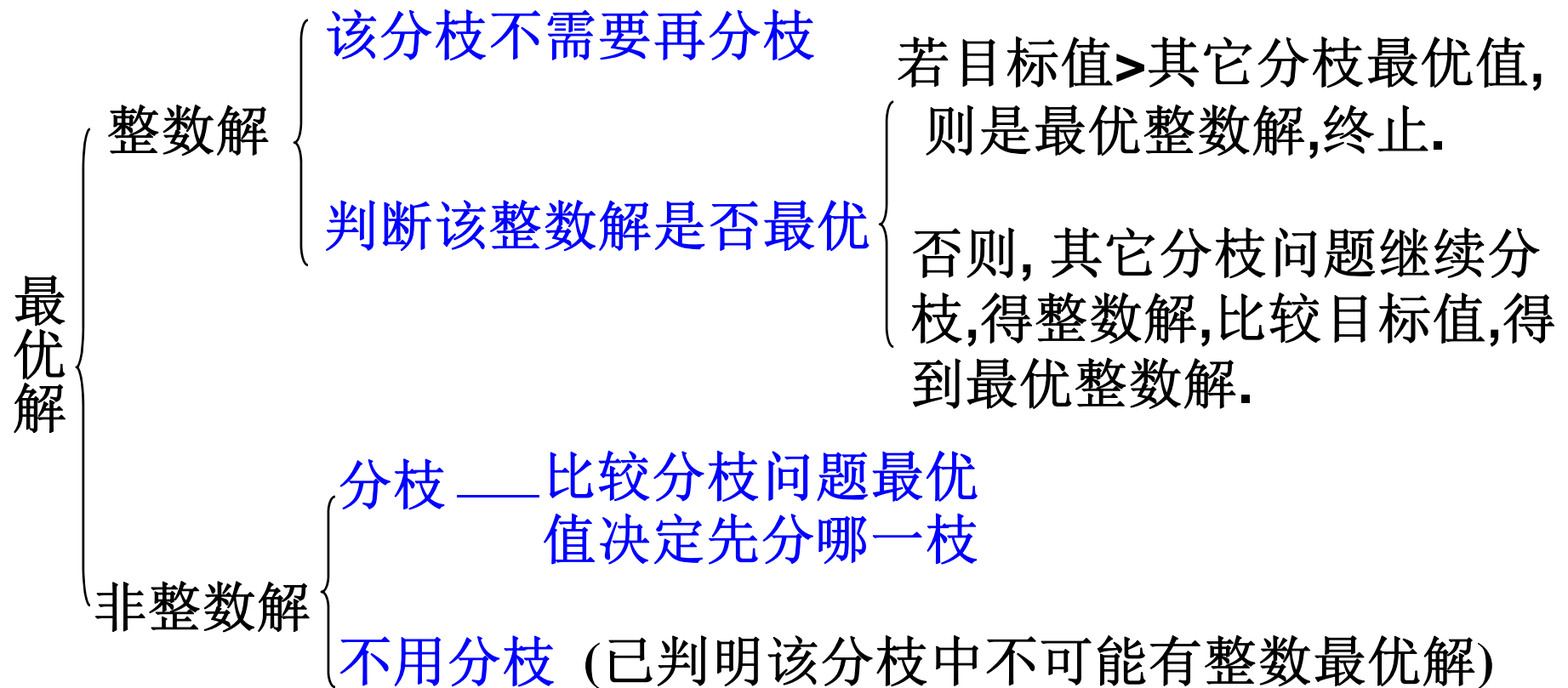
所以 $E(2,2)$ 和 $F(3,1)$ 是原问题(2-1)的整数最优解。

分枝定界法的迭代原理

分枝问题(求整数解)



求解其伴随规划的最优解(单纯形法)



整数规划——线性整数规划

✓ 分枝定界法

➡ 割平面法

第三节 割平面法

$$\begin{array}{ccc} \text{例2-2} & \max Z = x_1 + x_2 & \max Z = x_1 + x_2 \\ & s.t. & s.t. \\ (2-8) & \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{array} \right. & \xrightarrow{\text{伴随规划}} \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. (2-8)' \end{array}$$

割平面法的思想：

割平面法也是通过解伴随规划的方法来解整数规划的. 如果伴随规划的最优解不是整数解, 则增加线性约束(割平面), 切掉可行域中不含整数解的部分域, 在新的约束条件下再解伴随规划. 不断重复这个过程, 直到伴随规划的最优解是整数解为止. 经过割平面对可行域的不断切割, 最优整数解最终成为新可行域的顶点.

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
s.t.

(2-8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

伴随规划

$\max Z = x_1 + x_2$
s.t.

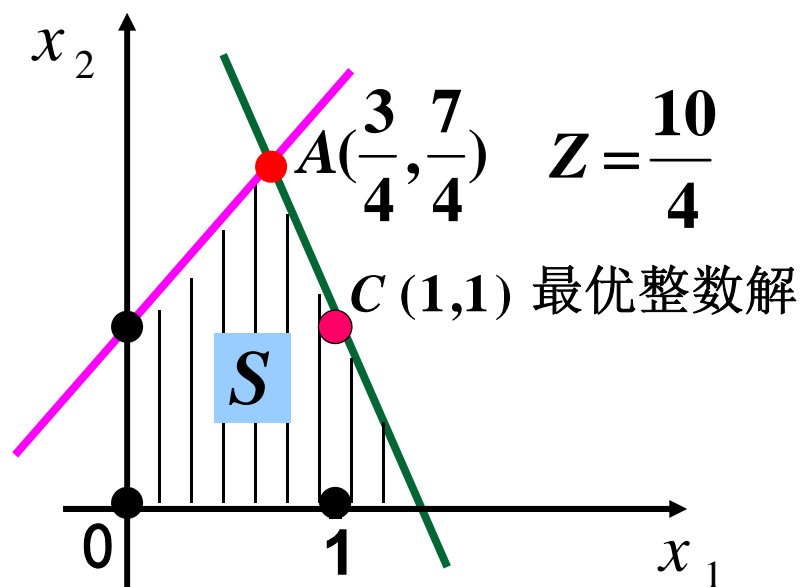
$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

求解 (2-8)', 得最优解:

S有4个整数解:

(1,0), (0,1), (0,0), (1,1)

最优整数解: (1,1), $Z=2$



整数规划2-3

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
s.t.

$$(2-8) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

伴随规划

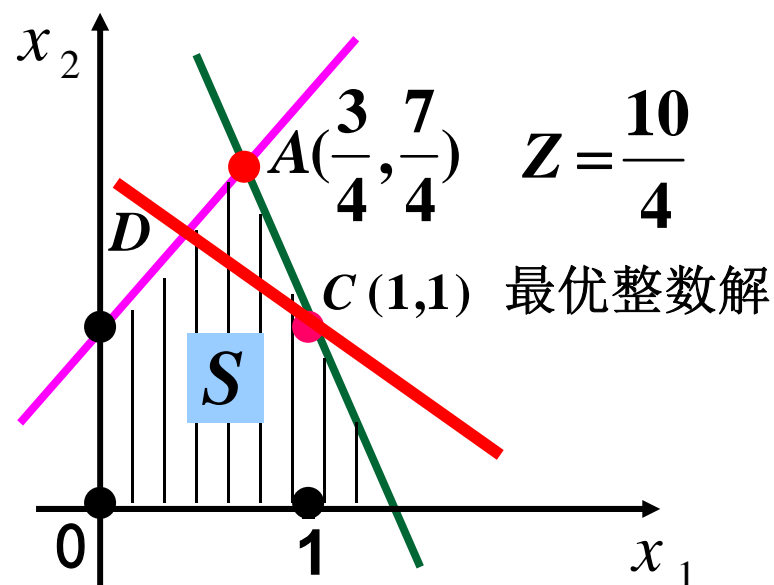
$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

希望能找到一条象 CD 那样的直线(割平面)切割 S , 去掉无整数解的三角形 ACD , 使得 C 是新可行域的顶点. 在此域上解伴随规划, 使其最优解恰是 C 点.

问题: 如何构造割平面?



整数规划2-3

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
s.t.

$$(2-8) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

$$(2-9) \begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

(2-9)' 的最优表为

在引入松弛变量之前, 先将约束条件中各变量的系数及右端项化为整数

		x_1	x_2	1	2
	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

不是整数解

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 \\ x_2 &= \frac{7}{4} - \frac{3}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 \end{aligned}$$

整数规划2-3

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
(2-8) $\begin{cases} \text{s.t.} \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$

$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$



$\max Z = x_1 + x_2$ 典式
(2-9) $\begin{cases} \text{s.t.} \\ -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

这两个式子可用于构造“割平面”

在(2-9)的约束方程中， x_1, x_2 的系数是整数，右端常数项也是整数，所以若 x_1, x_2 取整数，则 u_1, u_2 也一定是整数。

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$

$$(2-8) \begin{cases} s.t. \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

$$(2-9) \begin{cases} s.t. \\ x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$

$$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2$$

$$2x_1 + x_2 = 3$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$(1 + x_1 - x_2) + 3(4 - 3x_1 - x_2) \geq 1$$

$$x_1 + u_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2 + u_2$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 \geq 1$$

$$\frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 \geq \frac{1}{4}$$

$$u_1 + 3u_2 \geq 1$$

使 u_1, u_2
系数为
正的真
分数

整数规划2-3

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
s.t.

$$(2-8) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

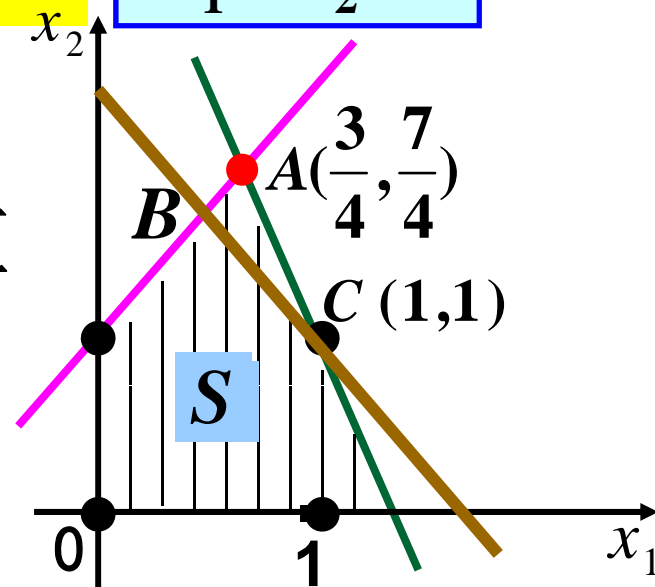
$$(2-9) \begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 = 3$$
 割平面

BC将S中 $2x_1 + x_2 > 3$ ($u_1 + 3u_2 < 1$) 的区域 $\triangle ABC$ 割掉，但割掉的区域内不包含S的整数点。



$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$u_1 + 3u_2 \geq 1$$

整数规划2-3

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$

$$(2-8) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \text{ 典式} \\ s.t. \begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-9)$$

$$\underline{x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2} \rightarrow x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(u_1 + 3u_2) - u_2 < \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - u_2 = 1 - u_2 \leq 1$$

BC 将 S 中 $2x_1 + x_2 > 3(u_1 + 3u_2 < 1)$ 的区域 $\triangle ABC$ 割掉，但割掉的区域内不包含 S 的整数点。

证明：

即割去的部分 $x_1 < 1$
且 $x_2 > 1$ (同理可证)
所以割去的部分不含任何整数解。

整数规划2-3

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
s.t.

$$(2-8) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

$$(2-9) \begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

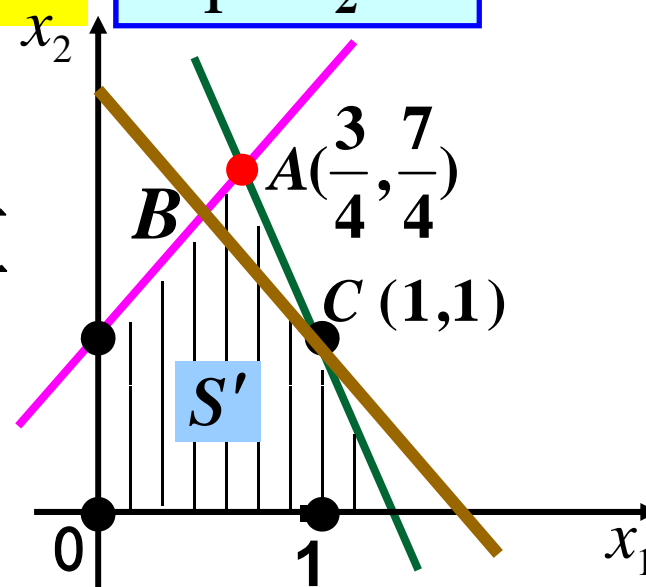
$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 = 3$$
 割平面

BC将S中 $2x_1 + x_2 > 3$ ($u_1 + 3u_2 < 1$) 的区域 $\triangle ABC$ 割掉，但割掉的区域内不包含S的整数点。

割去的部分 $x_1 < 1$ 且 $x_2 > 1$



整数规划2-3

第三节 割平面法

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
s.t.

$$(2-8) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

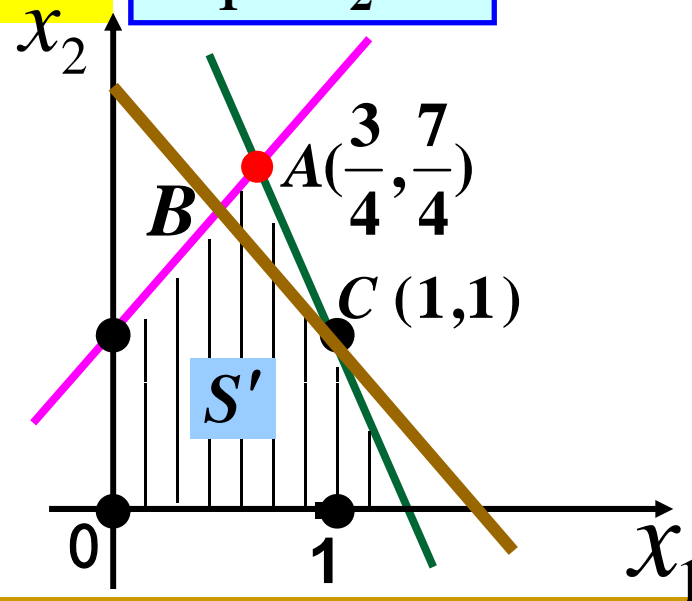
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-9)$$

$\max Z = x_1 + x_2$
s.t.

$$(2-14) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 = 3 \quad \text{割平面}$$



整数规划2-3

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$



$\max Z = x_1 + x_2$ 典式
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \quad (2-9) \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

\downarrow
 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 $(2-14) \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$



$\max Z = x_1 + x_2$ 典式
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \quad (2-15) \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

(2-15)比(2-9)多了一个约束，为求 (2-15)' 的最优解，可用灵敏度分析中增加约束的方法。将新约束加到 (2-9)' 的最优表中，用对偶单纯形法迭代一次即可求出 (2-15)' 的最优表。

整数规划2-3

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 (2-8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

(2-9)'的最优表为

		x_1	x_2	u_1	u_2
	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \quad (2-9) \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \quad (2-15) \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 (2-8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

$\max Z = x_1 + x_2$ **典式**
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \quad (2-9) \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

(2-9)' 的**最优表**为

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
u_3	3	2	1	0	0	1

$\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$
 (2-15)

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 (2-8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \quad (2-9) \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
u_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1

$\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$
 (2-15)

整数规划2-3

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$

(2-8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式

$\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \quad (2-9) \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
u_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

$\max Z = x_1 + x_2$

$\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$
(2-15)

整数规划2-3

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 (2-8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

$\max Z = x_1 + x_2$ 典式
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \quad (2-9) \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-5/2$	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0
x_2	$7/4$	0	1	$3/4$	$1/4$	0
x_1	$3/4$	1	0	$-1/4$	$1/4$	0
u_3	$-1/4$	0	0	$-1/4$	$-3/4$	1
				2	$2/3$	

$\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$
 (2-15)

整数规划2-3

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 (2-8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$



$\max Z = x_1 + x_2$ **典式**
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \quad (2-9) \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{7}{4}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
x_1	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
u_2	$-\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1

$\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$
 (2-15)

例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 (2-8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

$\max Z = x_1 + x_2$ **典式**
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \quad (2-9) \\ u_1, u_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

(2-15)' **最优表**

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
u_2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$

$\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 $\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$
 (2-15)

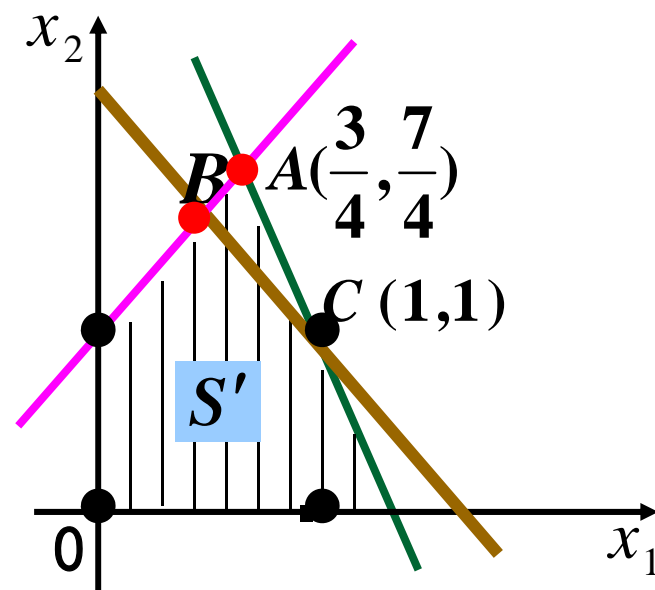
例2-2

(2-15)' 的最优解 $B(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}) \rightarrow$ 不是整数解, 再做割平面

$$Z = \frac{7}{3}$$

(2-15)' 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
u_2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$



整数规划2-3

例2-2

做割平面: $x_2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_3$

$$x_2 + u_1 + u_3 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_3 \geq 2 \rightarrow \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_3 \geq \frac{1}{3}$$

(2-15)' 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
u_2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$

$$\frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_3 \geq \frac{1}{3}$$

$$u_1 + 2u_3 \geq 1$$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$s.t. \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \end{cases}$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{整数}$$

$$(2-15)$$

整数规划2-3

例2-2

做割平面: $x_2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_3$

$$u_1 + 2u_3 \geq 1 \rightarrow (1 + x_1 - x_2) + 2(3 - 2x_1 - x_2) \geq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 = 2 \text{ 割平面}$$

(2-15)' 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3
	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
u_2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \end{cases}$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ 整数}$$

(2-15)

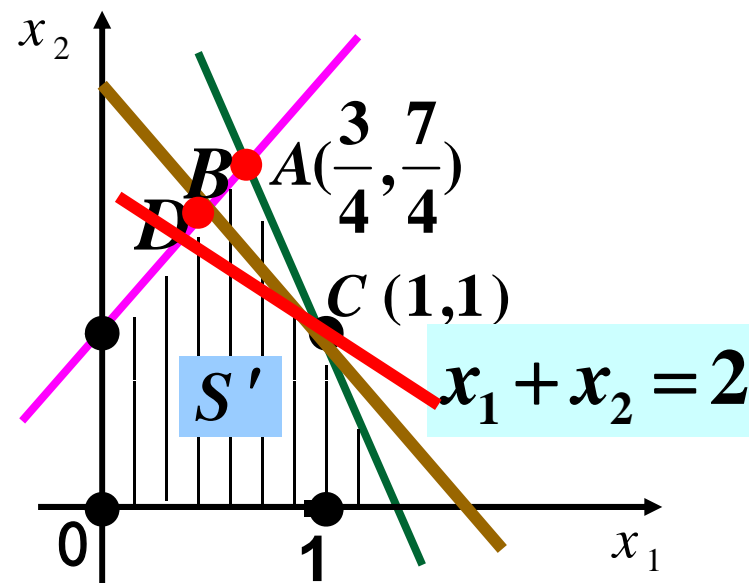
整数规划2-3

例2-2

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-8)$$

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases} \end{aligned} \quad (2-19)$$



整数规划2-3

例2-2

$$(2-19) \begin{cases} \max Z = x_1 + x_2 \\ s.t. \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \max Z = x_1 + x_2 \\ s.t. \\ -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + u_4 = 2 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-20)$$

$$\begin{cases} \max Z = x_1 + x_2 \\ s.t. \\ -x_1 + x_2 + u_1 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + u_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + u_3 = 3 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases} \quad (2-15)$$

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$-x_1 + x_2 + u_1 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + u_2 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + u_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + u_4 = 2$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{整数}$$

(2-20)

(2-15)' 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
u_2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	0
u_4	2	1	1	0	0	0	1

-1

整数规划2-3

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$-x_1 + x_2 + u_1 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + u_2 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + u_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + u_4 = 2$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{整数}$$

(2-20)

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
u_2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	0
u_4	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1

-1

整数规划2-3

例2-2

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$-x_1 + x_2 + u_1 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + u_2 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + u_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + u_4 = 2$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{整数}$$

(2-20)

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0
x_2	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
u_2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	0
u_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1

整数规划2-3

例2-2

最优解 $C(1,1)$ $Z = 2$

(2-20)' 最优表

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4
	-2	0	0	0	0	0	-1
x_2	1	0	1	0	0	-1	2
x_1	1	1	0	0	0	1	-1
u_2	0	0	0	0	1	-2	1
u_1	1	0	0	1	0	2	-3

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.t.

$$-x_1 + x_2 + u_1 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + u_2 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + u_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + u_4 = 2$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{整数}$$

(2-20)

整数规划2-3

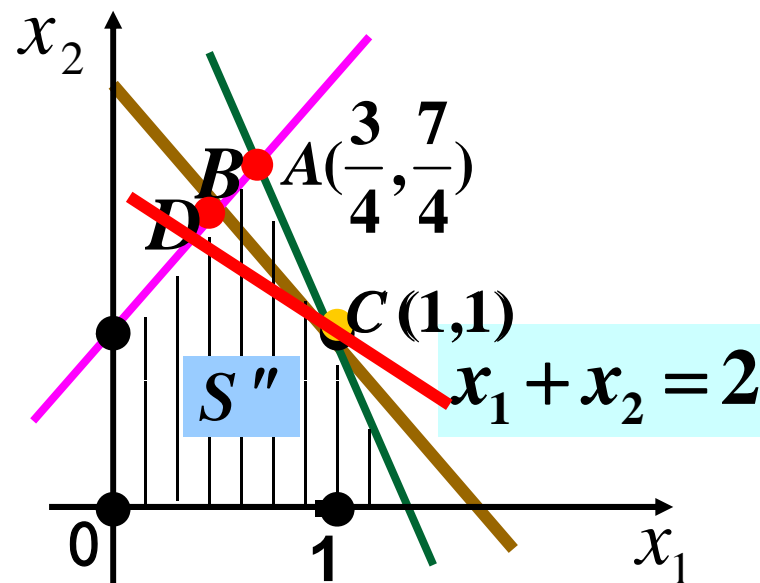
例2-2 $\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 (2-8) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

\downarrow

$\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 (2-14) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

解 (2-19)' 得最优解 $C(1,1)$
 $Z = 2$

$\max Z = x_1 + x_2$
 $s.t.$
 (2-19) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{整数} \end{cases}$

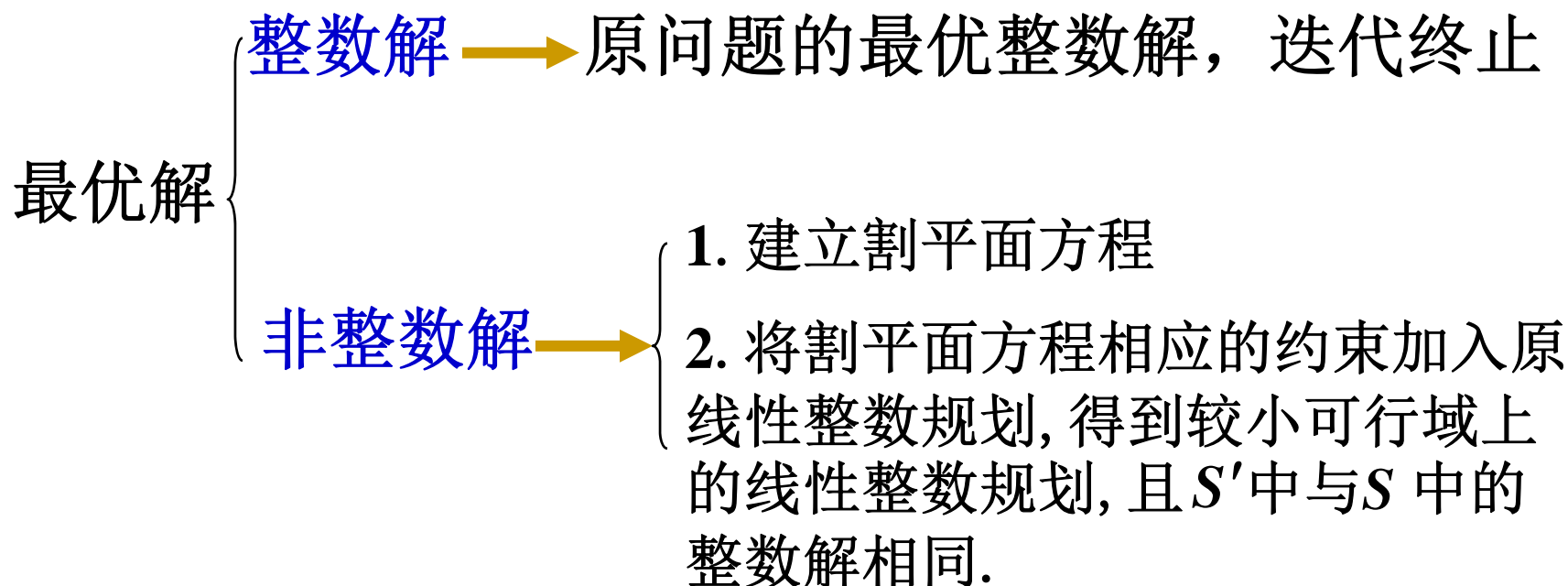


整数规划2-3

割平面法的迭代步骤:

线性整数规划(S) → 求其伴随规划的最优解

↓
线性整数规划(S')



整数规划——线性整数规划

- ✓ 分枝定界法
- ✓ 割平面法
- 分配问题的解法

作业：P125 2(1)(2) 3(1)(2)

作业：P109 2(1)(2) 3(1)(2)