第3章 图像变换

- 3.1 图像的几何变换
- 3.2 图像的正交变换
- 3.3 傅里叶变换
- 3.4 离散余弦变换

3.1 图像的几何变换

▪几何变换

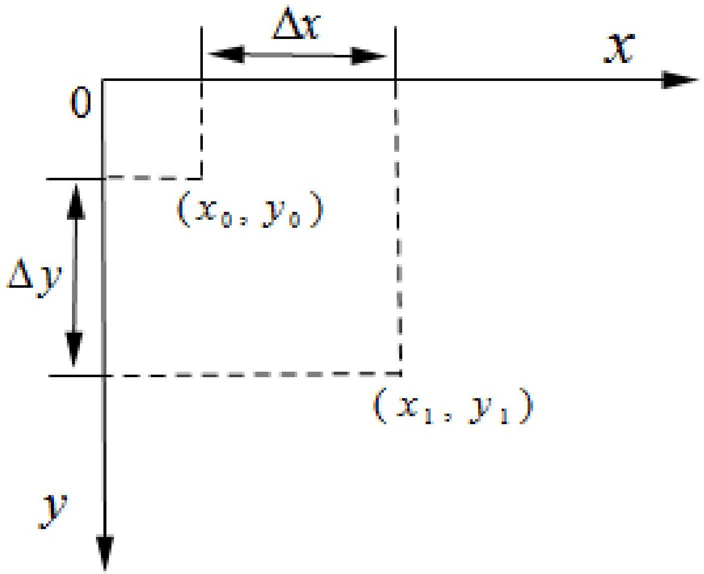
图像几何变换的一般定义为：

$$g(x,y)=f(u,v)=f(p(x,y),q(x,y))$$

式中，$u=p(x,y)$，$v=q(x,y)$ 唯一的描述了空间变换，即将输入 图像 $f(u,v)$ 从 $u-v$ 坐标系变换为 $x-y$ 坐标系的输出图像 $g(x,y)$。

3.1 图像的几何变换

1、图像的平移(IMAGE TRANSLATION)



两点之间存在如下关系：

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{cases}$$

像素点的平移

3.1 图像的几何变换

齐次坐标

2D图像中的点坐标(x, y) 表示成齐次坐标 (H_x, H_y, H)，当$H=1$时，则(x, y, 1)就称为点(x, y)的规范化齐次坐标。规范化齐次坐标的前两个数是相应二维点的坐标， 没有变化，仅在原坐标中增加了$H=1$的附加坐标。

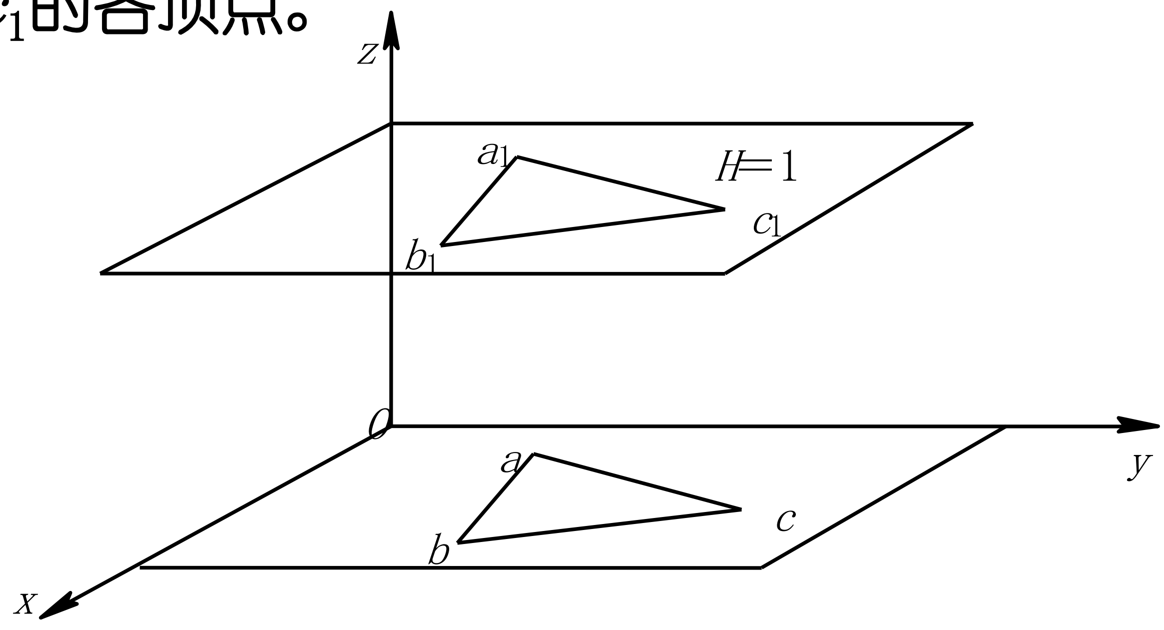
由点的齐次坐标 (H_x, H_y, H) 求点的规范化齐次坐标 (x, y, 1)，可按如下公式进行：

$$x = \frac{H_x}{H} \qquad y = \frac{H_y}{H}$$

3.1 图像的几何变换

齐次坐标

齐次坐标的几何意义相当于点(x, y)落在3D空间H＝1的平面上， 如果将XOY 平面内的三角形abc 的各顶点表示成齐次坐标(x_i, y_i, 1)(i=1, 2, 3)的形式，就变成H＝1平面内的三角形$a_1b_1c_1$的各顶点。



3.1 图像的几何变换

1、图像的平移(Image Translation)

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{cases}$$

以矩阵形式表示平移前后的像素关系为:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1 图像的几何变换

1、图像的平移(IMAGE TRANSLATION)

（a）原始图像

（b）平移后的图像

3.1 图像的几何变换

2、图像的缩放(Image Zoom)

图像全比例缩放变

数字图像的全比例缩放是指将给定的图像在 x方向和 y方向按相同的比例a 缩放，从而获得一幅新的图像，

比例缩放前后两点$A_0(x_0, y_0)$、$A_1(x_1, y_1)$之间的关系用矩阵形式可以表示为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 \\ y_1 = ay_0 \end{cases}$$

3.1 图像的几何变换

2、图像的缩放(Image Zoom)

以a=1/2为例，即图像被缩小为原始图像的一半。图像被缩小一半以后根据目标图像和原始图像像素之间的关系，有如下两种缩小方法。

第一种方法是取原图像的偶数行列组成新图像；

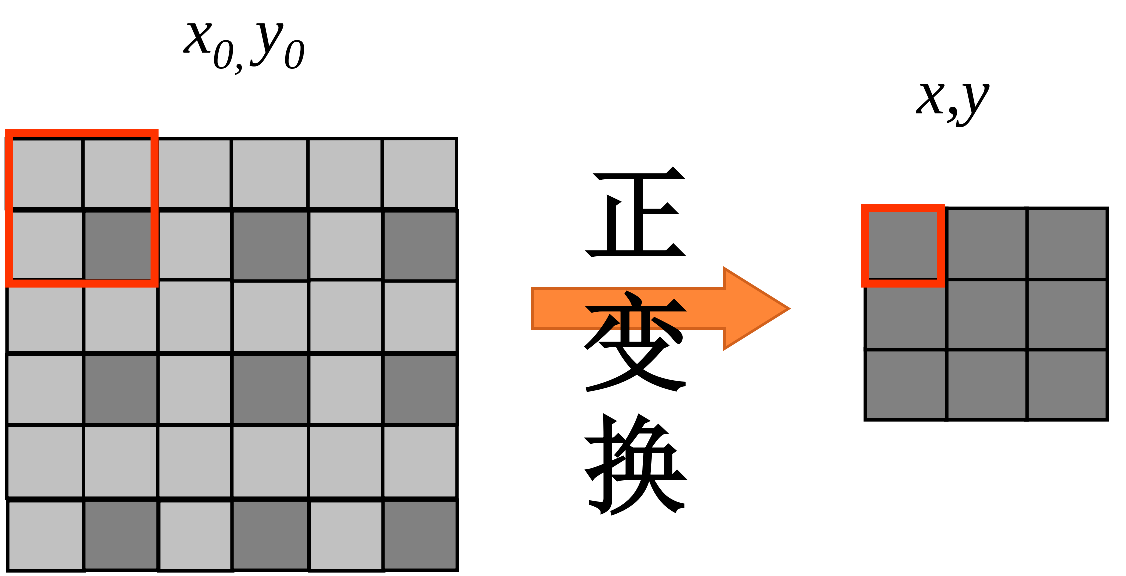
另一种方法是取原图像的奇数行列组成新图像。

3.1 图像的几何变换

2、图像的缩放(Image Zoom)

缩小 $x=x_0/2$

$y=y_0/2$



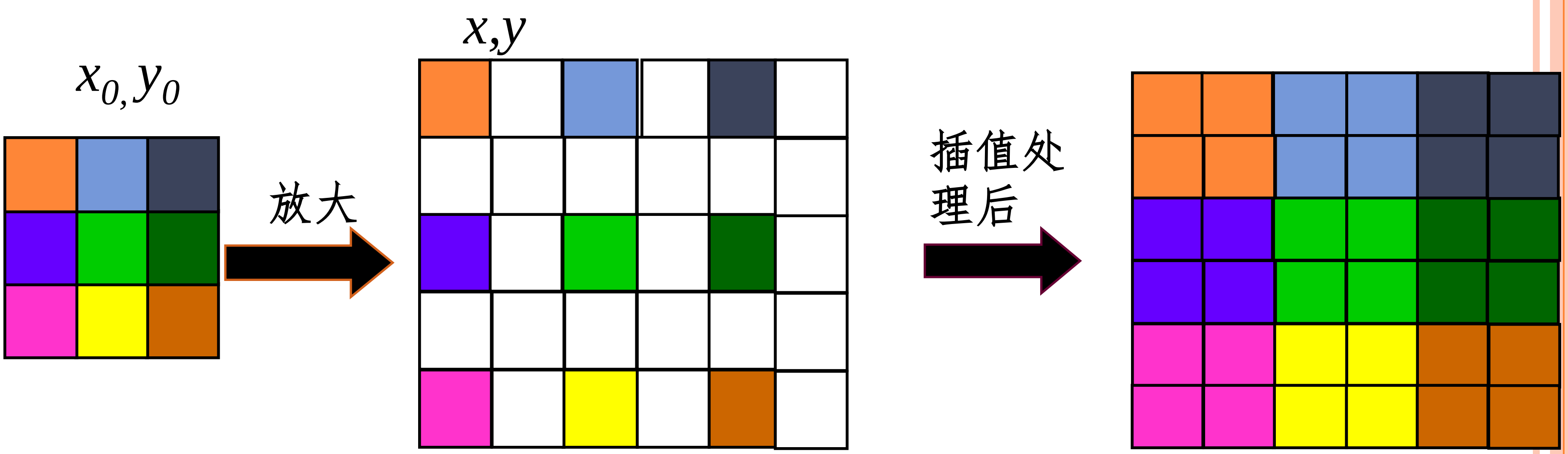
3.1 图像的几何变换

2、图像的缩放(Image Zoom)

放大

$$x=2x_0$$
$$y=2y_0$$

但放大后图像的像素点（0，1）对应于原始图中的像素点（0，0.5），（1，0）对应于原始图中的（0.5，0），原始图像中不存在这些像素点，那么放大图像如何处理这些问题呢？

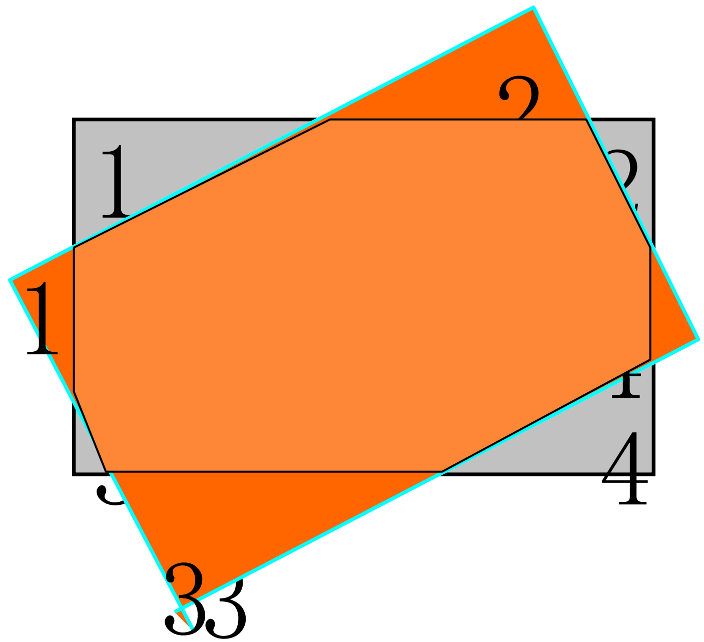


在图像放大的正变换中，出现了很多的空格。因此，需要对放大后所多出来的一些空格填入适当的像素值。一般采用**最邻近插值**和**线性插值法**。

3.1 图像的几何变换

3、图像的旋转(IMAGE ROTATION)

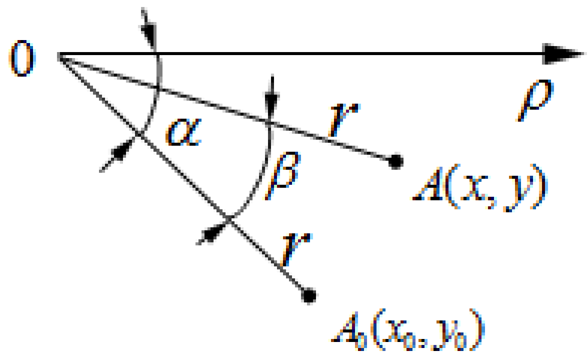
一般图像的旋转是以图像的中心为原点，旋转一定的角度，即将图像上的所有像素都旋转一个相同的角度。



3.1 图像的几何变换

3、图像的旋转(*IMAGE ROTATION*)

- 设原始图像的任意点$A_0(x_0,y_0)$经旋转角度β以后到新的位置$A(x，y)$，为表示方便，采用极坐标形式表示，原始的角度为α，如下图所示：



图像的旋转

原始图像的点 $A_0(x_0,y_0)$ 的坐标如下：

$$\begin{cases} x_0 = r\cos\alpha \\ y_0 = r\sin\alpha \end{cases}$$

3.1 图像的几何变换

3、图像的旋转(IMAGE ROTATION)

旋转到新位置以后点 $A(x, y)$ 的坐标如下：

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha-\beta) = r\cos\alpha\cos\beta + r\sin\alpha\sin\beta \\ y = r\sin(\alpha-\beta) = r\sin\alpha\cos\beta - r\cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

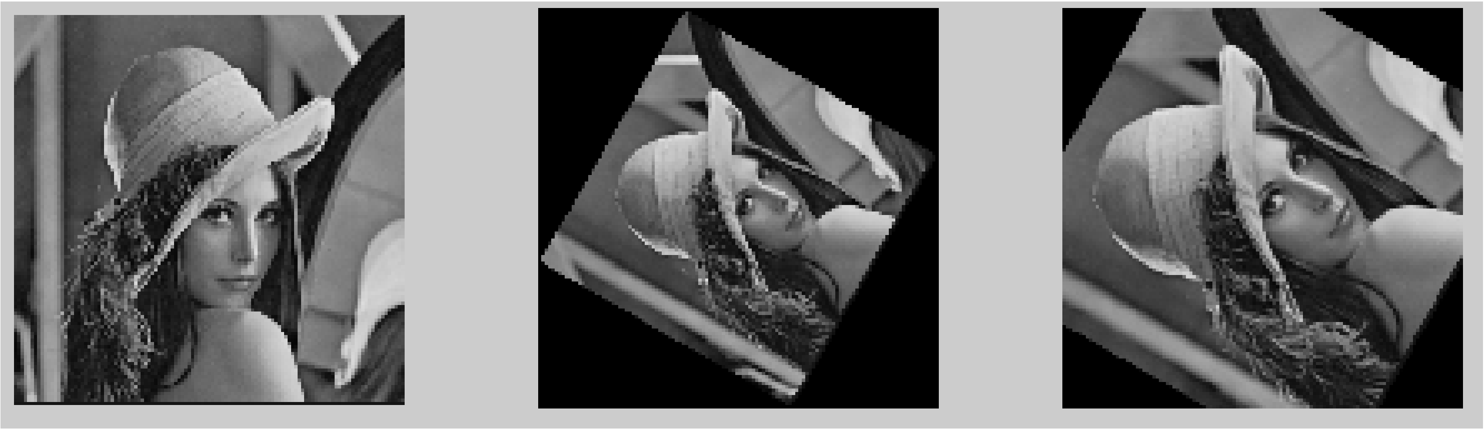
$$\begin{cases} x = x_0\cos\beta + y_0\sin\beta \\ y = -x_0\sin\beta + y_0\cos\beta \end{cases}$$

- 图像旋转用矩阵表示如下：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1 图像的几何变换

3、图像的旋转(*IMAGE ROTATION*)



（a）原图　　（b）旋转图　　（c）旋转图

图像的旋转

3.1 图像的几何变换

3、图像的旋转(*IMAGE ROTATION*)

图像旋转之后，由于数字图像的坐标值必须是整数，因此，可能引起图像部分像素点的局部改变，因此，这时图像的大小也会发生一定的改变。

若图像旋转角β=45时，则变换关系如下：

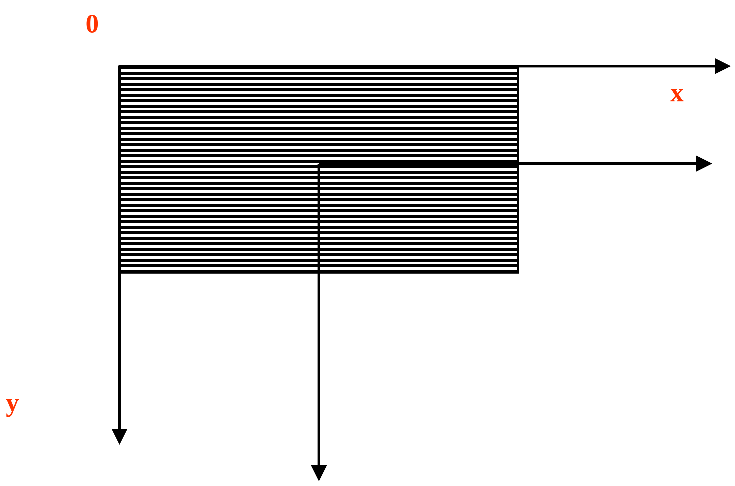
$$\begin{cases} x = 0.707x_0 + 0.707y_0 \\ y = -0.707x_0 + 0.707y_0 \end{cases}$$

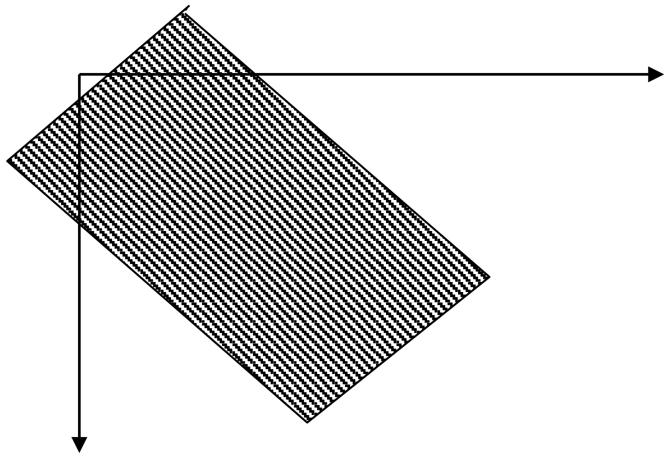
3.1 图像的几何变换

3、图像的旋转(*IMAGE ROTATION*)

图像绕任意点旋转

上述的旋转是绕坐标轴原点（0，0）进行的，如果是绕某一个指定点（a，b）旋转，则先要将坐标系平移到该点，再进行旋转，然后将旋转后的图像平移回原坐标系。例如，我们这里以图像的中心为旋转中心：





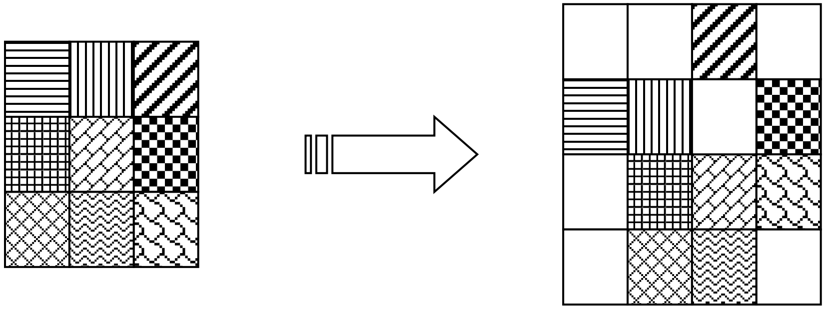
3.1 图像的几何变换

3、图像的旋转(IMAGE ROTATION)

利用公式进行图像旋转正变换时需要注意如下两点：

1、为了避免图像信息的丢失，图像旋转后必须进行平移变换。

2、图像旋转之后，会出现许多空洞点，我们需要对这些空洞点必须进行填充处理，否则图像旋转后的效果不好，一般也称这种操作为插值处理，可采用行或列插值方法。最简单的插值方法是，图像旋转前某一点（x，y）的像素点颜色，除了填充在旋转后坐标（x'，y'）上外，还要填充（x'+1，y'）和（x'，y'+1）。



3.1 图像的几何变换

3、图像的旋转(*IMAGE ROTATION*)

图像旋转角β =45° 时，则变换关系如下：

$$\begin{cases} x = 0.707x_0 + 0.707y_0 \\ y = -0.707x_0 + 0.707y_0 \end{cases}$$

以原始图像的点（1，1）为例，旋转以后，均为小数，经舍入后为（1，0），产生了位置误差。因此，图像旋转之后，可能会出现一些空白点，需要对这些空白点进行灰度级的插值处理，否则影响旋转后的图像质量。

3.1 图像的几何变换

3、图像的旋转(*IMAGE ROTATION*)

旋转前的图像

旋转15°并进行插值处理的图像

3.1 图像的几何变换

4、图像的镜像(Image Mirror)

图像的镜像（Mirror）是指原始图像相对于某一参照面旋转180°的图像

设原始图像的宽为 w，高为 h，原始图像中的点为 (x_0, y_0)，对称变换后的点为 (x_1, y_1)。

- （1）水平镜像（相对于 y 轴）

水平镜像的变换公式 如下：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & w \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1 图像的几何变换

4、图像的镜像(IMAGE MIRROR)

(a)原始图像

(b)水平镜像

3.1 图像的几何变换

4、图像的镜像(IMAGE MIRROR)

- （2）垂直镜像（相对于x轴）

垂直镜像的变换公式为如下：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1 图像的几何变换

4、图像的镜像(Image Mirror)

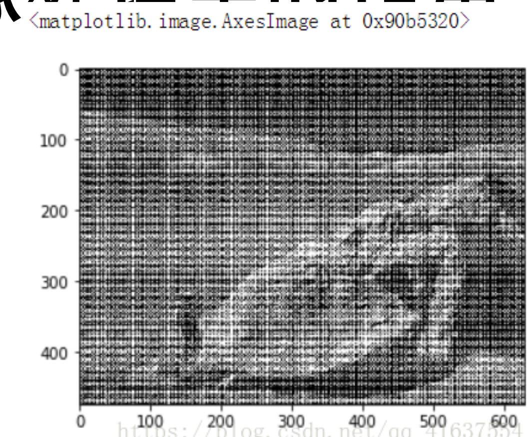
(a)原始图像

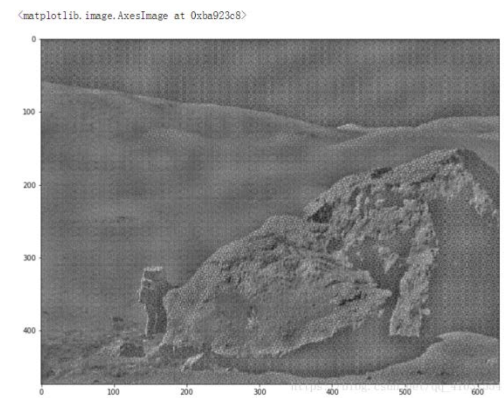
(b)垂直镜像

3.3 傅里叶变换

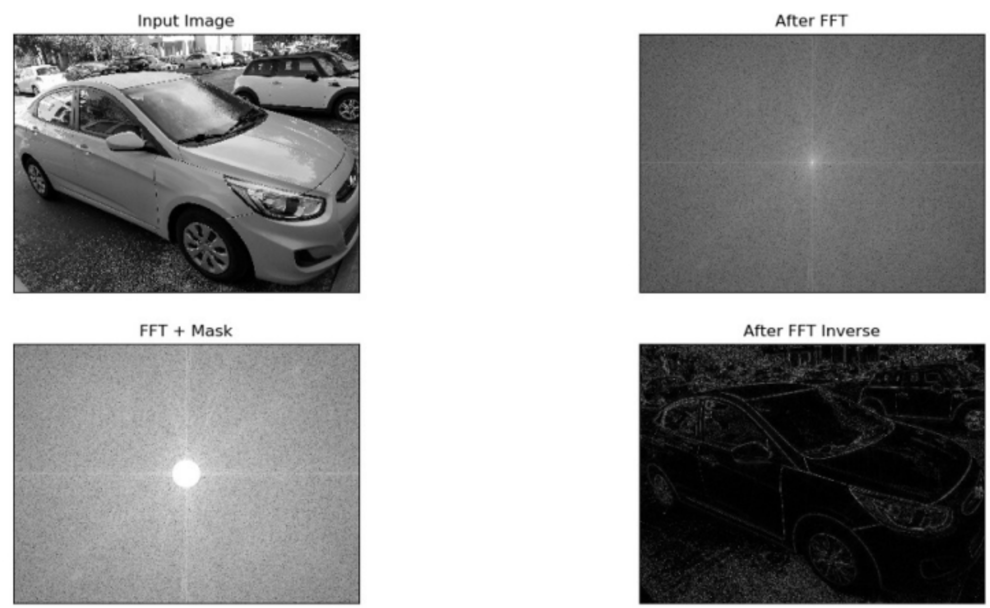
傅里叶变换在图像处理中的作用

- 图像增强与图像去噪



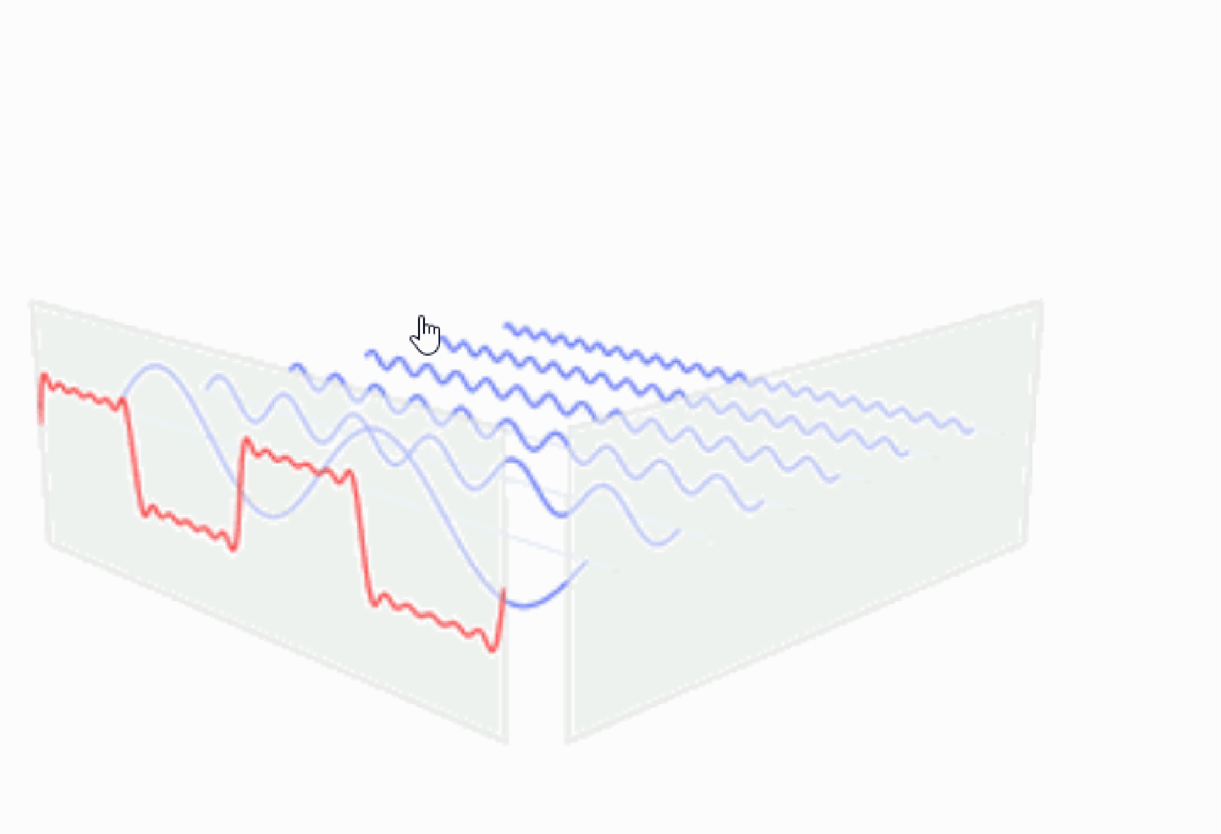


- 边缘检测
- 图像压缩
- 特征提取



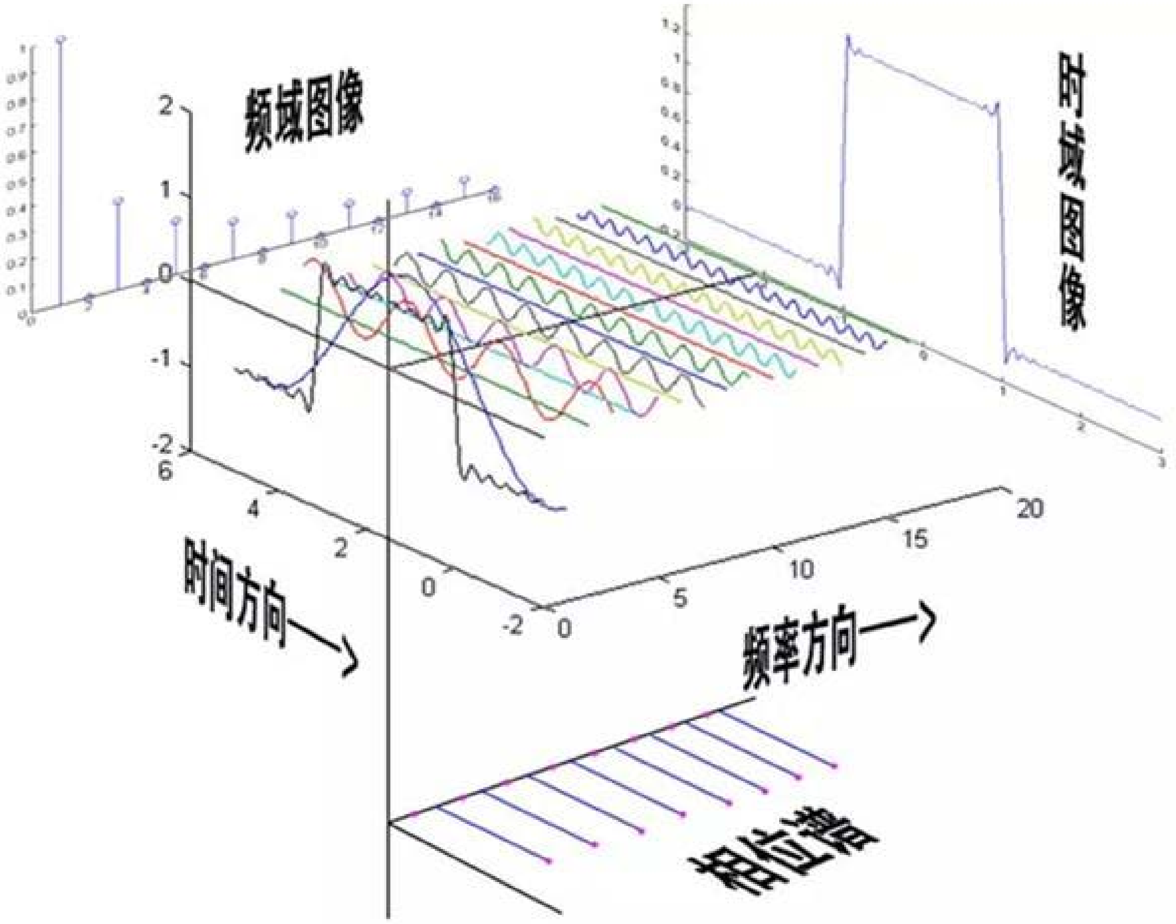
3.3 傅里叶变换

1.连续傅里叶变换



3.3 傅里叶变换

1.连续傅里叶变换



3.3 傅里叶变换

1.连续傅里叶变换

（1）一维傅立叶变换及其反变换

$$\Re: \quad F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux}\,\mathrm{d}x$$

$$\Re^{-1}: \quad f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ux}\,\mathrm{d}u$$

3.3 傅里叶变换

这里$f(x)$是实函数，它的傅里叶变换$F(u)$通常是复函数。$F(u)$ 的实部、虚部、振幅、能量和相位分别表示如下：

- 实部 $$R(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi ut)dt$$
- 虚部 $$I(u)=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi ut)dt$$
- 振幅 $$|F(u)|=\left[R^2(u)+I^2(u)\right]^{\frac{1}{2}}$$

3.3 傅里叶变换

- 能量 $$E(u)=|F(u)|^2=R^2(u)+I^2(u)$$
- 相位 $$\phi(u)=\arctan\frac{I(u)}{R(u)}$$

傅里叶变换可以很容易推广到二维的情形。设函数 $f(x,y)$ 是连续可积的，且 $f(u,v)$ 可积，则存在如下的傅里叶变换对：

3.3 傅里叶变换

$$\boldsymbol{F}\{f(x,y)\}=F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}\{F(u,v)\}=f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

式中 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 是频率变量。与一维的情况一样，二维函数的傅里叶谱、能量和相位谱为:

3.3 傅里叶变换

- 傅里叶频谱：

$$\left|F(u,v)\right| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{\frac{1}{2}}$$

- 相位：

$$\phi(u,v) = \arctan\frac{I(u,v)}{R(u,v)}$$

- 能量谱：

$$E(u,v) = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

3.3 傅里叶变换

2、 离散傅里叶变换

函数$f(x)$的一维离散傅里叶变换由下式定义：

$$\Re: F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux/N}$$

其中，$u=0,1,2,\ldots,N-1$ 。$F(u)$的傅里叶反变换定义为：

$$\Re^{-1}: f(x)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ux/N}$$

3.3 傅里叶变换

同连续函数的傅里叶变换一样，离散函数的傅里叶变换也可推广到二维的情形，其二维离散傅里叶变换定义为：

$$F(u,v)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-2j\pi(ux+vy)/N}$$

$u=0,1,\ldots,N-1$，$v=0,1,\ldots,N-1$。

二维离散傅里叶反变换定义为

$$f(x,y)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}F(u,v)e^{2j\pi(ux+vy)/N}$$

式中 $\boldsymbol{x=0,1,\ldots,N-1}$，$\boldsymbol{y=0,1,\ldots,N-1}$

3.3 傅里叶变换

与一维的情况一样，

二维函数的离散傅里叶谱、能量和相位谱为：

傅里叶频谱： $$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

相位： $$\phi(u,v) = \arctan\frac{I(u,v)}{R(u,v)}$$

能量谱： $$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

3.3 傅里叶变换

- 一个简单二维函数的中心谱。

图1（a）显示了在 512×512 像素尺寸的黑色背景上叠加一个 20×40 像素尺寸的白色矩形。

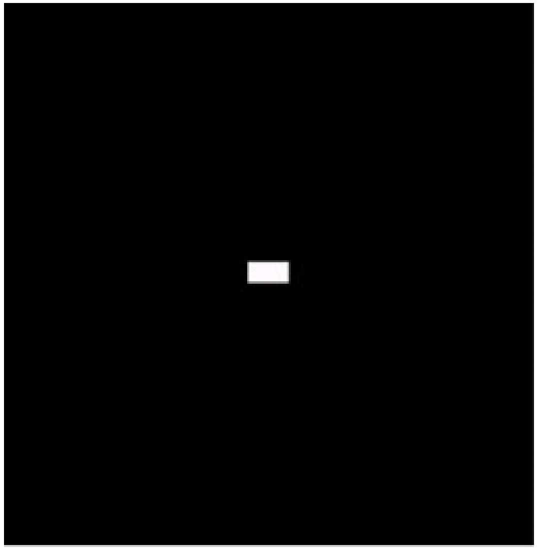
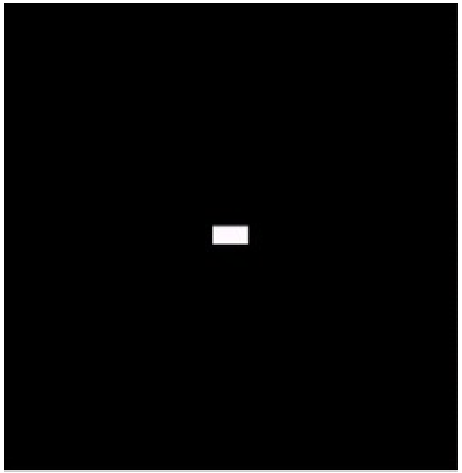


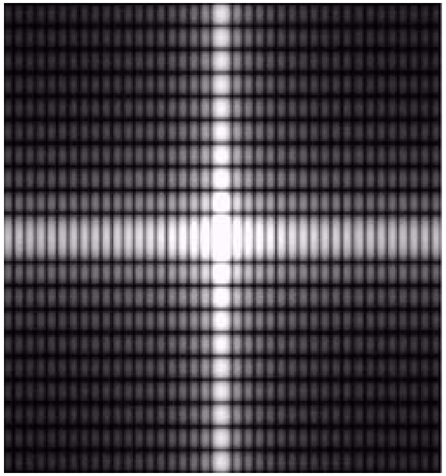
图1（a）

3.3 傅里叶变换

此图像在进行傅里叶变换的计算之前被乘以 $(-1)^{x+y}$，从而可以使频率谱关于中心对称，如图1（b）所示。在图1（b）中， u 方向谱的零点分割恰好是 v 方向零点分隔的两倍。

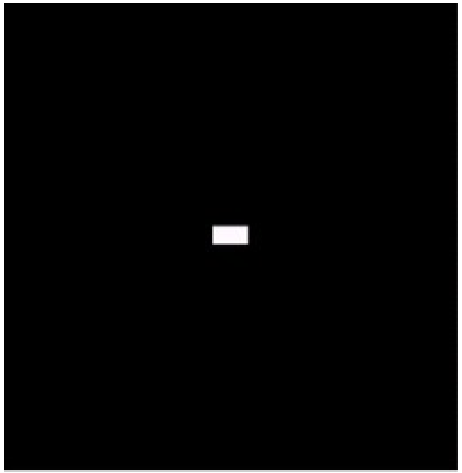


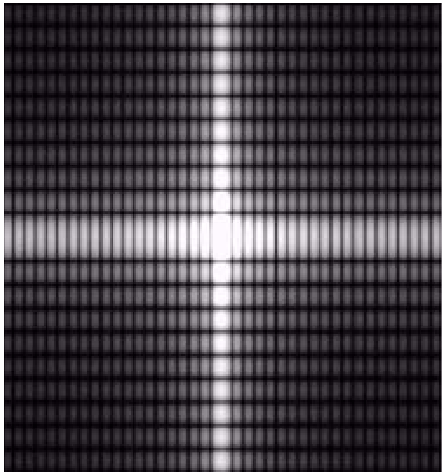
512×512



20×40

3.3 傅里叶变换





符合图像中 **1 : 2** 的矩形尺寸比例（遵照傅里叶变换尺度变换性质）。在显示之前频率谱用式中的对数变换处理以增强灰度级细节。变换中使用$c = 0.5$的值可以降低整体强度。在本章显示的对数傅里叶频率谱都用对数变换进行了相似的处理。

3.3 傅里叶变换

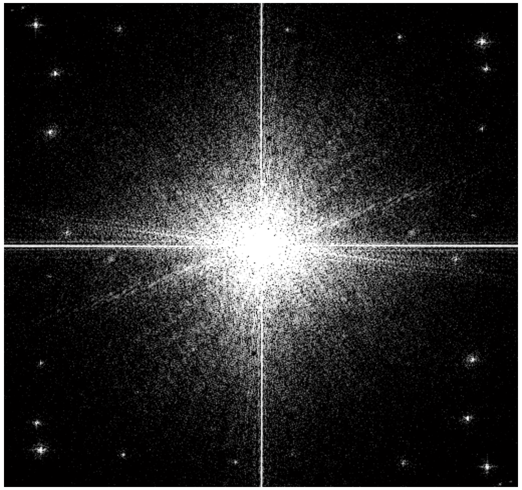
例：图象的二维离散傅立叶频谱。

```
%读入原始图象
I = imread('i_peppers_gray.bmp');
imshow(I)
%求离散傅立叶频谱
J = fftshift(fft2(I));
%对原始图象进行二维傅立叶变换，并将其坐标原
 点移到频谱图中央位置
figure（2）;
imshow(log(1+abs(J)),[8,10])
```

其结果如下页图所示

3.3 傅里叶变换

（a）原始图像



（b）离散傅里叶频谱

图2 二维图像及其离散傅里叶频谱的显示

3.3 傅里叶变换

频域中：

- 频率越大说明原始信号变化速度越快；
- 频率越小说明原始信号越平缓；
- 当频率为0时，表示直流信号，没有变化；
- 频率的大小反应了信号的变化快慢。高频分量解释信号的突变部分，而低频分量决定信号的整体形象。

图像处理中：

- 频域反应了图像在空域灰度**变化剧烈程度**，也就是图像灰度的变化速度，也就是图像的梯度大小。
- 图像的边缘部分是突变部分，变化较快，因此反应在频域上是高频分量；图像的噪声大部分情况下是高频部分；
- 图像平缓变化部分则为低频分量。

◆ 傅立叶变换提供了一条从空域到频率自由转换的途径,提供另外一个角度来观察图像，可以将图像从灰度分布转化到频率分布上来观察图像的特征。

3.3 傅里叶变换

3、 快速傅里叶变换

快速傅里叶变换(*FFT*)并不是一种新的变换，它是离散傅里叶变换(*DFT*)的一种算法。这种方法是在分析离散傅里叶变换(*DFT*)中的多余运算的基础上，进而消除这些重复工作的思想指导下得到的，所以在运算中大大节省了工作量，达到了快速的目的。

3.3 傅里叶变换

对于一个有限长序列 $\{f(x)\}(0 \le x \le N-1)$ ，它的傅里叶变换由下式表示：

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} f(x)W_N^{ux}$$

令 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, W_N^{-1} = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

因此，傅里叶变换对可写成下式

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)W_N^{ux}$$

3.3 傅里叶变换

从上面的运算显然可以看出要得到每一个频率分量，需进行 N次乘法和 $N-1$次加法运算。要完成整个变换需要 N^2次乘法和 $N(N-1)$次加法运算。当序列较长时，必然要花费大量的时间。

观察上述系数矩阵，发现W_N^{ux}是以 N为周期的，即 $W_N^{(u+LN)(x+KN)}=W_N^{ux}$

3.4 傅里叶变换的性质(Characteristics of Fourier Transform)

1、可分离性（Separability)

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)/N}$$

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}e^{-j2\pi ux/N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}$$

每1列求变换再乘以 N

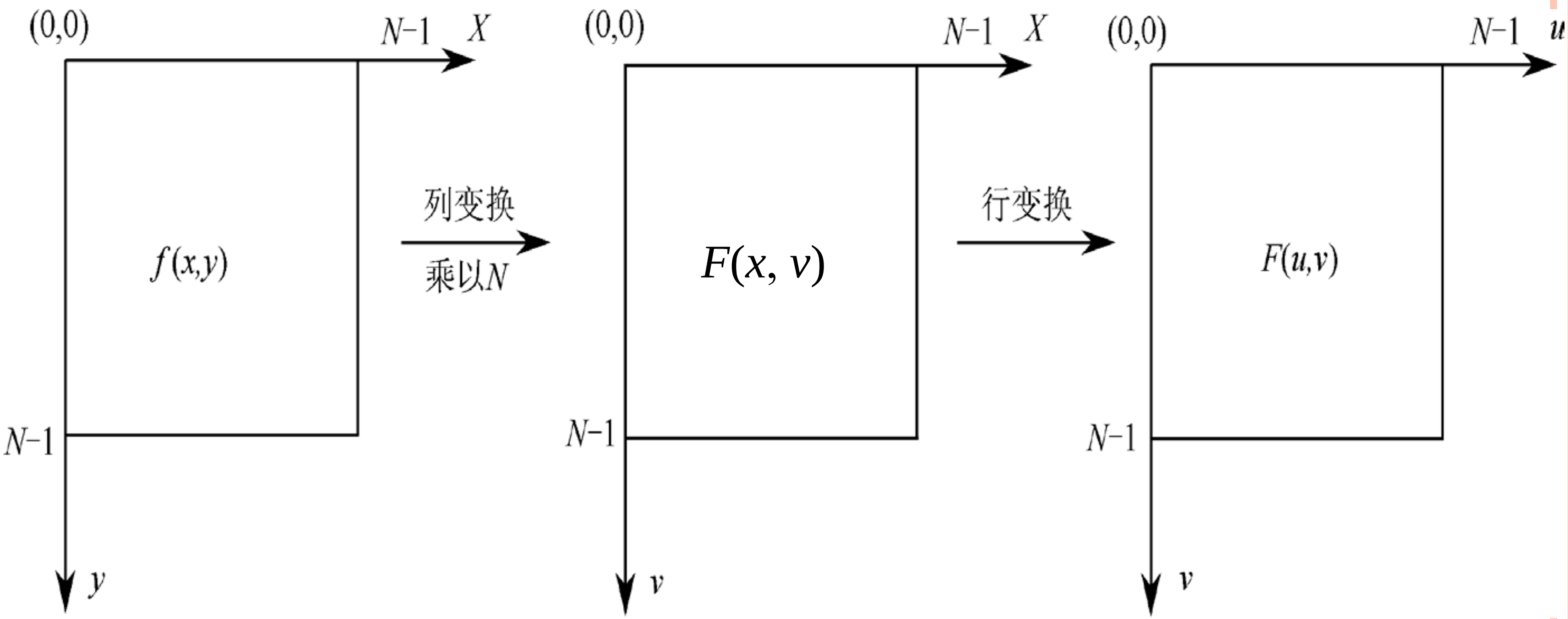
$$F(x,v)=N\left[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi vy/N}\right]\qquad v=0,1,\cdots,N-1$$

再对 $F(x,v)$ 每1行求傅里叶变换

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}F(x,v)e^{-\mathrm{j}2\pi ux/N}\qquad u,v=0,1,\cdots,N-1$$

4、 傅里叶变换的性质

(1) 可分离性 (Divisibility)



由2步1-D变换计算2-D变换

4、 傅里叶变换的性质

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux+vy)/N}$$

$$\boldsymbol{f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}e^{j2\pi ux/N}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi vy/N}}$$

4、傅里叶变换的性质

(2) 平移性质 (Translation)

$$f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(u_0x+v_0y)/N} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

$$\because \quad -1=e^{-j\pi} \qquad \therefore (-1)^{x+y}=e^{-j\pi(x+y)}$$

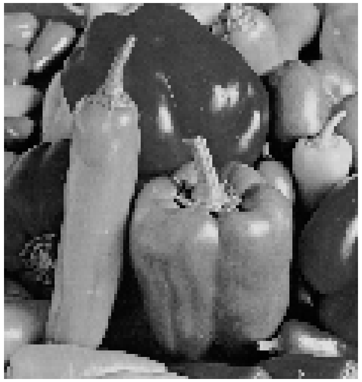
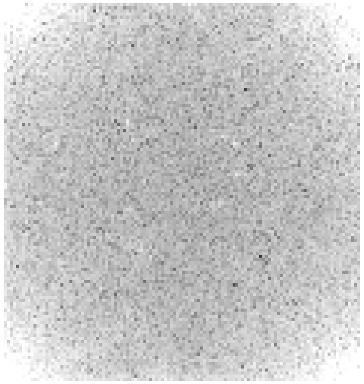
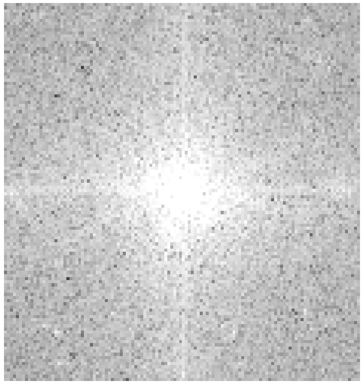
$f(x,y)$ 与一个指数相乘等于将变换后的频率域中心移到新的位置。

$$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux_0+vy_0)/N}$$

$f(x,y)$ 的平移将不改变频谱的幅值 (amplitude) 。

4、 傅里叶变换的性质

例：

4、 傅里叶变换的性质

```
I = imread('i_peppers_gray.bmp');
I = rgb2gray(I);
subplot(1,3,1);imshow(I)
K=fft2(I);
J = fftshift(K);
K1=0.5*log(1+abs(K));
J1=0.5*log(1+abs(J));
subplot(1,3,2);imshow(K1,[0,10])
subplot(1,3,3);imshow(J1,[0,10])
```

4、 傅里叶变换的性质

(3) 周期性和共轭对称性 (Periodicity and Conjugate Symmetry)

傅里叶变换和反变换均以 N为周期，即

$$F(u,v)=F(u+N,v)=F(u,v+N)=F(u+N,v+N)$$

上式表明，尽管$F(u,v)$有无穷多个u和v 的值重复出现，但只需根据在任一个周期里的N个值就可以从$F(u,v)$得到 $f(x,y)$。

4、 傅里叶变换的性质

如果$f(x,y)$是实函数，则它的傅里叶变换具有共轭对成性

$$\left|F(u,v)\right| = \left|F(-u,-v)\right|$$

$$F(u,v) = F^{*}(-u,-v)$$

4、 傅里叶变换的性质

(4) 旋转性质 (Rotation)

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$$

$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ $u = w\cos\phi$ $v = w\sin\phi$

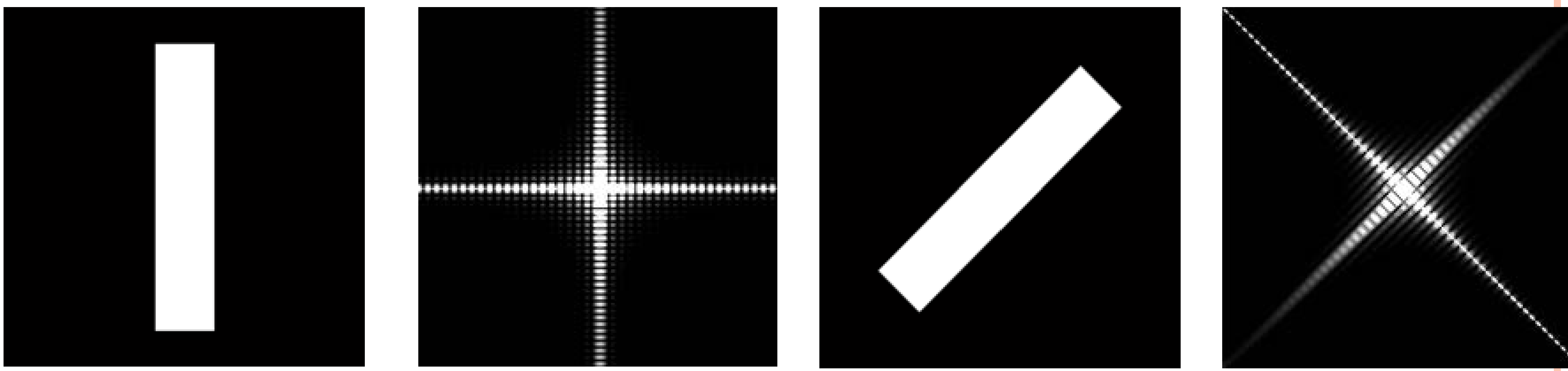
$$f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(w,\phi+\theta_0)$$

上式表明，对 $f(x,y)$ 旋转一个角度 θ_0

$F(u,v)$ 对应于将其傅里叶变换也旋转相同的角度 θ_0

4、 傅里叶变换的性质

- 例：二维离散傅立叶变换的旋转。



（a）原始图像　（b）原图像的傅里叶频谱　（c）旋转后的图像　（d）旋转后图像的傅里叶频谱

上例表明，对 $f(x,y)$ 旋转一个角度 θ_0 对应于将其傅里叶变换 $F(u,v)$ 也旋转相同的角度 θ_0。

```
I=zeros(256,256);I(28:228,108:148)=1;subplot(1,4,1);imshow(I)
%求原始图像的傅里叶频谱
J=fft2(I); F=abs(J);J1=fftshift(F);
subplot(1,4,2);imshow(J1,[5 50])
%对原始图像进行旋转
J=imrotate(I,315,'bilinear','crop');
subplot(1,4,3);imshow(J)
%求旋转后图像的傅里叶频谱
J1=fft2(J);F=abs(J1);J2=fftshift(F);
subplot(1,4,4);imshow(J2,[5 50])
```

4、 傅里叶变换的性质

(5) 分配律 (Distribution Law)

根据傅里叶变换对的定义可得到：

$$\Re\{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}=\Re\{f_1(x,y)\}+\Re\{f_2(x,y)\}$$

上式表明傅里叶变换和反变换对加法满足分配律，

但需注意对乘法则不满足，一般有：

$$\Re\{f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\}\neq\Re\{f_1(x,y)\}\cdot\Re\{f_2(x,y)\}$$

4、 傅里叶变换的性质

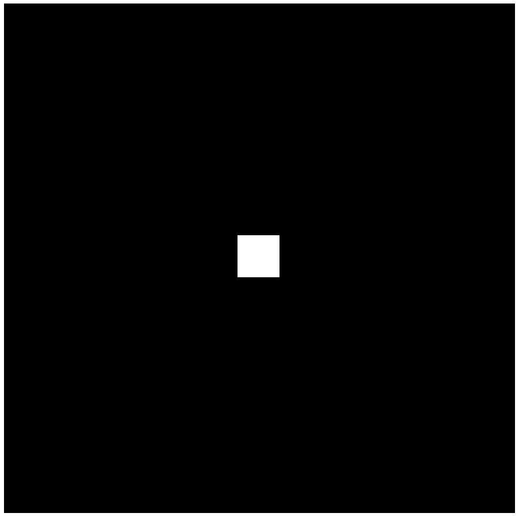
(6) 尺度变换 (Scaling)

$$af(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v)$$

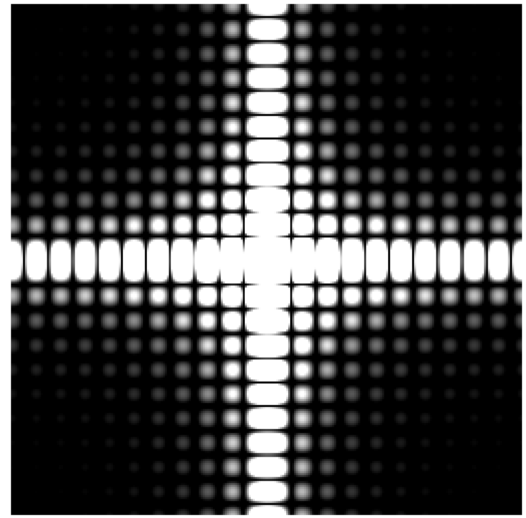
$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

4、 傅里叶变换的性质

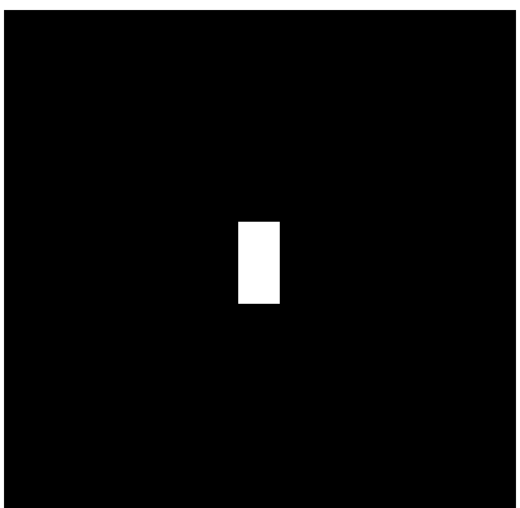
例：比例尺度展宽。



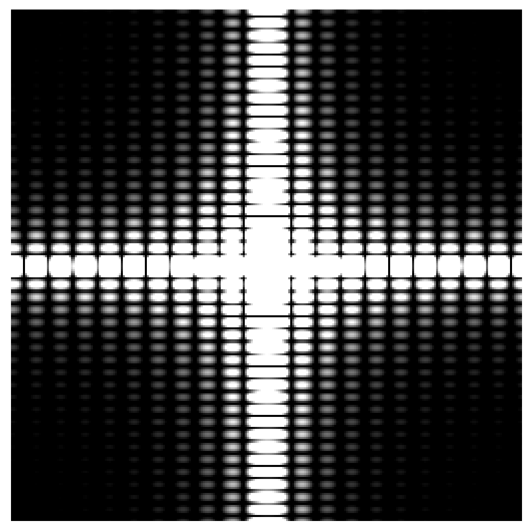
（a）原始图像



（b）比例尺度展宽前的频谱



（c）比例尺度 a=1， b=0.5，展宽后

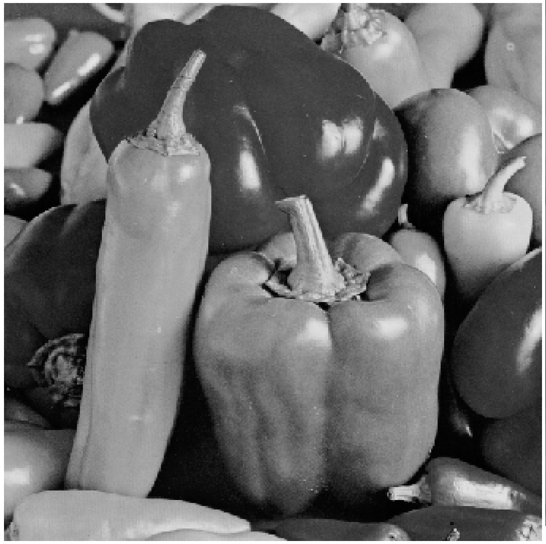


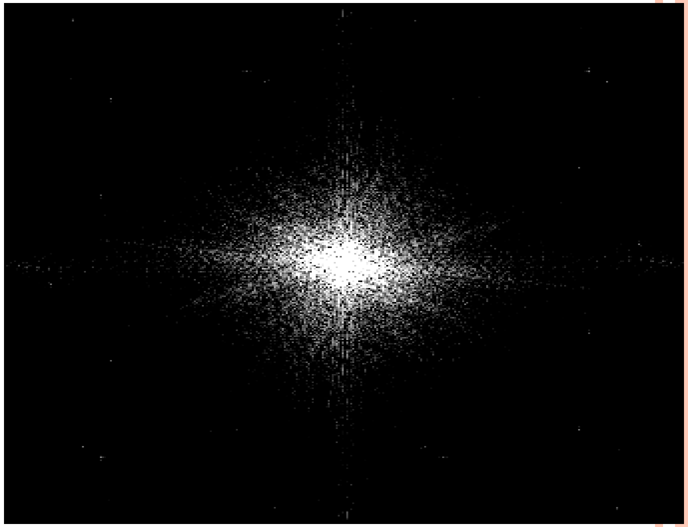
（d）比例尺度 a=1， b=0.5，展宽后的频谱

```
I=zeros(256,256);I(118:138,118:138)=5;
figure(1);imshow(I)
%原始图像的傅里叶频谱
J3=fft2(I);F2=abs(J3);J4=fftshift(F2);
figure(2);imshow(J4,[5 30])
%乘以比例尺度
I(108:148,118:138)=5;
%比例尺度展宽后的傅里叶频谱
J2=fft2(I);F1=abs(J2);J3=fftshift(F1);
figure(3);imshow(J3,[5 30])
figure(4);imshow(I)
```

4、 傅里叶变换的性质

例：





4、 傅里叶变换的性质

```
I=imread('i_peppers_gray.bmp');
figure(1);imshow(I)
I = rgb2gray(I);%如果是灰度图就不用先变换
P=I*exp(-1);
figure(2);imshow(P)
P1=fftshift(fft2(P));
figure(3);imshow(log(abs(P1)),[8,10])
```

4、 傅里叶变换的性质

(7) 平均值 (Average Value)

对一个2-D离散函数，其平均值可用下式表示：

$$\bar{f}(x,y)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

当正反变换采用相同的标度数 $1/N$ 时，傅里叶变换

域原点的频谱分量为：

$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j\frac{2\pi}{N}(x\cdot 0+y\cdot 0)}=N\left[\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\right]$$

$$=N\,\bar{f}(x,y)$$

4、 傅里叶变换的性质

两式比较可得：

$$\bar{f}(x,y)=\frac{1}{N}F(0,0)$$

也就是说，频谱的直流成分 N 倍于图像平面的亮度平均值。在使用诸如高通滤波器的场合，其 $F(0,0)$ 值会衰减，因为图像的亮度在很大程度上受到影响，采用对比度拉伸的方法可以缓和这种衰减。

4、 傅里叶变换的性质

(8) 卷积定理(Convolution Theorem)

卷积定理是线性系统分析中最重要的一条定理。

下面先考虑一维傅里叶变换：

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)dz \Leftrightarrow F(u)G(u)$$

同样二维情况也是如此

$$f(x,y)*g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$$

4、 傅里叶变换的性质

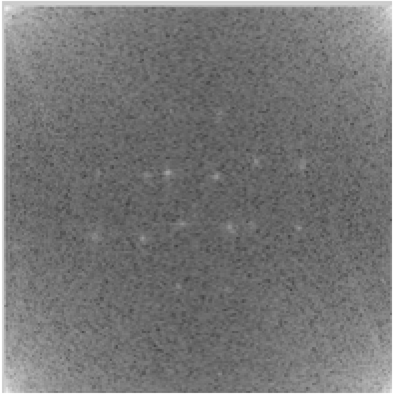
例：

```
f=[8,1,6;3,5,7;4,9,2];
g=[1,1,1;1,1,1;1,1,1];
f(8,8)=0;    g(8,8)=0;
c=ifft2(fft2(f).*fft2(g));
c1=c(1:5,1:5)
 %利用conv2(二维卷积函数)校验
a=[8,1,6;3,5,7;4,9,2];
b=[1,1,1;1,1,1;1,1,1];
c2=conv2(a,b)
```

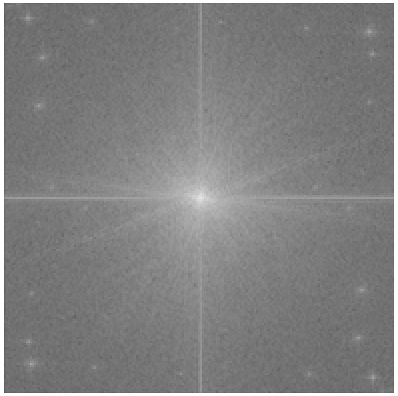
5、 图像傅里叶变换实例

例1：对一副图进行傅里叶变换，求出其频谱图，然后利用平移性质，在原图的基础上乘以 $(-1)^{x+y}$ 求傅里叶变换的频谱图。

（a）原图



（b）频谱图



（c）中心移到零点的频谱图

图3 二维离散傅里叶变换结果中频率成分分布示意图

5、 图像傅里叶变换实例

图3（a）为原图，对其求傅里叶变换得到图（b）傅里叶变换的频谱图，观察频谱图可知，在未平移前，图（b）坐标原点在窗口的左上角，即变换后的直流成分位于左上角，而窗口的四角分布低频成分。对原图乘以$(-1)^{x+y}$后进行傅里叶变换，观察频谱图（c）可知，变换后的坐标原点移至频谱图窗口中央，因而围绕坐标原点是低频，向外是高频。

5、 图像傅里叶变换实例

通过上可知，图像的能量主要集中在低频区，即图像的中央位置，而相对的高频区（左上、右上、左下、右下四个角）的幅值很小或接近于0。以后傅里叶变换都进行相似平移处理，将不再重复叙述。

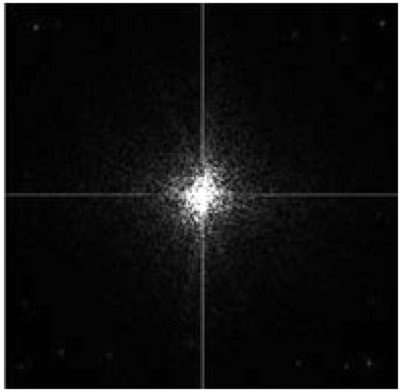
例程：

```
clear all;
I=imread('i_peppers_gray.bmp');
figure(1);imshow(I);
fftI=fft2(I);
sfftI=0.5*log(abs(fftI)+1);
figure(1);imshow(sfftI,[3,6]);
for i=1:195
    for j=1:195
        II(i,j)=I(i,j)*(-1)^(i+j);
    end
end
fftII=fft2(II);
sfftII=0.5*log(abs(fftII)+1);
figure(2);imshow(sfftII,[3,6]);
```

5、 图像傅里叶变换实例

- 例2：图3 乘以一指数，将图像亮度整体变暗，并求其中心移到零点的频谱图。

（a）变暗后的图



（b）变暗后中心移到零点的频谱图

图4 二维离散傅里叶变换结果中频率成分分布示意图

5、 图像傅里叶变换实例

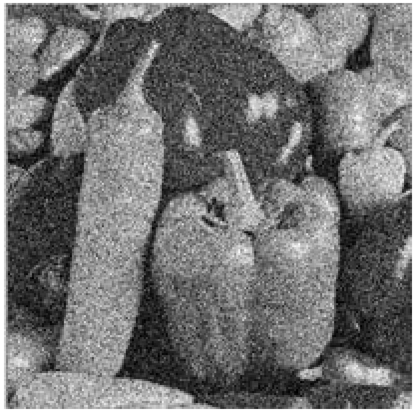
将原图3函数乘以e^{-1}，结果如图4（a）所示。对其亮度平均变暗后的图像进行傅里叶变换，并将坐标原点移到频谱图中央位置，结果如图4（b）所示。对比图3（c）和4（b）后，可以看出当图片亮度变暗后，中央低频成分变小。故从中可知，中央低频成分代表了图片的平均亮度，当图片亮度平均值发生变化时，对应的频谱图中央的低频成分也发生改变。

例程：

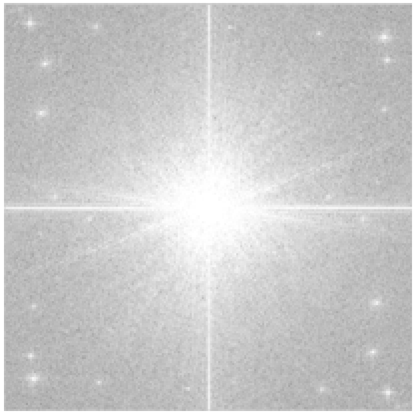
```
clear all;
I=imread('i_peppers_gray.bmp');
figure(1);imshow(I);
sfftI=fftshift(fft2(I));
figure(1);imshow(log(abs(sfftI)),[5,12]);
for i=1:195
    for j=1:195
        II(i,j)=I(i,j)*exp(-1);
    end
end
sfftII=fftshift(fft2(II));
figure(2);imshow(log(abs(sfftII)),[5,12]);
```

5、 图像傅里叶变换实例

- 例3：图3加入高斯噪声，得出一个有颗粒噪音的图，并求其中心移到零点的频谱图 。



（a）有颗粒噪音



（b）有颗粒噪音中心移到零点的频谱图

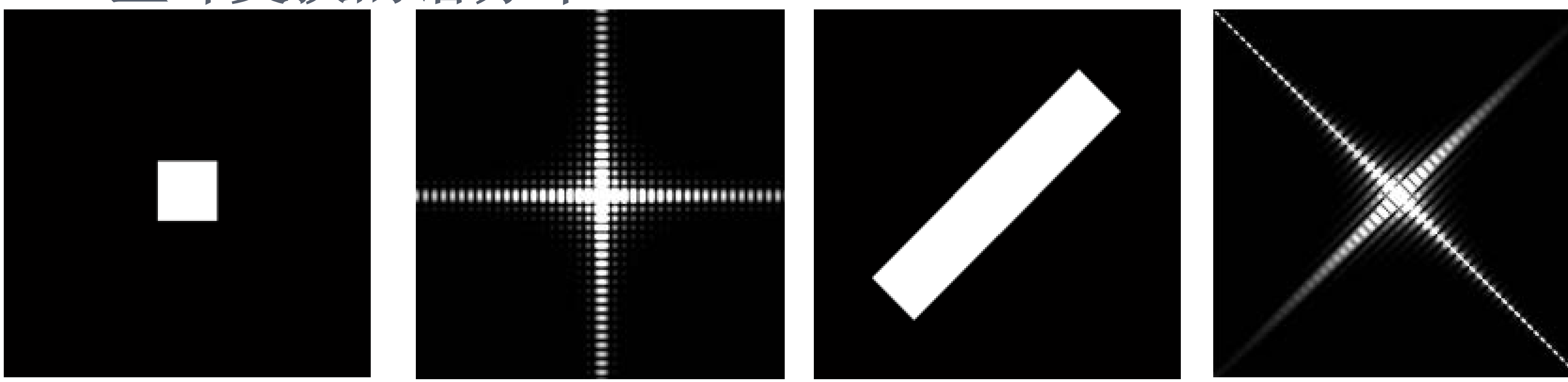
图5 二维离散傅里叶变换结果中频率成分分布示意图

```
clear all;
I=imread('i_peppers_gray.bmp');
figure(1);imshow(I);
distI=imnoise(I,'gaussian',0,200^2/255^2);
figure(2);imshow(distI);
sfftI=fftshift(fft2(I));
figure(3);imshow(log(abs(sfftI)),[5,12]);

sfftII=fftshift(fft2(distI));
figure(4);imshow(log(abs(sfftII)),[5,12]);
```

5、 图像傅里叶变换实例

- 例：对中心为一小正方形和以斜长方形求其傅里叶变换的谱分布。



（a）正方形原图 （b）正方形的谱分布 （c）长方形的原始图像 （d）长方形的谱分布

图6 傅氏变换谱分布实例

5、 图像傅里叶变换实例

图6示出两幅图像经傅氏变换后的频谱分布例子。左边均为原始图像，右边分别是他们变换后的谱分布。图（a）是中心为一小正方形，周边为空；图(c)是中心为斜置的小矩形。谱分布中，最亮区域表示其变换后的幅值最大。对（c）傅里叶变换后中心移到零点后的结果，我们可以发现当长方形旋转了**45**°时，频谱也跟着旋转**45**°，此实例验证了傅里叶变换的旋转性。

```
clear all;
I=zeros(255,255);
I(118:138,118:138)=1;
figure(1);imshow(I);
distI=zeros(255,255);
for i=114:128
    for j=(128-(i-114)):(128+(i-114))
        distI(i,j)=1;
    end
end
```

- 未完，见下页

```
for m=142:-1:129
    for n=(m-14):(270-m)
        distI(m,n)=1;
    end
end
figure(2);imshow(distI);
sfftI=fftshift(fft2(I));
figure(3);imshow(log(abs(sfftI)),[0,5]);

sfftII=fftshift(fft2(distI));
figure(4);imshow(log(abs(sfftII)),[0,5]);
```

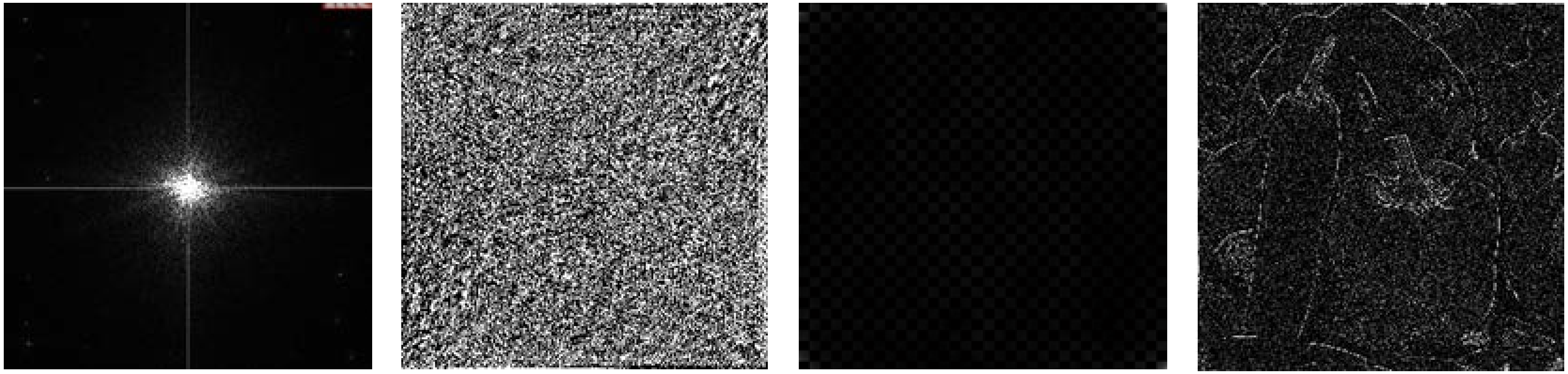
5、 图像傅里叶变换实例

- 例:对一副图片如图7（a）求其幅值谱和相位谱，并对幅值谱和相位谱分别进行图像重构，对比其所求结果。

（a）原图

图7

5、 图像傅里叶变换实例



（b）幅值谱 （c）相位谱 （d）幅值谱重构图像（e）相位谱重构图像

图7 傅里叶图像及其傅里叶变换

```
clear all;
I=imread('i_peppers_gray.bmp');
figure(1);imshow(I);
fftI=fft2(I);
sfftI=fftshift(fftI);
RRfdp1=real(sfftI);
IIfdp1=imag(sfftI);
a=sqrt(RRfdp1.^2+IIfdp1.^2);    %a为幅度
a=(a-min(min(a)))/(max(max(a))-min(min(a)))*225;    %将a对应到0-255
figure(2);imshow(real(a));
b=angle(fftI);figure(3);imshow(real(b));  %显示相位
theta=30;RR1=a*cos(theta);II1=a*sin(theta);
fftI1=RR1+i.*II1;C=ifft2(fftI1)*255;   %重构幅度
figure(4);imshow(real(C));
MM=150;RR2=MM*cos(angle(fftI));II2=MM*sin(angle(fftI));
fftI2=RR2+i.*II2;D=ifft2(fftI2);       %重构相位
figure(5);imshow(real(D));
```

5、 图像傅里叶变换实例

对图7（a）进行离散傅里叶变换，得出幅值谱图（b），相位谱图（d）及幅值谱重构图像图（c），相位谱重构图像图（e）。从实验结果可以看出，从幅值谱图像中得到的信息比在相位谱图像中得到的信息多，但对幅值谱图像重构后，即忽略相位信息，将其设为0，所得到的图像与原始图像相比，结果差别很大；而对相位谱图像重构后，及忽略幅值信息，将其设为常数，可以从中看出图像的基本轮廓来。

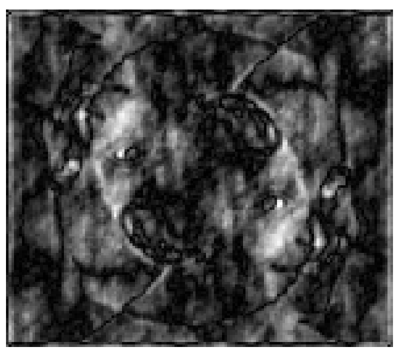
5、 图像傅里叶变换实例

例：

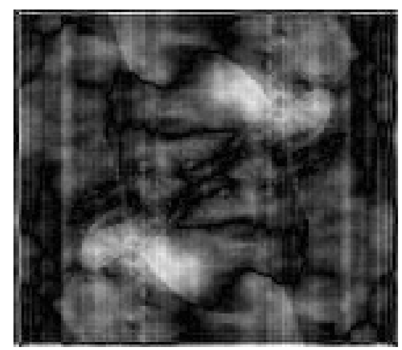
男孩原图像

美女原图像

男孩的幅度谱和美女的相位谱组合



美女的幅度谱和男孩的相位谱组合



```
I1=imread('lena2.jpg');
J1=imread('boy1.jpg');
J1= rgb2gray(J1);%如果是灰度图就不用先变换
I1= rgb2gray(I1);%如果是灰度图就不用先变换
If = fft2(I1);Jf = fft2(J1);
% 分别求幅度谱和相位谱
FAi = abs(If);FPi = angle(If);
FAj = abs(Jf);FPj = angle(Jf);
% 交换相位谱并重建复数矩阵
IR = FAi .* cos(FPj) + FAi.* sin(FPj) .* i;
JR = FAj .* cos(FPi) + FAj.* sin(FPi) .* i;
% 傅立叶反变换
IR1= abs(ifft2(IR));JR1= abs(ifft2(JR));
% 显示图像
subplot(2,2,1);imshow(J1);
title('男孩原图像');subplot(2,2,2);
imshow(I1);title('美女原图像');
subplot(2,2,3);imshow(IR1, []);
title('男孩的幅度谱和美女的相位谱组合');
subplot(2,2,4);imshow(JR1, []);
title('美女的幅度谱和男孩的相位谱组合');
```

3.4 离散余弦变换

一维离散余弦变换的定义由下式表示

$$F(0)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)$$

$$F(u)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

式中$F(u)$是第u个余弦变换系数，u是广义频率变量， $u=1,2,3,\ldots,N;-1$

$f(x)$ 是时域N 点实序列.

3.4 离散余弦变换

一维离散余弦反变换由下式表示

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{N}}F(0)+\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{u=1}^{N-1}F(u)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

3.4 离散余弦变换

由一维离散余弦变换（*1-D DCT*）可以很容易推广到二维余弦离散变换，由下式表示：

$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

$$F(0,v)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

3.4 离散余弦变换

$$F(u,0)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

$$F(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

3.4 离散余弦变换

上式是正变换公式。其中 $f(x,y)$是空间域二维向量之元素。$x,y=0,1,2,\ldots,N-1$，$F(u,v)$ 是变换系数阵列之元素。式中表示的阵列为 $N\times N$

二维离散余弦反变换由下式表示:

$$f(x,y)=\frac{1}{N}F(0,0)+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{v=1}^{N-1}F(0,v)\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{u=1}^{N-1}F(u,0)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{u=1}^{N-1}\sum_{v=1}^{N-1}F(u,v)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cdot\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

3.4 离散余弦变换

式中的符号意义同正变换式一样。上式是离散余弦变换的解析式定义。更为简洁的定义方法是采用矩阵式定义，则一维离散余弦变换的矩阵定义式可写成如下形式

$$[F(u)] = [A][f(x)]$$

同理，可得到反变换展开式

$$[f(x)] = [A]'[F(u)]$$

3.4 离散余弦变换

类似地，二维离散余弦变换也可以写成矩阵式

$$[F(u,v)] = [A][f(x,y)][A]'$$

$$[f(x,y)] = [A]'[F(u,v)][A]$$

3.4 离散余弦变换

式中 $[f(x,y)]$ 是空间域数据阵列，$[F(u,v)]$ 是变换系数阵列，$[A]$ 是系数阵列，变换矩阵 $[A]'$ 是 $[A]$ 的转置。

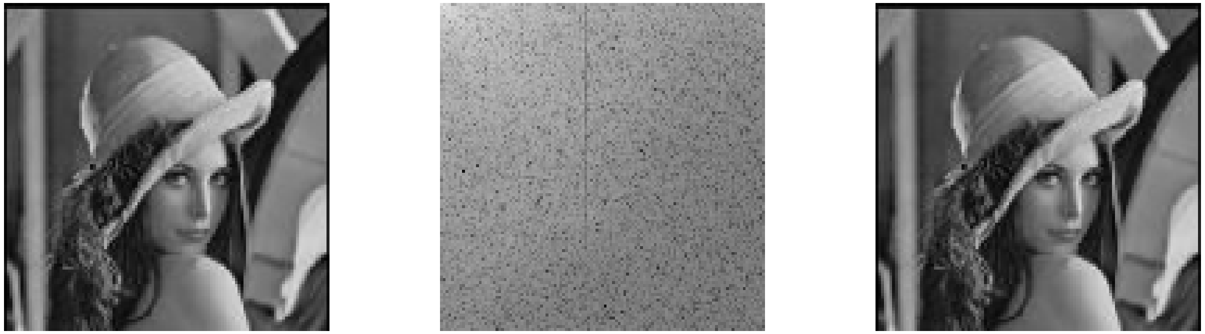
- 例:说明二维余弦正反变换在*Matlab*中的实现。

3.4 离散余弦变换

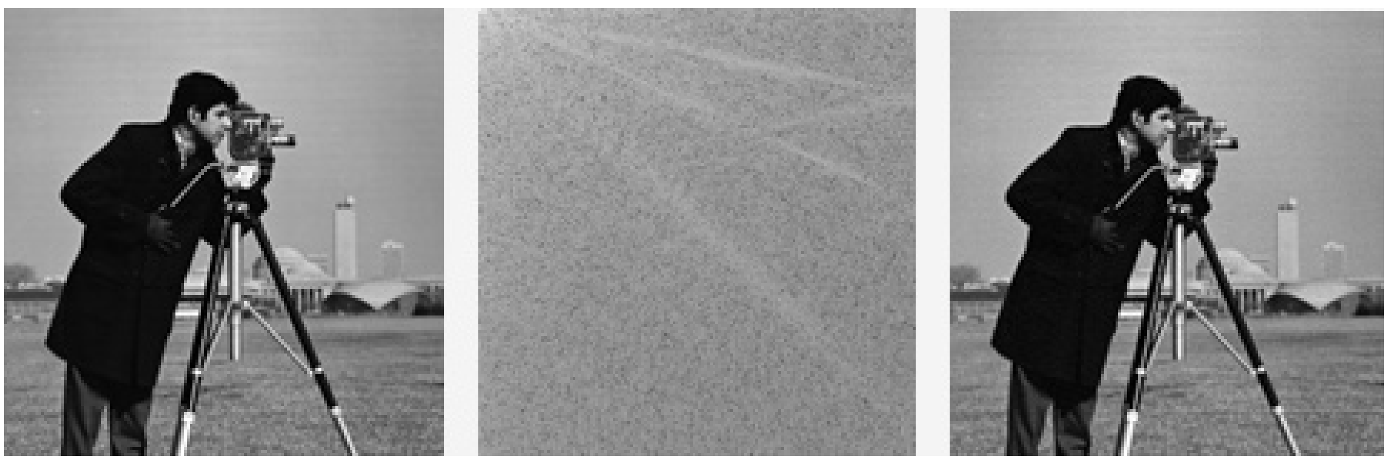
例：

```
RGB=imread('lena2.jpg');
figure(1);subplot(131);imshow(RGB);
I=rgb2gray(RGB);
J=dct2(I);
figure(1),subplot(132);imshow(log(abs(J)),[]); %余弦变换
K=idct2(J)/255;%余弦反变换
figure(1),subplot(133);imshow(K);
```

3.4 离散余弦变换



3.4 离散余弦变换



（a）原始图像　　　　（b）余弦变换系数 （c）余弦反变换恢复图像

图1　二维离散余弦变换

3.4 离散余弦变换

由图4.13(b)可知，离散余弦变换具有很强的“能量集中”特性，能量主要集中在左角处，因此在实际图像应用中,能量不集中的地方可在余弦编码中忽略,可通过对mask矩阵变换来实现，即将mask矩阵左上角置1，其余全部置0。然后通过离散余弦反变换后，图像得到恢复，图(c)恢复图像与图(a)原始图像基本相同。

3.4 离散余弦变换

- 例：用DCT变换作图象压缩的例子，求经压缩解压后的图象，结果如图4.14所示。

（a）原始图像

（b）压缩解压后的图像

图4.14 原始图像及其经压缩，解压缩后的图像

3.4 离散余弦变换

```
I=imread('lena2_1.jpg');
[M,N]=size(I);%M=512,N=512
figure(1);subplot(1,2,1);imshow(I);title('原始图像');
I=im2double(I);

%生成标准DCT变化中的矩阵（8×8），
 n=8;[cc,rr] = meshgrid(0:n-1);
C= sqrt(2 / n) * cos(pi * (2*cc + 1) .* rr / (2 * n));
C(1,:) =C(1,:) / sqrt(2);
%光亮度量化表
a =[16 11 10 16 24  40  51  61;
    12 12 14 19 26  58  60  55;
    14 13 16 24 40  57  69  56;
    14 17 22 29 51  87  80  62;
    18 22 37 56 68  109 103 77;
    24 35 55 64 81  104 113 92;
    49 64 78 87 103 121 120 101;
    72 92 95 98 112 100 103 99 ];
```

3.4 离散余弦变换

```
%分块做DCT变换（8×8）,DCT变换公式: 正变换:Y=CIC';
for i=1:8:M
    for j=1:8:N
        P=I(i:i+7,j:j+7);
        K=C*P*C';
        I1(i:i+7,j:j+7)=K;
        K=K./a;%量化
        K(abs(K)<0.03)=0;
        I2(i:i+7,j:j+7)=K;
    end
end
figure(1);subplot(1,2,2);imshow(I1);title('DCT变换后的频域图像');
figure(2);subplot(1,2,1);imshow(I2);title('量化后的频域图像');
%分块做DCT反变换（8×8）, 逆变换:P=C'YC;
for i=1:8:M
    for j=1:8:N
        P=I2(i:i+7,j:j+7).*a;%反量化
        K=C'*P*C;
        I3(i:i+7,j:j+7)=K;
    end
end
figure(2);subplot(1,2,2);imshow(I3);title('复原图像');
```

3.4 离散余弦变换

原始图像

DCT 变换后的频

量化后的频域图像

复原图像

小结（CHAPTER SUMMARY）

本章主要介绍了数字图像处理中常见的几种变换，首先介绍了傅里叶变换，离散傅里叶变换，快速傅里叶变换的概念，性质和实际应用。其次还介绍了几种离散变换，有离散余弦变换等。

图像的傅里叶变换是使用最广泛的一种变换，在图像处理中起着关键的作用，也是理解其它变换的基础, 可广泛地用于图像特征提取、图像增强等方面。

小结（Chapter Summary）

在图像增强方面虽有着广泛的应用，但由于运算过程中涉及到复数运算，所以在实时系统中很难使用；而离散余弦变换在图像压缩算法中获得了广泛的应用。把傅里叶变换的理论同其物理解释相结合，将有助于解决大多数图像处理问题。

Thank You !