《误差理论与数据处理》

第一章 绪论

1-1．研究误差的意义是什么？简述误差理论的主要内容。

答： 研究误差的意义为：

(1)正确认识误差的性质，分析误差产生的原因，以消除或减小误差；

(2)正确处理测量和实验数据，合理计算所得结果，以便在一定条件下得到更接近于真值的数据；

(3)正确组织实验过程，合理设计仪器或选用仪器和测量方法，以便在最经济条件下，得到理想的结果。

误差理论的主要内容：误差定义、误差来源及误差分类等。

1-2．试述测量误差的定义及分类，不同种类误差的特点是什么？

答：测量误差就是测的值与被测量的真值之间的差；按照误差的特点和性质，可分为系统误差、随机误差、粗大误差。

系统误差的特点是在所处测量条件下，误差的绝对值和符号保持恒定，或遵循一定的规律变化（大小和符号都按一定规律变化）；

随机误差的特点是在所处测量条件下，误差的绝对值和符号以不可预定方式变化；

粗大误差的特点是可取性。

1-3．试述误差的绝对值和绝对误差有何异同，并举例说明。

答：(1)误差的绝对值都是正数，只是说实际尺寸和标准尺寸差别的大小数量，不反映是“大了”还是“小了”，只是差别量；

绝对误差即可能是正值也可能是负值，指的是实际尺寸和标准尺寸的差值。+多少表明大了多少，-多少表示小了多少。

(2)就测量而言,前者是指系统的误差未定但标准值确定的，后者是指系统本身标准值未定

1－5 测得某三角块的三个角度之和为180°00’02”,试求测量的绝对误差和相对误差

解：

绝对误差等于：$180^o00'02''-180^o=2''$

相对误差等于：

$$\frac{2''}{180^o}=\frac{2''}{180\times60\times60''}=\frac{2''}{648000''}=0.00000308641\approx0.000031\%$$

1-6．在万能测长仪上，测量某一被测件的长度为 50mm，已知其最大绝对误差为 1μm，试问该被测件的真实长度为多少？

解： 绝对误差＝测得值－真值，即： $\triangle L=L-L_0$ 已知：L＝50，△L＝1μm＝0.001mm，

测件的真实长度 $L_0=L-\triangle L=50-0.001=49.999$（mm）

1-7.用二等标准活塞压力计测量某压力得 100.2Pa,该压力用更准确的办法测得为100.5Pa,问二等标准活塞压力计测量值的误差为多少？

解：在实际检定中，常把高一等级精度的仪器所测得的量值当作实际值。

故二等标准活塞压力计测量值的误差＝测得值－实际值，

即：

100.2－100.5＝－0.3（ Pa）

1-8 在测量某一长度时，读数值为 2.31m，其最大绝对误差为 20 μm，试求其最大相对误差。

$$相对误差\max = \frac{绝对误差\max}{测得值} \times 100\%$$

$$= \frac{20 \times 10^{-6}}{2.31} \times 100\%$$

$$= 8.66 \times 10^{-4}\%$$

1-9、解：

由 $g = \frac{4\pi^2 (h_1 + h_2)}{T^2}$，得

$$g = \frac{4\pi^2 \times 1.04230}{2.0480} = 9.81053\text{m/s}^2$$

对 $g = \frac{4\pi^2 (h_1 + h_2)}{T^2}$ 进行全微分，令 $h = h_1 + h_2$，并令 $\vartriangle g$，$\vartriangle h$，$\vartriangle T$ 代替 dg，dh，dT 得

$$\vartriangle g = \frac{4\pi^2 \vartriangle h}{T^2} - \frac{8\pi^2 h \vartriangle T}{T^3}$$

从而 $\frac{\vartriangle g}{g} = \frac{\vartriangle h}{h} - 2\frac{\vartriangle T}{T}$ 的最大相对误差为：

$$\frac{\vartriangle g_{\max}}{g} = \frac{\vartriangle h_{\max}}{h} - 2\frac{\vartriangle T_{\max}}{T}$$

$$= \frac{0.00005}{1.04230} - 2 \times \frac{-0.0005}{2.0480}$$

$$=5.3625 \times 10^{-4}\%$$

由 $g = \frac{4\pi^2 (h_1 + h_2)}{T^2}$，得 $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 h}{g}}$，所以

$$T = \sqrt{\frac{4 \times 3.14159^2 \times 1.04220}{9.81053}} = 2.04790$$

由 $\frac{\vartriangle g_{\max}}{g} = \frac{\vartriangle h_{\max}}{h} - 2\frac{\vartriangle T_{\max}}{T}$，有 $\vartriangle T_{\max} = \max\{ABS[\frac{T}{2}(\frac{\vartriangle h_{\max}}{h} - \frac{\vartriangle g_{\min}}{g})], ABS[\frac{T}{2}(\frac{\vartriangle h_{\min}}{h} - \frac{\vartriangle g_{\max}}{g})]\}$

1-10 检定 2.5 级（即引用误差为 2.5%）的全量程为 100V 的电压表，发现 50V 刻度点的示值误差 2V 为最大误差，问该电压表是否合格？

$$最大引用误差 = \frac{某量程最大示值误差}{测量范围上限} \times 100\%$$

$$= \frac{2}{100} \times 100\% = 2\% < 2.5\%$$

该电压表合格

1-11 为什么在使用微安表等各种表时，总希望指针在全量程的 2/3

范围内使用？

答：当我们进行测量时，测量的最大相对误差：

$$\frac{\triangle \mathbf{x}_{\max}}{A_0} = \frac{\mathbf{x}_m}{A_0} s\% \quad 即: \quad \gamma_{\max} = \frac{\mathbf{x}_m}{A_0} s\%$$

所以当真值一定的情况下，所选用的仪表的量程越小，相对误差越小，测量越准确。因此我们选择的量程应靠近真值，所以在测量时应尽量使指针靠近满度范围的三分之二以上.

1-12 用两种方法分别测量 L1=50mm，L2=80mm。测得值各为 50.004mm，80.006mm。试评定两种方法测量精度的高低。

相对误差

L_1:50mm $$I_1=\frac{50.004-50}{50}\times100\%=0.008\%$$

L_2:80mm $$I_2=\frac{80.006-80}{80}\times100\%=0.0075\%$$

$I_1>I_2$ 所以 L_2=80mm 方法测量精度高。

1－13 多级弹导火箭的射程为 10000km 时，其射击偏离预定点不超过 0.1km，优秀射手能在距离 50m 远处准确地射中直径为 2cm 的靶心，试评述哪一个射击精度高?

解：

多级火箭的相对误差为：
$$\frac{0.1}{10000}=0.00001=0.001\%$$

射手的相对误差为：
$$\frac{1cm}{50m}=\frac{0.01m}{50m}=0.0002=0.02\%$$

多级火箭的射击精度高。

1-14 若用两种测量方法测量某零件的长度 L1=110mm，其测量误差分别为 $\pm11\mu m$ 和 $\pm9\mu m$；而用第三种测量方法测量另一零件的长度 L2=150mm。其测量误差为 $\pm12\mu m$，试比较三种测量方法精度的高低。

相对误差

$$I_1=\pm\frac{11\mu m}{110mm}=\pm0.01\%$$

$$I_2=\pm\frac{9\mu m}{110mm}=\pm0.0082\%$$

$$I_3=\pm\frac{12\mu m}{150mm}=\pm0.008\%$$

$I_3<I_2<I_1$ 第三种方法的测量精度最高

第二章 误差的基本性质与处理

2-1．试述标准差 、平均误差和或然误差的几何意义。

答：从几何学的角度出发，标准差可以理解为一个从 N 维空间的一个点到一条直线的距离的函数；

从几何学的角度出发，平均误差可以理解为 N 条线段的平均长度；

2-2．试述单次测量的标准差 和算术平均值的标准差 ，两者物理意义及实际用途有何不同。

2-3 试分析求服从正态分布、反正弦分布、均匀分布误差落在中的概率

2-4．测量某物体重量共 8 次，测的数据(单位为 g)为 236.45，236.37，236.51，236.34，236.39，236.48，236.47，236.40，是求算术平均值以及标准差。

$$\bar{x}=236.4+\frac{0.05+(-0.03)+0.11+(-0.06)+(-0.01)+0.08+0.07+0}{8}$$

$$=236.43$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}{v_i}^2}{n-1}}=0.0599$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.0212$$

2-5 用别捷尔斯法、极差法和最大误差法计算 2-4，并比较

2-6 测量某电路电流共 5 次，测得数据（单位为 mA）为 168.41，168.54，168.59，168.40，168.50。试求算术平均值及其标准差、或然误差和平均误差。

$$\bar{x}=\frac{168.41+168.54+168.59+168.40+168.50}{5}$$

$$=168.488(mA)$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}{v_i}^2}{5-1}}=0.082(mA)$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0.082}{\sqrt{5}}=0.037(mA)$$

或然误差：$R=0.6745\sigma_{\bar{x}}=0.6745\times0.037=0.025(mA)$

平均误差：$T=0.7979\sigma_{\bar{x}}=0.7979\times0.037=0.030(mA)$

2-7 在立式测长仪上测量某校对量具，重量测量 5 次，测得数据（单位为 mm）为 20.0015，20.0016，20.0018，20.0015，20.0011。若测量值服从正态分布，试以 99%的置信概率确定测量结果。$\bar{x}=\frac{20.0015+20.0016+20.0018+20.0015+20.0011}{5}$

$$=20.0015(mm)$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}{v_i}^2}{5-1}}=0.00025$$

正态分布　　p=99%时，$\mathrm{t}=2.58$

$$\delta_{\lim \bar{x}}=\pm t\sigma_{\bar{x}}$$

$$=\pm 2.58\times\frac{0.00025}{\sqrt{5}}$$

$$=\pm 0.0003(mm)$$

测量结果：$X=\bar{x}+\delta_{\lim \bar{x}}=(20.0015\pm 0.0003)mm$

2—7 在立式测长仪上测量某校对量具，重复测量 5 次，测得数据(单位为 mm)为 20．0015，20.0016，20.0018，20.0015，20.0011。若测量值服从正态分布，试以 99％的置信概率确定测量结果。

解：

求算术平均值

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{n}=20.0015mm$$

求单次测量的标准差

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{26\times 10^{-8}}{4}}=2.55\times 10^{-4}mm$$

求算术平均值的标准差

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2.55\times 10^{-4}}{\sqrt{5}}=1.14\times 10^{-4}mm$$

确定测量的极限误差

因 n＝5 较小，算术平均值的极限误差应按 t 分布处理。

现自由度为：ν＝n－1＝4；　　α＝1－0.99＝0.01，

查 t 分布表有：$t\alpha$＝4.60

极限误差为

$$\delta_{\lim}\bar{x}=\pm t_{\alpha}\sigma_{\bar{x}}=\pm 4.60\times 1.14\times 10^{-4}=5.24\times 10^{-4}mm$$

写出最后测量结果　$L=\bar{x}+\delta_{\lim}\bar{x}=\left(20.0015\pm 5.24\times 10^{-4}\right)mm$

2-9 用某仪器测量工件尺寸，在排除系统误差的条件下，其标准差$\sigma=0.004mm$，若要求测量结果的置信限为$\pm 0.005mm$，当置信概率为 99%时，试求必要的测量次数。

正态分布　　p=99%时，$\mathrm{t}=2.58$

$$\delta_{\lim \bar{x}}=\pm t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n}=\frac{2.58\times 0.004}{0.005}=2.064$$

$$n=4.26$$

取　$n=5$

2－10 用某仪器测量工件尺寸，已知该仪器的标准差σ＝0.001mm，若要求测量的允许极限误差为±0.0015mm，而置信概率P为0.95时，应测量多少次？

解：根据极限误差的意义，有

$$\pm t\sigma_{\bar{x}} = \pm t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0.0015$$

根据题目给定得已知条件，有

$$\frac{t}{\sqrt{n}} \le \frac{0.0015}{0.001} = 1.5$$

查教材附录表3有

若n＝5，v＝4，α＝0.05，有t＝2.78，

$$\frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{2.78}{\sqrt{5}} = \frac{2.78}{2.236} = 1.24$$

若n＝4，v＝3，α＝0.05，有t＝3.18，

$$\frac{t}{\sqrt{n}} = \frac{3.18}{\sqrt{4}} = \frac{3.18}{2} = 1.59$$

即要达题意要求，必须至少测量5次。

2-12 某时某地由气压表得到的读数（单位为Pa）为102523.85，102391.30，102257.97，102124.65，101991.33，101858.01，101724.69，101591.36，其权各为1，3，5，7，8，6，4，2，试求加权算术平均值及其标准差。

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{8} p_i} = 102028.34(Pa)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} p_i v_{xi}^{\ 2}}{(8-1)\sum_{i=1}^{8} p_i}} \approx 86.95(Pa)$$

2-13 测量某角度共两次，测得值为$\alpha_1 = 24^\circ13'36''$，$\alpha_2 = 24^\circ13'24''$，其标准差分别为$\sigma_1 = 3.1'', \sigma_2 = 13.8''$，试求加权算术平均值及其标准差。

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{\sigma_1^{\ 2}} : \frac{1}{\sigma_2^{\ 2}} = 19044 : 961$$

$$\bar{x} = 24^\circ 13'20'' + \frac{19044 \times 16'' + 961 \times 4''}{19044 + 961} = 24^\circ13'35''$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\sigma_{\bar{x}_i}\sqrt{\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{2}p_i}}=3.1''\times\sqrt{\frac{19044}{19044+961}}\approx 3.0''$$

2-14　甲、乙两测量者用正弦尺对一锥体的锥角α各重复测量5次，测得值如下：

$$\alpha_{甲}:7^\circ2'20'',7^\circ3'0'',7^\circ2'35'',7^\circ2'20'',7^\circ2'15'';$$

$$\alpha_{乙}:7^\circ2'25'',7^\circ2'25'',7^\circ2'20'',7^\circ2'50'',7^\circ2'45'';$$

试求其测量结果。

甲：$\bar{x}_{甲}=7^\circ2'+\frac{20''+60''+35''+20''+15''}{5}=7^\circ2'30''$

$$\sigma_{甲}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}v_i^2}{5-1}}=\sqrt{\frac{(-10'')^2+(30'')^2+5''^2+(-10'')^2+(-15'')^2}{4}}$$

$$=18.4''$$

$$\sigma_{\bar{x}甲}=\frac{\sigma_{甲}}{\sqrt{5}}=\frac{18.4''}{\sqrt{5}}=8.23''$$

乙：$\bar{x}_{乙}=7^\circ2'+\frac{25''+25''+20''+50''+45''}{5}=7^\circ2'33''$

$$\sigma_{乙}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}v_i^2}{5-1}}=\sqrt{\frac{(-8'')^2+(-8'')^2+(-13'')^2+(17'')^2+(12'')^2}{4}}$$

$=13.5''$　　　　$\sigma_{\bar{x}乙}=\frac{\sigma_{乙}}{\sqrt{5}}=\frac{13.5''}{\sqrt{5}}=6.04''$

$$p_{甲}:p_{乙}=\frac{1}{\sigma_{\bar{x}甲}^2}:\frac{1}{\sigma_{\bar{x}乙}^2}=\frac{1}{8.23^2}:\frac{1}{6.04^2}=3648:6773$$

$$\bar{x}=\frac{p_{甲}\bar{x}_{甲}+p_{乙}\bar{x}_{乙}}{p_{甲}+p_{乙}}=\frac{3648\times30''+6773\times33''}{3648+6773}+7^\circ2'=7^\circ2'32''$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\sigma_{\bar{x}甲}\sqrt{\frac{p_{甲}}{p_{甲}+p_{乙}}}=8.23''\times\sqrt{\frac{3648}{3648+6773}}=4.87''$$

$$X=x\pm3\sigma_{\bar{x}}=7^\circ2'32''\pm15''$$

2-15．试证明n个相等精度测得值的平均值的权为n乘以任一个测量值的权。

证明：

解：因为n个测量值属于等精度测量，因此具有相同的标准偏差：

n个测量值算术平均值的标准偏差为：

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}}=\sigma/\sqrt{n}}$$

已知权与方差成反比，设单次测量的权为 P1，算术平均值的权为 P2，则

$$\boldsymbol{P_1 : P_2 = \frac{1}{\sigma^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = 1 : n \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{P_2 = nP_1}$$

2-16 重力加速度的 20 次测量具有平均值为$9.811m/s^2$、标准差为$0.014m/s^2$。另外 30 次测量具有平均值为$9.802m/s^2$，标准差为$0.022m/s^2$。假设这两组测量属于同一正态总体。试求此 50 次测量的平均值和标准差。

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_1^2}^2} : \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_2^2}^2} = \frac{1}{\left(\frac{0.014}{\sqrt{20}}\right)^2} : \frac{1}{\left(\frac{0.022}{\sqrt{30}}\right)^2} = 242 : 147$$

$$\bar{x} = \frac{242 \times 9.811 + 147 \times 9.802}{242 + 147} \approx 9.808(m/s^2)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0.014}{\sqrt{20}} \times \sqrt{\frac{242}{242 + 147}} \approx 0.0025(\mathrm{m/s^2})$$

2-17 对某量进行 10 次测量，测得数据为 14.7，15.0，15.2，14.8，15.5，14.6，14.9，14.8，15.1，15.0，试判断该测量列中是否存在系统误差。 $\bar{x} = 14.96$

按贝塞尔公式 $\sigma_1 = 0.2633$

按别捷尔斯法$\sigma_2 = 1.253 \times \frac{\sum_{\mathrm{i=1}}^{10} |v_i|}{\sqrt{10(10-1)}} \approx 0.2642$

由 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 + u$ 得 $u = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 = 0.0034$

$|u| < \frac{2}{\sqrt{n-1}} = 0.67$ 所以测量列中无系差存在。

2-18 对一线圈电感测量 10 次，前 4 次是和一个标准线圈比较得到的，后 6 次是和另一个标准线圈比较得到的，测得结果如下（单位为 mH）：

50.82，50.83，50.87，50.89；

50.78，50.78，50.75，50.85，50.82，50.81。

试判断前 4 次与后 6 次测量中是否存在系统误差。

使用秩和检验法：

排序：

序号	1	2	3	4	5
第一组					
第二组	50.75	50.78	50.78	50.81	50.82
序号	6	7	8	9	10
第一组	50.82	50.83		50.87	50.89
第二组			50.85		

T=5.5+7+9+10=31.5　　查表 $T_{-}=14$　$T_{+}=30$

$T>T_{+}$　所以两组间存在系差

2-19 对某量进行 10 次测量，测得数据为 14.7，15.0，15.2，14.8，15.5，14.6，14.9，14.8，15.1，15.0，试判断该测量列中是否存在系统误差。 $\bar{x}=14.96$

按贝塞尔公式 $\sigma_1=0.2633$

按别捷尔斯法 $\sigma_2=1.253\times\dfrac{\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{10}|v_i|}{\sqrt{10(10-1)}}\approx 0.2642$

由 $\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}=1+u$　　得 $u=\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}-1=0.0034$

$|u|<\dfrac{2}{\sqrt{n-1}}=0.67$　　所以测量列中无系差存在。

2-20．对某量进行 12 次测量，测的数据为 20.06，20.07，20.06，20.08，20.10，20.12，20.11，20.14，20.18，20.18，20.21，20.19，试用两种方法判断该测量列中是否存在系统误差。

解：

(1)残余误差校核法

$\bar{x}=20.125$

$\vartriangle=(-0.065-0.055-0.065-0.045-0.025-0.005)-(-0.015+0.015+0.055+0.055+0.085+0.065)$
$=-0.54$

因为$\vartriangle$显著不为 0，存在系统误差。

（2）残余误差观察法

残余误差符号由负变正，数值由大到小，在变大，因此绘制残余误差曲线，可见存在线形系统误差。

（3） $\sigma_1 = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{12} v_i^2}{11}} = 0.05$

$\sigma_2 = 1.253 \dfrac{\sum_{i=1}^{12} |v_i|}{\sqrt{n(n-1)}} = 0.06$

$\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 + u$

$u = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 = 0.19$

$|u| < \dfrac{2}{\sqrt{n-1}} = 0.603$

所以不存在系统误差。

2-22

①莱以特准则：计算得

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1.496 \times 10^{-2}}{15-1}} = 0.0327$$

$$3\sigma = 3 \times 0.0327 = 0.0981$$

根据莱以特准则，第14次测量值的残余误差

$$|v_{14}| = 0.104 > 0.0981$$

所以它含有粗大误差，故将它剔除。再根据剩下的14个测量值重复上述步骤。

② 格罗布斯准则：

$$\bar{x} = 28.504，\ \sigma = 0.0327，$$

按照测量值的大小，顺序排列得，$x_{(1)} = 28.40, x_{(15)} = 28.53$

现在有 2 个测量值 $x_{(1)}, x_{(15)}$ 可怀疑，由于

$$\bar{x} - x_{(1)} = 28.504 - 28.40 = 0.104$$

$$x_{(15)} - \bar{x} = 28.53 - 28.504 = 0.026$$

故应该先怀疑 $x_{(1)}$ 是否含有粗大误差，

计算，

$$g_{(1)}=\frac{\bar{x}-x_{(1)}}{\sigma}=\frac{28.504-28.40}{0.0327}=3.1804$$

取 $\alpha=0.05$，查表得，$g_0(15,0.05)=2.41$，则

$$g_1=3.1804>g_0(15,0.05)=2.41$$

故第 14 个测量值 $x_{(1)}$ 含有粗大误差，应剔除。

注意：此时不能直接对 x（15）进行判断，一次只能剔除一个粗差。

- 重复上述步骤，判断是否还含有粗差。
- ③狄克松准则同理，判断后每次剔除一个粗差后重复。

第三章 误差的合成与分配

3-1 相对测量时需用 54.255mm 的量块组做标准件，量块组由四块量块研合而成，它们的基本尺寸为 $l_1=40mm$，$l_2=12mm$，$l_3=1.25mm$，$l_4=1.005mm$。经测量，它们的尺寸偏差及其测量极限误差分别为 $\Delta l_1=-0.7\mu m$，$\Delta l_2=+0.5\mu m$，$\Delta l_3=-0.3\mu m$，$\Delta l_4=+0.1\mu m, \delta_{\lim}l_1=\pm0.35\mu m, \delta_{\lim}l_2=\pm0.25\mu m, \delta_{\lim}l_3=\pm0.20\mu m,$ $\delta_{\lim}l_4=\pm0.20\mu m$。试求量块组按基本尺寸使用时的修正值及给相对测量带来的测量误差。

修正值 $=-(\Delta l_1+\Delta l_2+\Delta l_3+\Delta l_4)$

$=-(-0.7+0.5-0.3+0.1)$

$=0.4\,(\mu m)$

测量误差:

$$\delta_l=\pm\sqrt{\delta^2_{\lim l_1}+\delta^2_{\lim l_2}+\delta^2_{\lim l_3}+\delta^2_{\lim l_4}}$$

$$=\pm\sqrt{(0.35)^2+(0.25)^2+(0.20)^2+(0.20)^2}$$

$$=\pm0.51(\mu m)$$

3-2 为求长方体体积 V，直接测量其各边长为 $a=161.6mm$，

$b=44.5mm$，$c=11.2mm$，已知测量的系统误差为 $\Delta a=1.2mm$，$\Delta b=-0.8mm$，

$\Delta c=0.5mm$，测量的极限误差为 $\delta_a=\pm 0.8mm$，

$\delta_b=\pm 0.5mm$，$\delta_c=\pm 0.5mm$，试求立方体的体积及其体积的极限误差。

$$V=abc \qquad V=f(a,b,c)$$

$$V_0=abc=161.6\times 44.5\times 11.2$$

$$=80541.44(mm^3)$$

体积 V 系统误差 ΔV 为：

$$\Delta V=bc\Delta a+ac\Delta b+ab\Delta c$$

$$=2745.744(mm^3)\approx 2745.74(mm^3)$$

立方体体积实际大小为：$V=V_0-\Delta V=77795.70(mm^3)$

$$\delta_{\lim V}=\pm\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial a})^2{\delta_a}^2+(\frac{\partial f}{\partial b})^2{\delta_b}^2+(\frac{\partial f}{\partial c})^2{\delta_c}^2}$$

$$=\pm\sqrt{(bc)^2{\delta_a}^2+(ac)^2{\delta_b}^2+(ab)^2{\delta_c}^2}$$

$$=\pm 3729.11(mm^3)$$

测量体积最后结果表示为:

$$V=V_0-\Delta V+\delta_{\lim V}=(77795.70\pm 3729.11)mm^3$$

3—3 长方体的边长分别为 α_1，α_2，α_3 测量时：①标准差均为 σ；②标准差各为 σ_1、σ_2、σ_3。试求体积的标准差。

解：

长方体的体积计算公式为：$V=a_1\cdot a_2\cdot a_3$

体积的标准差应为：$\sigma_V=\sqrt{(\frac{\partial V}{\partial a_1})^2\sigma_1^2+(\frac{\partial V}{\partial a_2})^2\sigma_2^2+(\frac{\partial V}{\partial a_3})^2\sigma_3^2}$

现可求出：$\frac{\partial V}{\partial a_1}=a_2\cdot a_3$；$\frac{\partial V}{\partial a_2}=a_1\cdot a_3$；$\frac{\partial V}{\partial a_3}=a_1\cdot a_2$

若：$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$

则有：

$$\sigma_V = \sqrt{(\frac{\partial V}{\partial a_1})^2 \sigma_1^2 + (\frac{\partial V}{\partial a_2})^2 \sigma_2^2 + (\frac{\partial V}{\partial a_3})^2 \sigma_3^2} = \sigma \sqrt{(\frac{\partial V}{\partial a_1})^2 + (\frac{\partial V}{\partial a_2})^2 + (\frac{\partial V}{\partial a_3})^2}$$

$$= \sigma \sqrt{(a_2 a_3)^2 + (a_1 a_3)^2 + (a_1 a_2)^2}$$

若：$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$

则有：$\sigma_V = \sqrt{(a_2 a_3)^2 \sigma_1^2 + (a_1 a_3)^2 \sigma_2^2 + (a_1 a_2)^2 \sigma_3^2}$

3-4　测量某电路的电流 $I = 22.5mA$，电压 $U = 12.6V$，测量的标准差分别为 $\sigma_I = 0.5mA$，$\sigma_U = 0.1V$，求所耗功率 $P = UI$ 及其标准差 σ_P。$P = UI = 12.6 \times 22.5 = 283.5(mw)$

$P = f(U, I)$ $\because U$、I 成线性关系　　$\therefore \rho_{UI} = 1$

$$\sigma_P = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial U})^2 {\sigma_U}^2 + (\frac{\partial f}{\partial I})^2 {\sigma_I}^2 + 2(\frac{\partial f}{\partial U})(\frac{\partial f}{\partial I})\sigma_u \sigma_I}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial U}\sigma_U + \frac{\partial f}{\partial I}\sigma_I = I\sigma_U + U\sigma_I = 22.5 \times 0.1 + 12.6 \times 0.5$$

$$= 8.55(mw)$$

3-9．测量某电路电阻 R 两端的电压 U，按式 **I**=U/R 计算出电路电流，若需保证电流的误差为 0.04A，试求电阻 R 和电压 U 的测量误差为多少？

解：在 I=U/R 式中，电流 I 与电压 U 是线性关系，若需要保证电流误差不大于 0.04A，则要保证电压的误差也不大于 0.04×R。

3—12　按公式 V=πr2h 求圆柱体体积，若已知 r 约为 2cm，h 约为 20cm，要使体积的相对误差等于 1%，试问 r 和 h 测量时误差应为多少?

解：

若不考虑测量误差，圆柱体积为

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3.14 \times 2^2 \times 20 = 251.2cm^3$$

根据题意，体积测量的相对误差为 1%，即测定体积的相对误差为：

$$\frac{\sigma}{V} = 1\%$$

即 $\sigma = V \cdot 1\% = 251.2 \times 1\% = 2.51$

现按等作用原则分配误差，可以求出

测定 r 的误差应为：

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial V / \partial r} = \frac{2.51}{1.41} \frac{1}{2\pi hr} = 0.007cm$$

测定 h 的误差应为：

$$\sigma_h = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial V / \partial h} = \frac{2.51}{1.41} \frac{1}{\pi \cdot r^2} = 0.142cm$$

3-14 对某一质量进行 4 次重复测量，测得数据(单位 g)为 428.6，429.2，426.5，430.8。已知测量的已定系统误差 $\Delta=-2.6g$，测量的各极限误差分量及其相应的传递系数如下表所示。若各误差均服从正态分布，试求该质量的最可信赖值及其极限误差。

序号	极限误差 / g		误差传递系数
	随机误差	未定系统误差	
1	2.1	—	1
2	—	1.5	1
3	—	1.0	1
4	—	0.5	1
5	4.5	—	1
6	—	2.2	1.4
7	1.0	—	2.2
8	—	1.8	1

$$\bar{x}=\frac{428.6+429.2+426.5+430.8}{4}$$

$$=428.775(g)\approx 428.8(g)$$

最可信赖值 $x=\bar{x}-\Delta=428.8+2.6=431.4(g)$

$$\delta_x=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 e_i^{\,2}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\delta_i^{\,2}}$$

$$\approx\pm 4.9(g)$$

测量结果表示为: $x=\bar{x}-\Delta+\delta_x=(431.4\pm 4.9)g$

第四章 测量不确定度

4—1 某圆球的半径为 r，若重复 10 次测量得 $r\pm\sigma_r$ =(3.132±0.005)cm，试求该圆球最大截面的圆周和面积及圆球体积的测量不确定度，置信概率 P=99％。

解：①求圆球的最大截面的圆周的测量不确定度

已知圆球的最大截面的圆周为：$D=2\pi\cdot r$

其标准不确定度应为：$u=\sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial r}\right)^2\sigma_r^2}=\sqrt{(2\pi)^2\sigma_r^2}=\sqrt{4\times 3.14159^2\times 0.005^2}$

＝0.0314cm

确定包含因子。查 t 分布表 $t_{0.01}$（9）＝3.25，及 K＝3.25

故圆球的最大截面的圆周的测量不确定度为：

U＝Ku＝3.25×0.0314＝0.102

②求圆球的体积的测量不确定度

圆球体积为：$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$

其标准不确定度应为：

$$u=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2\sigma_r^2}=\sqrt{\left(4\cdot\pi\cdot r^2\right)^2\sigma_r^2}=\sqrt{16\times3.14159^2\times3.132^4\times0.005^2}=0.616$$

确定包含因子。查 t 分布表 $t_{0.01}$（9）＝3.25，及 K＝3.25

最后确定的圆球的体积的测量不确定度为

U＝Ku＝3.25×0.616＝2.002

4-2．望远镜的放大率 D=f1/f2，已测得物镜主焦距 f1±σ1=（19.8±0.10）cm，目镜的主焦距 f2±σ2=（0.800±0.005）cm，求放大率测量中由 f1、f2 引起的不确定度分量和放大率 D 的标准不确定度。

4-3．测量某电路电阻 R 两端的电压 U，由公式 I=U/R 计算出电路电流 I，若测得 U±σu=（16.50±0.05）V，R±σR=（4.26±0.02）Ω、相关系数 ρ_{UR}=-0.36,试求电流 I 的标准不确定度。

4-4 某校准证书说明，标称值 10Ω 的标准电阻器的电阻 R 在 20 $^\circ C$ 时为 $10.000742\Omega\pm129\mu\Omega$（P=99%），求该电阻器的标准不确定度，并说明属于哪一类评定的不确定度。

∵由校准证书说明给定

∴属于 B 类评定的不确定度

∵R 在[10.000742Ω-129$\mu\Omega$，10.000742Ω+129$\mu\Omega$]范围内概率为 99%，不为 100%

∴不属于均匀分布，属于正态分布

$a=129$ 当 p=99%时，$K_p=2.58$

$$\therefore U_R=\frac{a}{K_p}=\frac{129}{2.58}=50(\mu\Omega)$$

4-5 在光学计上用 52.5mm 的量块组作为标准件测量圆柱体直径，量块组由三块量块研合而成，其尺寸分别是：$l_1=40mm$，$l_2=10mm$，$l_3=2.5mm$，量块按“级”使用，经查手册得其研合误差分别不超过 $\pm0.45\mu m$、$\pm0.30\mu m$、$\pm0.25\mu m$（取置信概率 P=99.73%的正态分布），求该量块组引起的测量不确定度。 $L=52.5mm$ $l_1=40mm$

$l_2 = 10mm \qquad l_3 = 2.5mm$

$\therefore L = l_1 + l_2 + l_3 \qquad \because p = 99.73\% \qquad \therefore K_p = 3$

$$U_{l_1} = \frac{a}{k_p} = \frac{0.45}{3} = 0.15(\mu m) \qquad U_{l_2} = \frac{a}{k_p} = \frac{0.30}{3} = 0.10(\mu m)$$

$$U_{l_3} = \frac{a}{k_p} = \frac{0.25}{3} = 0.08(\mu m)$$

$$U_L = \sqrt{U_{l_1} + U_{l_2} + U_{l_3}} \quad = \sqrt{0.15^2 + 0.10^2 + 0.08^2}$$

$$= 0.20(\mu m)$$

第五章 线性参数的最小二乘法处理

5-1 测量方程为$\begin{cases} 3x + y = 2.9 \\ x - 2y = 0.9 \\ 2x - 3y = 1.9 \end{cases}$ 试求 x、y 的最小二乘法处理及其相应精度。误差方程为

$$\begin{cases} v_1 = 2.9 - (3x + y) \\ v_2 = 0.9 - (x - 2y) \\ v_3 = 1.9 - (2x - 3y) \end{cases}$$

列正规方程$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i1}x + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}a_{i2}y = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}l_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i1}x + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}a_{i2}y = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}l_i \end{cases}$代入数据得

$\begin{cases} 14x - 5y = 13.4 \\ -5x + 14y = -4.6 \end{cases}$解得 $\begin{cases} x = 0.962 \\ y = 0.015 \end{cases}$

将 x、y 代入误差方程式$\begin{cases} v_1 = 2.9 - (3 \times 0.962 + 0.015) = -0.001 \\ v_2 = 0.9 - (0.962 - 2 \times 0.015) = -0.032 \\ v_3 = 1.9 - (2 \times 0.962 - 3 \times 0.015) = 0.021 \end{cases}$

测量数据的标准差为$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n - t}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{3} v_i^2}{3 - 2}} = 0.038$

求解不定乘数 $\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$ $\begin{cases} 14d_{11} - 5d_{12} = 1 \\ -5d_{11} + 14d_{12} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 14d_{21} - 5d_{22} = 0 \\ -5d_{21} + 14d_{22} = 1 \end{cases}$

解得 $d_{11} = d_{22} = 0.082$

x、y 的精度分别为$\sigma_x = \sigma\sqrt{d_{11}} = 0.01$ $\sigma_y = \sigma\sqrt{d_{22}} = 0.01$

5-7 不等精度测量的方程组如下：$\begin{cases} x - 3y = -5.6, p_1 = 1 \\ 4x + y = 8.1, p_2 = 2 \\ 2x - y = 0.5, p_3 = 3 \end{cases}$

试求 x、y 的最小二乘法处理及其相应精度。

列误差方程$\begin{cases} v_1 = -5.6 - (x - 3y), p_1 = 1 \\ v_2 = 8.1 - (4x + y), p_2 = 2 \\ v_3 = 0.5 - (2x - y), p_3 = 3 \end{cases}$

正规方程为$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} p_i a_{i1} a_{i1} x + \sum_{i=1}^{3} p_i a_{i1} a_{i2} y = \sum_{i=1}^{3} p_i a_{i1} l_i \\ \sum_{i=1}^{3} p_i a_{i2} a_{i1} x + \sum_{i=1}^{3} p_i a_{i2} a_{i2} y = \sum_{i=1}^{3} p_i a_{i2} l_i \end{cases}$

代入数据得

$\begin{cases} 45x - y = 62.2 \\ -x + 14y = 31.5 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1.434 \\ y = 2.352 \end{cases}$

将 x、y 代入误差方程可得$\begin{cases} v_1 = 0.022 \\ v_2 = 0.012 \\ v_3 = -0.016 \end{cases}$

则测量数据单位权标准差为$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{3} p_i v_i^2}{3 - 2}} = 0.039$

求解不定乘数 $\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$ $\begin{cases} 45d_{11} - d_{12} = 1 \\ -d_{11} + 14d_{12} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 45d_{21} - d_{22} = 0 \\ -d_{21} + 14d_{22} = 1 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} d_{11} = 0.022 \\ d_{22} = 0.072 \end{cases}$

x、y 的精度分别为$\sigma_x = \sigma\sqrt{d_{11}} = 0.006 \quad \sigma_y = \sigma\sqrt{d_{22}} = 0.010$

第六章 回归分析

6-1 材料的抗剪强度与材料承受的正应力有关。对某种材料试验的数据如下：

正应力 x/Pa	26.8	25.4	28.9	23.6	27.7	23.9
抗剪强度 y/Pa	26.5	27.3	24.2	27.1	23.6	25.9
正应力 x/Pa	24.7	28.1	26.9	27.4	22.6	25.6
抗剪强度 y/Pa	26.3	22.5	21.7	21.4	25.8	24.9

假设正应力的数值是正确的，求

（1）抗剪强度与正应力之间的线性回归方程。

（2）当正应力为 24.5Pa 时，抗剪强度的估计值是多少？

（1）设一元线形回归方程

$$\hat{y} = b_0 + bx \qquad N = 12$$

$$\because \begin{cases} b = \dfrac{l_{xy}}{l_{xx}} \\ b_0 = \overline{y} - b\overline{x} \end{cases} \therefore l_{xx} = 43.047 \; l_{xy} = -29.533$$

$$\because \overline{x} = \frac{1}{12} \times 311.6 = 25.97$$

$$b = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = \frac{-29.533}{43.047} = -0.69 \quad \overline{y} = \frac{1}{12} \times 297.2 = 24.77$$

$$\therefore b_0 = 24.77 - (-0.69) \times 25.97 = 42.69$$

$$\hat{y} = 42.69 - 0.69x$$

（2）当 X=24.5Pa

$$\hat{y} = 42.69 - 0.69 \times 24.5 = 25.79(Pa)$$

6-10 用直线检验法验证下列数据可以用曲线 $y = ab^x$ 表示。

x	30	35	40	45	50	55	60
y	-0.4786	-2.188	-11.22	-45.71	-208.9	-870.9	-3802

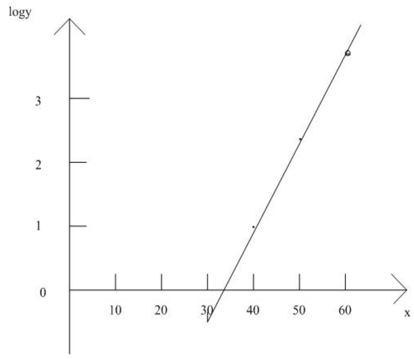
$$y = ab^x \Rightarrow \log(-y) = \log(-a) + (\log b)x$$

$Z_1 = \log(-y) \quad Z_2 = x$

取点做下表

Z_2	30	40	50	60
Z_1	-0.32	1.05	2.32	3.58

以 Z_1 与 Z_2 画图



所得到图形为一条直线，故选用函数类型 $y = ab^x$ 合适