第2章　传感器的基本特性

2.2 传感器动态特性

（1） 传递函数　☺ 传递函数表示系统本身的传输、转换特性。

■ **为了分析动态特性，首先要写出传感器的数学模型求出传递函数。**

➢ **已知外界有一激励施加于系统时，系统对外界有一响应；**

被测量是随时间或频率变化的

输入激励 $X(t)$ /$X(jw)$ → **传感器系统** → **输出响应** $Y(t)$ /$Y(jw)$

➢ 假设传感器输入、输出在线性范围变化，当输入量随时间变化时，它们的关系可用高阶常系数线性微分方程表示

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=b_m\frac{d^m x}{dt^m}+\cdots+b_1\frac{dx}{dt}+b_0 x$$

式中：y — 输出；x — 输入；a_i、b_i 为常数

第2章　传感器的基本特性

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_m\frac{d^mx}{dt^m}+\cdots+b_1\frac{dx}{dt}+b_0x$$

- 对微分方程两边取拉氏变换

$$y(s)(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0)=x(s)\left(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0\right)$$

➢ 将实函数变换到复变函数，从时域变换到频域。

变换公式参考：

$$x(s)=\mathrm{L}[x(t)]=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

$$y(s)=\mathrm{L}[y(t)]=\int_0^{\infty}y(t)e^{-st}dt$$

详见课前推送课件

第2章　传感器的基本特性

$$y(s)(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0) = x(s)\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right)$$

H(s)

- 传感器的输出拉氏变换

$$y(s) = x(s)H(s)$$

复数 S 为拉氏变换自变量 $s = \sigma + j\omega$

- 传感器的传递函数由输出和输入的拉氏变换表示为

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

☻ 传感器传递函数的在数学上的定义是：

初始条件为零 ($t \le 0$，$y = 0$)，输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比。

第2章　传感器的基本特性

（1）　传递函数

传递函数 $$H(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$ 根据大多数传感器的情况进行化简

一般有 $$b_m=b_{m-1}=\cdots=b_1=0$$

- 传递函数可化简为

$$H(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

- 其中分母多项式中的方程式有n个根，用分母的阶次n代表传感器的特征，数学模型是n阶就称n阶传感器。

第2章 传感器的基本特性

(1) 传递函数

- 一个高阶系统可以看成若干个零阶、一阶、二阶系统串联。
- 传感器种类很多，一般可简化为一阶或二阶系统，高阶传感器较少，也可分解成若干低阶环节。

$$H(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

$$H(s)=A\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{s+P_i}\right)\prod_{j=1}^{\frac{(n-r)}{2}}\left(\frac{1}{s^2+2\xi_i\omega_{nj}s+{\omega_{nj}}^2}\right)$$

第2章　传感器的基本特性

(1)　传递函数

$$H(S) = A\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{S+P_i}\right)\prod_{j=1}^{(n-r)/2}\left(\frac{1}{S^2+2\xi_i\omega_{nj}S+\omega_{nj}{}^2}\right)$$

式中每个因子式可以看成一个子系统的传递函数

其中：　A　零阶系统传递函数为常数

$$\frac{1}{S+P_i}$$　一阶系统传递函数

$$\frac{1}{S^2+2\xi_i\omega_{nj}S+\omega_{nj}{}^2}$$　二阶系统传递函数

第2章　传感器的基本特性

(1)　传递函数

$$H(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

➢ *(n = 0)* 零阶系统

$$y=\frac{b_0}{a_0}x=kx$$

传递函数为常数，

- 无时间滞后，为一特例；电位器是典型的零阶系统

➢ *(n = 1)* 一阶系统，传递函数为

$$H(s)=\frac{b_0}{a_1 s+a_0}=\frac{k}{\tau s+1}$$

- 为惯性系统，如*RC*回路为典型一阶系统

式中：　$k=\frac{b_0}{a_0}$ 静态灵敏度；　$\tau=\frac{a_1}{a_0}$ 时间常数

第2章 传感器的基本特性

(1) 传递函数

➢ $(n=2)$ 二阶系统

$$H(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \xrightarrow{\text{归一化}} \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

传递函数为

- 为振动系统，如RCL回路为典型二阶系统

式中：

$$k = \frac{b_0}{a_0}$$ 静态灵敏度，设理想情况时$k=1$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$ 阻尼系数

$$\omega_n = \sqrt{a_0/a_2}$$ 为传感器无阻尼固有频率

单选题 1分

下列描述传感器传递函数正确的是（ ）

A $X(s)=H(s)Y(s)$

B $Y(s)=H(s)X(s)$

C $X(t)=H(t)Y(t)$

D $Y(t)=H(t)X(t)$

第2章　传感器的基本特性

划重点

传递函数 H(s)

输入激励$X(s)$ → $H(s)$ 传感器系统 → 输出响应$Y(s)$

- ➢ *(n = 0)* 零阶系统，传递函数为常数，$y=kx$
- ➢ 例如：电位器

- ➢ *(n = 1)* 一阶系统，传递函数为 $H(s)=\dfrac{k}{\tau s+1}$
- ➢ 例如：RC回路

- ➢ *(n = 2)* 二阶系统，传递函数为 $H(s)=\dfrac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
- ➢ 例如：RLC回路

求解传感器输出的方法：

1. 先判定传感器为几阶系统 → 获得传感器传递函数H(s)
2. 被测量x的动态变化函数x(t) → 拉式变换→ X(s)
3. 根据Y(s)=H(s)X(s)求出Y(s) → 拉式反变换→ y(t)

第2章　传感器的基本特性

2.2　传感器动态特性

- 动态特性是指传感器输出对时间变化的输入量的响应特性

➢ 当输入量随时间（频率）变化时讨论传感器的动态特性

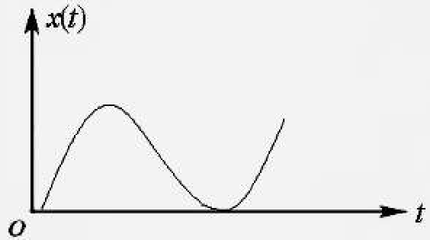
动态特性

- 输入信号随时间变化 → 一般采用阶跃函数分析 → 输出信号时域特性

$$Y(t) = f[X(t)]$$

- 输入信号周期变化频域 → 一般采用正弦函数分析 → 输出信号频域特性

$$Y(j\omega) = f[X(j\omega)]$$



第2章　传感器的基本特性

- **2. 2 传感器动态特性**

输入激励$X(s)$ → **$H(s)$ 传感器系统** → **输出响应$Y(s)$**

$$x(t)=\begin{cases}0\ldots\ldots t\le 0\\1\ldots\ldots t>0\end{cases}$$

$$L\{x(t)\}=\frac{1}{s}$$

一阶：$H(s)=\dfrac{k}{\tau s+1}$

一阶系统时间响应

一阶系统频域响应

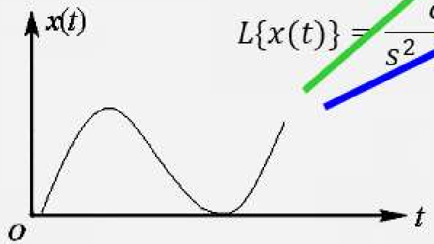
二阶：$H(s)=\dfrac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

二阶系统时间响应

二阶系统频域响应

$$x(t)=\sin\omega t$$

$$L\{x(t)\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$



（一般情况下，k=1）

第2章　传感器的基本特性

2.2.3 一阶传感器系统

（1）一阶传感器的阶跃响应

- 一个初始状态为零的传感器，输入一单位阶跃信号，输出称阶跃响应，指输出达到新的稳定状态前的响应特性。

- 单位阶跃信号 $x(t)=\begin{cases}0 \ldots\ldots t\le 0\\ 1 \ldots\ldots t>0\end{cases}$
- 拉氏变换为 $L\{x(t)\}=\dfrac{1}{s}$

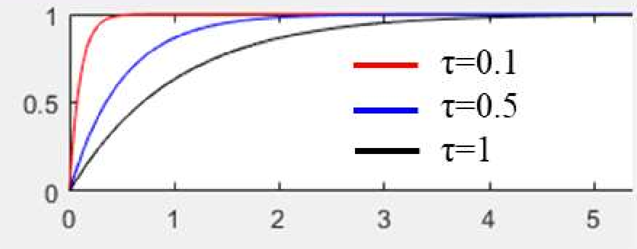
- 一阶系统输出拉氏变换为 $y(s)=x(s)H(s)=\dfrac{k}{\tau s+1}\cdot\dfrac{1}{s}$

- 拉氏反变换得到单位阶跃的响应 $y(t)=k(1-e^{-t/\tau})$

第2章　传感器的基本特性

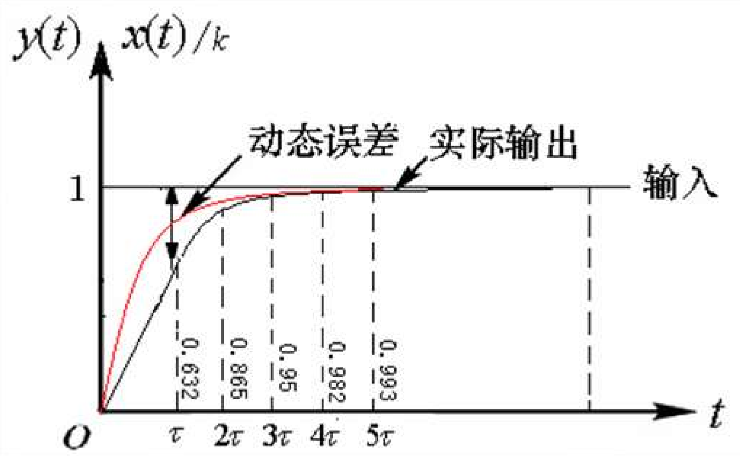
☻ 一阶传感器阶跃响应讨论:

• 暂态响应 $y(t)=k(1-e^{-t/\tau})$ 为指数函数，输出曲线成指数变化，达到稳定时间与τ有关



- τ 越小响应曲线越接近阶跃信号，可见时间常数 τ 越小越好;

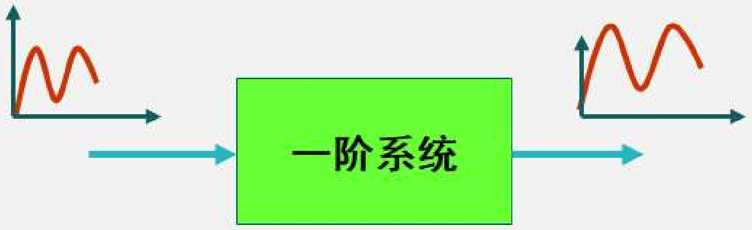
- 当t =1τ 时即达到稳定值的63.2%;
- 工程上运用 t = 4τ 时认为已达到稳定。
- 时间常数 τ 是一阶传感器的重要参数;
- 由曲线看出它与动态测温相似，所以动态测温是典型的一阶系统。



第2章　传感器的基本特性

2.2.3 一阶传感器系统

(1) 一阶传感器的频率响应



- 输入一周期变化的正弦信号 $x(t) = \sin\omega\, t$
- 正弦信号拉氏变换为 $L\{x(t)\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

• 一阶传感器输出拉氏变换

$$y(s) = H(s)\cdot x(s) = \frac{1}{\tau s+1}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

拉式反变换 ⇒ y(t)见下一页

第2章　传感器的基本特性

②　一阶传感器的频率响应

- 拉氏逆变换得到输出的振幅和频率变化特性

$$y(t)=\frac{\omega}{\tau}\frac{e^{-t/\tau}}{(1/\tau)^2+\omega^2}+\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{(\omega/\tau)^2}{(1/\tau)^2+\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi)$$

输出由两部分组成：瞬态响应成分和稳态响应成分，瞬态响应随时间逐渐消失。忽略瞬态响应，稳态响应整理后为

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\sin(\omega t+\varphi)=A(\omega)\sin(\omega t+\varphi)$$

幅频特性

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

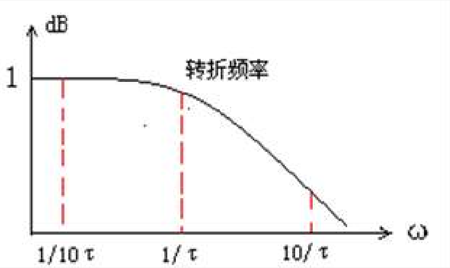
相频特性

$$\varphi(\omega)=-\arctan(\omega\tau)$$

第2章　传感器的基本特性

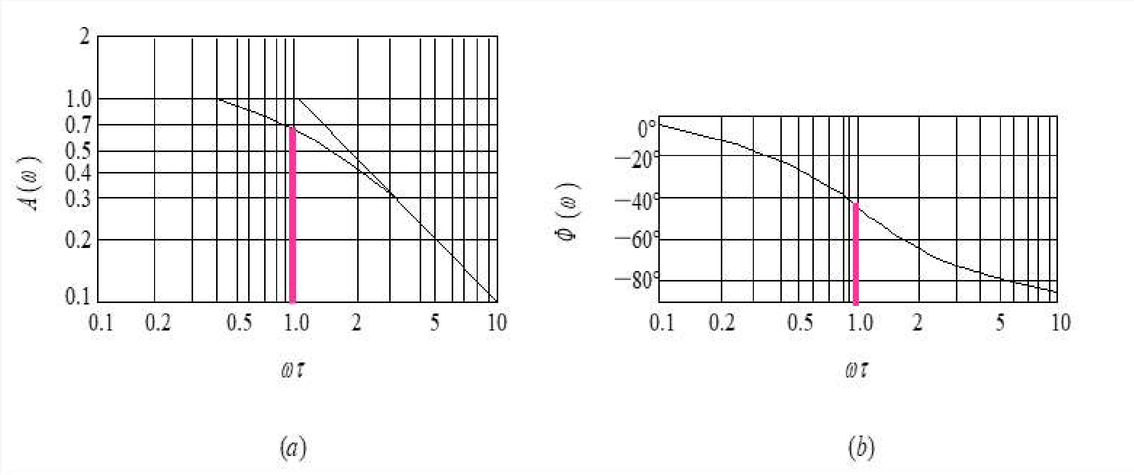
☻ 一阶传感器频率响应讨论

- 当$\omega\tau=1$ 时，传感器灵敏度下降了$3dB$，如果灵敏度下降到$3dB$时的频率为工作频率上限，则：上限频率为 $\omega_H=1/\tau$
- 当τ越小，A(ω)越接近于1，φ(ω)越接近0
- 所以时间常数τ越小，ω_H越高工作频率越宽，响应越好。



$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan(\omega\tau)$$



一阶传感器频率响应特性
a) 幅频特性； b) 相频特性

第2章　传感器的基本特性

2.2.3 一阶传感器系统

- 一阶系统在时间常数 $\tau << 1$ 才近似零阶系统特性：

$$A(\omega) \approx 1 \qquad A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

$$\varphi(\omega) \approx 0 \qquad \varphi(\omega)=-\arctan(\omega\tau)$$

- 这时的输出 y(t) 可较好的反映输入 x(t) 变化；

可见一阶系统的动态响应主要取决于**时间常数τ**，**减少τ**可改善传感器的频率特性，**加快响应过程**。

第2章　传感器的基本特性

2.2　传感器动态特性

2.2.4 二阶系统（振动系统）

❖ 二阶系统传递函数

$$H(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$\omega_n=\sqrt{a_0/a_2}$　无阻尼固有频率

$k=b_0/a_0$　静态灵敏度

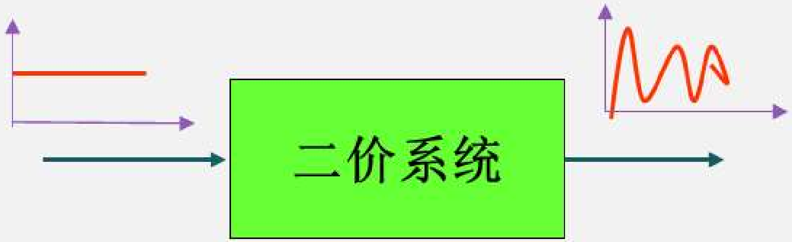
$\xi=\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}$　阻尼比

第2章　传感器的基本特性

2.2.4 二阶传感器系统

（1）二阶传感器的阶跃响应

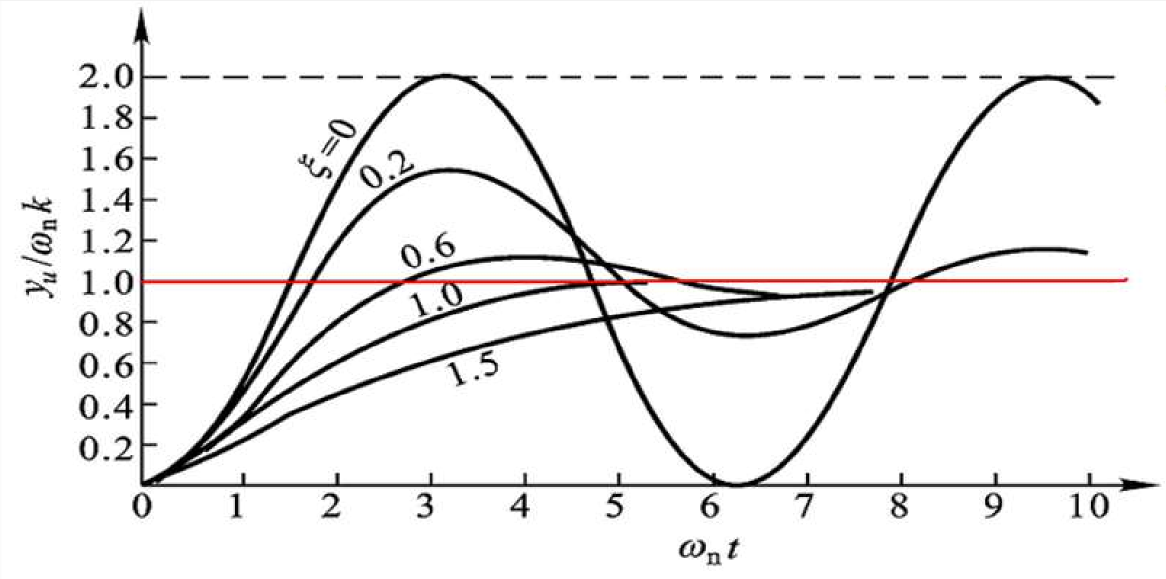
$$y(s)=H(s)x(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$



$$y(t)=1-\left[\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]\cdot\sin(\omega_d t+\varphi)$$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

ωn为固有频率



- ☞ $\xi=0$ 零阻尼
- ☞ $\xi<1$ 欠阻尼
- ☞ $\xi=1$ 临界阻尼
- ☞ $\xi>1$ 过阻尼

用 y(t) 作图，不同阻尼比ξ值曲线形式不同

第2章　传感器的基本特性

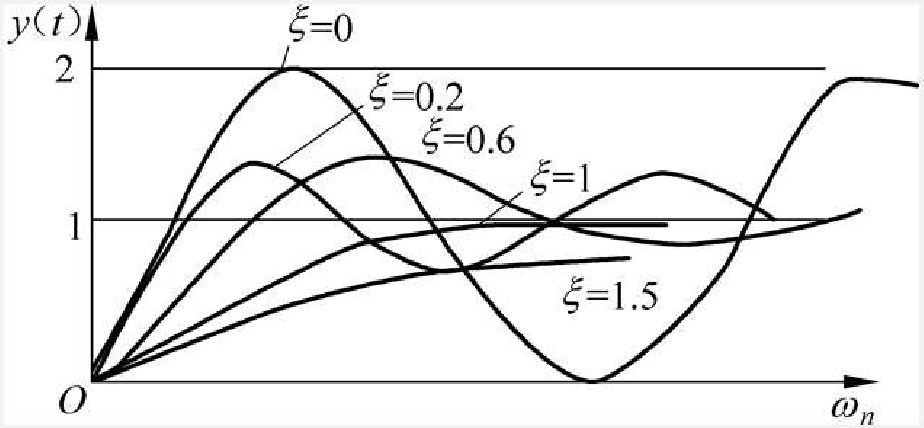
二阶传感器阶跃响应讨论：

根据 阻尼比 ξ 大小可分四种情况：

- $\xi=0$ **零阻尼**，等幅振荡，产生自激永远达不到稳定；
- $\xi<1$ **欠阻尼**，衰减振荡，达到稳定时间随ξ下降加长；
- $\xi=1$ **临界阻尼**，响应时间最短；
- $\xi>1$ **过阻尼**，　稳定时间较长。

> **实际取值稍有一点欠阻尼调整，ξ 取0.6～0.8过冲量不太大，稳定时间不太长。**

$$\xi=\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}=0.6\rightarrow0.8$$



第2章　传感器的基本特性

2.2.4 二阶传感器系统

（2）二阶传感器的频率响应

$$y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

- **拉氏反变换为：**

$$y(t)=\frac{k\omega_n\omega}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi_1)+\frac{k\omega_n\omega}{(1-\xi^2)\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left[\omega_n\left(1+\xi^2\right)t+\varphi_2\right]$$

去掉瞬态响应,整理后得到稳定后的稳态响应：

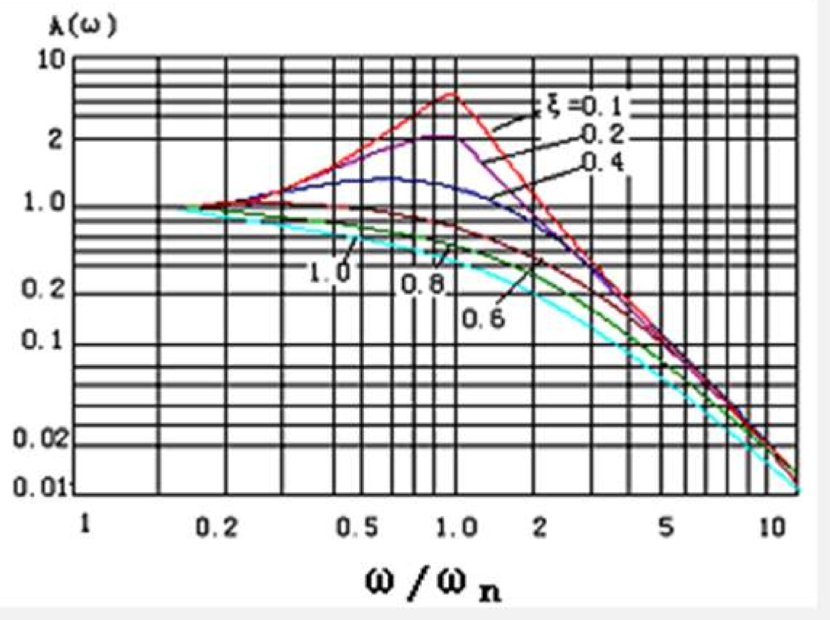
幅频特性 $A(\omega)=\left|\frac{y(t)}{k}\right|=\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+(2\xi\omega/\omega_n)^2}}$　　**相频特性** $\varphi(\omega)=-tg^{-1}\left[\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]$

② 二阶传感器的频率响应

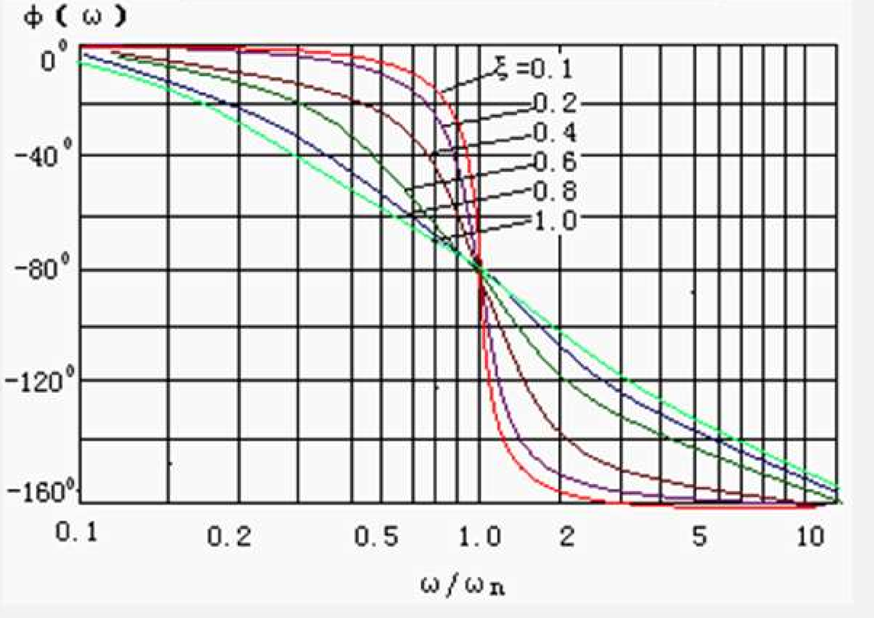
☞ 要使二阶系统稳定工作需要恰当选择**信号频率**和**阻尼系数**。

$$A(\omega)=\left|\frac{y(t)}{k}\right|=\frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2+(2\xi\omega/\omega_n)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-tg^{-1}\left[\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right]$$



幅—频特性



相—频特性

第2章　传感器的基本特性

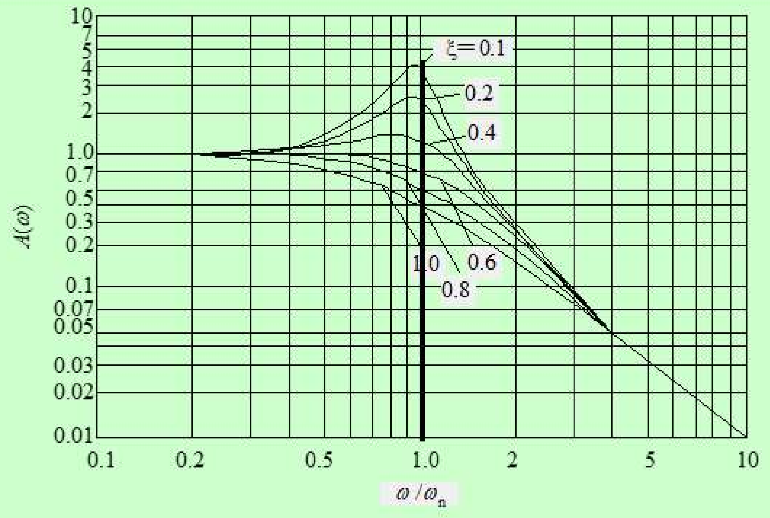
- 二阶传感器频率响应讨论：

a) 当$\omega_n >> \omega$时（左），
幅值$A(\omega) \approx 1$，$\varphi(\omega) \approx 0$；

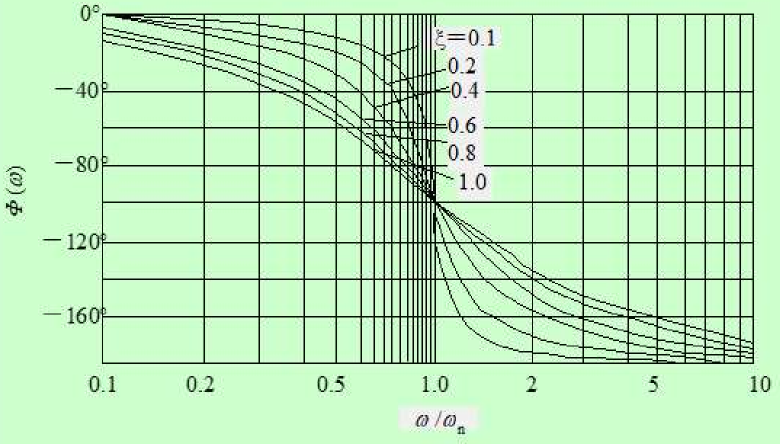
b) 当$\xi < 1$，且$\omega_n = \omega$ ($\omega/\omega_n = 1$)时，
在 $\omega/\omega_n = 1$附近有个峰值，系统会
产生共振；这时相差$90^0 \sim 180^0$；

c) 为保证增益避免共振应满足
$\omega_n \geq (3 \sim 5)\ \omega$，
传感器固有频率 ω_n 至少大于被测信
号频率 ω 的 3～5 倍。

➢ 二阶传感器动态特性主要决定传感器**固有频率** ω_n 和**阻尼系数**ξ 。



(a)



(b)

第2章 传感器的基本特性

☞ **传感器频域响应特性指标叙述如下：**

① 通频带$\omega_{0.707}$：传感器在对数幅频特性曲线上幅值衰减3dB时所对应的频率范围。

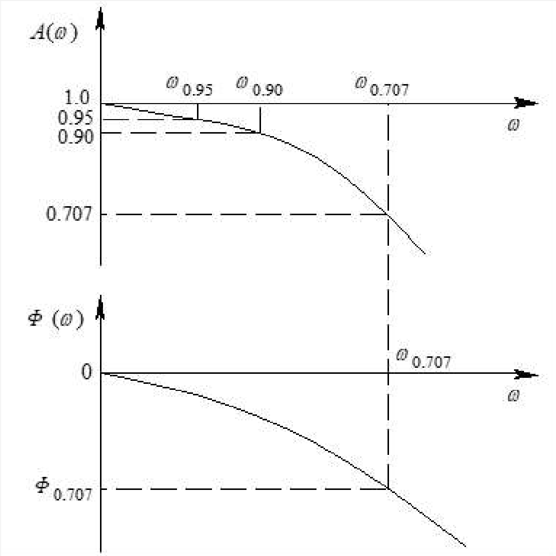
② 工作频带$\omega_{0.95}$（或$\omega_{0.90}$）：当传感器的幅值误差为±5%（或±10%）时其增益保持在一定值内的频率范围。

③ 时间常数τ：用时间常数τ来表征一阶传感器的动态特性。τ越小，频带越宽。

④ 固有频率ω_n：二阶传感器的固有频率ω_n表征其动态特性。

⑤ 相位误差：在工作频带范围内，传感器的实际输出与所希望的无失真输出间的相位差值，为相位误差。

⑥ 跟随角$\Phi_{0.707}$:当$\omega=\omega_{0.707}$时，对应于相频特性上的相角，为跟随角。



传感器的频域动态性能指标

单选题 1分

传感器的静态特性指标之一为（ ）

A 幅频特性

B 相频特性

C 时间常数

D 稳定性

单选题 1分

在时域分析传感器的动态特性时，通常采用的激励信号为

A 脉冲信号

B 正弦信号

C 三角波信号

D 阶跃信号

填空题 2分

一阶系统传感器动态响应取决于 [填空1]，并且该参数越 [填空2] （选填“大”/“小”）传感器的动态特性越好。

二阶系统传感器动态响应取决于 [填空3] [填空4]

第2章　传感器的基本特性

2.2　传感器动态特性

小结：影响传感器动态特性的主要参数：

1. 时间常数τ，τ越小响应越快，频带越宽；
2. 传感器固有频率ω_n，选择在（3～5）ω（信号）；
3. 阻尼比ξ，选择在0.6～0.8，原则是过冲不太大，稳定时间不太长。

第2章　传感器的基本特性

本章要点：

- 传感器的静态特性指标包括：
  线性度、迟滞、重复性、灵敏度、漂移、稳定性等等;
- 传感器检测系统的转换、传输特性可由传递函数表示;
- 传感器的动态特性讨论：
  传递函数;
  一阶传感器、二阶传感器的
  瞬态响应特性，随时间变化关系;
  频率响应特性（幅频特性、相频特性）;
- 系统方程式状态变量是一次的系统，尤其系统都是常数的系统叫线性常系数系统，我们课程以后讨论的都是以线性常系数系统为对象;
- 一阶系统状态变量是一个，二阶系统状态变量是两个，一般情况下，有n个状态变量的系统叫n阶系统。