第三讲　一元函数积分学

核心考点

1. 定义
2. 计算(重点难点)
3. 应用

一、定义

1. 不定积分

$\forall x \in I$,使 $F'(x) = f(x)$ 对,则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

全体原函数就叫不定积分,记成:$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

2. 定积分

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【小结】

$\int f(x)\mathrm{d}x$ 为函数族,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为面积代表值

牛顿—莱布尼茨公式/N-L 公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$

二、计算(四大方法)

1. 凑微分法

(1) 基本积分公式

$$\int x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1}+C, k\neq -1 \begin{cases} \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}+C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}+C \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x+C, a>0, a\neq 1$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x+C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x+C$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x+C$$

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|+C$$

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x|+C$$

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x+\tan x|+C$$

$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x-\cot x|+C$$

$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left| x+\sqrt{x^2-a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

【例 1】［张宇带你学高等数学·上册 P147 第 2(19) 题］

$$\int \tan\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P147 第 2(20) 题］

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\mathrm{d}x.$$

【分析】

【例 3】 $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x(1+\cos x e^{\sin x})}\mathrm{d}x$.

【分析】

2. 换元法

当凑微分法不成功时，考虑换元，从而使题目从复杂变简单

(1) 三角换元——当被积函数 $f(x)$ 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$ 可作如下换元：

$$\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow \text{令 } x = a\sin t, \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow \text{令 } x = a\tan t, \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow \text{令 } x = a\sec t, \begin{cases} x > 0, 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ x < 0, \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

【注】若见到 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，要先化为

$\sqrt{\varphi^2(x)-k^2}$，$\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$，$\sqrt{\varphi^2(x)+k^2}$，再作三角换元.

(2) 倒代换 $\left(x=\dfrac{1}{t}\right)$— 可用于分子次数明显低于分母次数时，特别地.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^k\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^k\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^k\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x$

$k=1,2,4$

(3) 复杂部分代换 — 令复杂部分 $=t$

$\sqrt[n]{ax+b}=t$，$\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$，$\sqrt{a\mathrm{e}^{bx}+c}=t$，(根式代换)

a^x，$\mathrm{e}^x=t$(指数代换)

$\ln x = t$(对数代换)

$\arcsin x, \arctan x = t$(反三角函数代换)等等

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 P148 第 2(38) 题]

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

【分析】

【例 2】[张宇带你学高等数学·上册 P148 第 2(40) 题]

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}.$$

【分析】

3. 分部积分法

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow \mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}(uv) = \int v\mathrm{d}u + \int u\mathrm{d}v \Rightarrow uv = \int v\mathrm{d}u + \int u\mathrm{d}v$$

$$\Rightarrow \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

此方法一般是在运算过程中

$$\begin{cases} 1.\ \text{出现了不同类型函数的乘积} \\ 2.\ \text{且求} \int u\mathrm{d}v \text{ 困难,而求} \int v\mathrm{d}u \text{ 简单时} \end{cases}$$

(1) 被积函数为 $P_n(x) \cdot \mathrm{e}^{kx}$,$P_n(x)\sin ax$,$P_n(x)\cos ax$,选 $P_n(x) = u$.

(2) 被积函数为 $\mathrm{e}^{ax}\sin bx$,$\mathrm{e}^{ax}\cos bx$,选谁当 u 都行.

(3) 被积函数为 $P_n(x)\ln x$,$P_n(x)\arcsin x$;$P_n(x)\arctan x$,选 $\ln x$,arc$—= u$.

【注】分部积分公式$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$ 的推广为:

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$$

可用表格法记忆

【例 1】［张宇带你学高等数学·上册 P152 第 19 题］

$\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P152 第 7 题］

$$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx.$$

【分析】

【例 3】［张宇带你学高等数学·上册 P152 第 5 题］

$\int x^2 \ln x \mathrm{d}x.$

【分析】

4. 有理函数的积分

(1) 定义:形如$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x$,$(n < m)$的积分

(2) 方法

1) 将$Q_m(x)$因式分解

2) 将$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干最简有理公式之和

(3) 拆分原则

1)$Q_m(x)$分解出$(ax+b)^k \Rightarrow$ 产生k项

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}, k=1,2,\cdots$$

2)$Q_m(x)$分解出$(px^2+qx+r)^k \Rightarrow$ 产生k项

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}, k=1,2,\cdots$$

【例 1】［张宇带你学高等数学·上册 P156 第 5 题］

$$\int \frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x.$$

【分析】

【例 2】[张宇带你学高等数学·上册 P156 第 9 题]

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}.$$

【分析】

三、定积分的计算

①$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

②$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{令 x=\varphi(t)} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$

且要求 $\varphi'(t)$ 连续

③$\int_{a}^{b} u\mathrm{d}v = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\mathrm{d}u$

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 P194 第 1(8)题]

$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x.$

【分析】

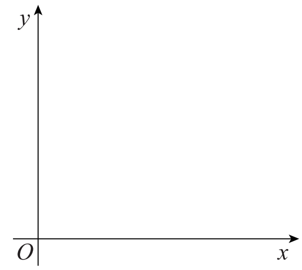
【例 2】[张宇带你学高等数学·上册 P199 第 7(4)题]

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$$

【分析】

四、一元积分学的应用

1. 用积分表达和计算平面图形的面积



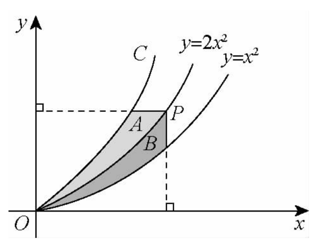
$y=y_1(x), y=y_2(x), x=a, x=b(a<b)$ 所围成的平面图形的面积.

$$S=\int_a^b |y_2(x)-y_1(x)|\,\mathrm{d}x$$

【例】［张宇带你学高等数学·上册 P242 第 5 题］

如图所示，从下到上依次有三条曲线：$y=x^2$，$y=2x^2$ 和 C，假设对曲线 $y=2x^2$ 上的任一点 P，所对应的面积 A 和 B 恒相等，求曲线 C 的方程.

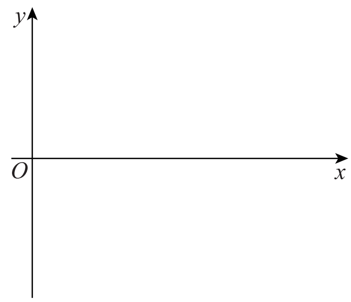
【分析】



2. 用积分表达和计算旋转体的体积

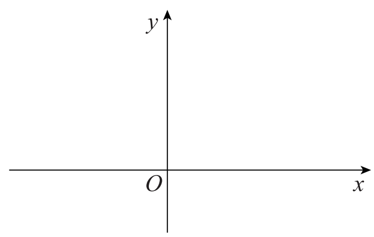
(1) $y=y(x)$ 与 $x=a,x=b(a<b)$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积为

$$V=\int_a^b \pi y^2(x)\mathrm{d}x$$



(2) $y=y(x)$ 与 $x=a,x=b,(a<b)$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积为

$$V_y=\int_a^b 2\pi x\mid y(x)\mid \mathrm{d}x\text{(柱壳法)}$$

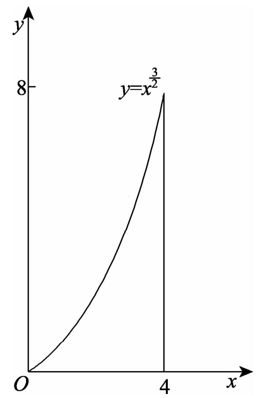


【例 1】［张宇带你学高等数学·上册 P243 第 7 题］

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求平面图形 D 的面积 A；(2) 求平面图形 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

【分析】



【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P244 第 8 题］

求由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$，直线 $x=4$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

【分析】

3. 用积分表达和计算函数的平均值

$y(x)$ 在$[a,b]$上的平均值 $\bar{y}=\dfrac{\int_a^b y(x)\mathrm{d}x}{b-a}$

【例】函数 $y=\ln x$ 在区间$[1,\mathrm{e}]$上的平均值为________.

【分析】