三、中值定理

1. 定理总结

(1) 涉及 $f(x)$ 的定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,则

①(有界性定理) $\exists K>0$,使 $|f(x)|\leqslant K$, $\forall x\in[a,b]$;

②(最值定理) $m\leqslant f(x)\leqslant M$,其中 m,M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小、最大值;

③(介值定理) 当 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 时,则 $\exists\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=\mu$;

④(零点定理) 当在 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

(① 到 ④ 只需使用,不需证明)

(2) 涉及 $f'(x)$ 的定理

⑤ 费马定理

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 $\begin{cases}1)\text{ 可导}\\2)\text{ 取极值}\end{cases}\Rightarrow f'(x_0)=0$.

【作业:证明之】

⑥ 罗尔定理

设 $f(x)$ 满足以下三条 $\begin{cases}1)[a,b]\text{ 连续}\\2)(a,b)\text{ 内可导,则 }\exists\xi\in(a,b)\text{,使 }f'(\xi)=0.\\3)f(a)=f(b)\end{cases}$

【作业:证明之】

⑦ 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases}1)[a,b]\text{ 上连续}\\2)(a,b)\text{ 内可导}\end{cases}$,则 $\exists\xi\in(a,b)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

【注】 若 $f(a)=f(b)$,则 $f'(\xi)=0$,即为罗尔定理.

⑧ 柯西中值定理

设 $f(x),g(x)$ 满足 $\begin{cases}1)[a,b]\text{ 连续}\\2)(a,b)\text{ 内可导,则}\\3)g'(x)\neq 0\end{cases}$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

【注】 a. 若取 $g(x)=x\Rightarrow\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(\xi)}{1}\Rightarrow$ 拉格朗日中值定理;

b. 柯西中值定理 $\Rightarrow$ 拉格朗日中值定理 $\Rightarrow$ 罗尔定理,拉格朗日中值定理不可倒推柯西中值定理.

⑨ 泰勒定理(泰勒公式)

任何可导函数 $f(x)=\sum a_nx^n$.

1) 带拉格朗日余项的泰勒公式:

$f(x)n+1$ 阶可导:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为通项,$\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉式余项,ξ 介于 x 和 x_0 之间

如:$f(x)$ 三阶可导 $\Rightarrow$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3(\ast\ \text{泰勒公式})$$

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间；

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式又成为麦克劳林公式：

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^3$（* 麦克劳林公式）

其中 ξ 介于 x 和 0 之间.

2）带佩亚诺余项的泰勒公式

若 $f(x)$ n 阶可导：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

若 $f(x)$ 3 阶可导：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式又成为麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$$

【注】

$$\begin{cases}\text{拉氏 —— 用于证明}\\ \text{佩氏 —— 用于计算}\end{cases}$$

2. 五大方面的应用

(1) 涉及 $f(x)$ 的应用(①－④)

【例】设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,证明 $\exists\xi\in[a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

[积分中值定理]

【分析】

(2) 罗尔定理的应用(⑥)

$f(a)=f(b)\Rightarrow f'(\xi)=0$

方法一:求导公式逆用法

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 P123 第 7 题]

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,在 $(0,a)$ 内可导,且 $f(a)=0$,证明存在一点 $\xi\in(0,a)$,使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

【分析】

【例 2】$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x, k>1$.

证明：$\exists\,\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=\left(1-\dfrac{1}{\xi}\right)f(\xi)$.

【分析】

方法二:积分还原法

① 将欲证结论中的 ξ 改成 x

② 积分(令 $c=0$)

③ 移项,使等式一端为 0,则另一端记为 $F(x)$.

【例 1】证明拉格朗日中值定理:$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$(2009)

【分析】

【例 2】证明柯西中值定理：$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

【分析】

(3) 拉格朗日中值定理的应用(⑦)

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\xi\in(a,b),$$

或者 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$

1) 将 f 复杂化.

【例】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,(a,b)内可导,

证明:$\exists\xi\in(a,b)$,使

$$bf(b)-af(a)=[f(\xi)+\xi f'(\xi)](b-a)$$

【分析】

2）给出相对高阶的条件 $\Rightarrow$ 证明低阶不等式

【例】设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：$\forall\, x_1 \neq x_2 > 0$，有 $f(x_1+x_2) < f(x_1)+f(x_2)$

【分析】

3）给出相对低阶的条件 $\Rightarrow$ 证明高阶不等式

【例】设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(2)>f(1)$，$f(2)>\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$，证明：$\exists\,\xi\in(1,3)$，使 $f''(\xi)<0$.

【分析】

4）具体化 f，由 $a<\xi<b\Rightarrow$ 不等式

【例 1】［张宇带你学高等数学·上册 P93 第 9 题］

设 $a>b>0$，$n>1$，证明：

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

【分析】

【例 2】［张宇带你学高等数学·上册 P93 第 10 题］

设 $a>b>0$,证明：

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

【分析】

5)ξ的具体表达式

【例】设 $f(x)=\arcsin x$,ξ为$f(x)$在$[0,t]$上拉格朗日中值定理的中值点,$0<t<1$,求极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\xi}{t}$.

【分析】

(4) 柯西中值定理的应用(⑧)

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{f(b)-g(a)}$$

f — 抽象

g — 具体

【例】[张宇带你学高等数学·上册 P123 第 8 题]

设 $0<a<b$,函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,试利用柯西中值定理,证明存在一点 $\xi\in(a,b)$,使

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

【分析】

(5) 泰勒公式的应用 —— 信号“$f^{(n)}(\xi),n\geqslant 2$”

[注]

① $\left.\begin{array}{l} f(a)=f(b)\Rightarrow f'(\xi_1)=0 \\ f(c)=f(d)\Rightarrow f'(\xi_2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f''(\xi_3)=0$

② 泰勒展开成 $f',f'',\cdots$

【例】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,则

(A) 当 $f'(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(B) 当 $f''(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(C) 当 $f'(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(D) 当 $f''(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

【分析】

三、导数的几何应用

三点两性一线：极值点、最值点、拐点；单调性、凹凸性；渐近线

1. 极值与单调性

（1）极值定义

※ 必须是双侧定义，否则不考虑极值

1）广义极值

$\exists x_0$ 的某个领域，$\forall x \in U(x_0, \delta)$ 都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$，称 x_0 为 $f(x)$ 的广义极大值点.

2）真正极值

$\exists x_0$ 的某个去心领域，$\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 都有 $f(x) < f(x_0)$，称 x_0 为 $f(x)$ 的真正极大值点.

【注】若无特殊说明，按广义极值办事，最值同理.

（2）单调性与极值判别

1）若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上单调递增；

若 $f'(x) < 0, \forall x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上单调递减；

2）若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内可导，则

$$\begin{cases} \text{当 } x_0 \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ 时 } f'(x) < 0, \\ \text{当 } x_0 \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ 时 } f'(x) > 0, \Rightarrow \text{极小} \\ \text{当 } x_0 \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ 时 } f'(x) > 0, \\ \text{当 } x_0 \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ 时 } f'(x) < 0, \Rightarrow \text{极大} \\ \text{若 } f'(x) \text{ 在} (x_0 - \delta, x_0) \text{ 与} (x_0, x_0 + \delta) \text{ 内不变号} \Rightarrow \text{不是极值} \end{cases}$$

3) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0\Rightarrow$ 极小值

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)<0\Rightarrow$ 极大值

【注】 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$

$\Rightarrow f(x)-f(x_0)=\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$

$\Rightarrow f(x)>f(x_0)$

【例 1】［张宇带你学高等数学·上册 P101 第 3(2)(4) 题］

确定下列函数的单调区间：

(1)$y=2x+\dfrac{8}{x}\quad(x>0)$；

(2)$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

【分析】

【例 2】[张宇带你学高等数学·上册 P110 第 3 题]

试问 a 为何值时,函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值?它是极大值还是极小值?并求此极值.

【分析】

2. 凹凸性与拐点

(1) 凹凸性

$\forall x_1, x_2 \in I$,有:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f(x) \text{ 是凹曲线}$$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow f(x) \text{ 是凸曲线}$$

(2) 拐点 —— 连续曲线凹凸弧的分界点

(3) 判别法:设 $f(x)$ 在 I 上二阶可导,

$$1)\begin{cases} \text{若 } f''(x_0) > 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x) \text{ 是凹的} \\ \text{若 } f''(x_0) < 0, \forall x \in I \Rightarrow f(x) \text{ 是凸的} \end{cases}$$

2) 若 $f(x)$ 在 x_0 点的左右邻域 $f''(x)$ 变号 $\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ 为拐点

【例 1】［张宇带你学高等数学·上册 P105 第 10(5) 题］
求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间：

$$y = \mathrm{e}^{\arctan x}.$$

【分析】

【例 2】[张宇带你学高等数学·上册 P139 例 14]

设 $y=f(x)$ 有三阶连续导数,且 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$,$f'''(x_0)\neq 0$. 问 x_0 是否是极值点?$(x_0,f(x_0))$ 是否是拐点?证明你的结论.

【分析】

3. 渐近线

(1) 铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+(\text{或}x_0^-)} f(x)=\infty$,则称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一条铅直渐近线.

出现在:无定义点或者开区间端点

(2) 水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty(\text{或}-\infty)} f(x)=A$,则称 $y=A$ 为 $f(x)$ 的一条水平渐近线.

(3) 斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}[f(x)-ax]=b\exists$,则称 $y=ax+b$ 为一条斜渐近线.

【例】[张宇带你学高等数学·上册 P138 例 12(1)]

曲线 $y=\dfrac{x^2+3}{2x-1}+e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线的条数为(　　).

(A)1　　　　(B)2　　　　(C)3　　　　(D)4

【分析】

4. 最值

(1) 对于函数 $f(x)$,在$[a,b]$上找出三类点

$$\begin{cases} f'(x)=0 \Rightarrow x_0 \text{ 驻点} \\ f'(x) \text{ 不 } \exists \Rightarrow x_1 \text{ 不可导点} \\ \text{端点 } a,b \end{cases}$$

比较 $f(x_0),f(x_1),f(a),f(b)$ 大小,取其最大(小)者为最大(小)值.

(2) 若在 I 上求出唯一极大(小)值点,则由实际背景 $\Rightarrow$ 此点即为最大(小)值.

若(a,b)内,端点考虑取极值即可.

【例 1】[张宇带你学高等数学·上册 P111 第 6(3) 题]

求下列函数的最大值、最小值:

$$y=x+\sqrt{1-x},-5\leqslant x\leqslant 1.$$

【分析】

【例 2】[张宇带你学高等数学·上册 P114 第 17 题]

一房地产公司有 50 套公寓要出租.当月租金为 4 000 元时,公寓会全部租出去.当月租金每增加 200 元时,就会多一套公寓租不出去.而租出去的公寓每月需花费 400 元的维修费.试问房租定为多少时可获得最大收入?

【分析】