

2020

张宇考研数学

高等数学基础讲义

引言

一、基础阶段任务：

- (1) 熟记基本概念、定理、公式
- (2) 掌握基本方法与技术
- (3) 培养基本计算能力：求极限、求导数、求积分

二、目标：

- (1) 建成基础知识结构
- (2) 形成基础数学素养

三、内容安排：

- | | | |
|-----------|---|-----|
| (1) 极限 | } | 高数上 |
| (2) 一元微分学 | | |
| (3) 一元积分学 | | |
| (4) 多元微分学 | } | 高数下 |
| (5) 二重积分 | | |
| (6) 微分方程 | | |

第一讲 极限

核心考点：

- (1) 定义
- (2) 性质
- (3) 计算
- (4) 应用

一、极限定义

1. 函数极限

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \epsilon > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \epsilon$.	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M$.	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M$.	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$.
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \epsilon > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \epsilon$.	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M$.	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M$.	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$.
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \epsilon > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \epsilon$.	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M$.	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M$.	$\forall M > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M$.

续表				
	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0,$ $\exists X > 0,$ $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ $ x > X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ $ x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0,$ $\exists X > 0,$ $x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ $x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ $x > X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ $x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0,$ $\exists X > 0,$ $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ $x < -X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ $x < -X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$

【例 1】 [张宇带你学高等数学·上册 P16 第 10 题]

证明:若 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A ,则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

【分析】

【例 2】〔张宇带你学高等数学·上册 P17 第 11 题〕

根据函数极限的定义证明:函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

【分析】

【例 3】 [张宇带你学高等数学·上册 P17 第 12 题]

试给出 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的局部有界性的定理, 并加以证明.

【定理】 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 则存在 $X > 0$ 及 $M > 0$, 使对 $\forall |x| > X$ 均有 $|f(x)| \leq M$.

【分析】

2. 数列极限

n 为自然数, $n \rightarrow \infty$ 专指 $n \rightarrow +\infty$, 而略去“+”不写

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - A| < \epsilon$$

【例 4】 [张宇带你学高等数学·上册 P14 第 6 题]

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明: 如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限, 但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

【分析】

【例 5】 [张宇带你学高等数学·上册 P14 第 8 题]

对于数列 $\{x_n\}$, 若 $x_{2k-1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明:
 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

【分析】

二、极限三大性质

1. 唯一性

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 A 唯一.

【分析】

【例 6】 [张宇带你学高等数学·上册 P15 第 4 题]

求 $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

【分析】

【例 7】 [张宇带你学高等数学·上册 P44 例 6(1)]

当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为().

(A) 2

(B) 0

(C) ∞

(D) 不存在但不为 ∞

【分析】

2. 局部有界性

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists M > 0, \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,
恒有 $|f(x)| < M$.

【分析】

【例 8】 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在() 内有界.

A. $(-1, 0)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, 2)$

D. $(2, 3)$

【分析】

3. 局部保号性

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) > 0$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < 0$, 则 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) < 0$

【分析】

【例 9】 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -2$, 则 $x = 0$ 是 ().

- A. 极大值点
- B. 极小值点
- C. 非极值点
- D. 无法判断

【分析】

三、极限的计算

1. 函数极限计算

① 七种未定式 $\left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty \right]$

【注】0 不是真的 0, 1 不是真的 1.

② 计算工具

(1) 洛必达法则

a) 若 $\lim_{x \rightarrow \cdot} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \cdot} g(x) = 0$

b) 且 $\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f'(x)}{g'(x)} \exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

隐含条件: $f(x), g(x)$ 都为无穷小量; 都可导; 导函数比值的极限存在.

【注 1】如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

洛必达法则能不能用,用了再说,用了若存在,则存在;用了若不存在,只能说洛必达法则失效,并不能说原极限一定不存在,如:

【例 10】[张宇带你学高等数学·上册 P97 第 2 题]

验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在,但不能用洛必达法则得出.

【分析】

【例 11】 [张宇带你学高等数学·上册 P97 第 3 题]

验证极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在,但不能用洛必达法则得出.

【分析】

【注 2】常用等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

第一组 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0\right)$

【例 1】 [张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(9) 题]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x} \left(\frac{0}{0}\right).$$

【分析】

【例 2】 [张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(7)题]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

【分析】

【例 3】 [张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(12)题]

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2} (0 \cdot \infty).$$

【分析】

第二组($\infty - \infty$)

①有分母,则通分

【例】[张宇带你学高等数学·上册 P123 第 10(2)题]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] (\infty - \infty).$$

【分析】

②没有分母,创造分母

【例】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x].$

【分析】

第三组($\infty^0, 0^0, 1^\infty$)

$$U(x)^{V(x)} = e^{V(x) \ln U(x)}$$

【例 1】 [张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(16)题]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} (\infty^0).$$

【分析】

【例 2】 [张宇带你学高等数学·上册 P95 第 1(15)题]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} (0^0).$$

【分析】

【例 3】 [张宇带你学高等数学·上册 P123 第 10(4)题]

$\lim_{x \rightarrow \infty} [(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$ (其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$)
(1^∞).

【分析】

(2) 泰勒公式

任何可导函数 $f(x) = \sum a_n x^n$

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\textcircled{1} \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\textcircled{2} \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\textcircled{3} \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\textcircled{4} \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\textcircled{5} \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\textcircled{6} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\textcircled{7} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\textcircled{8} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) (|x| < 1)$$

$$\textcircled{9} (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

【例 1】 [张宇带你学高等数学·上册 P99 第 6 题]

求函数 $f(x) = \tan x$ 的带有佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式.

【分析】

【例 2】〔张宇带你学高等数学·上册 P98 第 3 题〕

求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.

【分析】

【例 3】 [张宇带你学高等数学·上册 P100 第 10(1)(3) 题]

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1 + x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}.$$

【分析】

2. 数列极限运算

(1) 若 x_n 易于连续化, 转化为函数极限计算

依据: 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$

【例】 [张宇带你学高等数学·上册 P41 第 4(3) 题]

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{an} - 1) (a > 0)$.

【分析】

(2) 若 $\{x_n\}$ 不易于连续化, 用“夹逼准则”(或定积分定义)

【例 1】 [张宇带你学高等数学·上册 P44 第 4(1) 题]

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

【分析】

【例 2】 [张宇带你学高等数学·上册 P41 第 4(1) 题]

$$\text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right).$$

【分析】

(3) 若 $\{x_n\}$ 由递推式 $x_n = f(x_{n-1})$ 给出, 用“单调有界准则”:
给出 $\{x_n\}$, 若 $\{x_n\}$ 单增且有上界或者单减且有下界 \Rightarrow
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \exists \Leftrightarrow \{x_n\}$ 收敛

【例】 [张宇带你学高等数学·上册 P41 第 4(2) 题]

设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

【分析】

四、极限的应用 —— 连续与间断

1. 基本常识

任何初等函数在其定义区间内连续(只要见到的函数都是初等函数),故考研中只研究两类特殊的点:

分段函数的分段点(可能间断)

无定义点(必然间断)

2. 连续的定义

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 称在 $x = x_0$ 处连续.

【注】 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 三者相等才连续.

3. 间断的定义

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点的某去心邻域有定义

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (2) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (3) $f(x_0)$

a) 第一类间断点(1), (2) 均存在, 且

(1) \neq (2): x_0 为跳跃间断点

(1) = (2) \neq (3): x_0 为可去间断点

b) 第二类间断点(1), (2) 至少一个不存在(目前为止考研只考了(1)(2) 均不存在)

若不存在 = $\infty \Rightarrow$ 无穷间断点

若不存在 = 振荡 \Rightarrow 振荡间断点

【注】① 单侧定义不讨论间断性

② 若出现左右一边是振荡间断, 一边是无穷间断, 则我们应该分侧讨论

【例 1】 [张宇带你学高等数学·上册 P97 第 4 题]

讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 处的连续性.

【分析】

【例 2】 [张宇带你学高等数学·上册 P27 第 3 题]

下列函数在指出的点处间断,说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点,那么补充或改变函数的定义使它连续:

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, x = 1, x = 2;$$

$$(2) y = \frac{x}{\tan x}, x = k\pi, x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

$$(3) y = \cos^2 \frac{1}{x}, x = 0;$$

$$(4) y = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1, \\ 3 - x, & x > 1, \end{cases} \quad x = 1.$$

【分析】