

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Инженерно-физический факультет
Кафедра автоматизированных систем обработки информации и
управления

ОТЧЕТ ПО ПРАКТИКЕ

Программная реализация численного метода
Решение системы линейных алгебраических
уравнений методом Крамера

1 курс, группа ИВТ АСОИУ

Выполнил:

_____ Д. Е. Вакун
«___» _____ 2025 г.

Выполнил:

_____ Я. Е. Торотько
«___» _____ 2025 г.

Выполнил:

_____ А. С. Удодов
«___» _____ 2025 г.

Руководитель:

_____ С. В. Теплоухов
«___» _____ 2025 г.

Майкоп, 2025 г.

Содержание

Содержание	2
1 Введение	3
2 Ход работы	5
2.1 Код приложения	5
2.2 Тестирование программы	10
3 Демонстрация работы программы	12
Список литературы	13

1. Введение

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является одной из фундаментальных задач вычислительной математики и находит широкое применение в различных областях науки и техники, таких как физика, экономика, инженерные расчеты и многие другие. Существует множество методов решения СЛАУ, одним из классических является метод Крамера.

Целью данной работы являлась разработка программного средства на языке C++ для решения систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера для систем с числом неизвестных не более трех.

Для достижения поставленной цели были решены **следующие задачи:**

- 1) Изучены теоретические основы метода Крамера, условия его применимости и алгоритм вычисления решения.
- 2) Разработан алгоритм программы, включающий ввод исходных данных (матрицы коэффициентов и вектора свободных членов), вычисление необходимых определителей и нахождение вектора решения.
- 3) Реализована программа на языке программирования C++, обеспечивающая пользовательский интерфейс для ввода данных и вывода результатов, а также контроль корректности вводимых значений.
- 4) Проведено тестирование разработанной программы на примерах СЛАУ с известными решениями.

В качестве инструмента для реализации был выбран язык программирования C++ благодаря его производительности и возможностям работы со структурами данных, необходимыми для представления матриц.

В основе программной реализации лежит **метод Крамера**. Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты при неизвестных, а b_i — свободные члены ($i, j = 1, \dots, n$).

Согласно методу Крамера, если главный определитель матрицы системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Это решение для каждого неизвестного x_i находится по формуле:

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

где Δ — главный определитель основной матрицы коэффициентов системы, а Δ_i (числитель дроби в формуле (??), если не выносить $\frac{1}{\Delta}$) представляет собой определитель матрицы, полученной из матрицы коэффициентов заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Метод Крамера применим, если главный определитель системы $\Delta \neq 0$. Если $\Delta = 0$, система либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

2. Ход работы

2.1 Код приложения

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <limits>
#include <iomanip>

using namespace std;

using Matrix = vector<vector<double>>;
using Vector = vector<double>;

void printMatrix(const Matrix& mat) // Функция для вывода матрицы на консоль.
{
    if (mat.empty()) {
        cout << "Матрица пуста для вывода.\n";
        return;
    }
    for (const auto& row : mat)
    {
        for (double val : row)
        {
            cout << fixed << setprecision(2) << setw(8) << val << " ";
        }
        cout << endl;
    }
}

Matrix getMinor(const Matrix& mat, int skip_row, int skip_col) // Функция для
получения минора матрицы.
{
    int n = mat.size();
    if (n <= 1)
    {
        return Matrix();
    }
    Matrix minor(n - 1, vector<double>(n - 1));
    int r = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
```

```

{
    if (i == skip_row) continue;
    int c = 0;
    for (int j = 0; j < n; ++j)
    {
        if (j == skip_col) continue;
        minor[r][c] = mat[i][j];
        c++;
    }
    r++;
}
return minor;
}

```

double calculateDeterminant(const Matrix& mat)// Рекурсивная функция для вычисления определителя матрицы.

```

{
    int n = mat.size();

    if (n == 1)
    {
        return mat[0][0];
    }

    if (n == 2)
    {
        return mat[0][0] * mat[1][1] - mat[0][1] * mat[1][0];
    }

    double determinant = 0;
    for (int k = 0; k < n; ++k)
    {
        Matrix minor = getMinor(mat, 0, k);
        determinant += pow(-1, k) * mat[0][k] * calculateDeterminant(minor);
    }
    return determinant;
}

```

Matrix createMatrixForKramer(const Matrix& A, const Vector& b, int columnIndexToReplace)// Функция для создания вспомогательной матрицы для метода Крамера.

```

{
    int n = A.size();
    if (n == 0 || A[0].size() != n || b.size() != n)

```

```

{
    cerr << "Ошибка: Некорректные размеры матрицы A или вектора b для
    createMatrixForKramer.\n";
    return Matrix();
}

Matrix Ak = A;
for (int i = 0; i < n; ++i)
{
    Ak[i][columnIndexToReplace] = b[i];
}
return Ak;
}

int main()
{
    setlocale(LC_ALL, "Russian");
    cout << "Программа для решения СЛАУ методом Крамера.\n";

    int n;
    while (true)
    {
        cout << "Введите порядок системы (количество неизвестных n не должно превышать
        3): ";
        if (!(cin >> n))
        {
            cout << "Ошибка ввода. Пожалуйста, введите целое число.\n";
            cin.clear();
            cin.ignore(numeric_limits<streamsize>::max(), '\n');
        }
        else if (n <= 0 || n >= 4)
        {
            cout << "Порядок системы должен быть 1, 2 или 3.\n";
        }
        else
        {
            break;
        }
    }

    Matrix A(n, Vector(n));
    Vector b(n);
    Vector x(n);

```

```

cout << "Введите элементы матрицы коэффициентов A (" << n << "x" << n << "):\n";
for (int i = 0; i < n; ++i)
{
    for (int j = 0; j < n; ++j)
    {
        while (true)
        {
            cout << "A[" << i + 1 << "][" << j + 1 << "]: ";
            if (!(cin >> A[i][j]))
            {
                cout << "Ошибка ввода. Пожалуйста, введите число.\n";
                cin.clear();
                cin.ignore(numeric_limits<streamsize>::max(), '\n');
            }
            else
            {
                break;
            }
        }
    }
}

cout << "Введите элементы столбца свободных членов b (" << n << "x1):\n";
for (int i = 0; i < n; ++i)
{
    while (true)
    {
        cout << "b[" << i + 1 << "]: ";
        if (!(cin >> b[i]))
        {
            cout << "Ошибка ввода. Пожалуйста, введите число.\n";
            cin.clear();
            cin.ignore(numeric_limits<streamsize>::max(), '\n');
        }
        else
        {
            break;
        }
    }
}

cout << "\nВведенная матрица A:\n";
printMatrix(A);
cout << "\nВведенный столбец свободных членов b:\n";

```



```

for (int i = 0; i < n; ++i)
{
    cout << "b[" << i + 1 << "] = " << fixed << setprecision(2) << b[i] << endl;
}

double detA = calculateDeterminant(A);
cout << "\nГлавный определитель системы det(A) = " << fixed <<
setprecision(4) << detA << endl;

const double epsilon = 1e-9;
if (abs(detA) < epsilon)
{
    bool all_det_i_zero = true;
    for (int j = 0; j < n; ++j)
    {
        Matrix Aj = createMatrixForKramer(A, b, j);
        if (abs(calculateDeterminant(Aj)) > epsilon)
        {
            all_det_i_zero = false;
            break;
        }
    }
    if (all_det_i_zero)
    {
        cout << "Система имеет бесконечно много решений (det(A)=0 и все det(Aj)=0).\"
        << endl;
    }
    else
    {
        cout << "Система не имеет решений (det(A)=0 и хотя бы один det(Aj)!=0).\"
        << endl;
    }
}
else
{
    cout << "\nРешения системы (x_i = det(A_i) / det(A)):\n";
    for (int j = 0; j < n; ++j)
    {
        Matrix Aj = createMatrixForKramer(A, b, j);

        double detAj = calculateDeterminant(Aj);
        x[j] = detAj / detA;
        cout << "x[" << j + 1 << "] = " << fixed << setprecision(4) << detAj << " / \"
        << detA << " = " << x[j] << endl;
    }
}

```

```

    }

    cout << "\nВектор решений x:\n";
    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        cout << "x[" << i + 1 << "] = " << fixed << setprecision(4) << x[i] << endl;
    }
}

return 0;
}

```

2.2 Тестирование программы

Для проверки корректности работы разработанной программы была решена тестовая система линейных алгебраических уравнений.

Тестовый пример

Рассмотрим следующую систему из трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными, которая была использована для тестирования:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 43 \\ 32x_1 + 88x_2 + 12x_3 = 23 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 76 \end{cases}$$

Для данной системы в программу были введены следующие значения:

- Матрица коэффициентов A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 32 & 88 & 12 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Вектор свободных членов b :

$$b = \begin{pmatrix} 43 \\ 23 \\ 76 \end{pmatrix}$$

После запуска программы и ввода указанных данных были получены следующие результаты для вектора решений x :

Вектор решений x :
 $x[1] = 14.5620$
 $x[2] = -5.8946$

$$x[3] = 6.3120$$

Для проверки корректности полученных программой значений, они были сравнены с ожидаемыми результатами, рассчитанными с помощью онлайн калькулятора "Решение систем линейных уравнений методом Крамера". Ожидаемые значения для данной системы:

- $x_1 \approx 14.5620$
- $x_2 \approx -5.8946$
- $x_3 \approx 6.3120$

Сравнение показывает, что результаты, выданные программой, хорошо согласуются с ожидаемыми значениями.

Вывод по тестовому примеру: Разработанная программа корректно решает заданную систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера, что подтверждается совпадением полученных результатов с ожидаемыми.

3. Демонстрация работы программы

Ниже на рисунке 1 представлен пример консольного вывода программы при решении системы линейных алгебраических уравнений. На скриншоте отображен процесс ввода данных пользователем и итоговый результат, выданный программой.

```
Программа для решения СЛАУ методом Крамера.  
Введите порядок системы (количество неизвестных n не должно превышать 3): 3  
Введите элементы матрицы коэффициентов A (3x3):  
A[1][1]: 2  
A[1][2]: 3  
A[1][3]: 5  
A[2][1]: 32  
A[2][2]: 88  
A[2][3]: 12  
A[3][1]: 6  
A[3][2]: 3  
A[3][3]: 1  
Введите элементы столбца свободных членов b (3x1):  
b[1]: 43  
b[2]: 23  
b[3]: 76  
  
Введенная матрица A:  
2.00 3.00 5.00  
32.00 88.00 12.00  
6.00 3.00 1.00  
  
Введенный столбец свободных членов b:  
b[1] = 43.00  
b[2] = 23.00  
b[3] = 76.00  
  
Главный определитель системы  $\det(A) = -1936.0000$   
  
Решения системы ( $x_i = \det(A_i) / \det(A)$ ):  
x[1] = -28192.0000 / -1936.0000 = 14.5620  
x[2] = 11412.0000 / -1936.0000 = -5.8946  
x[3] = -12220.0000 / -1936.0000 = 6.3120  
  
Вектор решений x:  
x[1] = 14.5620  
x[2] = -5.8946  
x[3] = 6.3120
```

Рис. 1. Пример вывода консоли при работе программы

Список литературы

- [1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник. — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 280 с.
- [2] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. — 12-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 312 с.
- [3] Кострикин А.И. Введение в алгебру. В 3-х томах. Том 1. Основы алгебры: Учебник для вузов. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 272 с.
- [4] Воеводин В.В. Линейная алгебра: Учебное пособие. — М.: Наука, 1980. — 400 с.
- [5] Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре: Учебник. — 5-е изд., испр. — М.: Добросвет, МЦНМО, 2009. — 280 с.
- [6] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: Учебное пособие. — 13-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2010. — 480 с.