参与人 2

参与人 1	L	R
U	(3,0)	(0,4)
D	(2,4)	(-1,8)

参与人 2

参与人 1	L	C	R
T	(3,0)	(0,-5)	(0,-4)
M	(1,-1)	(3,3)	(-2,4)
B	(0,4)	(4,1)	(-1,8)

参与人 2

参与人 1	L	C	R
T	(3,0)	(0,-5)	(0,-4)
B	(2,4)	(4,1)	(-1,8)

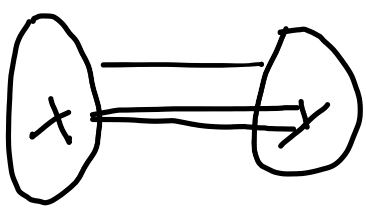
参与人 2

参与人 1	L	R
T	(3,0)	(0,-4)
B	(2,4)	(-1,8)

参与人 2

参与人 1	L	R
T	(3,0)	(0,-4)

$f: X \rightarrow Y$,对于任何 X 中的一个元素，我们都能在 Y 中找到唯一的元素与之对



例子：街道上有老太太跌倒，临近有两位行人甲和乙，他们独立决策是否去扶老太太，假设若有人扶老太太，每人获得自我满足感 3，但是扶的人需要付出劳动 1 被讹诈 3，请列出这个完全信息的静态博弈的三要素，画出双矩阵，并且找到纳什均衡。

		乙	
		扶	不扶
甲	扶	(-1，-1)	(-1，$\underline{3}$)
	不扶	($\underline{3}$，-1)	($\underline{0}$，$\underline{0}$)

例子：参与人 1、2 共同分割一元钱，两个参与人同时报出他们的方案s_1, s_2，我们知道$0 \le s_1, s_2 \le 1$。规则如下，如果$0 \le s_1 + s_2 \le 1$，则每人得到的钱就是他们出的方案s_1，s_2,若$s_1 + s_2 > 1$，则双方都得不到钱，收益为 0。

a) 请列出这个完全信息的静态博弈的三要素。

b) 请找到参与人 1 的最优反应；

c) 请找到参与人 2 的最优反应；

d) 请找到纳什均衡。

答：

a) 博弈的三要素为参与人，策略空间以及收益函数。

- 参与人：{参与人 1，参与人 2}
- 策略空间：$S_1 = \{s_1 | s_1 \in [0,1]\}$,$S_2 = \{s_2 | s_2 \in [0,1]\}$
- 收益函数

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1, & 0 \le s_1 + s_2 \le 1 \\ 0, & s_1 + s_2 > 1 \end{cases}, u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} s_2, & 0 \le s_1 + s_2 \le 1 \\ 0, & s_1 + s_2 > 1 \end{cases}$$

b) 首先

- 假设$0 \le s_2 < 1$。在这种情况下，参与人 1 的最优反应是什么呢，如果参与人 1 选择$s_1 > 1 - s_2$,则参与人 1 的收益为 0，因为$s_1 + s_2 > 1$；所以参与人的选

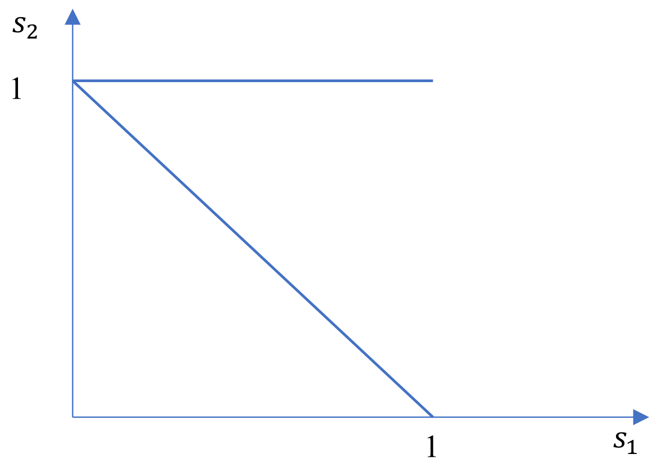
择在 0 到$1-s_2$之间，而在这个区间，参与人 1 显然会选择最大值$1-s_2$，因为可以获得最大的收益。

- 假设$s_2=1$。在这种情况下，如果参与人选择$s_1>0$，参与人 1 的收益都是 0，因为$s_1+s_2>1$；如果参与人选择$s_1=0$，参与人 1 的收益为s_1，仍然是 0，因为$s_1+s_2\le 1$。所以在$s_2=1$的情况下，无论参与人 1 选择什么，其收益都等于 0，因此参与人 1 的最优反应是[0,1]的任何值。

所以参与人 1 在给定参与人 2 的策略s_2时的最优反应为：

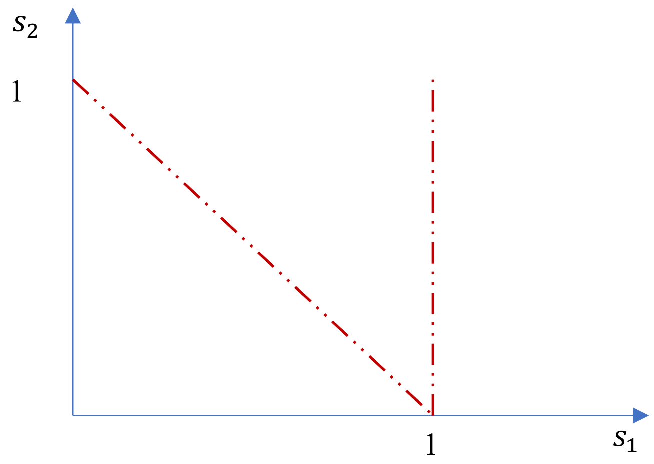
$$s_1(s_2)=\begin{cases}1-s_2, 0\le s_2<1\\ [0,1], \qquad s_2=1\end{cases}$$

我们也可以在图上画出参与人 1 的最优反应图。



c) 同理，我们可以得到参与人 2 在给定参与人 1 的策略s_1时的最优反应为：

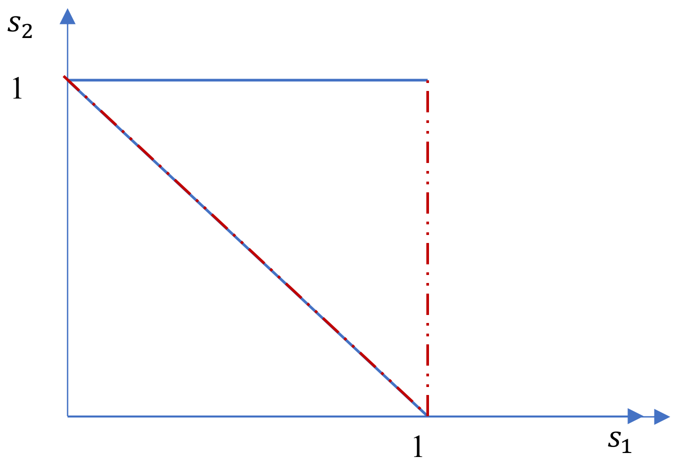
$$s_2(s_1)=\begin{cases}1-s_1, 0\le s_1<1\\ [0,1], \qquad s_1=1\end{cases}$$

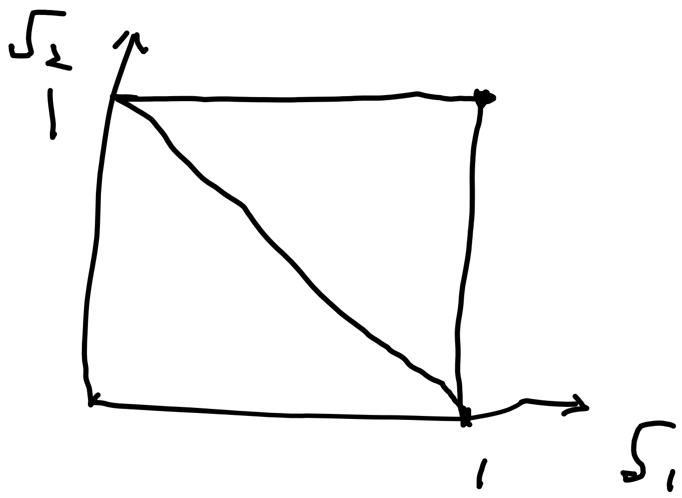


d) 当某个策略组合中的策略都是给定其他参与人的最优反应时，该策略组合为纳什均衡。可以找到满足以下策略组合都是纳什均衡

$$(s_1, s_2) = \{s_1 + s_2 = 1, 0 \le s_1, s_2 < 1\} \cup (1,1)$$

如果把两个参与人的最优反应图画在一起，我们可以看到相交部分即为纳什均衡点。





博弈中有三个参与人 1、2、3，每个参与人都有两个策略 A、B，三个参与人在不同的策略组合下的收益分别是

2, 5, 1	(A,A,A)
4, 3, 2	(A,A,B)
-1, 0,3	(A,B,A)
3,-10,5	(A,B,B)
3, 1, -1	(B,A,A)
-2, 1, 0	(B,A,B)
2, 9,4	(B,B,A)
4, 5, -5	(B,B,B)

请试图用双矩阵表示这个博弈，并找到纳什均衡。

博弈的三要素：

1. 参与人：{参与人 1，参与人 2，参与人 3}
2. 策略空间：参与人 1 的策略空间是{A,B},同理可得到参与人 2，3 的策略空间
3. 收益函数：参与人 1 的收益函数为：

策略组合	收益
(A,A,A)	2
(A,A,B)	4
(A,B,A)	-1
(A,B,B)	3
(B,A,A)	3
(B,A,B)	-2
(B,B,A)	2
(B,B,B)	4

(1) 对参与人 3 分情况讨论，其他的参与人 1 和 2 的博弈如旧。

(1) 当参与人 3 选择 A 时

参与人 2

参与人 1		A	B
	A	(2，$\underline{5}$，1)	(-1，0，3)
	B	($\underline{3}$，1，-1)	($\underline{2}$，$\underline{9}$，$\underline{4}$)

(2) 当参与人 3 选择 B 时

参与人 2

参与人 1		A	B
	A	($\underline{4}$，$\underline{3}$，$\underline{2}$)	(3，-10，$\underline{5}$)
	B	(-2，1，$\underline{0}$)	($\underline{4}$，$\underline{5}$，-5)

（B，B,A） (A,A,B)

(2) 把参与人 2 和参与人 3 都写到纵向量上。因为两个参与人都策略空间都为{A,B}，因此纵向量上有 4 个策略组合(A,A),(A,B),(B,A),(B,B)

参与人 2，参与人 3

		A, A	A, B	B, A	B, B
参与人 1	A	（2，$\underline{5}$，1）	（$\underline{4}$，$\underline{3}$，$\underline{2}$）	（-1，0，3）	（3，-10，$\underline{5}$）
	B	（$\underline{3}$，1，-1）	（-2，1，$\underline{0}$）	（$\underline{2}$，$\underline{9}$，$\underline{4}$）	（$\underline{4}$，$\underline{5}$，-5）

协调博弈：陆子豪和苏墨白出去约会吃饭，双方都有两种选择：海底捞和广州酒家，他们最主要的目的是一起吃饭，他们都更喜欢广州酒家，如果他们的选择不同，则双方都没有效用。

图 1 协调博弈

		苏墨白	
		海底捞	广州酒家
陆子豪	海底捞	$(\underline{1},\underline{1})$	(0,0)
	广州酒家	(0,0)	$(\underline{2},\underline{2})$

请找到协调博弈所有的纳什均衡。

假设陆子豪和苏墨白的混合策略组合为(P,Q)，其中$P=(p,1-p),Q=(q,1-q)$。P 和 Q 都是定义在策略空间{海底捞，广州酒家}上的概率分布。

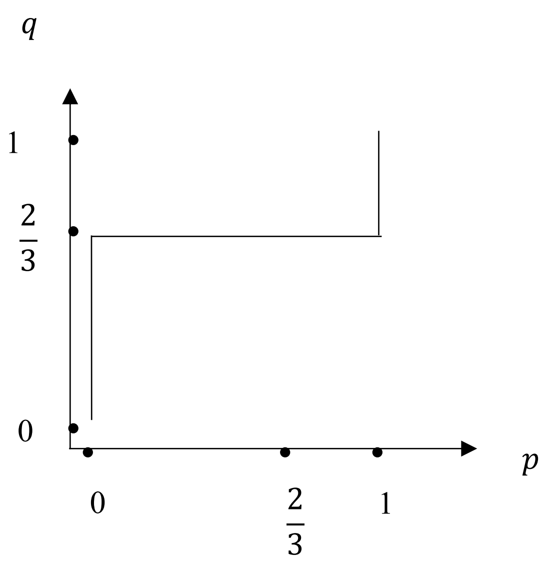
(1) 如果苏墨白的混合策略为 Q

a) 若陆子豪选择海底捞，则其期望收益为$1\cdot q+0\cdot(1-q)=q$;

b) 若陆子豪选择广州酒驾，则其期望收益为$0\cdot q+2\cdot(1-q)=2-2q$;

当$q>2-2q$，即$q>\frac{2}{3}$时，陆子豪的最优反应为$P^*=(1,0),p^*=1$,即陆子豪确定的选择海底捞；当当$q<2-2q$，即$q<\frac{2}{3}$时，陆子豪的最优反应为$P^*=(0,1),p^*=0$,即陆子豪确定的选择广州酒家；当$q=2-2q$，即$q=\frac{2}{3}$时，陆子豪的最优反应为$P^*=(p,1-p),p\in[0,1]$,即陆子豪选择任何混合策略的收益都一样；

图 2 协调博弈最优反应图



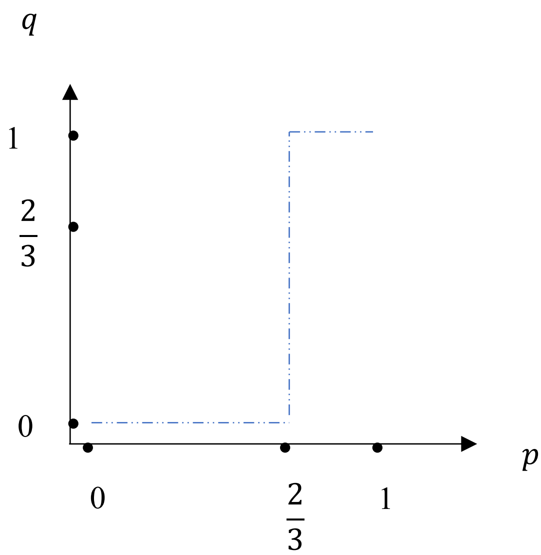
(2) 如果陆子豪的混合策略为 P

a) 若苏墨白选择海底捞，则其期望收益为$1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$;

b) 若苏墨白选择广州酒驾，则其期望收益为$0 \cdot p + 2 \cdot (1-p) = 2-2p$;

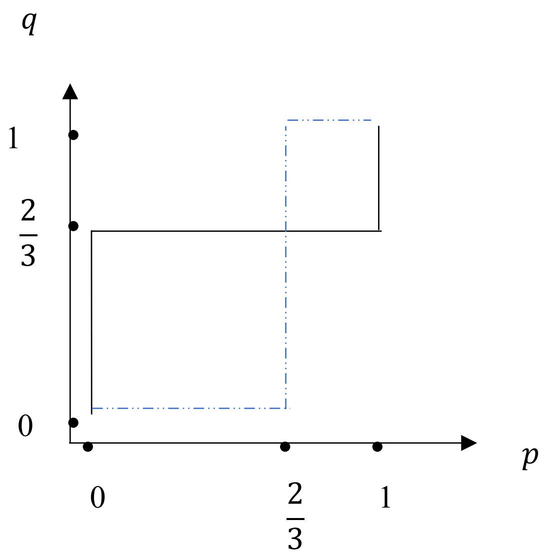
当$p > 2-2p$，即$p > \frac{2}{3}$时，苏墨白的最优反应为$Q^* = (1,0), q^* = 1$,即苏墨白确定的选择海底捞；当当$p < 2-2p$，即$p < \frac{2}{3}$时，苏墨白的最优反应为$Q^* = (0,1), q^* = 0$,即苏墨白确定的选择广州酒家；当$p = 2-2p$，即$p = \frac{2}{3}$时，苏墨白的最优反应为$P^* = (p^*, 1-p^*), p^* \in [0,1]$,即苏墨白选择任何混合策略的收益都一样；

图 3 协调博弈最优反应图



因此协调博弈中有三个纳什均衡$(P^*, Q^*) = \left((1,0),(1,0)\right), \left((0,1),(0,1)\right), \left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$。

图 4 协调博弈最优反应图



网络动画《天行九歌》第 7 集中虚构了一个中国古代的故事。

案例 1 三姬分金：韩非让大王的甲乙丙三个妃子分 100 两黄金，约定如下，甲乙丙三人先后提出分金的方案，然后三人投票表决，如果投票表决大于（不包括等于）50%的人支持该方案，则方案通过，若方案不通过，则提出方案的人被处死。假设人性本恶，在两种收益相同的方案之间，优先选择人被处死的方案。即：

1. 甲提出方案，然后三人投票，通过则分金游戏结束，不通过被处死；
2. 若甲被处死，则轮到乙提出方案，然后乙丙两人投票，通过则分金游戏结束，不通过被处死；
3. 若乙也被处死，则轮到丙出方案，她一个人投票是否通过方案，游戏结束。

桌上一共有 7 根竹签，甲乙两人分别依次拿一根竹签或者两根竹签，拿到最后一根竹签的人输。请问甲乙为了获得胜利，最优策略分别是什么？

例如，甲先出手，乙后出手，

甲拿 1 根，还剩 6 根；

乙拿 2 根，还剩 4 根；

甲拿 2 根，还剩 2 根；

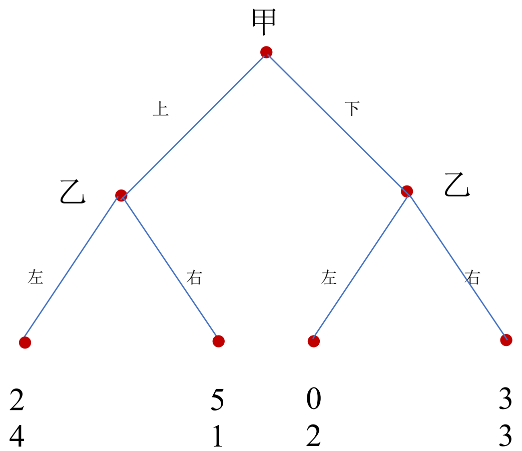
乙拿 1 根，还剩 1 根；

甲拿 1 根，结束，甲输，乙胜。

21；1，2，3；最后一根的人输，最优策略是什么。

案例 2 上下左右 2: 我们对前面的上下左右博弈做小幅改动，甲先选择上下，乙在观测到甲的选择后选择左右，如果甲选上，若乙选择左，则甲获得 2 乙获得 4，若乙选择右，则甲获得 5 乙获得 1；如果甲选下，若乙选择左，则甲获得 0 乙获得 2，若乙选择右，则甲获得 3 乙获得 3。

图 5 上下左右 2 博弈树



甲的行动空间为{上，下}，其策略空间也为{上，下}。

乙的行动空间为{左，右},但乙可以观测到甲的选择，其策略空间与其行动空间不同。他的策略必须描述甲所有可能的选择时，乙会选择什么。因为甲有两种行动，乙有两种行动，所以乙一共有四种策略：

- 如果甲选择上，则乙选择左；如果甲选择下，则乙选择左；
- 如果甲选择上，则乙选择左；如果甲选择下，则乙选择右；
- 如果甲选择上，则乙选择右；如果甲选择下，则乙选择左；
- 如果甲选择上，则乙选择右；如果甲选择下，则乙选择右；

我们当然可以用文字来描述乙的四种策略，并用一个集合包括上述四种策略来表示乙的策略空间：

{如果甲选择上，则乙选择左；如果甲选择下，则乙选择左；

如果甲选择上，则乙选择左；如果甲选择下，则乙选择右；

如果甲选择上，则乙选择右；如果甲选择下，则乙选择左；

如果甲选择上，则乙选择右；如果甲选择下，则乙选择右}

这样做，完全正确，没有任何问题，但我们为了简便，采用一个向量表示乙的策略

$$(I, II)$$

其中 I 和 II 都是左或者右。(I, II)的含义是：如果甲选择上，则乙选择 I；如果甲选择下，则乙选择 II。

如果甲有四种选择，如{上，上上，下，下下}，则乙的策略需要完整描述甲选择这四种策略时乙会选择什么，例如乙的一个策略为：如果甲选择上，则乙选择 I；如果甲选择上上，则乙选择 II；如果甲选择下，则乙选择 III；如果甲选择下下，则乙选择 IV。这里的 I，II，III，IV 都是左或者右。为了简便，我们就用 4 维向量表示乙的策略：

$$(I, II, III, IV)$$

例如乙的一个策略：如果甲选择上，则乙选择左；如果甲选择上上，则乙选择左；如果甲选择下，则乙选择左；如果甲选择下下，则乙选择左。

$$(左，左，左，左)$$

因为甲有 2 个策略，乙有 4 个策略，所以甲乙一共有 8 种策略组合，例如其中的一个策略组合为：

(上，（左，左）)

它表示的含义是（甲选择上，（如果甲选择上，乙选择左；如果甲选择下，乙选择左））， 这个向量有两个元素，第一个是甲的策略，第二个是乙的策略。乙的策略是一个完整的计划，描述了甲所有可能选择时乙的选择。因为这个策略组合中甲选择了上，因此根据乙完整的计划（如果甲选择上，乙选择左；如果甲选择下，乙选择左），乙因为甲选择上所以乙选择左。如果最后的均衡是这个策略组合（子博弈精炼纳什均衡），那结果就是甲选择上，乙选择左。