第二课.3 两阶段动态博弈和重复博弈

王彬，暨南大学经济学系，binwang@jnu.edu.cn

阅读材料：吉本斯 2.2.A、2.3.A、2.3.B、2.3.C。请完成作业 2.4。

在完全信息的静态博弈中，我们通过囚徒困境博弈、古诺模型、公地的悲剧以及贝特兰德模型知道为何在群体互动中无法达成合谋，囚徒无法通过合谋获得最少的刑罚、企业无法获得合谋最高利润、牧农无法最优利用农场，因为在合谋点，个人总有动力偏离合谋点，使得合谋点的策略组合不稳定，并不是纳什均衡点。

但现实生活中，我们确实可以看到相当多的合作。这一节，我们讲述在动态重复博弈中，合作或者说合谋是博弈的一个稳定均衡。首先，我们描述两阶段动态博弈的基本情况；其次，我们介绍两阶段重复博弈，描述有限阶段重复博弈的结果；最后，我们在无限次重复博弈中论述合作的可能性。

1. 两阶段完全信息不完美信息动态博弈

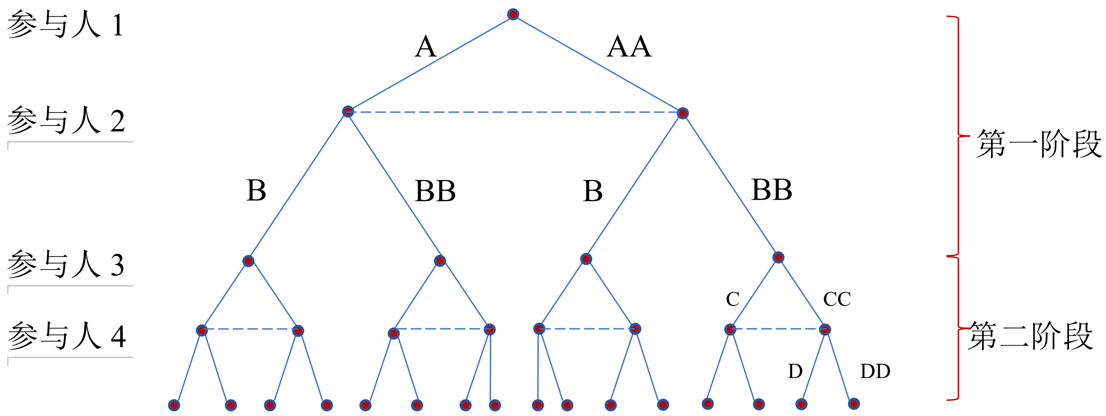
考虑以下一类的动态博弈：

1. 参与人 1 和参与人 2 从他们各自的行动空间A_1和A_2中同时选择a_1和a_2；
2. 参与人 3 和参与人 4 在观察到参与人 1 和参与人 2 的行动后，同时从他们的行动空间A_3和A_4中选择行动a_3和a_4；
3. 参与人 1、2、3、4 的收益分别为$u_i(a_1, a_2, a_3, a_4), i = 1,2,3,4$

注意，在第一阶段参与人 1 和参与人 2 的同时行动就是一个静态博弈，其要求为双方都无法观察到对方的选择，而第二阶段参与人 3 和参与人 4 的同时行动也是一个静态博弈，双方独立决策无法观测到对方的决策。所以我们可以知道，在这两个阶段，分别都是完全信息的静态博弈。我们知道完全信息的静态博弈与完全信息但不完美信息的动态博弈可以相互转换。因此我们将上述的两阶段博弈称为两阶段完全信息不完美信息的动态博弈。

另外，参与人 3、4 可以观测到第一阶段参与人 1、2 的选择，因此，在第二阶段开始的时候，信息是完美的，即参与人 3、4 可以分辨参与人 1、2 过去的选择历史。例如，参与人 1、2、3、4 的行动空间分别是{A,AA}, {B, BB},{C,CC}, {D, DD}。我们可以画出此博弈的博弈树。

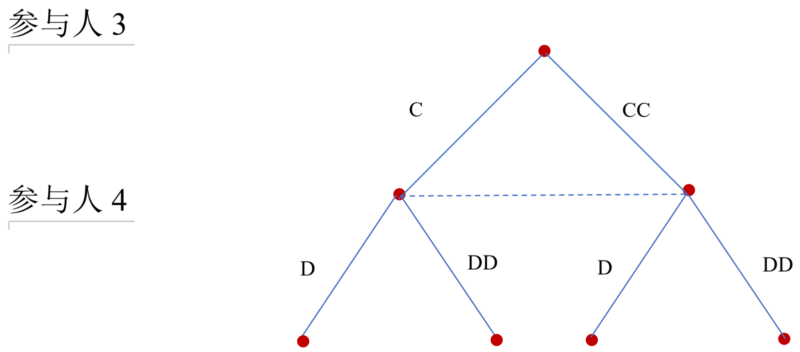
在第一阶段中，参与人 1 和参与人 2 同时做出行动，相互无法观测到对方的行动，所以博弈树中参与人 2 的两个决策点处于同一个信息集中；第二阶段时，参与人 3、4 可以观测到 1、2 的选择，因此参与人 3 开始的 4 个决策点都是单点信息集；而参与人 4 在参与人 3 下的信息集非单点，因为参与人 3、4 无法观测到对方的信息。



我们知道，在前面的动态博弈的一般理论中，采用后向归纳的方法找到博弈的均衡结果，即从最后一个参与人开始，在给定前述参与人的行动下，选择最优反应，然后一步一步往前推。那在两阶段不完美信息完全信息动态博弈中，这种方法似乎无法进行，原因在于参与人 4 开始的决策点不是单点信息集，他无法观测到参与人 3 的行动。在这种情况下，我们继续回溯，沿着博弈树向上，找到最近的一个单点信息集。

所以我们需要回溯到参与人 3 的决策点，把参与人 3 的决策点后面的分支当作一个整体，决定其结果。例如，我们把参与人 1 选择 AA、参与人 2 选择 BB 后参与人 3 决策点后的分支单独拿出来，因为参与人 4 无法观测到参与人 3 的选择，我们就根据静态博弈中最优反应的方法找到这个阶段的纳什均衡点，作为这一个阶段的最优结果，记为$\left(a_3^*(AA,BB),a_4^*(AA,BB)\right)$。

图 1 AA、BB 后第二阶段博弈树分支



更为一般的，在两阶段不完美信息完全信息动态博弈中，我们假设每一个阶段的静态博弈都有**唯一的**纳什均衡。我们采用类似于后向归纳的方法，从后往前推，找到最终的均衡结果。首先在给定第一阶段的结果(a_1,a_2)时，找到第二阶段参与人 3、4 的纳什均衡点$\left(a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2)\right)$；其后，第一阶段的参与人 1、2 认识到参与人 3、4 是理性的，参与人 1、2 知道在行动组合(a_1,a_2)时，那第一阶段的静态博弈为：

- 参与人 1 从其行动空间A_1中选择a_1，参与人 2 从其行动空间中选择a_2；
- 参与人 1、2 的收益函数为$u_1(a_1,a_2,a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$以及$u_2(a_1,a_2,a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2)$

这可以看作是一个普通的静态博弈，我们仍然可以通过找到双方的最优反应的形式找到最终的纳什均衡(a_1^*, a_2^*)。假设纳什均衡是唯一的，我们就把$\left(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*)\right)$称为此两阶段博弈的子博弈精炼纳什均衡的结果。相对应的，我们把$\left(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2)\right)$称为两阶段博弈的子博弈精炼纳什均衡。两者的区别在于，均衡是一个策略的组合，两阶段博弈中，参与人 3、4 可以观测到参与人 1、2 的选择，因此参与人 3、4 的策略需要完整描述他们观测到每一个参与人 1、2 的可能选择(a_1, a_2)时，参与人 3、4 他们的最优选择$a_3^*(a_1, a_2)$以及$a_4^*(a_1, a_2)$。

为了说明两阶段博弈，我们来扩展一下静态博弈中的银行挤兑博弈模型。我们为了简便，将银行挤兑简化成一个同时行动博弈，投资人需要在博弈前考虑是否提前取款或者到期取款。这里，我们将此模型扩展成更符合现实的多期模型，一共有两期，投资人需要考虑是在第一期取款或者第二期取款或者到期取款。

案例 1 银行挤兑 2：博弈里有两个投资人，每个投资人在银行存入一笔存款D，银行将其中的一部分P发放贷款给企业做长期投资，银行需要考虑每天都有储户取款，所以需留存一部分（$2D-P>0$）,以做日常运营。与静态博弈的银行挤兑不同的是，动态博弈更符合现实情况，我们假设博弈中有两期，投资人在第一期存入存款，投资人可以选择在第一期取款还是在第二期取款或者到期取款。

- **第一期，只要有一个投资人在本期取款，银行最多能发放的总资金为日常营运资金$2D-P$（贷给企业的钱无法收回），如果两个投资人都是不在本期取款，则其收益由第二期的博弈结果决定。如果两个投资人都在本期去银行取款，银行只能把留存的资金评分给投资人，每人分得$r=\frac{2D-P}{2}$，博弈结束;若其中一个人在本期去银行取款，则取款的人只能得到本金D，而另外一位投资人得到$2r-D$，博弈结束。用双矩阵表示的话**

图 2 银行挤兑 2 第一期（阶段）博弈

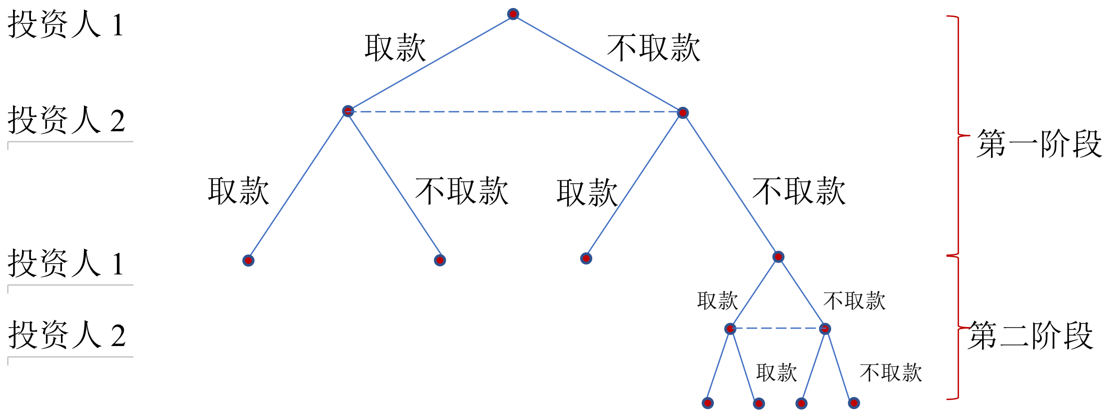
		投资人 2	
		取款	不取款
投资人 1	取款	(r, r)	(D, 2r-D)
	不取款	(2r-D,D)	下一阶段

- **第二期，银行发放的贷款到期，银行的营运资金充足($2R$)，并且银行收回的投资大于其存款$2R>2D$。如果两个投资人在期初就去取款，则每个投资人可获得R，博弈结束。若只有一个投资人去取款，则取款的投资人获得本金D，另一个投资人获得剩余的资金$2R-D$，博弈结束；如果两人都不取款，则到期后博弈结束，每个投资人获得R。**

图 3 银行挤兑 2 第二期（阶段）博弈

投资人 1 \ 投资人 2	取款	不取款
取款	(R,R)	(D, 2R-D)
不取款	(2R-D,D)	(R,R)

这是一个很典型的两阶段不完美信息完全信息动态博弈问题。博弈中分为两个阶段，每个阶段都是一个同时行动博弈，只是银行挤兑 2 博弈中，第二阶段的两个参与人与第一阶段的两个参与人相同。我们也可以画出银行挤兑 2 的博弈树。



第一阶段中，只有两个投资人都选择不取款时，博弈才进入第二阶段，否则博弈在第一阶段结束。所以我们看到，博弈树中，只有不取款、不取款这个分支中才有第二阶段的分支。我们根据前面的一般理论，也采用类似于后向归纳的形式找到此博弈的均衡，首先将第二阶段当作一个整体得出其均衡结果（向上追溯到最近的一个单点信息集），其后第一阶段的参与人考虑到第二阶段的结果，在第一阶段做出最优反应。

因此，我们先考虑第二阶段的问题，从双矩阵中更容易找到其最优反应以及均衡结果。因为$R > D, R < 2R - D$，因此第二阶段的纳什均衡结果为（不取款，不取款）,双方都是等存款到期才从银行分配到收益(R,R)。

我们再向后推进，回到第一阶段，第一阶段的两个投资人知道第二阶段的均衡结果为（不取款，不取款），收益为(R,R),因此第一阶段的双矩阵为：

图 4 银行挤兑 2 第一期（阶段）博弈

		投资人 2	
		取款	不取款
投资人1	取款	(r, r)	(D, 2r-D)
	不取款	(2r-D,D)	(R,R)

如果对比一下第一阶段的双矩阵和静态银行挤兑博弈中的双矩阵，我们可以发现两个双矩阵相同，最后的结果有两个纳什均衡（取款，取款），（不取款，不取款）。因为$r > 2r - D, D < R$（请参考静态博弈中的分析）。

因此这个两阶段博弈最后的均衡结果有两个：（1）第一阶段双方都取款(r,r)，博弈结束；（2）第一阶段双方都不取款，第二阶段双方都不取款，到期分配资金(R,R)，博弈结束。

银行挤兑 2 的经济学含义与银行挤兑 1 一样，银行体系自身的特点决定了信心很重要，如果居民对银行没有信心，就可能会滑向挤兑均衡，而中央银行的稳定信心在宏观经济调控中尤为重要。

2. 有限阶段重复博弈

上述的两阶段不完美信息完全信息动态博弈中，如果第二阶段的博弈与第一阶段相同，也就是说第二阶段的参与人 3、4 就是一阶段的参与人 1、2，并且第二阶段的博弈的行动空间和收益函数与第一阶段相同，那我们就称其为两阶段重复博弈。每个阶段的同时行动博弈称为阶段博弈(stage game)。

如果一个同时行动博弈G重复T次，我们就把这个动态博弈称为 T 阶段重复博弈，记为$G(T)$。有限次重复博弈的收益为T次同时行动博弈收益的总和。

如果$G(T)$中的同时行动博弈G拥有唯一的纳什均衡，那$G(T)$唯一的子博弈精炼纳什均衡的结果为博弈G的纳什均衡结果重复T次。

分析：我们采取类似后向归纳的形式推出结果。首先看最后一个阶段，前面$T-1$个阶段的结果不会影响阶段T中参与人在本阶段的收益，因此无论前面$T-1$个阶段的结果为何，最后一个阶段的博弈G的结果为G的纳什均衡结果。同理，我们可以依次往前推，可以得出，每一个阶段的结果都是博弈G的纳什均衡结果。

案例 2 囚徒困境 3：警察抓到两个盗贼嫌疑人，但无实物证据，需要两个人的口供定罪。警察将两人分别关在两个屋子里。如果两人都抗拒，最后无口供，只能按入侵私宅判一年刑罚；如果都坦白，都判三年。如一人抗拒，一人坦白，坦白从宽直接释放，抗拒从严判四年刑罚。假设警察分两次询问嫌疑人，一轮询问后，将询问的结果告诉两个囚徒，然后进行第二次询问。

图 5 囚徒困境 3

		囚徒 2	
囚徒 1		抗拒	坦白
	抗拒	(-1，-1)	(-4，0)
	坦白	(0，-4)	(-3，-3)

我们知道，囚徒困境博弈是同时行动博弈，坦白是每一个参与人的占优策略，因此（坦白，坦白）是囚徒困境博弈中唯一的纳什均衡。当警察两次询问囚徒并且在第二次询问前将第一次询问的结果告诉两个参与人时，囚徒困境 3 就是一个两阶段完全信息不完美信息的动态博弈，并且两阶段的同时行动博弈相同，所以囚徒困境 3 又是一个两阶段重复博弈。我们采用类似于后向归纳的方法推出其均衡结果，在第二阶段中，第一阶段的结果无法影响第二阶段的收益函数，因此无论第一阶段的结果是什么，第二阶段的结果是囚徒困境同时行动博弈的纳什均衡结果（坦白，坦白）;其后，我们继续考虑第一阶段，第一阶段的两个囚徒知道，无论他们这一阶段选择什么，第二阶段的结果都一样，因此，他们会选择最大化第一阶段的收益，因此第一阶段的结果也是（坦白，坦白）。

如果我们把两阶段囚徒困境博弈推广到有限期的T阶段囚徒困境重复博弈，其结果是类似的，即唯一的子博弈精炼纳什均衡的结果为参与人在每一阶段都选择（坦白，坦白）。

那有没有某种情形下，囚徒能相互合作选择（抗拒，抗拒）呢？答案是有的，如果囚徒困境博弈能无期限的进行下去，那两个囚徒是有可能合作的。

3. 无限阶段重复博弈

首先，我们需要定义无限阶段重复博弈。我们可以参照有限阶段重复博弈的方法来定义，但问题是，如果无限阶段重复博弈的收益仍然是每个阶段参与人的收益之和，那无限阶段重复博弈中参与人的收益将趋向于无穷($\lim_{T\to\infty} 3T = +\infty$)。与前面的讨价还价模型类似，我们在这里也引入贴现因子，即下一个阶段的 1 单位收益，在这个阶段价值为β个单位，其中$0 < \beta < 1$。如果阶段收益为π_t，则其终身受益贴现到 1 期为：

$$\pi_1 + \beta\pi_2 + \cdots + \beta^{t-1}\pi_t = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\pi_t$$

如果G是一个同时行动博弈，我们用$G(\infty,\beta)$表示无限阶段重复博弈，每一个阶段的博弈相同，都是G这个同时行动博弈，在t阶段博弈开始前，所有的参与人都知道从 1 阶段开始到$t-1$阶段所有阶段博弈的结果。参与人的收益为每一个阶段收益的贴现值之和，贴现因子为β。下面我们将讲述，在无限期重复博弈中，如果贴现因子β够大，合作（抗拒，抗拒）有可能成为一个均衡结果。

考虑以下“以牙还牙”**策略**(trigger strategy)：

第一阶段选择抗拒。在第t阶段，如果前面的从 1 阶段到$t-1$阶段，阶段博弈的结果都为（抗拒，抗拒），则在t阶段选择抗拒，否则选择坦白。

注意，我们这里用的是策略一词，而不是行动，动态博弈中的策略是一个完整的计划，它需要考虑前人所有可能的选择下，我会选择什么。“以牙还牙”策略描述了从 1 阶段到无限阶段所有的行动，并且也描述了前人所有的可能性下本人的选择是什么。例如，第一阶段统一选择抗拒。从第二阶段开始，如果前面所有的结果都是（抗拒，抗拒），则选择抗拒；剩下的其他的情况下，统一选择坦白。

用通俗的话讲，以牙还牙策略就是，一开始选择相信对方，选择合作，一旦观察到对方没有合作，则永远选择不合作。

我们首先讲述，当贴现因子足够大，即足够接近 1 时，双方选择以牙还牙策略是一个纳什均衡；其次，我们将分析，这个策略在每一个子博弈下都构成纳什均衡，即以牙还牙策略是一个子博弈精炼纳什均衡。

(1) 当贴现因子β足够接近 1 时，两个囚徒选择“以牙还牙”策略是一个纳什均衡，即(以牙还牙，以牙还牙)是一个纳什均衡。
为了证明（以牙还牙，以牙还牙）是一个纳什均衡，我们需要证明当另外一个囚徒选择以牙还牙策略时，本囚徒选择以牙还牙策略是最优反应。而以牙还牙策略中有三种情况：第一阶段；前面阶段的结果都是（抗拒，抗拒）的阶段；前面阶段的结果不都是（抗拒，抗拒）。我们将分别述说，在这三种情况下，给定对方选择以牙还牙策略，本人选择以牙还牙是最优反应。

I. 第一阶段。
给定对方选择以牙还牙策略，即对方会在第一阶段选择抗拒，本人的最优反应是什么呢？这取决于本人选择抗拒还是坦白的终身折现收益哪个更大？
如果本人在第一阶段选择以牙还牙策略即选择抗拒，则第一阶段的收益为-1，而下阶段，本人会面临同样的选择，假设选择抗拒的终身折现收益为V，于是本期的终身折现收益为：
$$V=-1+\beta V$$
$$V=-\frac{1}{1-\beta}$$
如果本人在第一阶段没有选择以牙还牙策略即选择坦白，则第一阶段的收益为 0，以后每阶段的收益都为-3，其终身受益为：
$$0+\beta\cdot(-3)+\beta^2\cdot(-3)+\cdots=-\frac{3\beta}{1-\beta}$$
当前者大于后者时，本人会选择以牙还牙策略：
$$-\frac{1}{1-\beta}>-\frac{3\beta}{1-\beta}$$
$$\beta>\frac{1}{3}$$
于是，当$\beta>1/3$时，在第一阶段的情形下，给定对方选择以牙还牙策略，本人选择以牙还牙策略是最优反应。

II. 前面阶段都是（抗拒，抗拒）这个结果的阶段。

给定对方选择以牙还牙策略，即对方在本阶段会选择抗拒，本人的最优反应是什么呢？这取决于本人选择以牙还牙策略即选择抗拒还是非以牙还牙策略即坦白的收益哪个更大？如果本人选择以牙还牙策略即在这个阶段(t 阶段)选择抗拒，则这个阶段的收益为-1，而下阶段，本人会面临同样的选择，假设选择抗拒的终身受益为$\beta^{t-1}V$，于是：

$$\beta^{t-1}V = -\beta^{t-1}1 + \beta^{t}V$$

$$V = -\frac{1}{1-\beta}$$

如果本人在本阶段（t阶段）没有选择以牙还牙策略即选择坦白，则本阶段的收益为 0，以后每阶段的收益都为-3，其终身受益为：

$$\beta^{t-1}[0+\beta\cdot(-3)+\beta^{2}\cdot(-3)+\cdots] = \beta^{t-1} - \frac{3\beta}{1-\beta}$$

当前者大于后者时，本人会选择以牙还牙策略：

$$\beta^{t-1}\cdot -\frac{1}{1-\beta} > \beta^{t-1}\cdot -\frac{3\beta}{1-\beta}$$

$$\beta > \frac{1}{3}$$

于是，当$\beta > 1/3$时，在前面阶段博弈的结果都是（抗拒，抗拒）的情形下，给定对方选择以牙还牙策略，本人选择以牙还牙策略是最优反应。

III. 前面阶段的博弈至少出现一次非（抗拒，抗拒）结果的阶段。

给定对方选择以牙还牙策略，因为前面的阶段至少出现过一次非（抗拒，抗拒）的结果，即给定对方本阶段会选择坦白，并且以后也会选择坦白，那本人的最优反应就是坦白，即本人也选择了以牙还牙策略，因为本人选择坦白至少还可以获得-3 的收益，而选择抗拒的收益会更低-4。

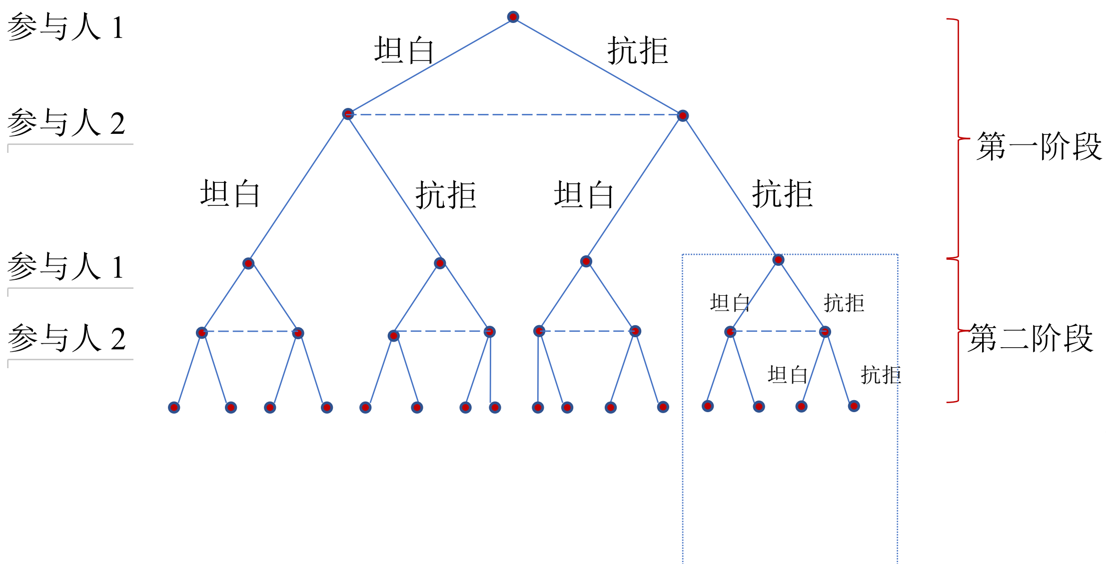
$$\beta^{t-1}[-3+\beta(-3)+\beta^{2}(-3)+\cdots] > \beta^{t-1}[-4+\beta(-4)+\beta^{2}(-4)+\cdots]$$

因此在这种情况下，给定对方的以牙还牙策略，本人也会选择以牙还牙策略。

因此在上述三种情形下，给定对方选择以牙还牙策略，本人选择以牙还牙策略是最优反应。同样，我们也可以分析，给定本人选择以牙还牙策略，对方选择以牙还牙策略也是其最优反应。因此（以牙还牙，以牙还牙）是一个纳什均衡。

(2) 我们将分析“以牙还牙”策略在每一个子博弈下都是一个纳什均衡。

我们需要看看在无限阶段的重复博弈中，什么才是子博弈。



参与人 1

参与人 2

……

首先，博弈的起点开始后的博弈本身不是子博弈；其次，子博弈开始的决策点必须是非单点信息集，意味着每一个阶段内部，参与人 2 开始的决策点都不能是子博弈的起点；再次，子博弈不能切割信息集。因此重复博弈中，除第一阶段外，参与人 1 开始的决策点后面的所有分支都是子博弈。例如，典型的，第二阶段开始的参与人 1 有 4 个决策点，对应第一阶段的四种结果（坦白，坦白），（坦白，抗拒），（抗拒，坦白），（抗拒，抗拒），每一个决策点开始后的博弈分支都是一个单独的子博弈。第二阶段开始的时候，两个参与人都可以观察到第一阶段的结果，因此是单点信息集。同样的，我们可以看到，第三阶段开始的参与人 1 有 16 个决策点，对应前两个阶段的 16 种可能的结果，每一个决策点后面的博弈分支都是一个单独的子博弈。我们可以观察到，随着博弈的往下进行，其子博弈呈几何级数增长。根据“以牙还牙”策略，我们可以把无数种子博弈分为两类：

I. 此前的阶段博弈的结果都为（抗拒，抗拒）；
II. 此前的阶段博弈的结果至少有一个为非（抗拒，抗拒）；

我们可以看出，第二阶段开始的子博弈中，最右边的分支属于第一类，而其他三个分支属于第二类子博弈。同理我们也可以分析第三阶段开始的子博弈中，只有最右边决策点开始的子博弈属于第一类，而其他的子博弈属于第二类。接下来，我们阐述“以牙还牙”策略在这两种子博弈中都是纳什均衡。

I. “以牙还牙”策略在第一类子博弈中是纳什均衡。

   这一类子博弈前面的阶段博弈的结果都为（抗拒，抗拒），这个情形与（1）II 点相同，因此给定对方的以牙还牙策略即选择抗拒时，贴现因子$\beta > \frac{1}{3}$时，本人的最优反应也为以牙还牙策略即选择抗拒。

II. “以牙还牙”策略在第二类子博弈中也是纳什均衡。
   这一类子博弈前面的阶段博弈的结果至少出现过一次非（抗拒，抗拒），这个情形与（1）III 点相同，因此给定对方的以牙还牙策略即选择坦白时，本人的最优反应也为以牙还牙策略即选择坦白。

因此，当贴现因子$\beta > \frac{1}{3}$时，“以牙还牙”策略在无限阶段重复博弈的每一个子博弈中都是纳什均衡。

当贴现因子$\beta > \frac{1}{3}$时，双方都选择“以牙还牙”策略在囚徒困境无限阶段重复博弈中是一个纳什均衡，并且在其每一个子博弈中也是纳什均衡，因此双方都选择“以牙还牙”策略是一个**子博弈精炼纳什均衡**。

案例 3 古诺模型重复博弈：市场中存在两个生产同样商品的企业{企业 1，企业 2}，其产量分别为q_1和q_2。令市场上的总生产量为$Q = q_1 + q_2$，市场价格为$P = 16 - Q$（$Q \leq 16$）。两个企业的边际生产成为都为 4，即$C(q_i) = 4q_i, i = 1,2$。如果两个企业的博弈进行无数次，存在合作的可能性吗？

在第一课的学习中，我们知道企业合谋和独自决策的结果分别是：

	q_1	π_1	q_2	π_2
合谋	3	18	3	18
静态博弈（古诺模型）	4	16	4	16

如果双方企业只进行一次博弈，那最后的纳什均衡为（4，4），双方各自获得的利润为 16，少于双方合谋的产量 3 时的合谋利润 18。在无限阶段重复博弈中，如果双方都采用以牙还牙策略，则每阶段达成合谋产量是子博弈精炼纳什均衡的结果。

“以牙还牙”策略：

第一阶段生产合谋产量 3；如果前面所有阶段的结果为（3，3），则生产合谋产量 3，如果前面至少一个阶段的结果为非（3，3），则生产静态古诺模型的均衡产量 4。

什么情况下两个企业实行以牙还牙策略是一个子博弈精炼纳什均衡呢？根据前面的分析，若前面阶段的结果都为（3，3），选择合作的收益大于选择不合作的收益时，双方实行以牙还牙策略是一个子博弈精炼纳什均衡。

选择合作的收益为：

$$V = 18 + \beta V$$

$$V = \frac{18}{1-\beta}$$

选择不合作的收益为：本阶段的收益与后续无限阶段古诺均衡折现收益之和。本阶段的收益为给定对方选择合谋产量 3 的最优产量得到的收益：

$$\max_{q_1}(16 - q_1 - q_2)q_1 - 4q_1 \quad 其中 q_2 = 3$$

因此$q_1 = \frac{12-q_2}{2} = 4.5$，本企业偏离合谋产量点时的最优反应利润为$\pi_1 = 20.25$。因此，本企业选择不合作时，本阶段获得收益 20.25，以后的每一阶段获得古诺均衡的利润 16。因此折现收益为：

$$20.25 + 16\beta + 16\beta^2 + \cdots = 20.25 + \frac{16\beta}{1-\beta}$$

当合作的折现收益大于不合作的折现收益时：

$$\frac{18}{1-\beta} > 20.25 + \frac{16\beta}{1-\beta}$$

$$\beta > \frac{2.25}{4.25}$$

当$\beta > \frac{2.25}{4.25}$时，两个企业都选择“以牙还牙”策略是一个子博弈精炼纳什均衡，双方在每一期生产合谋产量（3，3），双方在每一个阶段获得合谋利润 18。

作业 2.4 根据上述的古诺均衡重复博弈，请分析以下问题。

（1）请结合动态博弈中策略的特点，分析“以牙还牙”策略（第一阶段生产合谋产量 3；如果前面所有阶段的结果为（3，3），则生产合谋产量 3，如果前面至少一个阶段的结果为非（3，3），则生产静态古诺模型的均衡产量 4。）为什么是古诺模型重复博弈中的策略。

（2）请分析两个企业实行“以牙还牙”策略为什么是一个纳什均衡。

（3）请分析古诺模型重复博弈中的子博弈，并将子博弈按照是否所有的阶段都合谋为依据分成两类。

（4）请分析两个企业实行“以牙还牙”策略在这两类子博弈中都构成纳什均衡。

（5）请举一个例子说明现实生活中“以牙还牙”策略导致的合作的现象。