第二课.2 动态博弈案例分析

王彬，暨南大学经济学系，binwang@jnu.edu.cn

阅读材料：吉本斯 2.1.B、2.1.D。

1. 斯坦科尔伯格模型(Stankelberg model)

在纳什均衡的案例分析中，我们讲述了古诺模型，即两个寡头厂商独自决定相同产品的产量，如果我们将这个静态模型改成动态模型，即双方依次决定产品产量，后决定的那个厂商在决定前可以观测到前一个厂商的决策，情况又会如何呢。

案例 1 斯坦科尔伯格模型：市场中存在两个生产同样商品的企业{企业 1，企业 2}，其产量分别为q_1和q_2。与古诺模型不同的是，企业 1 先决定产量q_1，企业 2 在观察到企业 1 的选择后，再选择产量q_2。令市场上的总生产量为$Q = q_1 + q_2$，市场价格为$P = 16 - Q$（$Q \leq 16$）。两个企业的边际生产成为都为 4，即$C(q_i) = 4q_i, i = 1, 2$。

我们通过后向归纳的方式找到最后均衡的结果。对于企业 2 来说，企业 1 每一个可能的q_1，企业 2 都有一个最优反应。

$$\max_{q_2}(16 - q_1 - q_2)q_2 - 4q_2$$

其最优反应为：$q_2 = \frac{12-q_1}{2}$。

企业 1 知道企业 2 会对他决策的每一个q_1做出最优决策$q_2 = \frac{12-q_1}{2}$，考虑到这一点后，企业 1 会选择最大化其自身利润的生产数量。

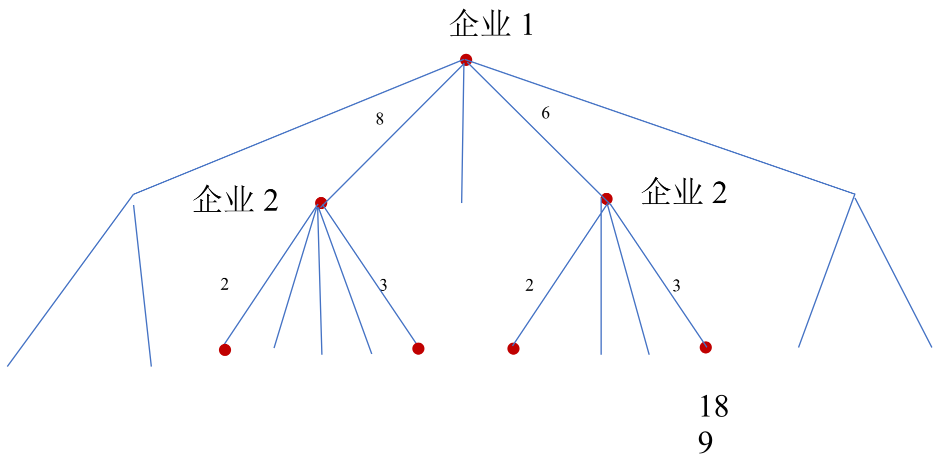
$$\max_{q_1}\left(16 - q_1 - \frac{12 - q_1}{2}\right)q_1 - 4q_1 = -\frac{1}{2}(q_1 - 6)^2 + 18$$

企业 1 的最优选择为$q_1 = 6$，利润为 18；而企业 2 的最优选择为$q_2 = 3$，利润为 9。

后向归纳的结果$q_1 = 6, q_2 = 3$是子博弈精炼纳什均衡的结果。斯坦科尔伯格模型的子博弈精炼纳什均衡为两个的厂商的策略组合，先出手的企业 1 的策略为$q_1 = 6$，而后出手的企业 2 的策略为一个完整的计划$q_2 = \frac{12-q_1}{2}$，这个计划描述了企业 2 在企业 1 每一个可能选择的产量时企业 2 的最优选择。因此斯坦科尔伯格模型的子博弈精炼纳什均衡为$(q_1 = 6, q_2 = \frac{12-q_1}{2})$。而后向归纳的结果也是这个子博弈精炼纳什均衡的结果，即$q_1 = 6$，我们把均衡时企业 1 的产量 6 代入企业 2 的完整计划$q_2 = \frac{12-6}{2} = 3$。

我们也可以看到这个策略组合$(q_1=6, q_2=\frac{12-q_1}{2})$满足子博弈精炼纳什均衡的定义，即一个策略组合在每一个子博弈中都是一个纳什均衡。斯坦科尔伯格模型中，企业 2 的决策点之后的分支都是子博弈，企业 2 的策略$q_2=\frac{12-q_1}{2}$是企业 2 面对企业 1 的任何决策q_1的最优反应，因此$(q_1=6, q_2=\frac{12-q_1}{2})$这个策略组合在每一个子博弈中都是一个纳什均衡，所以$(q_1=6, q_2=\frac{12-q_1}{2})$满足子博弈精炼纳什均衡的定义。

图 1 斯坦科尔伯格模型的博弈树



我们可以将动态博弈的结果与静态博弈以及合谋利润对比。

	q_1	π_1	q_2	π_2
合谋	3	18	3	18
静态博弈（古诺模型）	4	16	4	16
动态博弈（斯坦科尔伯格模型）	6	18	3	9

通过对比静态博弈，我们可以看出动态博弈中企业 1 生产的数量比静态博弈大，利润上升，并且达到了合谋的利润水平；而企业二生产的数量更少，利润下降。在动态博弈中，后出手的企业 2 拥有更多的信息，但是其福利反而下降。在单个实体的模型中，占有越多信息，福利会越大；但是在多个行为人的策略式互动中，占有更多信息不一定会增加福利。在斯坦科尔伯格模型中，企业 2 能观测到企业 1 的选择，并且企业 1 知道企业 2 能观测到企业 1 的选择，这个行动次序先后以及信息结构决定了动态博弈与静态博弈的不同。

2. 轮流出价的讨价还价模型

在静态博弈的案例分析中，我们曾经讨论过分钱博弈的案例即两个参与人分配一元钱。我们考虑一个动态的情形，两个参与人依次提出分钱方案，如果另一个参与人接受，则按此方案分配一元钱，如果拒绝，则进入下一阶段由另一个参与人提出分钱方案，同样这个参与人也可以接受或者拒绝，循环往复直到方案被接受。但未来分配的收益必须折现，折现率是β，并且$0<\beta<1$，即如果我们从 0 期开始，若在 1 期达成方案$(s,1-s)$，则对两个参与人来说，其折现到 0 期的收益为$\left(\beta s,\beta(1-s)\right)$，即现在的 1 元钱与未来的 1 元钱不等价。

我们先考虑一个三期即 0 期、1 期、2 期的简单模型，如果在前两期都未能达成协议，则在 2 期的开始时一元钱的分配方案固定为$(s,1-s)$，或者说两个参与人折现到 0 期的收益为$(\beta^2 s,\beta^2(1-s))$。具体过程如下：

- 0 期：参与人 1 提出方案$(s_0,1-s_0)$，若参与人 2 接受，则按此方案分配；若参与人 2 拒绝，游戏进入 1 期；
- 1 期，参与人 2 提出方案$(s_1,1-s_1)$，若参与人 1 接受，则按此方案分配；若参与人 1 拒绝，游戏进入 2 期；
- 2 期，因为前两期都为达成协议，最终分配方案为$(s,1-s)$，双方的折现收益为$(\beta^2 s,\beta^2(1-s))$。

两个参与人的行动次序为：1 *提方案* → 2 *决定方案* → 2 *提方案* → 1 *决定方案* → *固定方案*$(s,1-s)$，若中途有人接受方案，则按照接受方案分配，游戏终止。其中，前两个为 0 期，接着两个为 1 期，最后一个为 2 期。

最后 1 期的分配方案为外生给定，即前两期都没有达成方案时，最后一期的分配方案固定为$(s,1-s)$。我们可以来看看此博弈的后向归纳的结果。

- 最后一个出手的参与人是参与人 1，若他接受参与人 2 提出的方案，则参与人 1 可以获得s_1，若他拒绝参与人 2 提出的方案，则参与人 1 获得 2 期的固定方案中的s，折现到 1 期的收益为βs，当

$$s_1 \geq \beta s$$

时，参与人 1 会接受方案，即$s_1\geq\beta s$（我们假设如果接受或者拒绝一种方案的收益相同时，参与人会选择接受方案）。当$s_1<\beta s$时，参与人 1 会拒绝参与人 2 的方案；

- 倒数第二个出手的是参与人 2，他需要在 1 期的时候提出方案。参与人 1 知道参与人 2 能观察到自己提出的方案，并且知道参与人 1 是理性的。在参与人 1 接受方案的情况下$(s_1\geq\beta s)$，参与人 2 获得的收益为$1-s_1\leq 1-\beta s$；在参与人 1 拒绝方案的情况下能获得的收益为$\beta(1-s)$，我们知道$1-\beta s>\beta(1-s)$。因此，参与人 2 会提出方案$s_1^*=\beta s$获得更大的收益，其后参与人 2 会接受方案$(\beta s,1-\beta s)$;
- 倒数第三个出手的是参与人 2，他需要在 0 期的时候决定是否接受参与人 1 提出的方案。参与人 2 能观测到参与人 1 提出的方案，并且知道后面的参与人的选择是理性的。如果参与人 2 接受参与人 1 提出的方案$(s_0,1-s_0)$，参与人 2 可以获得当

期收益$1-s_0$，若拒绝，则参与人 2 可以获得 1 期的收益为$1-\beta s$，折现到 0 期为$\beta(1-\beta s)$。当

$$1-s_0 \geq \beta(1-\beta s)$$

时，即$s_0 \leq 1-\beta+\beta^2 s$，参与人 2 会选择接受此分配方案；当$s_0 > 1-\beta+\beta^2 s$时，参与人 2 会选择拒绝此分配方案，因此得到 1 期的收益为$1-\beta s$，折现到 0 期为$\beta(1-\beta s)$；

- 倒数第四个出手的是参与人 1，他需要提出分配方案$(s_0, 1-s_0)$。他知道后面的参与人是理性的，会做出什么选择。当参与人 2 选择接受分配方案时，参与人 1 可以获得$s_0 \leq 1-\beta+\beta^2 s$;当参与人 2 选择拒绝分配方案时，参与人 1 会获得 1 期的收益βs，而此 1 期的收入在 0 期的折现收益为$\beta^2 s$。我们知道$1-\beta+\beta^2 s > \beta^2 s$。因此参与人 1 会选择让参与人 2 接受的方案，并且$s_0 = 1-\beta+\beta^2 s$时参与人 1 的收益最大。参与人提出方案$(s_0, 1-s_0)$，参与人 2 接受，游戏结束。

后向归纳的结果是，在 0 期，参与人 1 提出方案$(1-\beta+\beta^2 s, \beta-\beta^2 s)$，参与人 2 接受，游戏结束。

吉本斯的书中，非正式的将三期的贯序讨价还价模型推广到无限期，有兴趣的同学可以去读一读。