第一课.2 纳什均衡案例分析

王彬，暨南大学经济学系，binwang@jnu.edu.cn

阅读材料：吉本斯 1.2.A、1.2.B、1.2.D。课后请完成作业作业 1.6、作业 1.7、作业 1.8

1. 案例分析

1.1. 鹰鸽博弈（斗鸡博弈）

案例 1 鹰鸽博弈：两只动物为争夺猎物而战，他们可以表现得很勇猛（鹰派），也可以表现得退让（鸽派），最好的结果是一方勇猛一方退让，如果双方都退让，得收益 3，如一方勇猛一方退让，则勇猛一方得 4，退让一方得 1，如果双方都表现勇猛，则得 0.

图 1 鹰鸽博弈

		动物 2：鸽	动物 2：鹰
动物1	鸽	(3,3)	(1,4)
动物1	鹰	(4,1)	(0,0)

鹰鸽博弈中有两个纳什均衡（鸽，鹰）、（鹰，鸽），在商场上也是如此，与其你死我活，不如看准对方的形势再出手，敌退我进，敌进我退。

1.2. 猜谜博弈（Matching Pennies）

两人各自拿一枚硬币，如果都正面向上或者都是反面向上，则参与人2给参与人1一元钱，如果两人的正反面不同，则参与人1给参与人2一元钱。

图 2 猜谜博弈

		参与人 2：正	参与人 2：反
参与人1	正	(1，-1)	(-1，1)
参与人1	反	(-1，1)	(1，-1)

这个博弈中不存在纯策略纳什均衡。

1.3. 性别博弈

案例 2 性别博弈：陆子豪和苏墨白出去约会吃饭，双方都有两种选择：海底捞和广州酒家。他们最主要的目的是一起吃饭，但是陆子豪更喜欢海底捞，而苏墨白更喜欢广州酒家，如果他们选择不同的地点，双方都没有效用。他们的收益函数在图 3 中表示。

图 3 性别博弈

		苏墨白：海底捞	苏墨白：广州酒家
陆子豪	海底捞	(2,1)	(0,0)
陆子豪	广州酒家	(0,0)	(1,2)

这个博弈中有两个纳什均衡（海底捞，海底捞）、（广州酒家、广州酒家）,实际上处于哪个均衡，都有可能。在现实生活中，先动（非静态博弈）的那个拥有优势，如陆子豪已经在美团上购买海底捞的优惠券，苏墨白就会出现在海底捞；苏墨白新买了广州酒家的会员，陆子豪也会去广州酒家。

1.4. 协调博弈(coordination game)

案例 3 协调博弈：陆子豪和苏墨白出去约会吃饭，双方都有两种选择：海底捞和广州酒家，他们最主要的目的是一起吃饭，他们都更喜欢广州酒家，如果他们的选择不同，则双方都没有效用。

图 4 协调博弈

		苏墨白：海底捞	苏墨白：广州酒家
陆子豪	海底捞	(1,1)	(0,0)
陆子豪	广州酒家	(0,0)	(2,2)

与性别博弈不同的地方在于，陆子豪与苏墨白两人都更喜欢广州酒家。协调博弈中有两个纳什均衡(海底捞，海底捞)、（广州酒家、广州酒家）。尽管双方都更喜欢后一个纳什均衡，但是纳什均衡的概念无法排除前一个稳定的策略组合。

生活中有许多这样的例子，有多个稳定的纳什均衡，尽管社会共同更喜欢某些均衡，但并不能排除差一些的那个均衡。为了让社会达到更好的均衡，社会的协调必不可少，例如著名的银行挤兑的例子。

1.5. 银行挤兑

现实生活中银行依靠储户的存款放贷给借方，靠息差盈利，因此银行的账户中不可能时时刻刻备付所有储户的存款，总是只留少部分应对储户提款，而大部分放贷给借方赚取收益，而贷给企业的钱需要长期才能收回，如果很多储户同时去银行取款，会导致银行瞬间破产。一个简单的例子，如果有100人存款，银行留下10人的存款应对储户提款，另外90人的储蓄贷给企业投资，若只有2人储户提款，银行经营毫无问题，若多

于10人提款，则银行会瞬间倒闭，因为企业的钱是很难短时间收回。为了更深刻的理解其中的原理，我们做一个更极端的假设，只有两位储户。

案例 4 银行挤兑：博弈里有两个投资人，每个投资人在银行存入一笔存款D，银行将其中的一部分P发放贷款给企业做长期投资，银行需要考虑每天都有储户取款，所以需留存一部分（$2D-P>0$）,以做日常运营。我们考虑以下简要情况，只要有一个投资人在到期前取款，银行最多能发放的总资金为日常营运资金$2D-P$（贷给企业的钱无法收回），如果两个投资人都是在到期后取款，则银行可以发放的资金总数为长期项目投资贷款的回报$2R(R>D)$。如果两个投资人都在到期前去银行取款，银行只能把留存的资金评分给投资人，每人分得$r=\frac{2D-P}{2}$;若其中一个人在到期前去银行取款，则提前取款的人只能得到本金D，而另外一位投资人得到$2r-D$;若两位投资人都在到期后取款，则每位投资人可以得到R。

用双矩阵来表述这个完全信息的静态博弈

图 5 银行挤兑博弈

投资人 2

投资人1		立刻取款	到期取款
	立刻取款	(r,r)	(r,2r-D)
	到期取款	(2r-D,r)	(R,R)

因为$r=D-\frac{P}{2}$，所以$r<D$,
因为$2r-D-r=r-D<0$，所以$2r-D<r$。
因为$2r-D<r<D<R$，所以$r<R,2r-D<R$
我们通过各自的最优反应函数来求解纳什均衡，如果投资人 2 选择立刻取款，投资人 1 的最优反应是立刻取款，因为$r>2r-D$;如果投资人 2 选择到期取款，投资人 1 的最优反应是到期取款，因为$R>r$。同理，我们也可以对投资人2做同样的最优反应分析。
银行挤兑博弈中有两个纳什均衡(立刻取款，立刻取款)、(到期取款，到期取款)，前一个均衡为银行挤兑，而后一个均衡为正常状态。银行的作用之一是转换金融产品的期限结构，即把居民的短期存款转换成企业所需的长期存款，并借此牟利，但银行也有天然的弱点，只要所有的储户选择取款，银行必然倒闭，滑向挤兑均衡，因此在危机时，中央银行提供最后贷款人的角色异常重要。稳定信心，给银行提供短期贷款，储户有信心后，自然会转换为正常的均衡。银行的挤兑从本质上说是协调博弈，两个纳什均衡都有可能，而中央银行的协调作用，会让更好的均衡得以实现。
中国历史上的银行挤兑：

(1) 1903 年，由于日本的假币阴谋，中国第一家通商银行发生挤兑潮。日本在 1900 年爆发了第一次经济危机，为转嫁危机，日本人在中国制造假币。随后到通商银行兑现被捕，导致"通商银行不予兑现自己发行的钞票反而逮人"的流言传出。1903 年 2 月 5 日，通商银行门刚一打开，上海滩的商家掌柜就一窝蜂涌向了柜台，要求通商银行兑现开出的银行券，同时大量的伪票也在不断出现。为平息挤兑潮，通商银行的创始人盛宣怀将通商银行保险库里面的金条、银锭以及自

己家里所有的金银首饰，全部装箱连夜运到汇丰银行。经过谈判，盛宣怀的大箱金银首饰抵现 70 万元，汇丰银行代通商银行收兑银行券。

(2) 1916 年、1921 年中行、交行两次挤兑潮。1916 年，京津地区爆发中国银行、交通银行两行挤兑风潮。此次挤兑风潮规模大，影响广，谣言传播，军费吃紧，银行储备金不足等原因迫使政府下发停兑令。虽然最终得以平稳解决，却暴露了北京政府财政金融体系的缺陷，从而使金融市场面临着危机。

(3) 1921 年 11 月 15 日，北京的中国银行和交通银行再次发生挤兑风潮。这次挤兑潮主要是由于北洋政府的长期的政策导致的。其直接原因是当时北洋政府两次借垫警饷四百八十万元，公债基金又借垫七百万元，以及 1916 年"停兑"的后遗症。

(4) 1928 年平津挤兑潮 1928 年 12 月 10 日，中日合办的中华汇业银行因难以应付提存挤兑风潮，宣告停业一月，进行整顿改组。由于该行纸币主要流通于北平和天津两地，而政治中心的南迁引起该区域的经济萧条和政事消沉，使得人心惶惶、谣言四起，最终引发了平津两地的华威银行、劝业银行、蒙藏银行、农工银行、垦业银行、懋业银行等相继发生挤兑风潮。

中国近代历史上发生多起银行挤兑事件，源于中国近代政府能力薄弱，没有强有力的中央银行对商业银行进行监管并发挥最后贷款人的角色

作业 1.6: 请举出一个现实生活中挤兑的例子，并用博弈论的理论分析。

1.6. 公地的悲剧

1832 年，牛津大学一位政治经济学家威廉•佛斯特•洛伊德在观察到英格兰的公有牧场总是被过量放牧摧毁后问，“为何公有牧场的羊总是如此瘦弱？为何公有牧场的草总是如此贫瘠？为何与临近的私有牧场如此不同？“

洛伊德也给出了答案，原因是公地上的牧农都是自我利益最大化。如果牧场上的羊已经达到了最大的可承载量，其中的一个牧农会问自己，“我应该再多养一只羊吗？”增加一只羊的收益全归牧农自己，但是增加一只羊所带来的牧场退化由所有的牧农承担，导致个人的增加一只羊的收益大于他所承担的那部分损失（损失由牧农平分），自我利益最大化的牧农总会增加一只羊，而忽视多增加的这只羊对整个牧场的影响；每一个牧农都会这样做，导致公地的牧场最后退化。

请观看视频：https://www.bilibili.com/video/av75419887?from=search&seid=12172510134224463021

案例 5 公地的悲剧：考虑一个简化的数学模型。牧场的肥力有限，如果羊吃草的速度超过了草生长的速度，羊不够吃会变瘦。如果牧场上羊的数量是G，则该草地喂养每只羊所带来的收益为$v(G)=28-G$，即随着羊越来越多，其每只羊带来的收益会越少（$v'<0$），牧农圈养羊无固定成本，边际成本不变，每只羊的边际成本为 4 单位，那养多少羊对牧农来说收益最大呢？如果牧场私有，结果是什么？如果草原公有并且有两位牧农，其均衡结果是什么呢？

如果一个牧农拥有牧场，即草原为私人所有，则牧农会最大化其利润

$$\max_{G} G * v(G) - 4G = G(28 - G) - 4G = -(G - 12)^2 + 144$$

当草原上有$G^{**} = 12$只羊时，牧农的收益最大，其边际收入等于$28 - 2G = 4$等于其边际成本4，利润为144。

如果两个牧农拥有草原，即草原为共有，假设两个牧农拥有羊的数量分别为G_1和G_2，这个问题就是一个标准的完全信息的静态博弈。如果用策略式表述，则可描述为：

(1) 参与人为{牧农 1，牧农 2}；
(2) 牧农 1 的策略空间为放牧量的集合$S_1 = \{G_1 | G_1 + G_2 \leq 28, G_1 \in Z_+\}$，牧农 2 的策略空间为$S_2 = \{G_2 | G_1 + G_2 \leq 28, G_2 \in Z_+\}$；
(3) 牧农 1 的收益函数为$\pi_1\big((G_1, G_2)\big) = G_1 v(G_1 + G_2) - 4G_1$；牧农 2 的收益为$\pi_2\big((G_1, G_2)\big) = G_2 v(G_1 + G_2) - 4G_2$。其中$(G_1, G_2)$为公地的悲剧博弈中的策略组合。

我们可以通过最优反应函数找到纳什均衡。给定牧农2的放牧量G_2，牧农1最大化其利润为

$$\max_{G_1} G_1(28 - G_1 - G_2) - 4G_1 = -\left[G_1 - \left(12 - \frac{1}{2}G_2\right)\right]^2 + \left(12 - \frac{1}{2}G_2\right)^2$$

可以得到对于每一个G_2，牧农1的最优反应为$G_1 = 12 - \frac{1}{2}G_2$，
牧农2也面临同样的问题，所以对于每一个G_1，牧农2的最优反应为$G_2 = 12 - \frac{1}{2}G_1$。通过联立方程，油门有：

$$G_1^* = \frac{24 - G_2^*}{2}$$
$$G_2^* = \frac{24 - G_1^*}{2}$$

所以$G_1^* = G_2^* = 8$，我们可以看到草原上羊群的总数为$G^* = G_1^* + G_2^* = 16 > G^{**}$，每个牧农的利润为64。两个牧农的总利润为128，也小于草原私有时取得的最大利润144。在最优点纳什均衡(G_1^*, G_2^*)，牧农1增加一只羊的边际收入为$28 - 2G_1^* - G_2^* = 4 > 28 - 2(G_1^* + G_2^*) = -4$，前者是牧农1增加一只羊的边际收入，而后者是整个社会（两位牧农为一整体）的边际收入，因为牧农个人的边际收入大于整个社会的边际收入，所以总是会导致过度放牧的结果。

作业 1.7: 请列出牧农 2 的收益函数，找到牧农 2 的最优反应。

为了更清晰的展现这个问题，我们现在将目光聚焦到更简化的模型，假设草原上有两个牧农，每个牧农能选择的羊的数量为$\{6,7\}$，如果两个牧农都选择放牧6只羊，则其结果达到了私有牧场最大化社会收益的状态。我们可以计算在4种策略组合$(6,6), (6,7), (7,6), (7,7)$下，每个牧农的收益。

(1) (6,6)。每个牧农的利润都为 72.
(2) (6,7)。牧农 1 的利润为$6 * (28 - 6 - 7) - 4 * 6 = 66$，牧农 2 的利润为$7 * (28 - 6 - 7) - 4 * 7 = 77$.
(3) (7,6)。牧农 1 的利润为 77，牧农 2 的利润为 66.
(4) (7,7)。每个牧农的利润为$7 * (28 - 7 - 7) - 4 * 7 = 70$。

图 6 公地的悲剧

		牧农 2	
		6	7
牧农1	6	(72,72)	(66,77)
	7	(77,66)	(70,70)

从上图的双矩阵可以看出，(7,7)是一个纳什均衡，并且7是双方的占优策略。(6,6)虽然是草原的最优放牧量，但因为个人增加一只羊带来的草场收益的下降由双方平分，所以个人总有动力偏离社会最优点(6,6)，而陷入囚徒困境(7,7)，双方的利润70都低于社会最优点的72。

如果我们返回到原案例，从最优点(6,6)开始，每个牧农都会偏离社会最优点，各自增加放牧的羊只，直到纳什均衡点(8,8)，个人的边际收入等于边际成本，最终双方的利润都是64。

公地的悲剧，由英国经济学家罗伊德提出，并由经济学家哈丁(Garrett Hardin)再次提出其现代形式。因为公地不属于任何人，导致个人决策带来的收益或者损失溢出到其他人，而其个人的最优点与社会的最优点不一致，这也是微观经济学中市场失灵的一种：外部性。这个简单的模型隐含了深刻的道理，制度对经济的作用，如果产权不清楚，会导致个体供给量的总和超过或者少于最优的社会供给量。因为增加羊群使个人承担的损失少于社会，社会的总供给量多于其最优供给量。同样，如果个人的决策导致个人的收益少于社会，会导致个人供给量的总和少于其最优供给量。

因为产权不清，类似公地的悲剧的例子还有：

(1) 污染。工厂排出污染到大气或者河流，如果大气或者河流公有，则工厂承担的损失小于社会，则会导致工厂过量排放污染。

(2) 集体农场。改革开放以前，我们国家有一段时间在农村成立生产队，集体劳动，吃大锅饭。个人的劳动成果归集体，导致个人的收益少于集体收益，个人激励不足而个人产出的总量总是少于最优的社会总产出量。

因为公地的悲剧是由于产权不清导致个人的边际收入或者成本与社会不一致，从而使得社会总供给量与最优供给量不一致。其解决方法依然是回到其原因产权，公地由国家明确其产权归属，产权明晰是解决的方向。如我们的例子里，让两位牧农组成一个企业，让企业单独经营这块草地，企业的收益在两位牧农之间均分，尽管还是两位牧农，但公司的边际收入与社会的边际收入相同，从而解决公地的悲剧问题。

而对于污染问题，国家可以通过法律规定排放权分发给企业，明确每个企业可以排放多少污染，从而使多方决策的企业变为国家一方决策。

对于集体农场的问题，国家在改革开放后在农村实行分田到户，实行承包责任制，也是通过明确使用权归属，解决个人利益与社会利益不一致的问题。

作业 1.8: 我们回到原始公地的悲剧的模型，假设每个牧农的策略空间为{7,8}，即每个牧农都只能选择养 7 只羊或者 8 只羊，其他的设定与案例 5 公地的悲剧相同，请问：

(1) **请列出此博弈的三要素：参与人、策略空间与收益函数。**

(2) **请画出此博弈的双矩阵并找出此博弈的纳什均衡。**

(3) 请说明此博弈的社会最优策略组合，为什么社会最优策略组合不稳定？

1.7. 古诺模型

在先导课中，我们知道博弈论最早的历史可以追溯到古诺提出的一个寡头市场模型，在微观经济学中，市场的结构从完全竞争到完全垄断，厂商的经济利润各不相同，完全竞争中的企业利润为零，而完全垄断的企业利润最高。古诺的双头寡头模型可以表述为：

案例 6 古诺模型：市场中存在两个生产同样商品的企业{企业 1，企业 2}，其产量分别为q_1和q_2。令市场上的总生产量为$Q = q_1 + q_2$，市场价格为$P = 16 - Q$（$Q \le 16$）。两个企业的边际生产成为都为 4，即$C(q_i) = 4q_i, i = 1,2$。

我们先来看看如果市场只有一个企业，即假设企业1与企业2合谋，独立决定产量，其最优产量是什么。企业的目标是赚取最大的利润，

$$\max_{Q} \pi(Q) = P(Q) * Q - C(Q) = (16 - Q) * Q - 4Q = -(Q-6)^2 + 36$$

这个一元二次项函数在前面的二次项等于零的时候取得最大值，即$Q^{**} = 6$时最优利润为36。我们都知道这是垄断市场的最优解，利润最大。在最优点，垄断企业的边际收入为$16 - 2Q^* = 4$，与边际成本4相等。如果两个企业合谋利润平分，则每个企业生产3个单位，获得利润为18。

现在回到两个企业的双头市场古诺模型。其三要素为：

(1) 参与人{企业 1，企业 2}；

(2) 企业 1 的策略空间为$\{q_1 | q_1 \ge 0, q_1 + q_2 \le 16\}$；企业 2 的策略空间为$\{q_2 | q_2 \ge 0, q_1 + q_2 \le 16\}$；

(3) 企业 1 的收益函数为$\pi_1((q_1, q_2)) = (16 - q_1 - q_2)q_1 - 4q_1$；企业 2 的收益函数为$\pi_2((q_1, q_2)) = (16 - q_1 - q_2)q_2 - 4q_2$。其中$(q_1, q_2)$为双头博弈的策略组合。

我们可以通过每个企业在给定其他企业策略即其他企业的产量时的最优反应来找到纳什均衡。对于企业1来说，给定企业2的策略q_2，其最优反应为最大化其利润的产量q_1：

$$\max_{q_1} \pi_1((q_1, q_2)) = P(q_1 + q_2) * q_1 - C(q_1) = (16 - q_1 - q_2) * q_1 - 4q_1$$
$$= -\left[q_1 - \frac{12 - q_2}{2}\right]^2 + \left(\frac{12 - q_2}{2}\right)^2$$

同样，对于这个一元二次函数，企业1对企业2的策略q_2的最优反应为$q_1 = \frac{12 - q_2}{2}$；同样，企业2也面临同样的问题，企业2对企业1的策略q_1的最优反应为$q_2 = \frac{12 - q_1}{2}$。因此在纳什均衡点，联立方程得：

$$q_1^* = \frac{12 - q_2^*}{2}$$
$$q_2^* = \frac{12 - q_1^*}{2}$$

我们可以得到$q_1^* = q_2^* = 4$，两个企业的利润都为16。总产出量为$Q^* = q_1^* + q_2^* = 8$，两个企业的利润总和为32。双头市场的总产出Q^*低于垄断市场的总产出Q^{**}。在最优点，企业1的边际收入为$16 - 2q_1^* -$

q_2^*，大于垄断市场（企业1与企业2合谋）的边际收入$16 - 2Q^*$，因此两个企业都会“过量”生产，无法得到合谋的高额利润。

为了进一步看清楚为何双头市场无法合谋，我们假设每个企业的选择只有两个策略{3, 4}，如果两个企业都选择生产3个单位，则达到合谋的最高垄断利润。我们可以计算两个企业在四种策略组合{3,3}、{3,4}、{4,3}、{4,4}下的利润。

(1) {3,3}。两个企业的利润都为 18。
(2) {3,4}。企业 1 的利润为$(16 - q_1 - q_2) * q_1 - 4q_1 = (16 - 3 - 4) * 3 - 4 * 3 = 15$；企业 2 的利润为$(16 - q_1 - q_2) * q_2 - 4q_2 = (16 - 3 - 4) * 4 - 4 * 4 = 20$。
(3) {4,3}。企业 1 的利润为 20；企业 2 的利润为 15。
(4) {4,4}。两个企业的利润都为 16。

图 7 古诺模型

企业 1 \ 企业 2	3	4
3	(18,18)	(15,20)
4	(20,15)	(16,16)

从双矩阵可以看出，产量4是两个企业的占优策略，{4,4}是唯一的纳什均衡。尽管两个企业如果合谋各自生产18个单位可以获得最高的利润，但每个企业都有动力偏离这个策略组合，在另一个企业保持产量3的情况下，企业都能通过增加1个单位的产量获得更高的利润20，当双方都这样想的情况下，双方的利润都陷入到更低的境地，这也是囚徒困境的另外一个例子。

与公地的悲剧的原理一样，在双头模型中，单个企业增加产量带来的价格下跌由双方承受而不是单个企业承受，所以任何企业在垄断产出点总有动力去增加产量，而无法达成合谋。

1.8. 贝特兰德模型

与古诺模型类似，贝特兰德（Bertrand, 1883）模型也是双头寡头模型，不同的是，贝特兰德模型中的两个企业选择的是价格而不是产量，并且两个企业生产的并不是同质商品，具有一定的替代性但并不完全相同。

案例 7 贝特兰德模型：企业 1 和企业 2 生产不同的产品，各自选择价格p_1和p_2，消费者对企业i的需求为：

$$q_i(p_i, p_j) = 16 - p_i + 0.5p_j$$

这个需求函数表明，企业的生产量随着本产品的价格上升而下降，而随着另一种商品的价格上升而上升，这表明两种商品是替代关系。每个企业生产商品的单位成本都为2，即$C_i(q_i) = 2q_i$。两个企业同时决定其价格。

由于信息是完全的，并且两个企业同时决定其策略，即商品的价格，因此我们可以将贝特兰德模型概括成一个完全信息的静态博弈$G = \{S_1, S_2; \pi_1, \pi_2\}$，其三要素可分别表示为：

(1) 参与人{企业 1，企业 2}；
(2) 企业 1 的策略空间为$S_1 = \{p_1 | p_1 \geq 0, 16 - p_1 + 0.5p_2 \geq 0\}$，$S_2 = \{p_2 | p_2 \geq 0, 16 - p_2 + 0.5p_1 \geq 0\}$；
(3) 企业 1 的收益函数为其利润$\pi_1\big((p_1, p_2)\big) = p_1 q_1 - 2q_1$；企业 2 的收益函数为其利润$\pi_2\big((p_1, p_2)\big) = p_2 q_2 - 2q_2$。其中$(p_1, p_2)$为此博弈 G 的策略组合。

与前两个例子类似，在寻求此双头博弈的纳什均衡之前，我们先假设如果企业1与企业2合谋，最大化利润总和，其选择的两种商品的价格是什么呢？

$$\begin{aligned}\max_{p_1,p_2} \pi_1 + \pi_2 &= p_1 q_1 - 2q_1 + p_2 q_2 - 2q_2 \\ &= (p_1 - 2)(16 - p_1 + 0.5p_2) + (p_2 - 2)(16 - p_2 + 0.5p_1)\end{aligned}$$

当边际利润为零时，合谋的利润最大。

$$\begin{aligned}16 - p_1 + 0.5p_2 - (p_1 - 2) + 0.5(p_2 - 2) &= 0 \\ 16 - p_2 + 0.5p_1 - (p_2 - 2) + 0.5(p_1 - 2) &= 0\end{aligned}$$

可以得到，合谋的价格为：

$$\begin{aligned}p_1^{**} &= 17 \\ p_2^{**} &= 17\end{aligned}$$

企业1和企业2的价格分别为$p_1^{**} = p_2^{**} = 17$，最大的合谋利润为 225，每个企业分得 112.5。那这个合谋是稳定的吗？在合谋点时，企业 1 降低其价格的边际收入为$-MR_1 = \frac{d_{p_1 q_1}}{d_{p_1}} = -[16 - \mathrm{p}_1 + 0.5p_2 - (p_1 - 2)] = 7.5$，大于其降低价格带来的边际成本$-MC = -\frac{d_{2q_1}}{p_1} = 2$，因此企业1在合谋点总有动机降低价格，获得更高利润。因此合谋点不稳定，也必然不是纳什均衡。

不稳定的原因与公地的悲剧、古诺模型类似，即合谋的边际收入与个人的边际收入不一致，导致个人的最优策略与合谋（社会）的最优策略不一致。在贝特兰德模型中，单个企业降低价格，这个决策不仅影响自己的收入，更会降低消费者对对方商品的需求量。个人做决策最大化其利润时，会忽略后者的影响，所以个人决策的价格必然低于合谋的价格。

我们回到初始的问题，找到此博弈的纳什均衡。我们可以通过给定其他参与人的策略，找到每个参与人的最优反应来找到此博弈的纳什均衡。

给定企业2的策略p_2，企业1的策略为最大化其企业利润π_1：

$$\begin{aligned}\max_{p_1} \pi_1 &= q_1 p_1 - 2q_1 = (p_1 - 2)(16 - p_1 + 0.5p_2) \\ &= -\left(p_1 - \left(\frac{18 + 0.5p_2}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{18 + 0.5p_2}{2}\right)^2 - 32 - p_2\end{aligned}$$

当第一项为零时，企业1的利润最大，所以给定p_2，企业1的最优反应为

$$p_1 = \left(\frac{18 + 0.5p_2}{2}\right).$$

企业2面临同样的问题，所以给定p_1，企业2的最优反应为

$$p_2 = \left(\frac{18 + 0.5p_1}{2}\right)$$

于是其稳定的纳什均衡为$p_1^* = p_2^* =$
12，价格比合谋价格小，每个企业获得的利润为120，比合谋利润小。
为了更清楚的看到为什么贝特兰德模型中纳什均衡的价格低于合谋的价格，为什么合谋无法成立，我们假设一个更简单的模型，企业1与企业2只能选择两个价格{17,16}，如果两个企业都选择17，则达到了合谋并取得最大的利润。这个更简单的博弈为$G = \{S_1, S_2; \pi_1, \pi_2\}$，其中

1) 两个参与人{企业 1，企业 2};
2) 企业 1 的策略空间为$S_1 = \{p_1 | p_1 = 17$ 或$p_1 = 16\}$；企业 2 的策略空间为$S_2 = \{p_2 | p_2 = 17$ 或$p_2 = 16\}$;
3) 企业 1 的收益函数为其利润$\pi_1\big((p_1, p_2)\big) = p_1 q_1 - 2q_1$；企业 2 的收益函数为其利润$\pi_2\big((p_1, p_2)\big) = p_2 q_2 - 2q_2$。其中$(p_1, p_2)$为此博弈 G 的策略组合。

因为每个企业都只有两种策略，我们可以分别计算在这四种策略组合(17,17)、(16,17)、(17,16)、(16,16)下两个企业的利润。

1) (17,17)。每个企业都利润都为 112.5。
2) (16,17)。企业 1 的利润为$(p_1 - 2) * (16 - p_1 + 0.5 * p_2) = (16 - 2) * (16 - 16 + 0.5 * 17) = 119$;企业 2 的利润为$(p_2 - 2) * (16 - p_2 + 0.5 * p_1) = (17 - 2) * (16 - 17 + 0.5 * 16) = 105.$
3) (17,16)。企业 1 的利润为 105；企业 2 的利润为 119。
4) (16,16)。两个企业的利润为$(16 - 2) * (16 - 16 + 0.5 * 16) = 112$。

用双矩阵来表示：

图 8 贝特兰德模型

		企业 2: 17	企业 2: 16
企业1	17	(112.5,112.5)	(105,119)
	16	(119,105)	(112,112)

从双矩阵可以看出，价格为16是两个企业的占优策略，因此合谋的策略组合{17,17}无法成为稳定的策略组合，每个企业都有动力从17降低价格为16，因为都可以通过降低价格获得更高的利润(119>112.5)，从而达到纳什均衡{16,16}，但是双方获得的利润112都低于合谋的利润112.5。
在合谋点{17,17},每个企业的边际收入都为7.5，大于其边际成本2，也大于合谋的边际收入2。因此都有动力偏离这个策略组合，个人的边际收入与集体（合谋）的边际收入不一致，是合谋无法达成的原因。
因此每个企业都会降低价格，直到双方达到纳什均衡的策略组合{12,12}。