第三课.1 不完全信息的博弈

王彬，暨南大学经济学系，binwang@jnu.edu.cn

阅读材料：吉本斯 3.1.A。

在第一课和第二课中，我们讲述的完全信息的静态博弈和动态博弈，完全信息是指各参与人的收益函数是共同知识，即你知道我的收益函数、我知道你知道我的收益函数、你知道我知道你知道我的收益函数……。

现实世界中，完全信息是非常特殊的情况，大部分情况下共同知识这个假设是不成立的，信息在不同的参与人中是不对称的，或者有些行为的改变是其他参与人无法观察的。例如，公司经营者需要雇佣工人，但工人的能力是一种私有信息(private information)，公司并没有办法辨别工人的能力孰高孰低，而工人能力的高低显然会影响公司的收益；旧货市场上，卖家对二手货品的质量一清二楚，而买家却毫无所知，最典型的就是二手车市场，车是不是水浸过，是卖家的私有信息，这个私有信息显然会影响买家的收益；保险公司卖出保险后，无法观测到被保险人是否时刻注意风险，可能导致被保险人改变其行为，发生保险事件的概率上升；老师上传视频到 Bilibili，导致学生在上课时间不按时听课，因为总是可以时候补救从而导致学生行为的改变。

以上种种例子都是不完全信息的例子，其核心在于收益函数并不是共同知识，即你不知道我的收益函数，例如二手车的质量的私有信息会改变买家的收益函数、学生行为的变化会改变老师的收益函数。博弈中收益函数并不共同知识，这类博弈就叫做不完全信息博弈。

与完全信息类似，我们也可以按照参与人行动的次序把不完全信息博弈分为不完全信息的静态博弈和不完全信息的动态博弈。

1. 不完全信息的静态博弈

不完全信息的静态博弈也被称为静态贝叶斯博弈。其均衡也叫贝叶斯纳什均衡。博弈中的不完全信息通过一个假设的自然来描述，在博弈开始，假设有一个虚拟的自然从所有的信息可能性集即类型空间中按某种概率分布分配一个类型给某个参与人，该信息只有此参与人知晓，而其他所有的参与人都不知道这个具体的信息，但是该信息的概率分布是共同知识。

例如，参与人 1 的能力有两种情况，即高或者低，是高是低只有参与人 1 知道，而参与人 2 不知道参与人 1 的能力是高是低，但是参与人 2 知道参与人 1 能力高的概率为$\frac{1}{3}$，能力低的概率为$\frac{2}{3}$。这个不完全信息可以通过一个虚拟的参与人自然来进行。在游戏开始，自然先出手，自然按照 1/3 的概率分配高，2/3 的概率分配低给参与人 1，一旦分配后，参与人 1 知道他自己得到的是高还是低的类型；而参与人 2 无法观测到参

与人 1 的类型到底是高还是低，但参与人 2 能知道的是，参与人 1 以 1/3 的概率为能力高，2/3 的概率能力为低。

一个简易的不完全信息的静态博弈可以描述如下：

1. 参与人 1 知道他自己的私有信息t_1，参与人 2 不知道，但是参与人 2 知道参与人 1 的类型的分布函数。参与人 1 从他的行动空间A_1中选择行动a_1，参与人 2 从他的行动空间A_2中选择行动a_2；双方都无法观测到对方的选择；
2. 参与人 1 的收益函数为$u_1(a_1,a_2;t_1)$；参与人 2 的收益函数为$\sum_{t_1} p(t_1)u_2(a_1,a_2;t_1)$

我们也可以把这个不完全信息的静态博弈转化成一个以自然为虚拟参与人的完全信息但不完美信息的动态博弈：

1. 自然(nature)从参与人 1 的类型空间(type space)中T_1分配类型t_1给参与人 1；参与人 1 能观测到自己的类型，参与人 2 不能观测到参与人 1 的类型，但是参与人 2 知道参与人 1 的类型的分布函数；
2. 参与人 1 从他的行动空间A_1中选择行动a_1，参与人 2 从他的行动空间A_2中选择行动a_2；双方都无法观测到对方的选择；
3. 参与人 1 的收益函数为$u_1(t_1,a_1,a_2)$；参与人 2 的收益函数为$\sum_{t_1} p(t_1)u_2(t_1,a_1,a_2)$

在此博弈中，参与人 1 的类型有多种可能，而参与人 2 的类型只有一种可能；参与人 1 知道自己的类型是什么，参与人 2 不确定参与人 1 的类型但知道参与人 1 的类型的概率分布；参与人 1 和参与人 2 都知道参与人 2 的类型。也就是说，此简易的不完全信息的静态博弈中只有参与人 1 拥有私有信息，参与人 2 的信息为共同知识，并且参与人 1 的私有信息的概率分布为共同知识。

因为参与人 1 确定的知道自己的类型，所以他的收益函数是确定的，即为$u_1(a_1,a_2;t_1)$，取决于他自己的私人信息t_1以及参与人双方的行动a_1,a_2；参与人 2 不能确定参与人 1 的类型，参与人 2 在行动前就会猜测他自己在参与人 1 不同的类型下平均会获得多少收益，所以参与人 2 的收益函数为参与人 1 在不同类型下的期望值：

$$\sum_{t_1} p(t_1)u_2(a_1,a_2;t_1)$$

如果参与人 1 的类型空间是{高，低}，那么在参与人 1、2 的行动组合(a_1,a_2)时，参与人 2 获得的期望收益为：

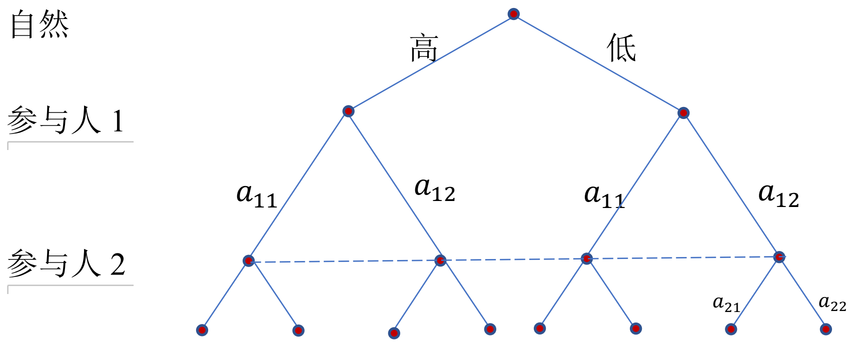
$$p(高)u_2(a_1,a_2;高)+p(低)u_2(a_1,a_2;低)$$

即不同类型下的概率与收益乘积之和，亦即收益的期望值。

与完全信息的静态博弈不同的地方在于，不完全信息的参与人多了一个类型的维度，所以不完全信息的静态博弈中的策略是一个完整的计划，需要描述参与人在所有不同的私有信息下他的行动是什么，例如参与人 1 拥有高低两种类型，在自然分配类型前，他需要思考若自然分配高的类型，他需要作出什么行动；若自然分配低的类型，

他需要作何行动，所以参与人 1 的策略为$s_1 = a_1(t_1), t_1 =$ 高、低或者$s_1 = \left(a_1(高), a_1(低)\right)$。

不完全信息的静态博弈等价于加入自然虚拟参与人的完全信息不完美信息的动态博弈。我们也可以将上述简易的不完全信息的静态博弈用扩展式表述。自然先行动，从参与人 1 的类型空间{高，低}中以一定的概率分布分配高或者低给予参与人 1。参与人 1 能够观察到自然的选择。这个过程就是动态博弈的结构。其后，参与人 1 从他的行动空间A_1中选择a_1；参与人 2 无法观察到参与人 1 的选择，从其行动空间A_2中选择行动a_2。本质上，参与人 1 和参与人 2 是同时行动，在扩展式表述中，我们可以将其转化成完全信息不完美信息的动态博弈，即参与人 1 先行动，参与人 2 后行动，但参与人 2 的决策点处于同一个信息集，用一条虚线将 4 个决策点连起来，表明参与人 2 无法观测到参与人 1 的行动，也无法观测到参与人被自然分配了什么类型。



将不完全信息的静态博弈转化成完全信息不完美信息的动态博弈，我们可以清晰的看到参与人 1 的策略为什么是一个完整的计划。参与人 1 拥有私有信息，相当于是自然先行动分配类型给参与人 1，并且参与人 1 可以观测到自然的选择，这个动态博弈中，参与人 1 的策略需要描述自然在所有可能选择下参与人 1 的选择，所以参与人 1 的策略是一个完整的计划。而参与人 2 既无法观测到参与人 1 的类型，也无法观测到参与人 1 的行动，所以参与人 2 的行动与策略是一致的。

在两个参与人的不完全信息的静态博弈中，如果策略组合(s_1^*, s_2^*)中的每一个参与人的策略都互为给定对方策略时的最优反应，我们就称该策略组合为贝叶斯纳什均衡。在我们简易的两人不完全信息静态博弈中，参与人 1 拥有私有信息，所以参与人 1 的策略为$s_1 = \left(a_1(高), a_1(低)\right)$，参与人 2 没有私有信息，所以他的策略与行动一致$s_2 = a_2$。如果有某个策略组合$(s_1^*, s_2^*) = \left(\left(a_1^*(高), a_1^*(低)\right), a_2^*\right)$中，给定参与人 2 的策略$a_2^*$，参与人 1 为高类型的最优反应为$a_1^*(高)$，参与人 1 为低类型的最优反应为$a_1^*(低)$；给定参与人 1 的策略为$\left(a_1^*(高), a_1^*(低)\right)$，参与人 2 的最优反应为$a_2^*$，则$(s_1^*, s_2^*) = \left(\left(a_1^*(高), a_1^*(低)\right), a_2^*\right)$就为此不完全信息静态博弈的贝叶斯纳什均衡。

案例 1 古诺模型 3：市场中存在两个生产同样商品的企业{企业 1，企业 2}，其产量分别为q_1和q_2。令市场上的总生产量为$Q = q_1 + q_2$，市场价格为$P = 16 - Q$（$Q \leq 16$）。企业 2 的边际生产成为为 4，即$C(q_2) = 4q_2$，而企业 1 的边际成本是企业 1 的

私有信息，企业 2 无法观察，但企业 1 的边际成本的概率分布为共同信息，即企业 1 以$\frac{1}{3}$的概率为低边际成本$C(q_1;L)=2q_1$，以$\frac{2}{3}$的概率为高边际成本$C(q_1;H)=6q_1$。

1. 给定参与人 2 的策略q_2，参与人 1 的最优反应为$(q_1(L),q_1(H))$

a) 对于低边际成本的类型来说，给定参与人 2 的策略q_2，其最优反应为：

$$\max_{q_1(L)}(16-q_1(L)-q_2)\,q_1(L)-2q_1(L)=-\left(q_1(L)-\frac{14-q_2}{2}\right)^2+\left(\frac{14-q_2}{2}\right)^2$$

因此低成本类型的参与人 1 的最优反应为$q_1(L)=\frac{14-q_2}{2}$。

b) 对于高边际成本的类型来说，给定参与人 2 的策略q_2，其最优反应为：

$$\max_{q_1(H)}(16-q_1(H)-q_2)\,q_1(H)-6q_1(H)=-\left(q_1(H)-\frac{10-q_2}{2}\right)^2+\left(\frac{10-q_2}{2}\right)^2$$

因此低成本类型的参与人 1 的最优反应为$q_1(L)=\frac{10-q_2}{2}$。

2. 给定参与人 1 的策略$(\mathrm{q_1(L),q_1(H)})$，参与人 2 的最优反应为a_2:

$$\max_{q_2}\frac{1}{3}\cdot[(16-q_1(L)-q_2)q_2-4q_2]+\frac{2}{3}\cdot[(16-q_1(H)-q_2)q_2-4q_2]$$

参与人 2 的最优反应为$q_2=\frac{12-\frac{q_1(L)+2q_1(H)}{3}}{2}$

满足上述三个最优反应函数的策略组合$\left((q_1^*(L),q_1^*(H)),q_2^*\right)$为此博弈的贝叶斯纳什均衡。

$$\begin{aligned} q_1(L) &= \frac{14-q_2}{2} \\ q_1(H) &= \frac{10-q_2}{2} \\ q_2 &= \frac{12-\frac{q_1(L)+2q_1(H)}{3}}{2} \end{aligned}$$

我们可以得到$q_1(L)=\frac{44}{9},q_1(H)=\frac{26}{9},q_2=\frac{38}{9}$。

我们可以将上述结果与完全信息的结果进行对比，如果参与人 1 的类型是共同知识，会出现什么结果呢。

类型	q_1^{**}	q_2^{**}
L	$\frac{16}{3}$	$\frac{10}{3}$
H	$\frac{8}{3}$	$\frac{14}{3}$

如果是完全信息的情况，当企业 1 的类型为低的信息为共同知识时，可以利用完全信息的静态博弈的方法找到纳什均衡$q_1^{**}(L)=\frac{16}{3}>\frac{44}{9}=q_1^*(L)$，即不完全信息中的低成本企业会比完全信息时生产的产量更少。企业 1 知道企业 2 的信息为公共知识，同时企业 1 也知道企业 2 不能观察到自己的成本是高还是低，并且企业 1 也知道企业 2 会根据自己类型的概率分布最大化其期望收益，企业 2 会认为企业 1 有$\frac{2}{3}$的概率为成本高的类型。与企业 2 知道企业 1 的类型为低成本相比，企业 2 会生产更多的产品，因为在不确定的情形下，企业 1 有$\frac{2}{3}$的概率成本高，企业 2 通过生产更多的产品可以获得更多的期望收益。企业 1 知道企业 2 会生产比完全信息时更多的产品，因为企业 1 知道企业 2 的理想行动，所以与完全信息的情形比较，企业 1 在低成本的类型的不完全信息博弈中会生产更少的产品。

同理，我们也可以同样知道，当企业 1 的类型为高成本时，与完全信息的情形比较，企业 1 会生产更多的产品（$q_1^{**}(H)=\frac{8}{3}<\frac{26}{9}=q_1^*(H)$）。

2. 不完全信息的动态博弈

不完全信息的博弈中，绝大部分问题或者说更有趣的问题都是动态博弈。与不完全信息的静态博弈相比，不完全信息的动态博弈是指靠后行动的参与人可以观测到前面参与人的行动。与子博弈精炼纳什均衡是对纳什均衡的精炼类似，不完全信息的动态博弈中的均衡是对不完全信息静态博弈中贝叶斯纳什均衡的精炼，即排除某些不符合理性原则的贝叶斯纳什均衡，我们叫做精炼贝叶斯均衡(perfect Bayesian equilibrium)。

	静态	动态
完全信息	纳什均衡	子博弈精炼纳什均衡
不完全信息	贝叶斯纳什均衡	精炼贝叶斯均衡

我们将着重探讨不完全信息的动态博弈中的两类问题：隐藏信息(hidden information; hidden characteristic)和隐藏行动(hidden action)。这两类问题在现实中广泛存在，也是博弈论研究现实经济的典型应用。

隐藏信息是指动态博弈中的参与人的影响收益函数的特征在博弈开始前为私有信息，其他参与人无法观察。隐藏行动是指动态博弈中的参与人的影响收益函数的行为在博弈开始后为私有信息，其他参与人无法观察。

隐藏信息和隐藏行动的区别有以下两点：

1. 隐藏信息问题中的私有信息是事前的特征，即在博弈开始前就是私有信息；隐藏行动问题中的私有信息是事后的特征，即在博弈开始后参与人的行为无法被其他参与人观察；

2. 隐藏信息问题中的私有信息是外生的；隐藏行动问题中的私有信息是参与人在博弈中行为发生了改变，是内生的；

以下例子的比较可以说明这两种问题的不同：

1. 保险公司售卖保险给参保人，保险公司无法判别参保人自身的风险，后者的风险是参保人的事前外生的私有信息，保险公司无法观察，因此这是隐藏信息问题；
2. 参保人买完保险后，如果风险发生，保险公司会赔偿损失额给参保人，无论参保人是不是发生风险，在买完保险的那一刻他的资金金额即被锁定。保险合同生效后，参保人可能因为不重视风险而导致发生风险的概率增加，从而导致保险公司遭受更大的损失，而参保人不重视风险的这个行为改变是保险公司无法观察的，因此这是隐藏行动问题；
3. 二手车市场卖家对车的质量了如指掌，而买家却一无所知，在博弈开始前，卖家就具有私有信息，因此这是隐藏信息问题；
4. 老师将讲课视频上传至 Bilibili 网站，无论同学们是否在上课时间听课，同学们都可以事后补救，所以可能导致某些同学不及时听课，而这个行为的改变是老师不能观察的，因此这也是隐藏行动问题；
5. 借款者向银行申请贷款，银行无法知晓借款者的风险水平，在博弈开始前，借款者就具有私有信息，因此这是隐藏信息问题；

2.1. 隐藏信息与逆向选择

隐藏信息会导致逆向选择(adverse selection)的结果，其含义是私有信息会导致更好类型的参与者退出市场，保留下来的是类型更差的参与人，最终市场崩溃。我们从阿卡洛夫(Akerlof)的柠檬市场即二手车市场观察，假设买家去有很多卖家的二手车市场买车，买家虽然不知道二手车的质量，但他知道二手车的质量在[20,100]间服从均匀分布，即车的质量在 20 到 100 间的范围具有同样的可能性。以下过程是买卖双方的思考过程：

1. 第一轮：买家愿意出多少钱买车呢？因为没有任何其他信号作为证据，他只能根据质量的概率分布计算他的期望收益，其买到的二手车的期望质量为$\frac{20+100}{2}=60$；既然期望质量为 60，那买家出的价格必须小于或等于 60，买家的期望收益才会为正数。
2. 第二轮；卖家知道买家是理性的，也知道第一轮中买家的出价不可能超过 60，因此所有质量超过 60 的卖家知道他卖车肯定亏损，因此质量在(60,100]的卖家退出市场；
3. 第三轮：买家知道前两轮的结果，知道市场上只存在质量在[20,60]的卖家，在这种情形下，其买到的二手车的期望质量为$\frac{20+60}{2}=40$；既然期望质量为 40，那买家出的价格必须小于或等于 40，买家的期望收益才为正数；
4. 第四轮：卖家知道前三轮的结果，知道买家出的价格不会超过 40，因此高质量的卖家(40,60]退出市场；
5. ……

随着高质量的卖家逐步退出市场，市场卖家逐步缩减，并且保留下来的卖家都是质量低的卖家，直到市场崩溃，只有质量最差的卖家留在市场。逆向选择说的就是好的类型退出市场，直到只有最差的类型停留在市场的现象。如例子 1 中的保险市场，因为保险公司无法观测到参保人的风险水平，会根据预期的风险水平定价，从而导致风险低的参保人退出市场，直到风险最高的参保人才停留在市场。

2.2. 隐藏行动与道德风险

隐藏行动会导致道德风险(moral hazard)问题，这是保险市场的术语。在保险市场最典型的例子中，因为参保人买完保险后，无论是否发生风险，参保人的资产价值保持不变，因为一旦保险的事件发生，保险公司会进行赔偿。因此，参保人就会放松控制风险，毕竟控制风险是有精力成本的，一旦参保人的行为发生改变，发生事故的概率上升，会给保险公司造成损失。在经济学家对这一类问题建模前，保险市场就已经观察到这一类的现象，并且认为这是参保人的道德出现了败坏，所以用道德风险一词形容此种现象。其实根本原因在于，参保人的行为是不可观测的，才会导致保险公司的损失，若参保人的行为可以观测，事前保险公司就可以在合同里写出相应的条款控制风险。

我们可以通过一个简单的二元选择的道德风险模型说明以上的逻辑。消费者消费两种商品，财富W和闲暇L，其效用函数为拟线性(quasi-linear)效用函数：

$$U(w,l) = B(w) + l$$

假设消费者为风险规避者，即$B' > 0, B'' < 0$。消费者一开始有w个单位的财富，保险的价格为p，发生事故造成的损失为z。消费者购买保险，以规避事故发生产生而造成的损失。

- 如果发生事故，消费者的损失为z，但同时保险公司会赔付该损失，因此发生事故后消费者的财富为$w - p - z + z = w - p$；
- 如果没有发生事故，消费者的财富仍然为$w - p$。

消费者具有T个单位的闲暇禀赋，如果他付出e单位的时间避免事故的发生，其闲暇的消费为$T - e$。假设事故发生的概率是消费者付出精力e的减函数$\pi(e)$，$\pi'(e) < 0$。我们假设消费者只能在付出精力和不付出精力之间选择，即$e = 0,1$。

消费者的问题是要选择最优的避免事故的精力：

$$\max_{e} B(w - p) + T - e$$

当消费者选择忽视风险，即不付出精力控制事故发生时$e = 0$，其效用为$U_{e=0} = B(w - p) + T$；当消费者选择重视风险，即付出精力控制事故发生时，其效用为$U_{e=1} = B(w - p) + T - 1$。

很明显，$U_{e=0} > U_{e=1}$，因此消费者的最优选择是$e = 0$，即在买完保险后，忽视风险，因为买完保险后，是否发生风险不会影响消费者的财富，但是选择注意风险会降低闲暇的消费，因此买完保险会改变消费者重视风险的行动。对于保险公司来说，这

种忽视风险的行动与保险公司卖保险时对消费者风险控制水平的评估不一致，造成更大的损失。20 世纪初期的保险市场认为这是买家的道德问题，因此将这种现象称为道德风险。

因为隐藏信息和隐藏行动会导致逆向选择和道德风险问题，因此很多信息经济学的教科书又把这两类问题称为逆向选择问题和道德风险问题，代指隐藏信息和隐藏行动问题。