第二课.1 完全信息的动态博弈

王彬，暨南大学经济学系，binwang@jnu.edu.cn

阅读材料：吉本斯 2.1.A、2.4。请完成作业 2.1、2.2、2.3

1. 三姬分金

网络动画《天行九歌》第 7 集中虚构了一个中国古代的故事。

案例 1 三姬分金：韩非让大王的甲乙丙三个妃子分 100 两黄金，约定如下，甲乙丙三人先后提出分金的方案，然后三人投票表决，如果投票表决大于（不包括等于）50%的人支持该方案，则方案通过，若方案不通过，则提出方案的人被处死。假设人性本恶，在两种收益相同的方案之间，优先选择人被处死的方案。即：

1. **甲提出方案，然后三人投票，通过则分金游戏结束，不通过被处死；**
2. **若甲被处死，则轮到乙提出方案，然后乙丙两人投票，通过则分金游戏结束，不通过被处死；**
3. **若乙也被处死，则轮到丙出方案，她一个人投票是否通过方案，游戏结束。**

我们可以从游戏的末端开始考虑，如果甲乙的方案都没有通过，则甲乙都被处死，丙最后肯定会获得 100 金币。如果乙不想被处死，她能怎么做呢？如果乙提出方案，可以知道，无论乙提什么方案，丙都不会同意，因为只要丙不同意，乙就会被处死（规则要求大于 50%的人同意方案才通过），即使乙提出（0，0，100）的方案，丙依然会不同意，尽管同意乙的方案与不同意乙的方案，丙都得到同样的 100 金，但不同意这个方案可以让乙死。所以乙能保命的唯一方法不在于自己提出方案，而是不要让自己提方案，唯一的方法就是不能让甲死，因此乙会同意甲提出的任何方案。当甲理性推测乙会同意自己提出的任何方案时，丙的意见无关紧要，2 票大于 1 票，因此甲会最大化自己的收益，提出（100，0，0）的方案，乙同意，方案通过，游戏结束。

如果有 4 位妃子甲乙丙丁或者 5 位妃子甲乙丙丁戊玩这个游戏，结果是什么呢？同学们可以认真思考一下。

作业 2.1: 请描述 5 位妃子甲乙丙丁戊玩分金游戏的结果。

2. 动态博弈

上面三姬分金的例子就是典型的动态博弈，博弈的参与人的行动次序有先后，这个先后并不是指作出决定的时间点的先后，而是指参与人在轮到他选择时，他可以观测到前序参与人的行动，若参与人的选择有先后但后序参与人无法观测到前序参与人的行

动，我们只能将这种情况归纳为静态博弈。在三姬分金博弈中，乙在观测到甲的选择后才能开始行动，如果甲的选择没有被通过，才轮到乙行动。对于这种博弈，我们推测其结果或者均衡的方法是从丙开始，然后推测乙的选择，最后推测甲的选择，这种方法叫做**后向归纳**(backward induction)，即从游戏的最后一个行动人开始推测，一直推测到第一个行动人，原因是我们需要假设所有的行为人是理性的，假设最后一个行为人是理性的，他最后的行动是什么，然后假设倒数第二个行为人是理性的，他知道最后一个行为人是理性的，根据最后一个行为人的理性选择，倒数第二个理性人应该作出什么理性选择。

在三姬分金中，我们假设丙是理性的，如果轮到她提出方案，她肯定提出（0，0，100），因为给定甲乙都被处死，丙肯定同意自己的方案；然后我们再假设乙是理性的，她根据丙的理性选择，即无论什么样的方案，即使把 100 金全给丙，丙都会不同意然后自己被处死，所以她唯一活命的机会是不能让甲死，在甲提出方案时，她肯定会通过；然后甲根据乙、丙的理性选择，甲知道乙会理性选择同意自己的任何方案，因此甲会最大化她的收益，提出（100，0，0）的方案，乙同意，游戏结束。

动态博弈描述的是以下一类博弈，参与人$\{1,\cdots,n\}$先后行动，参与人i在观测到前序参与人的选择a_{i-1}后，从他的行动空间A_i中选择行动a_i，具体的：

- 参与人 1 从他的行动空间A_1中选择行动a_1；
- 参与人 2 在观测到参与人 1 的选择a_1后，从他的行动空间A_2中选择a_2；
- ……
- 参与人n在观测到参与人$n-1$的选择a_{n-1}后，从他的行动空间A_n中选择a_n；
- 参与人 1 到n的收益分别为$u_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,u_n(a_1,\cdots,a_n)$。

如果博弈为完全信息，即收益函数为共同信息，则此类博弈为完全信息的动态博弈。

3. 后向归纳

通过前面的三姬分金的例子，我们知道通过后向归纳的方法可以找到此类博弈的均衡结果，那更一般的，我们假设只有两个参与人的动态博弈中：

- 参与人 1 从他的行动空间A_1中选择行动a_1；
- 参与人 2 在观测到参与人 1 的选择a_1后，从他的行动空间A_2中选择a_2；
- 参与人 1 和参与人 2 的收益分别为$u_1(a_1,a_2),\cdots,u_n(a_1,a_2)$。

因为参与人 2 在他可以行动的时候已经能观察到参与人 1 的选择，所以在博弈发生前，参与人 2 就可以预想，根据参与人 1 的每一个可能的选择，他会做出什么最优反应，即

$$\max_{a_2} u_2(a_1,a_2)$$

对于参与人每一个可能的行动a_1，参与人 2 在博弈开始前都能预想他的最优反应$a_2(a_1)$，假设参与人 2 的最优反应是唯一的，我们把这个唯一的最优反应函数写作$R_2(a_1)$。

参与人 1 知道参与人 2 是理性的，并且面对参与人 1 的每一个可能的行动a_1，参与人 2 都会选择唯一的$R_2(a_1)$，于是参与人 1 就会根据参与人 2 的最优反应函数$R_2(a_1)$选择他自己的行动a_1最大化他的个人收益：

$$\max_{a_1} u_1\big(a_1, R_2(a_1)\big)$$

假设这个最大化问题有唯一的解a_1^*，我们就把$(a_1^*, R_2(a_1^*))$称为此博弈的后向归纳结果。后向归纳的推理中，任意一个参与人都是在做理性决策，并且任意一个理性人都以其他参与人的理性决策为依据，例如上述的两个参与人的动态博弈中，参与人 2 在参与人 1 每一个可能的行动下最大化其收益，而参与人 1 在基于参与人 2 做前述理性决策上最大化其个人收益，因此不会出现不可信的承诺或者威胁的结果。而这是对纳什均衡结果的一个精炼(refinement)，纳什均衡的概念并没有办法排除不可信的承诺或者威胁，为什么呢？我们通过一个简单的例子来说明这个现象。

4. 不可信的承诺和威胁

案例 2 上下左右：博弈中有两个参与人甲乙，甲可以选择{上，下}，当甲选择上时，甲获得收益 1，乙获得收益 5，游戏结束；当甲选择下时，就轮到乙选择{左，右}，如果乙选择左，则甲获得 0，乙获得 2，如果乙选择右，则甲获得 3，乙获得 3，游戏结束。

我们在先导篇中提过，动态博弈中的策略与行动不一致，对于后行动的参与人，他的策略必须考虑先动参与人的策略。对于先行者甲来说，他的策略与行动一致，因此策略空间为{上，下}，而后行者乙需要考虑他面对甲的不同行动他会如何行动，在这个例子里，如果甲选择上，游戏结束，所以轮到乙行动时，他面对的甲的选择只有一个，那就是下，所以他的策略空间是{(ϕ，左)，（ϕ，右）}，策略的第一个位置表示如果甲选择上，乙的选择为空，游戏结束，第二个位置表示如果甲选择下，那乙就选择左或者右。因此甲乙都有两个策略。

甲 \ 乙	（ϕ，左）	（ϕ，右）
上	（$\underline{1}$，$\underline{5}$）	（1，$\underline{5}$）
下	（0，2）	（$\underline{3}$，$\underline{3}$）

只要甲选择上这个策略，无论乙选择什么策略，甲获得 1 而乙获得 5；如果甲选择下，若乙选择左，则甲获得 0 而乙获得 2，若乙选择右，则甲获得 3 而乙也获得 3。我们可以将这些策略填入双矩阵中，根据最优反应可以得到两个纳什均衡（上，（ϕ，左））以及（下，（ϕ，右））。

我们可以看到第二个纳什均衡导致的结果其实是后向归纳的结果。首先考虑最后一个行动者乙，根据甲不同的行动，只有甲选择下时才轮到乙行动，所以当甲选择下时，乙会在左右之间比较，选择右得到 3 而选择左得到 2，所以当甲选择下时乙会选择

右；甲推测乙是理性的，并且知道自己选择上或者下时，乙会进行理性选择，所以他知道如果自己选择下时，乙会选择右，因此当他选择下的时候会获得收益 3，而他选择上时获得收益 1，因此甲的最优选择是下。后向归纳的结果就是甲先选择下，乙观察到甲选择下后选择右。这与纳什均衡（下，（ϕ，右））导致的结果甲先选择下、乙后选择右相同。

第一个纳什均衡依赖乙的威胁：如果甲选择下，乙会选择（ϕ，左）。如果甲相信了乙这个威胁，那甲就不会选择下，而会选择上，因为甲会获得收益的递增，从 0 到 1。但这个威胁是不可信的，因为如果真的轮到乙选择时，他会选择右而不是左，因此（ϕ，左）这个策略是不可信的威胁，不符合理性原则，会被后向归纳给排除掉。

从上下左右案例中，我们可以看出后向归纳可以精炼纳什均衡，排除掉在动态博弈中不可信的承诺或者威胁，我们把精炼后的均衡叫做子博弈精炼纳什均衡(sub-game perfect Nash equilibrium)。在正式的学习这个概念前，我们还需要引入动态博弈的扩展式表述以及引入子博弈的概念。

5. 扩展式表述

在上下左右博弈以及先导课的动态三体博弈中，我们都曾讨论过动态博弈中参与人的策略，特别是后行动者的策略需要叙述先行者的可能性选择。如果参与者众多，排序靠后的行动者的策略式表述会异常复杂。

案例 3 博弈中有甲乙丙三个人，他们依次行动，并且三个参与人的行动都有两个{A,B}，三人的收益在不同的行动下的收益分别为：

2, 5, 1	A,A,A
4, 3, 2	A,A,B
-1, 0,3	A,B,A
3,-10,5	A,B,B
3, 1, -1	B,A,A
-2, 1, 0	B,A,B
2, 9,4	B,B,A
4, 5, -5	B,B,B

如果用策略式表述描述此博弈，甲的策略空间为{A,B}，乙的策略空间为{(A,A),(A,B),(B,A),(B,B)}，乙的策略中括号的第一个位置表示甲选择其行动空间中第一个行动 A 时乙的选择，第二个位置表示甲选择其行动空间中第二个行动 B 时乙的选择，如（A，A）表示若甲选择行动 A 则乙选择行动 A，若甲选择行动 B 则乙选择行动 A。而丙的策略需要考虑先行动的甲乙所有可能的行动，因为甲有两个行动，乙有 2 个行动，丙在行动前面临 4 种历史路径，而丙有两个行动，所以丙一共有$2^4=16$种策略，当丙面临选择时，前面甲乙有四种行动组合，即甲乙选择 AA, AB, BA, BB，因此丙的策略需要陈述当轮到丙选择时，他面对前面甲乙选择的 4 种不同路径，丙会如何选择，例如丙的一个策略是：若甲选择 A 以及乙选择 A，丙选择 A；若甲选择 A 以及乙选择 B，丙选择 A；若甲选择 B 以及乙选择 A，丙选择 A；若甲选择 B 以及乙选择 B，丙选择 A。丙的一个完整策略需要描述轮到他行动时，他面临的所有可能历史

路径时他作何选择。我们用一个四维的向量来表示丙的策略，前述策略中，可以表示成（A，A，A，A），就是丙的策略空间中的一个策略，它表示的含义是，第一个位置的 A 表示若甲乙分别选择 A、A，则丙选择 A；第二个位置表示甲乙分别选择 A、B，丙选择 A；第三个位置的 A 表示若甲、乙分别选择 B、A，则丙选择 A；第四个位置的 A 表示若甲、乙分别选择 B、B，则丙选择 A。

作业 2.2: 请写出丙的策略空间，并用文字描述策略空间中任意一个策略的含义。

从案例 3 可以看出，当动态博弈中的行动人增加时，参与人的策略空间会指数级的增加，策略式表述会非常不方便，因此，我们引入扩展式表述动态博弈，

博弈的**扩展式表述**包括：

(1) 博弈中的参与人；
(2) 行动规则；
    a) 每个参与人何时行动；
    b) 每个参与人轮到他行动时他能做什么；
    c) 每个参与人轮到他行动时他知道什么；
(3) 参与人在所有参与人的行动组合下的收益。

其中(2c)所描述的“知道什么”是指该参与人能观测到过去的历史。例如，甲乙两人依次行动，甲可以选择从左门、右门、左窗、右窗出来，乙在观测到甲的行动后选择上还是下。如果甲乙是面对面站着玩这个游戏，那轮到乙行动时，乙可以知道甲选择的到底是左门、右门、左窗还是右窗；但如果甲通过拍照的形式发给乙看，那乙就只能知道甲选择的是门还是窗，而无法分辨左右，如果甲选择的是左门，那乙在（2c）意义下就知道甲选择的是左门或者右门，但不可能是左窗或者右窗。如果出现这种情况，即参与人无法分别某些历史，我们叫它不完美信息。反之，前一种情况是完美信息，即参与人可以分辨过去所有的历史路径。

注意分辨（2c）项下所知道的历史与（3）所描述的收益函数的区别，如果收益函数是共同信息，则此扩展式博弈是完全信息动态博弈。完全信息的动态博弈中也会出现不完美信息，我们在后面会再次讲到这个区别。

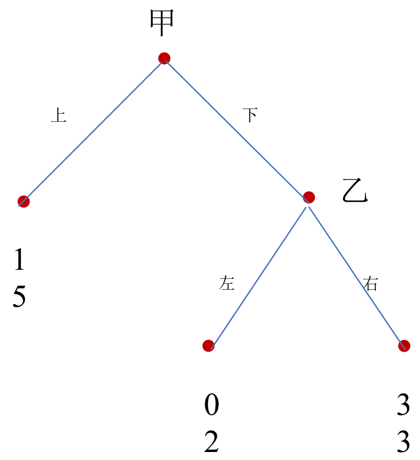
我们通常用博弈树描述扩展式表述的博弈。博弈树以第一个行动人的决策点作为起点[1]，首个参与人的行动空间伸展出枝，每一条枝对应下一个行动人的决策点，依次进行，直到最后一位行动人的决策点，其行动空间伸展出枝，以终结点作为博弈树的终点。例如，上下左右博弈：

上下左右博弈中，参与人 1 先行动选择上或者下，所以从 1 的决策点开始伸出两枝，分别是上下，如果选择上，则游戏结束到终结点，收益分别是 1、5，如果选择下，则

[1] 在某些博弈中，会用自然作为博弈树的起始点。

到达参与人 2 的决策点，伸出两枝，分别为左右，到达终结点，左枝到达的终结点，甲乙的收益为 0、2，而右枝达到的终结点，甲乙的收益为 3、3。

图 1 上下左右博弈树



动态博弈中的**策略**是参与人行动的完整计划，它需要描述参与人轮到他行动时他面临的每一个可能性时所采取的行动。所以乙的策略需要描述如果甲选择上或者下时，乙需要做什么行动，很显然，在这个例子中，只有甲选择下时，才轮到乙行动。如果用后向归纳法推测博弈的结果，我们从乙开始，轮到乙决策时，他从左右两个行动中会选择右，因为 3 大于 2，而甲知道如果他选择下，乙会理性选择右，因此甲选择右时他的收益为 3，而甲选择上时他的收益为 1，因此甲最终会选择下，而乙在观察到甲选择下后选择右，各自得到收益 3。

我们可以再来看看另一个纳什均衡（上，（ϕ，左）），首先我们可以在扩展式表述中观察为什么这个策略组合是一个纳什均衡。面对乙的（ϕ，左）策略，甲不会偏离上这个策略，因为偏离后甲的收益从（上，（ϕ，左））的 1 下降到（下，（ϕ，左））0；其次面对甲选择上的策略，乙也不会偏离（ϕ，左）这个策略，因为如果乙讲策略变成（ϕ，右），（上，（ϕ，右））这个策略组合的收益与（上，（ϕ，左））的收益一样都是 5，并没有收益的递增。因此（上，（ϕ，右））这个策略组合中，甲乙双方都没有动力偏离，因此是一个纳什均衡。

但（上，（ϕ，左））这个组合并不符合人的理性，因为真的轮到乙行动时，他并不会选择左，而是选择右，是一个不可信的威胁，因此乙的策略（ϕ，左）会被后向归纳排除，（下，（ϕ，右））是后向归纳精炼后唯一的均衡。

均衡与结果：均衡是稳定的策略组合，而结果是均衡策略组合中最后达成的行动组合。如上述例子中，（下，（ϕ，右））是一个均衡，里面两个元素下与（ϕ，右）分别是甲乙的策略，而最后的结果就是甲先选择下，乙后选择右。

如果我们将目光集中在右侧乙开始的博弈树的部分，就会发现（上，（ϕ，左））这个策略是不稳定的，因为乙总是会偏离，从左变成右，而这正是**子博弈精炼纳什均衡**的精髓，但在正式介绍这个概念前，我们需要定义信息集和子博弈。

6. 信息集和子博弈

在介绍子博弈前，我们需要先引入一个概念叫做信息集。信息集是参与人决策点的集合，它满足两个条件：

(1) 同一个信息集中的决策点都是同一个参与人的决策点；
(2) 当博弈行进到某个信息集的决策点时，该参与人无法判断他是通过信息集中哪个决策点到达该信息集。

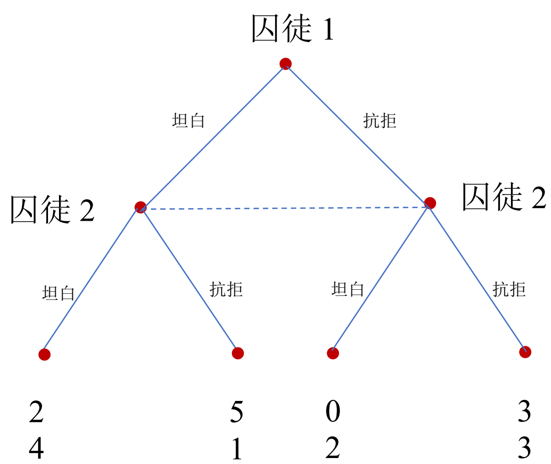
在博弈树中，我们用虚线将处于同一个信息集中的决策点用虚线相连。如果动态博弈的决策树中所有的信息集都是单个点，我们就说该博弈为**完美信息(perfect information)**。否则，我们就称该博弈具有**不完美信息**。非单点信息集的含义就是参与人行动时无法观测到前一个行动参与人的某些选择。

案例 4 囚徒困境 2：我们对前面的囚徒困境博弈做小幅改动，囚徒 1 先选择坦白还是抗拒，囚徒 2 后选择坦白或者抗拒。其收益函数与囚徒困境 1 博弈相同。但囚徒 2 无法知晓囚徒 1 的选择。

我们在学习完全信息的静态博弈中知道，静态博弈指的是参与人独立做出决策，无法观测到对方的选择，并不要求在同一个时点做决策，因此囚徒困境 2 博弈仍然是完全信息的静态博弈。但我们同时，也可以将囚徒困境 2 看成是不完美信息的动态博弈，在到达囚徒 2 的决策点时，囚徒 2 无法判断囚徒 1 选择的是坦白还是抗拒，因此在囚徒 2 行动的决策点中，信息集具有两个决策点。

我们在博弈树中通过信息集的方式表达这个信息，即轮到囚徒 2 行动时，他无法判断囚徒 1 选择的是坦白还是抗拒，因此囚徒 2 的信息集非单数，囚徒困境 2 博弈既是完全信息的静态博弈，也可以看成是完全信息但不完美信息的动态博弈。

图 2 囚徒困境 2 博弈树



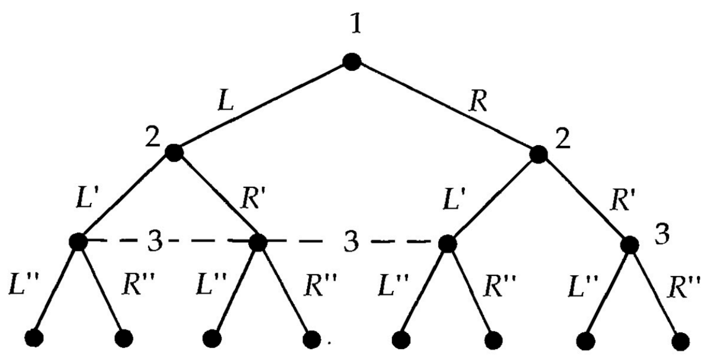
在介绍了信息集的概念后，我们可以定义子博弈。在扩展式博弈中，子博弈是博弈树中满足以下条件的分支：

(1) 开始于决策点n，并且决策点n所在的信息集是单点信息集，并且该决策点不是博弈树的起始点；
(2) 包括了决策点n之后所有的决策点和终结点；
(3) 该分支不会切割任何信息集，即如果n之后的某一个决策点为n'，那n'所在信息集中其他所有决策点都在此分支中。

囚徒困境 2 博弈中有没有子博弈呢？我们从上至下讨论，囚徒 1 的决策点是单点信息集，但囚徒 1 的决策点是起始点，所以囚徒 1 开始下面所有的分支不能构成子博弈，这实际上是博弈本身；从囚徒 2 开始的分支呢？我们可以看到囚徒 2 的任何一个决策点都不满足条件(1)，因为囚徒 2 的决策点不是单点信息集。因此囚徒困境 2 没有子博弈。

我们可以看到在图 1 的上下左右博弈中，甲选择下后乙的决策点后的分支就是一个子博弈，它满足三个条件。

我们可以再看看下图的博弈树，参与人 1、2、3 依次行动，参与人 2 可以观测到参与人 1 的选择，而参与人 3 只能观测到前面两个参与人是否依次选择了(R, R')，因此参与人 3 的决策点有两个信息集{(L,L'),(L,R'), (R,L')}和{(R,R')}。此博弈中只有参与人 3 观测到 1、2 选择(R,R')后一个子博弈，参与人 2 开始的两个分支不满足条件（3）,例如参与人 2 在观测到参与人 1 选择 L 后的这个分支满足条件（1）以及（2），但不满足条件（3），因为参与人 3 在{R,L'}后的这个决策点也在同一个信息集，而这个分支并没有包括它，因此这个分支切割了参与人 3 的信息集。



在定义了子博弈后，我们就可以引入子博弈精炼纳什均衡。如果博弈中的一个纳什均衡策略组合在博弈的每一个子博弈中都构成纳什均衡，我们就这个纳什均衡称为**子博弈精炼纳什均衡**。

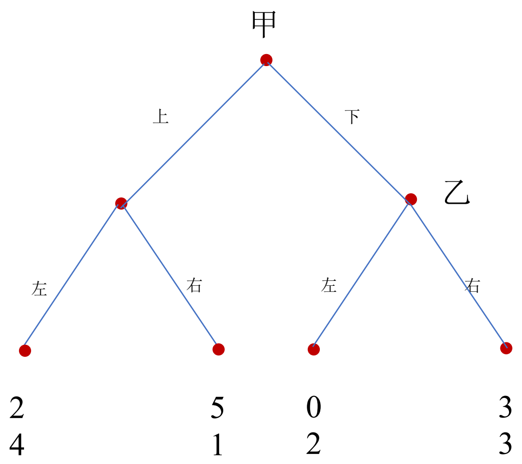
子博弈纳什均衡排除掉了纳什均衡中不符合理性原则的策略组合，也就是那些不可信的承诺以及威胁。例如在案例 2 上下左右博弈中，纳什均衡（上，（ϕ，左））就是典型的不可信的威胁，如果甲选择下，乙就会选择左这个策略在乙决策点开始的这个子博弈中不稳定，因为在这个子博弈中，乙选择右的收益大于左，也就是说在这个子博弈中不构成纳什均衡，因此被子博弈精炼纳什均衡的概念排除。

之所以我们需要子博弈的概念，是因为在整个博弈中如果甲选择上，乙选择（ϕ，左）与选择（ϕ，右）的收益都一样，纳什均衡无法排除不可信的威胁，而乙开始的子博弈中（ϕ，左）显然就是不合理的选择。

而后向归纳在每一个子博弈中都应用了理性原则，其最后的结果刚好就是子博弈精炼纳什均衡的结果。

案例 5 上下左右 2: 我们对前面的上下左右博弈做小幅改动，甲先选择上下，乙在观测到甲的选择后选择左右，如果甲选上，若乙选择左，则甲获得 2 乙获得 4，若乙选择右，则甲获得 5 乙获得 1；如果甲选下，若乙选择左，则甲获得 0 乙获得 2，若乙选择右，则甲获得 3 乙获得 3。

图 3 上下左右 2 博弈树



案例 5 将前面的案例做小幅改动，如果甲选择上，乙依然可以选择左右。通过后向归纳，我们先从乙开始，如果甲选择上，乙从左右两个行动中选择左（$4>1$）；如果甲选择下，乙从左右两个行动中选择右（$3>2$）。而甲知道乙会做出理性选择，当甲选择上时，乙会理性选择左，甲的收益为 2，当甲选择下时，乙会理性选择右，甲的收益为 3，因此甲会选择下（$2<3$）。最后的均衡策略组合是（下，（左，右）），后向归纳的结果是甲先选择下，乙在观察到甲选择下后选择右。

我们也可以用策略式表述这个动态博弈，甲有两个策略{上，下}，乙观测到甲的选择后选择，因此乙有四个策略{（左，左），（左，右），（右，左），（右，右）}，我们可以用双矩阵来表述这个博弈：

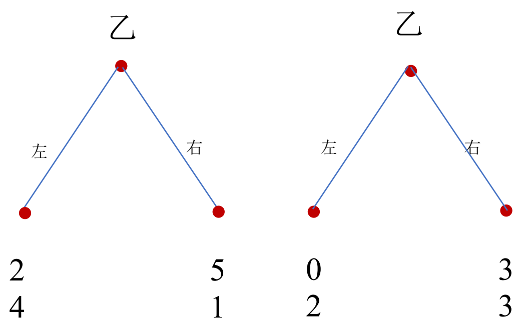
乙

甲	（左，左）	（左，右）	（右，左）	（右，右）
上	($\underline{2}$，$\underline{4}$)	(2，$\underline{4}$)	($\underline{5}$，1)	($\underline{5}$，1)
下	(0，2)	($\underline{3}$，$\underline{3}$)	(0，2)	(3，$\underline{3}$)

我们可以看到，此博弈中有两个纳什均衡（上，（左，左））、（下，（左，右）），而后向归纳的结果是后一个纳什均衡的结果，前面我们讲到后向归纳的结果也是子博弈精炼纳什均衡的结果，因此前一个纳什均衡（上，（左，左））被子博弈精炼纳什均衡的概念排除，说明这个纳什均衡并没有在所有的子博弈中构成纳什均衡，那是在哪个子博弈中不稳定呢？

首先，这个动态博弈有两个子博弈，都是乙为决策点的两个分支。（左，左）这个策略的意思是如果甲选择上，乙会选择左；如果甲选择下，乙选择左。我们可以看到第一个子博弈是甲选择上后乙开始决策的子博弈，甲选择上后，乙的确会选择左，因为4>1，在这个子博弈中，（左，左）构成纳什均衡；第二个子博弈是甲选择下后乙开始决策的分支，甲选择下后，乙的最优决策是右因为 3>2，因此（左，左）在这个子博弈中不构成纳什均衡。所以（上，（左，左））这个纳什均衡被子博弈精炼纳什均衡的概念排除。同样的，（下，（左，右））这个纳什均衡在每一个子博弈中都构成纳什均衡，在第一个子博弈中，（左，右）符合纳什均衡，因为 4>1，左第二个子博弈中，（左，右）也符合纳什均衡，因为 2<3。

图 4 上下左右 2 的子博弈



作业 2.3: 甲乙两人依次行动，甲可以选择从左门、右门、左窗、右窗出来，乙在观测到甲的行动后选择上还是下。甲在行动组合（左门，上）、（左门，下）、（右门，上）、（右门，下）、（左窗，上）、（左窗，下）、（右窗，上）、（右窗、下）下的收益分别为 2、4、-1、0、7、3、6、2；而乙在这 8 个行动组合下的收益分别为 3、5、8、-2、0、4、3、1。

(1) 若甲乙面对面站着玩此游戏，乙能观测到甲的所有选择，请用扩展式表述表示此博弈。并用后向归纳法找到均衡结果。

(2) 请用策略式表述表示此博弈。并找到纳什均衡。（选做，不强制）

(3) 请找到此博弈的子博弈精炼均衡，并描述子博弈精炼均衡与（1）中后向归纳结果的关系。

(4) 请阐述为何子此博弈精炼均衡符合理性原则。

(5) 若甲通过拍照的形式给乙观察他的选择，乙只能观测到甲是选择的门还是窗，但无法分辨左右，请画出此动态博弈的博弈树。（忽略收益函数）