

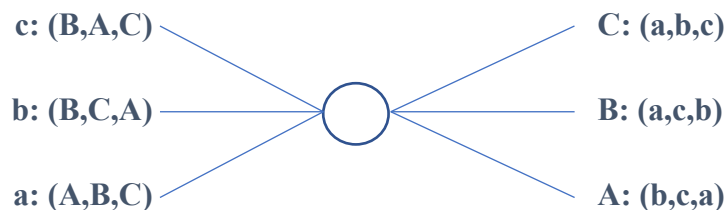
第四课. 匹配博弈

王彬, 暨南大学经济学系, binwang@jnu.edu.cn

阅读材料: 无

这节课我们考虑一类特殊的博弈:

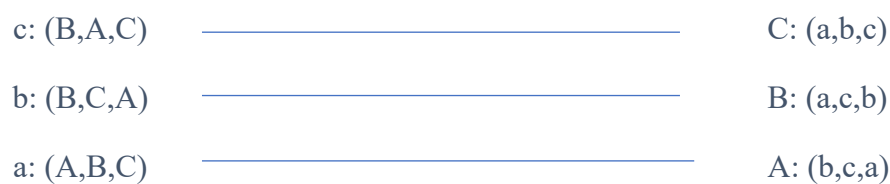
案例 1 匹配博弈: 大学毕业之前班级组织一场舞会, 假设班级有 3 位男生 $\{a, b, c\}$ 以及 3 位女生 $\{A, B, C\}$, 舞会需要男女搭配, 选择舞伴, 男女双方都有各自的偏好如下:



括号中的顺序代表偏好顺序, 如 $a: (A, B, C)$ 表示男生 a 对女生的偏好为 $A > B > C$ 。那双方最后的选择是怎么样的呢?

这是一个典型的匹配问题, 为了简易, 我们只考虑双方的数量相同, 并且只有严格偏好的情况, 不存在某方参与人对对方的两个参与人的偏好相同。

我们首先看看一种最简单的匹配 $\{(c, C), (b, B), (a, A)\}$ 。



在这个匹配里, 男生 a 和 b 获得了他们偏好里最优的匹配, c 获得了他最差的偏好。我们也注意到男生 c 喜欢女生 B 胜过他自己的配对 C , 女生 B 喜欢男生 c 胜过她的配对 b 。很显然, c 与 B 配对可以提高男生 c 与女生 B 的效用, 我们就说匹配 $\{(c, C), (b, B), (a, A)\}$ 是不稳定的。

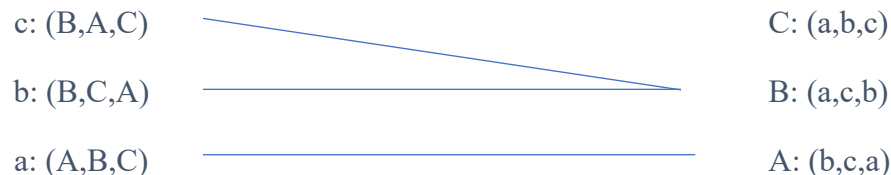
那怎样可以获得稳定的匹配呢? 我们接下来介绍 Gale-Shapley 算法:

1. 由一方的各个参与人向对方根据他/她自己的偏好顺序提出匹配邀约;
2. 另一方中获得两个或两个以上邀约的参与人根据她/他的偏好选择接受一个最合意的邀约, 然后拒绝其他的邀约; 如果只有一个邀约, 则接受;
3. 第二步中被拒绝邀约的这方参与人根据他/她第二偏好再向另一方提出邀约;

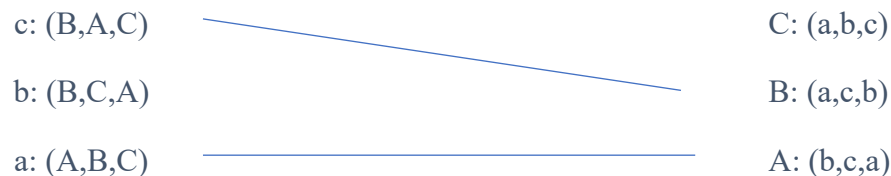
4. 另一方中如果仍然有参与人获得两个或两个以上的邀约, 则根据偏好顺序接受最合意的那个邀约, 拒绝其他的邀约; 如果只有一个邀约, 则接受;
5. 重复 3, 4 步骤, 知道每一个参与人都获得匹配。

根据 Gale-Shapley 算法, 我们看看以上的舞会匹配案例。假设由男生提出邀约申请。

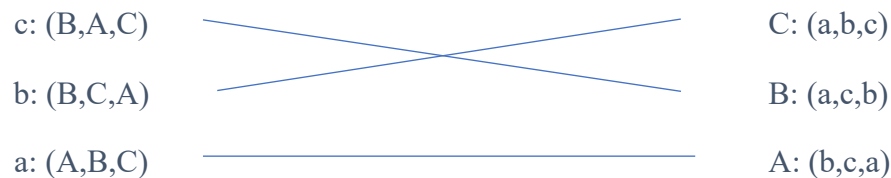
1. 第一步, 由男生 c,b,a 分别向女生提出邀约, 选择 B,B,A;



2. 第二步, 由女生接受或者拒绝邀约。女生 A 只有一个邀约, 接受; 女生 B 有两个邀约, 则根据其偏好顺序 a,c,b, 接受 c 的邀约, 拒绝 b;



3. 第三步, 前两步中只有 b 未被匹配, 所以根据其偏好顺序, 选择向 C 提出邀约;

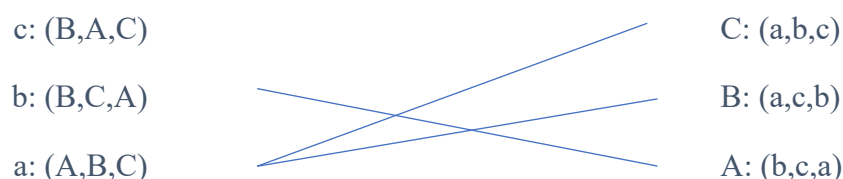


4. 第四步, 女生 C 只收到一个邀约, 因此接受。所以最后的匹配为 $\{(c,B),(b,C),(a,A)\}$ 。

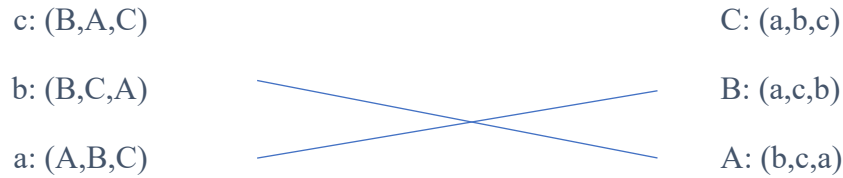
我们可以看到这个匹配 $\{(c,B),(b,C),(a,A)\}$ 是稳定的, 不存在两个配对中某个配对的女生和另一个配对的男生相互合意。注意, 稳定匹配并不惟一, 改变邀约的方向可以获得不同的稳定匹配。

假设, 我们由女生提出邀约:

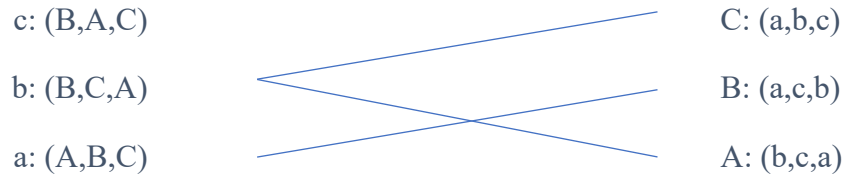
1. 第一步, 由女生 C, B, A 分别向男生提出邀约, 选择 a,a,b;



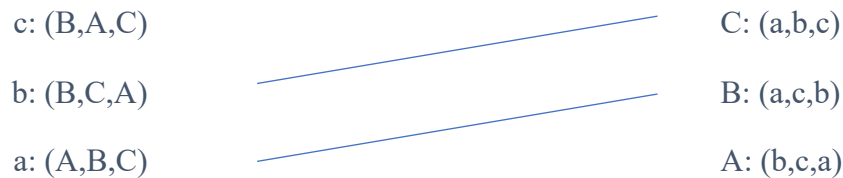
2. 第二步, 由男生接受或者拒绝邀约。男生 b 只有一个邀约, 接受; 男生 a 有两个邀约, 则根据其偏好顺序 A,B,C, 接受 B 的邀约, 拒绝 C;



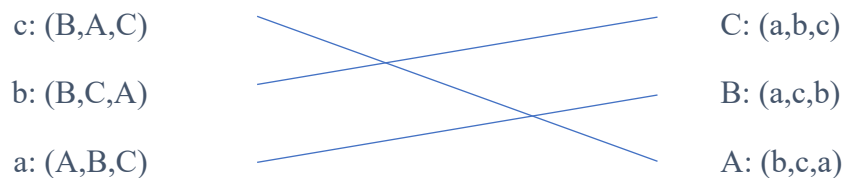
3. 第三步, 前两步中只有 C 未被匹配, 所以根据其偏好顺序, 选择向 b 提出邀约;



4. 第四步, 男生 b 收到两个邀约, 根据他的偏好顺序, 在 C 和 A 中选择 C, 因此拒绝 A;



5. 第五步, 女生 A 仍然没有被匹配, 因此根据她的第二偏好向 c 提出邀约;



6. 第六步, 男生 c 接到一个邀约, 接受。最后的稳定匹配是 $\{(c,A),(b,C),(a,B)\}$ 。

我们可以比较一下由男生提出邀约的匹配结果和由女生提出邀约的结果。

男生提出邀约	$\{(c,B),(b,C),(a,A)\}$
女生提出邀约	$\{(c,A),(b,C),(a,B)\}$

比较两种匹配, (b,C)相同, 我们只需比较其他两对:

1. 对男生来说, 男生提出邀约时, c 获得了偏好第一位的匹配(c,B), a 也获得了偏好第一位的匹配(a,A); 而女生提出邀约时, c 获得了偏好第二位的匹配(a,A), a 也获得了偏好第二位的匹配(a,B)。因此对于男生来说, 男生提出邀约的结果要比女生提出邀约的结果更好;
2. 对女生来说, 男生提出邀约时, A 获得了偏好第三位的匹配(a,A), B 获得了偏好第二位的匹配(c,B); 而女生提出邀约时, A 获得了偏好第二位的匹配(c,A), B 获得了

偏好第一位的匹配 (a, B) 。因此对于女生来说, 女生提出邀约的结果要比男生提出邀约的结果更好。

因此, Gale-Shapley 算法的稳定匹配结果对于提出邀约的一方更有利, 因为他总是可以选择他可选择范围内最好的那个配对。

匹配博弈在现实生活中有很多应用, 适用于无法通过价格配置资源的场合, 如舞会匹配、婚姻匹配、学生宿舍匹配、导师学生匹配、肾脏匹配。