最优化第二次作业

22336226 王泓沣

1. 推导线性规划问题的对偶问题和KKT条件：

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Gx \le h \\ & Ax = b \end{aligned}$$

> 对偶问题推导：
>
> 引入松弛变量s，将$Gx \le h$转换为$Gx + s = h$，并将x分成两个非负向量的差，即$x = x' - x''$且$x', x'' \ge 0$
>
> 则线性规划问题转换为：
>
> $$\min_{x', x'', s} c^\top x' - c^\top x''$$
> $$s.t. \, Gx' - Gx'' + s = h,$$
> $$Ax' - Ax'' = b,$$
> $$x', x'', s \ge 0$$
>
> 则有
>
> $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \\ s \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} h \\ b \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} G & -G & I \\ A & -A & 0 \end{bmatrix}$$
>
> 此时该线性规划问题被标准化：

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
&s.t.\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

其拉格朗日函数为:

$$L(\mathbf{x},\lambda,\nu) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \lambda^\top(-\mathbf{x}) + \nu^\top(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = -\mathbf{b}^\top \nu + (\mathbf{A}^\top \nu - \lambda + \mathbf{c})^\top \mathbf{x}$$

对偶函数为:

$$
\begin{aligned}
g(\lambda,\nu) = \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x},\lambda,\nu) &= -\mathbf{b}^\top \nu + \inf_{\mathbf{x}} \{(\mathbf{A}^\top \nu - \lambda + \mathbf{c})^\top \mathbf{x}\} \\
&= \begin{cases} -\mathbf{b}^\top \nu, & \lambda \geq 0,\ \mathbf{A}^\top \nu - \lambda + \mathbf{c} = 0 \\ \infty, & otherwise \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以该问题等价于:

$$\sup_{\lambda,\nu} -\mathbf{b}^\top \nu \quad s.t.\ \mathbf{A}^\top \nu + \mathbf{c} \geq 0$$

KKT条件:

Primal feasibility:

$Gx \leq h, Ax = b$

Dual feasibility:

$\lambda \geq 0$

Starionarity:

$\mathbf{A}^\top \nu + \mathbf{c} \geq 0$

Complementary slackness:

$\lambda_i \mathbf{x}_i = 0$

2. **推导**以下问题的**对偶问题**：

$$\min_{x} \quad \frac{1}{2}\|x-x_0\|_2^2+\sum_{i=1}^{N}\|A_ix+b_i\|_2,$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m_i\times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。（提示：引入新的变量 $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ 以及等式约束 $y_i = A_ix+b_i$，将原无约束优化问题转化为约束优化问题后，再推导其对偶问题。）

设$y_i = A_ix+b_i \in R^{m_i}$，则原问题可转化为

$$\min_{x,\{y_i\}} \frac{1}{2}\|x-x_0\|_2^2+\sum_{i=1}^{N}\|y_i\|_2$$

此问题的拉格朗日函数为：

$$\begin{aligned} L(x,\{y_i\},\{\lambda_i\}) &= \frac{1}{2}\|x-x_0\|_2^2+\sum_{i=1}^{N}\|y_i\|_2+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^\top(A_ix+b_i-y_i) \\ &= \frac{1}{2}\|x-x_0\|_2^2+\sum_{i=1}^{N}(\|y_i\|_2-\lambda_i^\top y_i)+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^\top A_ix+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^\top b_i \end{aligned}$$

考虑

$$\min_{y_i}\|y_i\|_2-\lambda_i^\top y_i = \begin{cases} 0, & \|\lambda_i\|\le 1 \\ -\infty, & \|\lambda_i\|>1 \end{cases}$$

所以更新拉格朗日函数为：

$$L(x,\{y_i\},\{\lambda_i\}) = \frac{1}{2}\|x-x_0\|_2^2+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^\top(A_ix+b_i)$$

对偶函数为

$$g(\{\lambda_i\}) = \inf_{x} L(x,\{y_i\},\{\lambda_i\})$$

对x求梯度，令其梯度为0得

$$x - x_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^\top A_i = 0$$

$$x = x_0 - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^\top A_i$$

代入$g(\{\lambda_i\})$得

$$\begin{aligned} g(\{\lambda_i\}) &= L(x_0 - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^\top A_i, \{y_i\}, \{\lambda_i\}) \\ &= \frac{1}{2} \| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^\top A_i \|_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^\top (A_i (x_0 - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^\top A_j) + b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^\top (A_i x_0 + b_i) - \frac{1}{2} \| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^\top A_i \|_2^2 \end{aligned}$$

对偶问题即为$\max g(\{\lambda_i\})$其中$\|\lambda_i\|_2 \leq 1$